ACTA ARITHMETICA
117.4 (2005)

Une région explicite sans zéros pour la fonction ζ de Riemann

par

Habiba Kadiri (Montréal)

1. Historique et résultats. Depuis l'article de Riemann en 1859 (cf. [13]), nous savons que la répartition des nombres premiers est étroitement liée à la répartition des zéros d'une fonction particulière, appelée depuis la fonction ζ de Riemann. Nous rappelons qu'elle est définie sur le demi-plan $\mathfrak{Re}\, s > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1},$$

où le produit porte sur les nombres premiers.

La série ci-dessus converge absolument et uniformément dans le demi-plan $\mathfrak{Re}\, s \geq \sigma_0$, pour tout $\sigma_0 > 1$. La fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans le plan complexe sauf en 1, qui est pôle unique et en lequel elle a pour résidu 1. Elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante sur le plan complexe tout entier :

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

On en déduit que les zéros réels de $\zeta(s)$ sont les pôles de $\Gamma(s/2+1)$, c'est-à-dire les entiers $-2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, et que la fonction $\zeta(s)$ a une infinité de racines complexes dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Nous appellerons $Z(\zeta)$ l'ensemble de ces zéros dits non-triviaux et les noterons $\varrho = \beta + i\gamma$. Ils se répartissent symétriquement par rapport à l'axe réel et par rapport à l'axe $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$.

L'hypothèse de Riemann affirme qu'en fait, ils se trouvent tous sur la droite $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$. Mais cette conjecture n'a encore été ni démontrée ni contredite.

Van de Lune, te Riele et Winter l'ont cependant vérifiée en 1986 (cf. [10]) pour les zéros de partie imaginaire infèrieure à $5 \cdot 10^8$, ce qui concerne les $1.5 \cdot 10^9$ premiers zéros de la fonction ζ de Riemann. Ce résultat a même été

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11M06, 11M26.

tout récemment amélioré par S. Wedeniwski jusqu'à une partie imaginaire de 3 330 657 430.697.

En attendant, l'écriture de ζ sous forme de produit eulérien nous assure qu'elle n'a pas de zéros dans le demi-plan $\mathfrak{Re}\, s > 1$. En fait, l'influence de la formule d'Euler s'étend même à gauche de cette région. Ainsi, en 1896, Hadamard (voir [5]) et de la Vallée Poussin (cf. [19]) établissent simultanément mais séparément que ζ ne s'annule pas sur la droite $\mathfrak{Re}\, s = 1$. Cette affirmation est l'outil fondamental leur permettant d'établir le théorème des nombres premiers, à savoir qu'on a l'estimation asymptotique suivante pour le nombre $\pi(x)$ d'entiers premiers inférieurs à x :

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{Li}(x) \quad \text{où} \quad \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

En 1899, de la Vallée Poussin (cf. [20]) élargit son résultat à la région

$$\mathfrak{Re}\, s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log|\mathfrak{Im}\, s|}, \quad |\mathfrak{Im}\, s| \geq 2, \qquad \text{avec } R_0 = 34.82,$$

ce qui lui permet d'estimer le terme d'erreur pour le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \mathcal{O}\left(x \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{R_0}}\right)\right) \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

B. Rosser améliore la valeur de la constante R_0, notamment en modifiant le polynôme trigonométrique (voir ci-après) et en 1941 il obtient $R_0 = 19$ (cf. [14]), puis avec L. Schoenfeld en 1962, $R_0 = 17.516$ (cf. [15]). En 1975, dans [16], ces derniers reprennent une idée fondamentale dûe à Stechkin (cf. [17, lemme 2]) et descendent jusqu'à $R_0 = 9.645908801$.

Beaucoup plus récemment, K. Ford (cf. [3] ou [4]) atteint une valeur de 8.463, esentiellement en utilisant une majoration de la fonction ζ sur l'axe critique, méthode qui ne se généralise pas aux fonctions L de Dirichlet.

En se basant sur la majoration de $\zeta(s)$ lorsque $\mathfrak{Re}\, s = 1$ donnée par la méthode de Korobov et Vinogradov (cf. [9]), il est possible d'obtenir une région sans zéros du type :

$$\mathfrak{Re}\, s > 1 - \frac{1}{R_1 (\log|\mathfrak{Im}\, s|)^{2/3} (\log\log|\mathfrak{Im}\, s|)^{1/3}} \qquad (|\mathfrak{Im}\, t| \geq 10).$$

En 1994, O. V. Popov (cf. [12]) trouve $R_1 = 14518$, puis en 2000, Y. Cheng trouve $R_1 = 990$ (voir [1]), résultat dernièrement amélioré par K. Ford : $R_1 = 57.54$ (voir [4]).

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Principal). *La fonction ζ de Riemann ne s'annule jamais dans la région suivante :*

$$\mathfrak{Re}\, s \geq 1 - \frac{1}{R_0 \log(|\mathfrak{Im}\, s|)}, \quad |\mathfrak{Im}\, s| \geq 2, \quad \textit{avec } R_0 = 5.69693.$$

Cette région reste plus large que la région de Ford–Vinogradov jusqu'à des valeurs de $|\mathfrak{Im}\, s|$ inférieures à $e^{9402.562}$. D'autre part, les outils mis en œuvre ici se généralisent aux fonctions L de Dirichlet (voir [7] ou [8]).

Rappelons les trois points fondamentaux autour desquels s'articule la preuve d'un tel résultat. Tout repose d'abord sur une expression de la partie réelle de $-(\zeta'/\zeta)(s) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$ en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann. Pour cela, il y a deux approches :

- celle, dite globale, de de la Vallée Poussin qui regarde tous les zéros avec la relation

$$(1) \qquad -\mathfrak{Re}\, \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{-\log \pi}{2} + \frac{1}{2} \mathfrak{Re}\, \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{s-\varrho}\right);$$

- celle, dite locale, de Landau qui s'attache aux zéros “proches” de s avec la majoration

$$(2) \qquad -\mathfrak{Re}\, \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{|s-\varrho| \leq c/\log \mathfrak{Im}\, s} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{s-\varrho}\right) + \mathcal{O}(\log \mathfrak{Im}\, s).$$

Le second point essentiel de la preuve consiste en la positivité de la somme sur les zéros $\sum_{\varrho} \mathfrak{Re}(1/(s-\varrho))$ lorsqu'on suppose $\mathfrak{Re}\, s > 1$.

Enfin, la preuve s'achève avec un autre argument de positivité : si

$$P(\theta) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(k\theta)$$

est un polynôme trigonométrique vérifiant

$$a_k \geq 0 \quad \text{et} \quad P(\theta) \geq 0,$$

alors on a

$$\mathfrak{Re} \sum_{k=0}^{K} a_k \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma + ikt}} \geq 0.$$

En ce qui concerne le travail présenté ici, nous reprendrons une idée exploitée entre autres par Stechkin et Heath-Brown, et qui consiste à multiplier la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$ par une fonction lisse positive $g(\log n)$ tout en conservant la positivité de la somme sur les zéros. Par exemple Stechkin (cf. [17]) prend $g(x) = 1 - \kappa e^{-\delta x}$ où κ et δ sont deux réels positifs.

Quant à Heath-Brown, il propose une formule plus compliquée (cf. [6] et le paragraphe 2.2), l'essentiel pour g étant d'être de classe C^2 dans $]0,+\infty[$, à support compact et, comme nous allons le voir, à transformée de Laplace positive. En fait, nous considérerons le produit de ces deux fonctions.

Les formules de Weil (voir [22]) s'appliquent alors et donnent une formule impliquant la somme sur tous les zéros (voir le paragraphe 2.1) :

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\,g(\log n)\right) = g(0)\,\mathfrak{Re}\left(-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) + \mathfrak{Re}\,G(s-1) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\mathfrak{Re}\,G(s-\varrho) + \mathfrak{Re}\,R(s),$$

où G est la transformée de Laplace de g :

$$G(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}g(t)\,dt = \frac{g(0)}{z} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-zt}g'(t)\,dt,$$

et où $R(s)$ est un terme reste sous la condition $G(z)-g(0)/z = \mathcal{O}(1/|z|^2)$. En remarquant que la transformée de Laplace de la fonction constante égale à 1 est $1/z$, et en rappelant que l'inégalité $\mathfrak{Re}(1/z)\geq 0$ si $\mathfrak{Re}\,z>0$ est fondamentale pour traiter la somme sur les zéros, nous souhaiterions imposer à g que sa transformée de Laplace vérifie

$$\mathfrak{Re}\,G(z)\geq 0 \quad \text{si } \mathfrak{Re}\,z>0.$$

Nous affaiblissons ici cette condition en utilisant la symétrie des zéros non triviaux et généralisons le lemme de Stechkin (cf. [17, lemme 2]) en montrant que

$$\mathfrak{Re}\,G(s-\varrho)+\mathfrak{Re}\,G(s+1-\overline{\varrho})\geq 0 \quad \text{si } \mathfrak{Re}(s-\varrho)>0$$

(voir le paragraphe 2.4).

En prenant $\mathfrak{Re}\,s>1$, une telle démonstration apporterait déjà une amélioration à la constante de Rosser et Schoenfeld. Or la fonction g étant à support compact, cela nous permet de choisir s avec $\mathfrak{Re}\,s\leq 1$.

Pour ce qui est de la somme

$$\sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\ \mathfrak{Re}(s-\varrho)\leq 0}}\mathfrak{Re}\,G(s-\varrho),$$

nous montrerons que c'est un terme reste (voir le paragraphe 2.4).

Enfin, nous conservons l'argument trigonométrique final en considèrant un polynôme de degré 4 proche de celui introduit par Rosser et Schoenfeld (voir le paragraphe 2.3).

Nous donnons dans le paragraphe qui suit tous les résultats nécessaires à l'établissement de notre résultat et nous y fixons nos notations. Pour le détail des preuves, nous nous reporterons ensuite aux parties trois et quatre.

Je remercie O. Ramaré pour les conseils avisés qu'il m'a prodigués au fil de cette étude ainsi que K. Ford pour m'avoir aimablement transmis une version préliminaire de son article [4].

Enfin, je tiens également à remercier le référé pour tout le soin qu'il a apporté à la relecture du manuscrit. Je lui suis particulièrement reconnaissante d'avoir trouvé une optimisation au polynôme de Rosser et Schoenfeld, ce qui permet d'améliorer le résultat final d'encore quelques décimales.

2. Structure de la preuve. Commençons par préciser nos paramètres. Nous nous donnons une fonction positive f, de classe $C^2([0,d])$, à support compact dans $[0,d[$ et telle que

$$f(d) = f'(0) = f'(d) = f''(d) = 0, \tag{H$_1$}$$

dont nous notons F la transformée de Laplace :

$$F(s) = \int_0^d e^{-st} f(t)\, dt.$$

Cette fonction sera choisie au paragraphe 2.2. Nous considérons ensuite un zéro non trivial $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ de la fonction ζ de Riemann et nous souhaitons montrer que ce zéro vérifie le théorème 1.1. La symétrie des zéros de ζ nous permet de nous limiter au cas où γ_0 est positif. De plus, comme tous les zéros de partie imaginaire positive inférieure à $T_0 = 3\,330\,657\,430.697$ sont connus (cf. [21]) et résident tous sur la droite critique, nous supposerons que γ_0 est supérieur à T_0. Enfin, nous supposerons que $(1-\beta_0)\log\gamma_0 \le 1/5$. Nous noterons η le réel $1-\beta_0$, s le nombre complexe $\sigma + it$, où $t \in [0,+\infty[$, R un réel pour lequel la région sans zéro est vérifiée et t_0 un réel supèrieur à 1 (on prendra $t_0 = 10$). Nous écrirons η sous la forme $1/(r\log\gamma_0)$, où $5 \le r \le R$ en vertu de notre hypothèse, et σ sous la forme $1 - 1/(R\log(4\gamma_0 + t_0))$. Grâce au résultat de Rosser (cf. [14]), nous prenons tout d'abord $R = 9.645908801$, ce qui implique les valeurs numériques

$$\sigma \ge \sigma_0 = 1 - \frac{1}{9.645908801\log(4T_0+t_0)} \ge 0.99555, \tag{3}$$

$$\eta \le \eta_0 = \frac{1}{r\log T_0} \le \frac{1}{5\log T_0} \le 0.00768, \tag{4}$$

$$\omega := \frac{1-\sigma}{\eta} = \frac{r\log\gamma_0}{R\log(4\gamma_0+t_0)} \ge \omega_0 \tag{5}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{r\log T_0}{R\log(4T_0+t_0)} = \frac{1-\sigma_0}{\eta_0}.$$

Dans la suite, κ et δ désignent des constantes qui dépendent et ne dépendent que de r et R. Cette dépendance est assez faible mais toutefois numériquement interessante. De plus, nous leur imposons la condition suivante :

$$(\delta^{-3}+(1-\eta_0+\delta)^{-3})^{-1}\le\kappa\le(\delta^{-1}+(1-\eta_0+\delta)^{-1})^{-1}.$$

Ou plutôt, en fixant les valeurs de η_0 dans $[0,10^{-2}]$ et δ dans $[(\sqrt{5}-1)/2, 0.866]$, nous demandons à κ de vérifier

$$(\delta^{-3}+(1+\delta)^{-3})^{-1}\le\kappa\le(\delta^{-1}+(0.99+\delta)^{-1})^{-1}. \tag{6}$$

2.1. *Une formule explicite.* Nous commençons par une formule explicite à la Weil (cf. [22]) que nous démontrons au paragraphe 3.1.

PROPOSITION 2.1. *Soit f une fonction comme ci-dessus et soit s un nombre complexe. Nous avons*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\Big(\sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}f(\log n)\Big) &= f(0)\Big(-\frac12\log\pi+\mathfrak{Re}\,\frac12\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\Big)\\ &\quad+\mathfrak{Re}\,F(s-1)-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\mathfrak{Re}\,F(s-\varrho)\\ &\quad+\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}\,dz+\frac{F_2(s)}{s^2}\Big)\end{aligned}\tag{7}$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f'' et où $Z(\zeta)$ désigne l'ensemble des zéros non triviaux de ζ.

Nous prenons des notations supplémentaires pour alléger quelque peu le travail typographique et posons

$$\begin{aligned}T_1(s)&=-\frac12\log\pi+\frac12\,\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big),\\ T_2(s)&=\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}\,dz+\frac{F_2(s)}{s^2}\Big)\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac14+i\,\frac{t}{2}\Big)\,\mathfrak{Re}\,\frac{F_2(s-1/2-it)}{(s-1/2-it)^2}\,dt+\mathfrak{Re}\,\frac{F_2(s)}{s^2}.\end{aligned}$$

Nous introduisons aussi les trois différences

$$\Delta_1(s)=T_1(s)-\kappa T_1(s+\delta),\qquad \Delta_2(s)=T_2(s)-\kappa T_2(s+\delta),$$
$$D(s)=\mathfrak{Re}\,F(s)-\kappa\,\mathfrak{Re}\,F(s+\delta).$$

Notons qu'il est sous-entendu qu'elles dépendent des paramètres δ et κ.

De (7), nous tirons :

$$\mathfrak{Re} \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\log n)\left(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}\right) = f(0)\Delta_1(s) + D(s-1) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(s-\varrho) + \Delta_2(s). \tag{8}$$

2.2. *La fonction test f.* Nous noterons $\widetilde{F}(X,Y)$ la partie réelle de la transformée de Laplace de f :

$$\widetilde{F}(X,Y) = \mathfrak{Re}\int_0^d e^{-(X+iY)t} f(t)\,dt. \tag{9}$$

En sus des conditions requises à f dans l'introduction, nous imposons à $\widetilde{F}$ de vérifier

$$\widetilde{F}(X,Y) \geq 0 \quad \text{si } X \geq 0. \tag{H$_2$}$$

Heath-Brown propose une famille de fonctions (cf. [6, lemme 7.5]) dont nous ne savons pas si elles sont optimales pour notre problème, mais dont nous pensons qu'elles sont assez bien adaptées à notre méthode. Pour $\theta \in \,]\pi/2, \pi[$, nous définissons

$$f(t) = \eta h_\theta(\eta t),$$

où h_θ est indépendante de η. Cette fonction est nulle en dehors de l'intervalle $[0, -2\theta/\tan\theta]$ et, pour u appartenant à cet intervalle, vaut

$$h_\theta(u) = (1+\tan^2\theta)\biggl[(1+\tan^2\theta)\left(\frac{-\theta}{\tan\theta} - \frac{u}{2}\right)\cos(u\tan\theta) + \frac{-2\theta}{\tan\theta} - u - \frac{\sin(2\theta + u\tan\theta)}{\sin(2\theta)} + 2\left(1 + \frac{\sin(\theta + u\tan\theta)}{\sin\theta}\right)\biggr].$$

Nous avons alors

$$f(0) = \eta g_1(\theta),$$

où nous avons posé

$$g_1(\theta) = (1+\tan^2\theta)(3 - \theta\tan\theta - 3\theta\cot\theta).$$

Nous prendrons $\theta = 1.848$, ce qui nous donnera

$$g_1(\theta) = 147.84112 + \mathcal{O}^*(10^{-5}),$$

où $u = \mathcal{O}^*(v)$ signifie $|u| \leq v$. Pour les besoins ultérieurs, nous définissons aussi

$$d(\theta,\eta) = \frac{d_1(\theta)}{\eta}, \quad \text{où} \quad d_1(\theta) = \frac{-2\theta}{\tan\theta} = 1.05161 + \mathcal{O}^*(10^{-5}).$$

2.3. *Une inégalité trigonométrique.* Nous utilisons ici l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \cos(ky) = 8(0.91 + \cos y)^2 (0.265 + \cos y)^2 \geq 0,$$

avec

$$a_0 = 10.91692658,\ a_1 = 18.63362,\ a_2 = 11.4517,\ a_3 = 4.7,\ a_4 = 1,$$

$$A = \sum_{k=1}^{4} a_k = 35.78532.$$

En remarquant que

$$\sum_{n\geq 1} f(\log n)\, \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\left(1 - \frac{\kappa}{n^\delta}\right) \sum_{k=0}^{4} a_k \cos(k\gamma_0 \log n) \geq 0,$$

nous obtenons grâce à (8) l'inégalité fondamentale suivante :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Big[f(0)\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) + D(\sigma - 1 + ik\gamma_0) - \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) + \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0)\Big] \geq 0. \tag{10}$$

Il reste donc à trouver des majorations pour chacun des termes ci-dessus. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.4. *La région sans zéros.* Les valeurs que nous donnons ici sont calculées pour $r = 5.94292$, $R = 9.645908801$. À la fin de ce paragraphe, la valeur $R = 5.942924086$ est donc licite et nous pouvons recommencer les calculs. Ce que nous avons fait, mais l'étape principale est la première et elle permet en outre au lecteur de vérifier nos résultats. Pour T_0, nous prendrons la valeur de S. Wedeniwski, c'est-à-dire très exactement $3\,330\,657\,430.697$. (La valeur finale obtenue pour R_0 sera alors améliorée d'un centième par rapport à la valeur T_0 de van de Lune, te Riele et Winter.)

Commençons par le terme $\Delta_1(s)$: si t est non nul, $\mathfrak{Re}\,(\Gamma'/\Gamma)(s/2+1)$ est de l'ordre de $\log t$ (voir (28) au paragraphe 3.3). Au paragraphe 4.2 nous établirons la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_1(\eta)$ qui vérifie*

$$f(0)\sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \leq \frac{A}{2}\,(1-\kappa) g_1(\theta)\eta \log\gamma_0 + \mathcal{C}_1(\eta).$$

On se reportera à (55), (56) *et au lemme* 4.5 *pour la définition de $\mathcal{C}_1(\eta)$ et le fait que*

$$\mathcal{C}_1(\eta) \leq -2\,704.319\,\eta.$$

En ce qui concerne le terme $D(s)$, nous avons $\mathfrak{Re}\, F(s-1) = \widetilde{F}(\sigma-1,0)$ lorsque $t=0$. Sinon $\mathfrak{Re}\, F(s-1)$ est de l'ordre de η/t^2 (voir la proposition 4.6) et nous montrerons au paragraphe 4.3 la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_2(\eta)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^{4} a_k D(\sigma-1+ik\gamma_0) \le a_0 \widetilde{F}(\sigma-1,0) + \mathcal{C}_2(\eta).$$

La fonction $C_2(\eta)$ est définie en (60) *et*

$$\mathcal{C}_2(\eta) \le -1\,151.623\,\eta + 1.360\cdot 10^{-15}\,\eta^2 + 27\,424.672\,\eta^3.$$

Le terme $\Delta_2(s)$ est un terme reste, de l'ordre de η^3 (voir le lemme 4.7). Nous montrerons au paragraphe 4.4 la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_4(\eta)$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_2(\sigma+ik\gamma_0) \le \mathcal{C}_4(\eta).$$

Les éléments qui définissent $\mathcal{C}_4(\eta)$ sont donnés en (64), (61) *et* (63) *et*

$$\mathcal{C}_4(\eta) \le 2\,391\,006.764\,\eta^3.$$

Nous en arrivons enfin au point essentiel, traité au paragraphe 4.1, qui est l'étude de la somme sur les zéros. Pour cela, en nous inspirant de l'idée de Stechkin basée sur la symétrie des zéros de ζ, nous pouvons réécrire la première somme sous la forme

$$\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(s-\varrho) = D(s-\varrho_0) + D(s-1+\overline{\varrho}_0) + \frac{1}{2}\sum_{\varrho\in Z(\zeta)\setminus\{\varrho_0,1-\overline{\varrho}_0\}} [D(s-\varrho)+D(s-1+\overline{\varrho})].$$

La proposition 4.2 nous permettra d'éliminer une partie des termes de la somme grâce au résultat suivant :

$$D(s-\varrho)+D(s-1+\overline{\varrho}) \ge 0 \quad \text{si } 1-\sigma<\beta<\sigma,\ \kappa=\kappa_0 \text{ et } \delta=\delta_0,$$

où δ_0 est la solution de l'équation $\kappa_2(\delta)=\kappa_3(\delta)$, $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$ étant respectivement définis en (36) et (37), et où κ_0 est la valeur de κ_2 en δ_0. À un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous avons en fait

$$\kappa_2(\delta) = \frac{1}{1+2\delta}, \qquad \kappa_3(\delta) = \frac{1}{1/\delta + 1/(1+\delta)},$$

ce qui permet d'approcher δ_0 par $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.61803\ldots$ et κ_0 par $1/\sqrt{5} = 0.44721\ldots$. Plus exactement, nous trouvons $\delta_0 = 0.61963\ldots$ et $\kappa_0 = 0.44213\ldots$ pour $r = 5.94292$. Il reste alors à minorer la somme restante qui porte sur les zéros de partie réelle vérifiant $\sigma \leq \beta \leq 1$, ce qui revient à $\gamma \geq \gamma_0 + t_0$. Cette somme se trouve alors dépendre de la valeur t_0. Nous verrons à la proposition 4.4 comment la minorer et nous obtiendrons finalement :

Proposition 2.5. *Il existe une fonction $\mathcal{C}_3$ qui vérifie*

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\varrho \in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho) \geq a_1 \widetilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - \mathcal{C}_3(\eta).$$

Pour une définition explicite de $\mathcal{C}_3$, nous nous reporterons à 4.1.2. *En attendant, nous pouvons toujours voir que*

$$\mathcal{C}_3(\eta) \leq 413.187\,\eta + 3\,275.500\,\eta^2 + 73\,082.749\,\eta^3.$$

Finalement, en notant $\mathcal{C}(\eta) = \mathcal{C}_1(\eta) + \mathcal{C}_2(\eta) + \mathcal{C}_3(\eta) + \mathcal{C}_4(\eta)$, nous tirons de l'inégalité fondamentale (10) :

$$0 \leq \frac{A}{2}(1-\kappa) g_1(\theta) \eta \log \gamma_0 + a_0 \widetilde{F}(\sigma - 1, 0) - a_1 \widetilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) + \mathcal{C}(\eta)$$

soit encore

$$\eta \log \gamma_0 \geq \frac{a_1 \widetilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - a_0 \widetilde{F}(\sigma - 1, 0) - \mathcal{C}(\eta)}{(A/2) g_1(\theta)(1-\kappa)}.$$

En fait, $\mathcal{C}(\eta)$ s'écrit sous la forme

$$\alpha_1\,\eta + \alpha_2\,\eta^2 + \alpha_3\,\eta^3, \tag{11}$$

où

$$\alpha_1 = -3\,442.756, \qquad \alpha_2 = 3\,275.500, \qquad \alpha_3 = 2\,491\,514.184. \tag{12}$$

Comme α_1 est une constante négative et α_2 et α_3 sont deux constantes positives, on voit facilement que $\mathcal{C}(\eta)$ admet trois racines réelles dont une égale à zéro et les deux autres de signes opposés. $\mathcal{C}(\eta)$ est donc successivement négatif puis positif sur $[0, +\infty[$ et on déduit que $\mathcal{C}(\eta)$ est négatif sur $[0, \eta_0]$ en vérifiant que $\mathcal{C}(\eta_0)$ l'est : nous trouvons $\mathcal{C}(\eta_0) = -25.1013\ldots$.

La constante cherchée est ainsi donnée par

$$\frac{a_1 \widetilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - a_0 \widetilde{F}(\sigma - 1, 0)}{(A/2) g_1(\theta)(1-\kappa)} \tag{13}$$

qu'on optimise en σ. En notant $\omega = (1-\sigma)/\eta$, le terme $a_1 \widetilde{F}(\sigma - \beta_0, 0) - a_0 \widetilde{F}(\sigma - 1, 0)$ s'avère être une fonction de ω que nous noterons K :

$$K(\omega) = \int_0^{d_1(\theta)} (a_1 e^{-t} - a_0) h_\theta(t) e^{\omega t}\, dt.$$

K est une fonction croissante sur $[0, 1]$, qui atteint donc sa plus grande valeur en $\omega_0 = 0.57947$, en vertu des hypothèses faites sur σ et η. Les données initiales $r = 5.94292$, $R = 9.645908801$ nous amènent à $R_0 = 5.942924085\ldots$. Nous allons optimiser notre résultat en réitérant les calculs : remplaçons R par la valeur R_0 que nous venons de trouver et r par une valeur supérieure à celle que nous venons d'utiliser mais inférieure au futur R_0 (nous procédons par tâtonnement). Les valeurs successives de r et R que nous obtenons ainsi forment deux suites décroissantes qui semblent tendre vers une valeur commune. Nous avons choisi de nous arrêter à une précision de 10^{-5} pour la constante R_0, c'est-à-dire à la sixième étape.

Nous donnons ci-dessous les valeurs successives prises pour r et R, ainsi que celles des paramètres η_0, κ et δ impliqués, et enfin celles trouvées pour R_0.

R	r	$\eta_0 \cdot 10^3$	κ	δ	R_0
9.645908801	5.94292	7.67418...	0.44213...	0.61963...	5.942924085...
5.942924086	5.72033	7.97280...	0.43927...	0.62051...	5.720337335...
5.720337336	5.69922	8.00233...	0.43898...	0.62060...	5.699223506...
5.699223507	5.69714	8.00525...	0.43895...	0.62061...	5.697149421...
5.697149422	5.69694	8.00553...	0.43895...	0.62061...	5.696944342...
5.696944343	5.69692	8.00556...	0.43895...	0.62061...	5.696924085...

Nous pouvons ainsi prendre $R_0 = 5.69693$. Nous remarquerons que cette valeur est assez proche de la valeur optimale calculée en $\omega = r/R$ et qui vaut $5.652175155\ldots$.

Les calculs ont été menés à la fois sous MAPLE et sous PARI/GP avec une précision de 10^{-28} et dans chacun des cas, nous retrouvons les résultats annoncés.

Nous précisons qu'en utilisant le polynôme de Rosser et Schoenfeld, c'est-à-dire $8(0.9126 + \cos y)^2(0.2766 + \cos y)^2$, et en prenant $\theta = 1.848$, nous trouvons pour R_0 la valeur $5.697331650\ldots$.

D'autre part, en ce qui concerne le choix de la valeur de θ, nous remarquons que le terme final étudié (13), q'on peut écrire comme $Ag_1(\theta)/K(\omega)$, est en fait une fonction dépendant uniquement des trois paramètres r, R et θ. Pour chaque étape décrite précédemment, c'est-à-dire pour chaque r et R choisi, nous pouvons donc calculer la valeur de θ en laquelle (13) est optimal.

En prenant pour données initiales $r = 5.93943$, $R = 9.645908801$, nous trouvons ainsi qu'en $\theta = 1.85390$, la valeur R_0 vaut $5.939431920\ldots$, et en réitérant le procédé :

R	9.645908801	5.93944	5.71999	5.69919	5.69715	5.69695	5.69693
r	5.93943	5.71998	5.69918	5.69714	5.69694	5.69692	5.69692
θ	1.85390	1.84851	1.84802	1.84797	1.84796	1.84796	1.84796
R_0	5.93944	5.71999	5.69919	5.69715	5.69695	5.69693	5.69693

Finalement, nous avons choisi par souci de clarté de fixer la valeur de θ à 1.848, d'autant plus que cela n'influe pas sur la précision donnée au résultat final.

3. Préliminaires. Cette partie se décompose elle-même en deux. Tout d'abord nous établissons une formule explicite assez générale. Ensuite, nous étudions plus en détails la fonction $\widetilde{F}$ introduite en (9).

3.1. *Formule explicite*

Théorème 3.1. *Soit ϕ une fonction à valeurs complexes définie sur la droite réelle qui vérifie les conditions* (A) *et* (B) *suivantes :*

(A) *ϕ est continue et continuement dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points a_i où $\phi(x)$ et sa dérivée $\phi'(x)$ n'ont que des discontinuités de première espèce et pour lesquels ϕ vérifie la condition de la moyenne (i.e. $\phi(a_i)=\frac{1}{2}[\phi(a_i+0)+\phi(a_i-0)]$).*

(B) *Il existe $b>0$ tel que $\phi(x)e^{x/2}$ et $\phi'(x)e^{x/2}$ soient $\mathcal{O}(e^{-(1/2+b)|x|})$ au voisinage de l'infini.*

Pour tout réel $a<1$, vérifiant $0<a<b$, $\phi(x)$ possède alors une transformée de Laplace

$$\Phi(s)=\int_0^{+\infty}\phi(x)e^{-sx}\,dx$$

qui est holomorphe dans la bande $-(1+a)<\sigma<a$ et qui est $\mathcal{O}(1/|t|)$ uniformément dans la bande $-(1+a)\le\sigma\le a$.

Soient q un entier non nul et χ un caractère primitif de Dirichlet modulo q. Notons

$$\delta_{q,1}=\begin{cases}0 & si\ q=1,\\ 1 & sinon,\end{cases}\qquad \mathfrak{a}=\begin{cases}0 & si\ \chi(-1)=1,\\ 1 & sinon.\end{cases}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1}&\Lambda(n)\chi(n)\phi(\log n)\\ &=\delta_{q,1}(\Phi(-1)+\Phi(0))+\frac{1}{2}(1-\delta_{q,1})(1-\mathfrak{a})\Phi(0)\\ &\quad-\sum_{\varrho\in Z(\chi)}\Phi(-\varrho)+\phi(0)\log\frac{q}{\pi}+\sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)\overline{\chi}(n)}{n}\phi(-\log n)\\ &\quad+\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\Big)\Phi(-s)\,ds.\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème d'inversion de Laplace,

$$\phi(\log n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-(1+a)-i\infty}^{-(1+a)+i\infty} \varPhi(s)n^s\,ds \qquad (n \geq 1).$$

Ainsi, par définition de $(L'/L)(s,\chi)$ pour $\sigma > 1$ et grâce au changement de variable $s \mapsto -s$, nous pouvons écrire

$$\sum_{n\geq 1} \varLambda(n)\chi(n)\phi(\log n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{1+a-i\infty}^{1+a+i\infty} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\varPhi(-s)\,ds. \tag{14}$$

Soit $T > 0$; notons $I(T)$ l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{1+a-iT}^{1+a+iT} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\varPhi(-s)\,ds.$$

L'intégration de $-(L'/L)(s,\chi)\varPhi(-s)$ sur le contour du rectangle formé par les droites $\sigma = 1+a$, $\sigma = -a$, $t = T$, $t = -T$ permet de réécrire $I(T)$ comme

$$\begin{aligned} I(T) = {} & \frac{1}{2i\pi}\int_{-a-iT}^{-a+iT} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\varPhi(-s)\,ds \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_{-a+iT}^{1+a+iT} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\varPhi(-s)\,ds \\ & - \frac{1}{2i\pi}\int_{-a-iT}^{1+a-iT} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\varPhi(-s)\,ds \\ & - \left(-\delta_{q,1}\varPhi(-1) + \frac{1}{2}\,(1-\delta_{q,1})(1-\mathfrak{a})\varPhi(0) + \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \varPhi(-\varrho)\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Grâce à la condition (B), les deux dernières intégrales tendent vers 0 lorsque T tend vers ∞. De plus, l'équation fonctionnelle de L :

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \log\frac{q}{\pi} - \frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi}) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\varGamma'}{\varGamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) + \frac{\varGamma'}{\varGamma}\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right\}$$

permet de décomposer la première intégrale en la somme des trois intégrales suivantes :

$$I_1(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-a-iT}^{-a+iT} \log\frac{q}{\pi}\,\varPhi(-s)\,ds,$$

$$I_2(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-a-iT}^{-a+iT} -\frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi})\varPhi(-s)\,ds,$$

$$I_3(T)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-a-iT}^{-a+iT}\frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right\}\Phi(-s)\,ds.$$

D'une part, le théorème d'inversion de Laplace permet d'écrire immédiatement

$$\lim_{T\to+\infty} I_1(T)=\phi(0)\log\frac{q}{\pi}. \tag{16}$$

D'autre part, le développement de $-L'/L$ en série de Dirichlet donne

$$\lim_{T\to+\infty} I_2(T)=\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\overline{\chi}(n)}{n}\,\phi(-\log n). \tag{17}$$

En ce qui concerne I_3, déplaçons la droite d'intégration vers la droite $\sigma=1/2$ sur laquelle Γ vérifie

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)\right\}=\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right).$$

Grâce à la condition (B), nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty} I_3(T)=\frac{1}{2i\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{1/2-iT}^{1/2+iT}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\Phi(-s)\,ds\\ +(1-\mathfrak{a})\Phi(0).\end{aligned} \tag{18}$$

Et (14)–(18) donnent ainsi l'égalité annoncée. ∎

Pour obtenir (7), il ne reste plus qu'à prendre la partie réelle dans la formule du théorème 3.1 dans le cas $q=1$ et $s=\sigma+it$, où *a priori* $\sigma>1$, et

$$\phi(y)=\begin{cases}(f(0)-f(y))e^{-ys} & \text{si } y\geq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors ϕ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie bien la condition (B) et on a pour $\mathfrak{Re}\,z<\mathfrak{Re}\,s$:

$$\Phi(-z)=\frac{f(0)}{s-z}-F(s-z)=-\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2},$$
$$\Phi(0)=-\frac{F_2(s)}{s^2},\qquad \Phi(-1)=\frac{f(0)}{s-1}-F(s-1)$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f''. Il vient alors

$$(19)\qquad \mathfrak{Re}\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\,f(\log n)$$
$$= f(0)\,\mathfrak{Re}\Big(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}-\frac{1}{s-1}+\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\frac{1}{s-\varrho}\Big)$$
$$+\mathfrak{Re}\,F(s-1)-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\mathfrak{Re}\,F(s-\varrho)$$
$$+\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}\,dz+\frac{F_2(s)}{s^2}\Big).$$

La formule d'Hadamard (voir [2]) permet de réécrire le terme facteur de $f(0)$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\;-B-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{s-1}$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big)-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\Big(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{s-\varrho}\Big);$$

or $\mathfrak{Re}\,B=-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\mathfrak{Re}(1/\varrho)$ donc

$$\mathfrak{Re}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\frac{1}{s-1}+\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\frac{1}{s-\varrho}\Big)=-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big).$$

L'identité (19) devient

$$\mathfrak{Re}\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\,f(\log n)=f(0)\Big(-\frac{1}{2}\log\pi+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\Big)$$
$$+\mathfrak{Re}\,F(s-1)-\sum_{\varrho\in Z(\zeta)}\mathfrak{Re}\,F(s-\varrho)$$
$$+\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{z}{2}\Big)\frac{F_2(s-z)}{(s-z)^2}\,dz+\frac{F_2(s)}{s^2}\Big).$$

Nous avons ici une égalité entre deux fonctions harmoniques sur le demi-plan $\mathfrak{Re}\,s>1$, mais les deux membres définissent des fonctions sur $\mathbb{C}$ tout entier (l'introduction de la partie réelle ôte les problèmes de convergence), ce qui fait que l'égalité reste vraie sur $\mathbb{C}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.1.

3.2. *Étude de* $\widetilde{F}$. Nous étudions dans ce paragraphe le comportement de la fonction $\widetilde{F}$ qui, rappelons-le, dépend des paramètres θ et η :

$$\widetilde{F}(x,y) = \int_0^{d_1(\theta)/\eta} e^{-xt}\cos(yt)f(t)\,dt = \int_0^{d_1(\theta)} \exp\left(\frac{-xt}{\eta}\right)\cos\left(\frac{yt}{\eta}\right)h_\theta(t)\,dt.$$

Nous avons fixé $\theta = 1.848$ et les résultats numériques donnés ici sont calculés pour cette valeur.

Lemme 3.2. *Nous avons*

$$\widetilde{F}(x,y) = \eta g_1(\theta)\,\frac{x}{x^2+y^2} + H(x,y)$$

où la fonction H vérifie

$$|H(x,y)| \le \frac{M(x/\eta)\eta^2}{x^2+y^2}, \quad \text{avec} \quad M(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h''_\theta(u)|e^{-zu}\,du.$$

De plus, lorsque $0 \le z \le 1/d_1(\theta)$, nous avons le développement suivant :

$$521.632 - 212.574\,z \le M(z) \le 521.633 - 212.573\,z + 68.113\,z^2.$$

Sinon, la majoration par m/z donne une approximation de M suffisante où

$$m = \max_{u\in[0,d_1(\theta)]} |h''_\theta(u)| = |h''_\theta(0)| = 1\,322.86625\ldots.$$

Démonstration. Rappelons que

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{F_2(s)}{s^2}$$

où F_2 est la transformée de Laplace de f''. Donc

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(x,y) &= \mathfrak{Re}\left[\frac{f(0)}{x+iy} + \frac{1}{(x+iy)^2}\int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-(x+iy)t}f''(t)\,dt\right]\\ &= f(0)\,\frac{x}{x^2+y^2} + \int_0^{d(\theta,\eta)} \frac{(x^2-y^2)\cos(ty) - 2xy\sin(ty)}{(x^2+y^2)^2}\,e^{-xt}f''(t)\,dt.\end{aligned}$$

Notons H le reste et majorons le :

$$H(x,y) = \int_0^{d(\theta,\eta)} \frac{(x^2-y^2)\cos(ty) - 2xy\sin(ty)}{(x^2+y^2)^2}\,e^{-xt}f''(t)\,dt. \tag{20}$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz nous donne

$$|(x^2-y^2)\cos(ty) - 2xy\sin(ty)| \le \sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} = x^2+y^2$$

et par conséquent

$$|H(x,y)| \le \frac{1}{x^2+y^2}\int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-xt}|f''(t)|\,dt.$$

Par définition de f, $f''(t) = \eta^3 h''_\theta(\eta t)$, donc un changement de variable montre que l'intégrale de droite est égale à $\eta^2 \int_0^{d_1(\theta)} |h''_\theta(u)| e^{-xu/\eta}\, du = \eta^2 M(x/\eta)$.

De plus, les inégalités élémentaires $1 - zu \le e^{-zu} \le 1 - zu + (zu)^2/2$ nous donnent l'encadrement annoncé pour $M(z)$, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Nous aurons besoin au paragraphe 4.1 d'une estimation plus précise de $H(x, y)$ lorsque y tend vers l'infini :

Lemme 3.3. *Nous avons*

$$|H(x,y)| \le m\eta^3 \frac{|x||x^2 - 3y^2|}{(x^2+y^2)^3} + \frac{M_1(x/\eta)\eta^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

avec

$$M_1(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta^{(3)}(u)| e^{-zu}\, du.$$

De plus, lorsque $0 \le z \le 1/d_1(\theta)$, *nous avons le développement suivant* :

$$2\,526.445 - 1\,087.743\, z \le M_1(z) \le 2\,526.446 - 1\,087.742\, z + 348.808\, z^2.$$

Sinon, la majoration par m_1/z *donne une approximation de* M_1 *suffisante avec*

$$m_1 = \max_{u \in [0, d_1(\theta)]} |h_\theta^{(3)}(u)| = 4\,135.12706\ldots.$$

Démonstration. En intégrant par parties

$$H(x,y) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{(x+iy)^2} \int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-(x+iy)t} f''(t)\, dt \right)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \mathfrak{Re}\left(\frac{f''(0)}{(x+iy)^3} + \frac{1}{(x+iy)^3} \int_0^{d(\theta,\eta)} e^{-(x+iy)t} f^{(3)}(t)\, dt \right) \\ &= f''(0) \frac{x(x^2 - 3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ &\quad + \int_0^{d(\theta,\eta)} \frac{x(x^2-3y^2)\cos(yt) - y(y^2 - 3x^2)\sin(yt)}{(x^2+y^2)^3} e^{-xt} f^{(3)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

En achevant la preuve comme celle du lemme 3.2, nous montrons ainsi que

$$H(x,y) \le h''_\theta(0)\eta^3 \frac{|x||x^2 - 3y^2|}{(x^2+y^2)^3} + \frac{\eta^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta^{(3)}(u)| e^{-xu/\eta}\, du. \ ■$$

Dorénavant, nous opérons à $y \geq 0$ fixé. D'après le résultat ci-dessus, nous pouvons espérer que, pour $x \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \widetilde{F}(x, y)$ se comporte comme la fonction $x \mapsto x/(x^2 + y^2)$, c'est-à-dire qu'elle croisse jusqu'à une valeur proche de y puis décroisse ensuite. Lorsque $y = 0$, il est immédiat de voir que la fonction est décroissante et tend vers 0 en l'infini. Lorsque y est strictement positif, on a le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Pour tout $y > 0$ l'application $\widetilde{F}(\cdot, y)$ décroît sur l'intervalle $[x_2(\eta, y), +\infty[$ avec $x_2(\eta, y) = \varepsilon_3(\eta) + \sqrt{y^2 + \varepsilon_3^2(\eta)}$, $\varepsilon_3(\eta) = 7.857\,\eta$. Par ailleurs, pour tout $y > 0$ l'application $\widetilde{F}(\cdot, y)$ croît sur $[0, x_1(\eta, y)]$ avec $x_1(\eta, y) = \frac{1}{2}y - \varepsilon_1(\eta) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}y - \varepsilon_1(\eta)\right)^2 - \varepsilon_2(\eta)}$ pourvu que la quantité sous la racine soit positive ou nulle, où nous avons posé $\varepsilon_1(\eta) = 4.99\,\eta$ et $\varepsilon_2(\eta) = 5.735\,\eta$.*

Démonstration. Reprenons H de la démonstration précédente donné par (20). Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = \int_0^{d(\theta,\eta)} \left(-t \, \frac{(x^2 - y^2)\cos(ty) - 2xy \sin(ty)}{(x^2 + y^2)^2} \right.$$
$$\left. - 2 \, \frac{x(x^2 - 3y^2)\cos(ty) - y(3x^2 - y^2)\sin(ty)}{(x^2 + y^2)^3} \right) e^{-xt} f''(t) \, dt.$$

Nous utilisons encore l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour montrer que

$$|2x(x^2 - 3y^2)\cos(ty) - 2y(3x^2 - y^2)\sin(ty)| \leq 2(x^2 + y^2)^{3/2},$$

ainsi que le lemme 3.2 pour obtenir

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \right| \leq \int_0^{d(\theta,\eta)} |f''(t)| \left(\frac{t}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) e^{-xt} \, dt$$
$$= \eta \, \frac{M_2(x/\eta)}{x^2 + y^2} + 2\eta^2 \frac{M(x/\eta)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

où

$$M_2(z) = \int_0^{d_1(\theta)} |h_\theta''(u)| u e^{-zu} \, du \leq \|u h_\theta''\|_\infty / z.$$

Supposons $x \geq y$. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial x} \widetilde{F}(x, y) = g_1(\theta)\eta \, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \tag{21}$$

nous pouvons garantir que $\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \leq 0$ dès que

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) + M_2(x/\eta)(x^2 + y^2) + 2\eta M(x/\eta)\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0,$$

ce qui est impliqué par

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) + 2\eta(\|uh''_\theta\|_\infty + \sqrt{2}\,\|h''_\theta\|_1)x \le 0$$

avec $\|uh''_\theta\|_\infty \le 423.867$ et $\|h''_\theta\|_1 \le 521.633$. Ensuite

$$x \ge x_2(\eta, y) = \varepsilon_3(\eta) + \sqrt{y^2 + \varepsilon_3^2(\eta)}$$

avec

$$\varepsilon_3(\eta) = 7.857\eta \ge \frac{\|uh''_\theta\|_\infty + \sqrt{2}\,\|h''_\theta\|_1}{g_1(\theta)}\,\eta.$$

À partir de (21), nous pouvons aussi garantir que $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) \ge 0$ dès que $x \le y$ et

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) - M_2(x/\eta)(x^2 + y^2) - 2\eta M(x/\eta)\sqrt{x^2 + y^2} \ge 0,$$

ce qui est impliqué par

$$g_1(\theta)(y^2 - x^2) - \eta\|uh''_\theta\|_\infty\,\frac{2y^2}{x} - 2\sqrt{2}\,\eta\|h''_\theta\|_1 y \ge 0.$$

Comme nous n'aurons pas besoin d'un résultat très performant, nous nous contentons de noter que $y^2 - xy \le y^2 - x^2$, ce qui nous laisse avec

$$g_1(\theta)(y - x)x - 2\eta\|uh''_\theta\|_\infty y - 2\sqrt{2}\,\eta\|h''_\theta\|_1 x \ge 0$$

et il nous suffit maintenant d'avoir

$$x^2 - (y - 9.980\,\eta)x + 5.735\,\eta y \le 0. \blacksquare$$

3.3. *Étude de* $\mathfrak{Re}(\Gamma'/\Gamma)$. Dans la suite nous allons avoir besoin d'une estimation du terme $\mathfrak{Re}(\Gamma'/\Gamma)$ pour étudier les termes Δ_1 et Δ_2. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 3.5. *Soient* $\delta \in [0,1]$, $\kappa \in [0, x/(x+\delta)]$ *et* $0 < x_0 \le x \le x_1 < y_0$. *Alors*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{2} + i\,\frac{y}{2}\right) &- \kappa\,\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+\delta}{2} + i\,\frac{y}{2}\right)\\ &\le \begin{cases} r_1(x_0, x_1, y_0) & \textit{si } 0 < |y| < y_0,\\ (1-\kappa)\log(y/2) + \min(r_2(x_0,x_1,y_0), r_3(x_0,x_1,y_0)) & \textit{si } |y| \ge y_0,\end{cases}\end{aligned}$$

où r_1, r_2 *et* r_3 *sont respectivement définis en* (25), (27), (30).

Démonstration. Pour la suite, notons

$$\psi_{\kappa,\delta}(x,y) = \mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{2} + i\,\frac{y}{2}\right) - \kappa\,\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+\delta}{2} + i\,\frac{y}{2}\right).$$

Nous allons approcher le terme $\mathfrak{Re}\,(\Gamma'/\Gamma)(x/2 + iy/2)$ de deux façons différentes qui sont plus ou moins efficaces selon la taille de $|y|$.

Utilisons l'identité donnée par K. McCurley (cf. [11]) :

$$\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{x}{2}+i\,\frac{y}{2}\Big)=\frac{1}{2}\log\Big(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\Big)-\frac{x}{x^2+y^2}+\mathfrak{Re}\int_0^{+\infty}\frac{u-[u]-1/2}{(u+(x+iy)/2)^2}\,du \tag{22}$$

avec le terme intégral qui satisfait :

$$\mathfrak{Re}\int_0^{+\infty}\Big|\frac{u-[u]-1/2}{(u+(x+iy)/2)^2}\Big|\,du\le\frac{1}{y}\arctan\frac{y}{x}\qquad\text{pour}\quad x>0. \tag{23}$$

Ainsi, (22) permet de majorer $\psi_{\kappa,\delta}(x,y)$ par $R_1(x,y)$ défini par

$$\frac{1}{2}\log\Big(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\Big)-\frac{\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x+\delta)^2}{4}+\frac{y^2}{4}\Big)-\Big(\frac{x}{x^2+y^2}-\kappa\,\frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\Big)+\frac{1}{y}\Big(\arctan\frac{y}{x}+\kappa\arctan\frac{y}{x+\delta}\Big). \tag{24}$$

Nous allons maintenant distinguer les cas où y est borné ($0<|y|<y_0$) et où y est "grand" ($|y|\ge y_0$). Dans le premier cas, nous majorons $(1/y)\arctan(y/x)$ par $1/x$ et nous obtenons

$$R_1(x,y)\le r_1(x_0,x_1,y_0)=\frac{1-\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x_1+\delta)^2}{4}+\frac{y_0^2}{4}\Big)-\frac{x_0}{x_1^2+y_0^2}+\frac{1}{x_0}+\frac{2\kappa}{x_0+\delta}\quad\text{si } 0<|y|<y_0. \tag{25}$$

Dans le second cas, $\mathfrak{Re}\,(\Gamma'/\Gamma)(x/2+iy/2)$ peut être approché par $\log|y|$. Nous réécrivons $R_1(x,y)$:

$$R_1(x,y)=(1-\kappa)\log\frac{|y|}{2}+R_2(x,y)$$

avec

$$R_2(x,y)=\frac{1}{2}\log\Big(\frac{x^2}{y^2}+1\Big)-\frac{\kappa}{2}\log\Big(\frac{(x+\delta)^2}{y^2}+1\Big)-\Big(\frac{x}{x^2+y^2}-\kappa\,\frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\Big)+\frac{1}{y}\Big(\arctan\frac{y}{x}+\kappa\,\arctan\frac{y}{x+\delta}\Big). \tag{26}$$

Comme l'application $y\mapsto(1/y)\arctan(y/x)$ est positive et décroissante ainsi que

$$y\mapsto\frac{x}{x^2+y^2}-\kappa\,\frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}$$

puisque $\kappa \le x/(x+\delta)$, nous obtenons pour le terme d'erreur :

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad R_2(x,y) &\le r_2(x_0,x_1,y_0)\\
&= \frac{1-\kappa}{2}\log\left(\frac{(x_1+\delta)^2}{y_0^2}+1\right)\\
&\quad + \frac{1}{y_0}\left(\arctan\frac{y_0}{x_1} + \kappa\,\arctan\frac{y_0}{x_1+\delta}\right) \qquad \text{si } |y| \ge y_0.
\end{aligned}
$$

L'égalité suivante donne une autre majoration pour le terme d'erreur :

$$
(28)\qquad \mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+iy) = \log|y| - \frac{x}{2(x^2+y^2)} + R(x,y) \qquad (y^2 > x^2,\ x>0)
$$

avec

$$
|R(x,y)| \le \frac{1}{12x|y|} + \frac{x^2}{2y^2}.
$$

Donc

$$
\psi_{\kappa,\delta}(x,y) \le (1-\kappa)\log\frac{|y|}{2} + R_3(x,y) \le (1-\kappa)\log\frac{|y|}{2} + r_3(x_0,x_1,y_0)
$$

avec

$$
\begin{aligned}
(29)\qquad R_3(x,y) &= -\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \kappa\,\frac{x+\delta}{(x+\delta)^2+y^2}\right) + \frac{1}{3y}\left(\frac{1}{x}+\frac{\kappa}{x+\delta}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2y^2}\,(x^2+\kappa(x+\delta)^2),
\end{aligned}
$$

$$
(30)\qquad r_3(x_0,x_1,y_0) = \frac{1}{3y_0}\left(\frac{1}{x_0}+\frac{\kappa}{x_0+\delta}\right) + \frac{1}{2y_0^2}\,(x_1^2+\kappa(x_1+\delta)^2). \ \blacksquare
$$

Lemme 3.6. *Nous avons*

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac14 + i\,\frac{T}{2}\right)\right|\\
&\qquad \le U_0(T) = \begin{cases} \dfrac12\log\left(\dfrac{16}{1+4T^2}\right) + \dfrac{2}{1+4T^2} + 2 & \textit{si } |T| < 1/2,\\[2ex] \left|\log\dfrac{|T|}{2} - \dfrac{2}{1+4T^2}\right| + \dfrac{2}{3|T|} + \dfrac{1}{8T^2} & \textit{si } |T| \ge 1/2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Démonstration. Pour la suite, nous désignerons par $R_i(T)$ l'application $T \mapsto R_i(1/2,T,0,0)$.

1. Si $|T| < 1/2$, nous appliquons la formule (22) pour $x = 1/2$ et $y = T$ puis utilisons la majoration (23) :

$$
\begin{aligned}
(31)\qquad &\left|\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac14 + i\,\frac{T}{2}\right)\right|\\
&\qquad \le \left|\frac12\log\left(\frac{1}{16}+\frac{T^2}{4}\right) - \frac{2}{1+4T^2}\right| + \frac{1}{T}\arctan(2T).
\end{aligned}
$$

En observant que

$$\frac{1}{T}\arctan(2T) \leq 2,$$

on obtient alors

$$\left|\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+i\,\frac{T}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{16}{1+4T^2}\right)+\frac{2}{1+4T^2}+2. \tag{32}$$

2. Si $|T| \geq 1/2$, l'égalité (28) nous donne

$$\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+i\,\frac{T}{2}\right) = \log\frac{|T|}{2}-\frac{2}{1+4T^2}+R\left(\frac{1}{4},\frac{|T|}{2}\right)$$

et donc

$$\left|\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+i\,\frac{T}{2}\right)\right| \leq \left|\log\frac{|T|}{2}-\frac{2}{1+4T^2}\right|+\frac{2}{3|T|}+\frac{1}{8T^2}. \ \blacksquare \tag{33}$$

4. Preuves. Dans cette section, nous commençons par étudier la somme sur les zéros de Zêta. Le résultat fondamental de la proposition 4.2 permet de régler le cas des zéros de partie réelle parcourant $[1-\sigma,\sigma]$ par un argument de positivité.

Nous introduisons à cette occasion les conditions numériques suivantes sur les paramètres κ et δ :

$$0 \leq \kappa \leq 0.44214, \qquad \delta \geq 0.61962,$$

ce qui nous permet d'obtenir les approximations numériques annoncées aux propositions 2.2–2.5.

Nous rappelons à cette occasion les valeurs que nous avons fixées pour les paramètres de départ T_0, R, θ et r :

$$T_0 = 3\,330\,657\,430.697, \qquad R = 9.645908801, \qquad \theta = 1.848, \qquad r = 5.94292,$$

ainsi que celles que nous obtenons pour les variables intermédiaires dont nous avons besoin ici :

$$g_1(\theta) = 147.84112\ldots, \qquad \sigma_0 = 0.99555\ldots, \qquad \eta_0 = 0.00767\ldots,$$
$$m = 1\,322.86625\ldots, \qquad m_1 = 4\,135.12706\ldots,$$
$$M(0) = 521.63246\ldots, \qquad M(-r/R) = 682.83971\ldots.$$

4.1. *Étude de la somme sur les zéros – preuve de la proposition 2.5.* Nous cherchons à localiser le zéro $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$. Pour cela, et c'est l'objet de ce premier paragraphe, nous l'isolons dans la somme

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma + ik\gamma_0 - \varrho).$$

4.1.1. *Cas* $k = 1$ *et* $\varrho \in \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho}_0\}$. Le terme $D(\sigma-\beta_0)+D(\sigma-1+\beta_0)$ donné par

$$D(\sigma-\beta_0) = \widetilde{F}(\sigma-\beta_0, 0) - \kappa\widetilde{F}(\sigma-\beta_0+\delta, 0),$$
$$D(\sigma-1+\beta_0) = \widetilde{F}(\sigma-1+\beta_0, 0) - \kappa\widetilde{F}(\sigma-1+\beta_0+\delta, 0)$$

est en fait proche de $\widetilde{F}(\sigma-\beta_0, 0)$ à un $\mathcal{O}(\eta)$ près. En effet, d'après la décroissance de l'application $x \mapsto \widetilde{F}(x, 0)$ et le lemme 3.2, nous avons

$$\widetilde{F}(\sigma-1+\beta_0+\delta, 0) \leq \widetilde{F}(\sigma_0-\eta_0+\delta, 0) \leq \frac{g_1(\theta)}{\sigma_0-\eta_0+\delta}\,\eta + \frac{m}{(\sigma_0-\eta_0+\delta)^3}\,\eta^3,$$
$$\widetilde{F}(\sigma-\beta_0+\delta, 0) \leq \widetilde{F}(\delta, 0) \leq \frac{g_1(\theta)}{\delta}\,\eta + \frac{m}{\delta^3}\,\eta^3,$$
$$\widetilde{F}(\sigma-1+\beta_0, 0) \geq \widetilde{F}(1, 0) \geq g_1(\theta)\eta - m\eta^3.$$

Donc :

$$\begin{aligned}(34)\quad & D(\sigma-\beta_0) + D(\sigma-1+\beta_0) \\ & \geq \widetilde{F}(\sigma-\beta_0, 0) + (g_1(\theta)\eta - m\eta^3) \\ & \quad - \kappa\left(\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\sigma_0-\eta_0+\delta}\right)g_1(\theta)\eta + \left(\frac{1}{\delta^3} + \frac{1}{(\sigma_0-\eta_0+\delta)^3}\right)m\eta^3\right).\end{aligned}$$

Nous étudions maintenant le reste de la somme et nous allons montrer, grâce aux propositions 4.2 et 4.4, qu'en fait il est d'ordre $\mathcal{O}(\eta^2)$.

4.1.2. *Cas* $(k = 0, 2, 3, 4)$ *ou* $(k = 1$ *et* $\varrho \notin \{\varrho_0, 1-\overline{\varrho}_0\})$. Les zéros de ζ étant symétriques par rapport à l'axe réel et à l'axe $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$, nous avons :

$$\begin{aligned}&\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) \\ &\quad = \frac{1}{2}\sum_{\varrho\in Z(\zeta)} [D(\sigma+ik\gamma_0-\varrho) + D(\sigma-1+ik\gamma_0+\bar{\varrho})] \\ &\quad = \sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\ \beta>1/2}} [D(\sigma-\beta+i(k\gamma_0-\gamma)) + D(\sigma-1+\beta+i(k\gamma_0-\gamma))] \\ &\qquad + \sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\ \beta=1/2}} D(\sigma-1/2+i(k\gamma_0-\gamma)).\end{aligned}$$

L'argument de positivité de la proposition suivante nous permet d'éliminer une grande partie des zéros. Nous généralisons à la transformée de Laplace F le résultat de Stechkin (voir [17] ou [18]) :

Lemme 4.1 (Stechkin, 1970). *Pour* $\beta \in [1/2, 1]$, $y > 0$, $\sigma > 1$ *et* $\tau = (1 + \sqrt{1 + 4\sigma^2})/2$, *nous avons*

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\sigma - \beta + iy} + \frac{1}{\sigma - 1 + \beta + iy}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\tau - 1 + \beta + iy} + \frac{1}{\tau - \beta + iy}\right) \geq 0.$$

Proposition 4.2. *Pour* $\beta \in [1/2, \sigma]$ *et* $y > 0$, *nous avons*

$$D(\sigma - \beta + iy) + D(\sigma - 1 + \beta + iy) \geq 0$$

dès que $\delta \geq 0.61963$ *et* $0 \leq \kappa \leq \min(\kappa_2(\delta), \kappa_3(\delta))$, *où* κ_2 *et* κ_3 *sont définis respectivement en* (36) *et* (37).

Démonstration. Nous cherchons le plus grand κ tel que

$$D(\sigma - \beta + iy) + D(\sigma - 1 + \beta + iy) \geq 0,$$

ce qui revient à minorer le terme de gauche lorsque $\beta + i\gamma$ parcourt $\mathbb{C}$. En fait, celui-ci étant une fonction harmonique sur $\mathbb{C}$, nous pouvons nous restreindre au domaine $\{1 - \sigma \leq \beta \leq \sigma,\ |y| \leq y_0\}$, où y_0 est un réel positif, et étudier

$$Q(\beta + iy) = \frac{\widetilde{F}(\sigma - \beta, y) + \widetilde{F}(\sigma - 1 + \beta, y)}{\widetilde{F}(\sigma + \delta - \beta, y) + \widetilde{F}(\sigma + \delta - 1 + \beta, y)}.$$

Nous allons tout d'abord vérifier que le numérateur de Q ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$: la positivité de $\widetilde{F}$ implique que $\widetilde{F}(\sigma + \delta - \beta, y) + \widetilde{F}(\sigma - 1 + \delta + \beta, y)$ s'annule si et seulement si $\widetilde{F}(\sigma + \delta - \beta, y)$ et $\widetilde{F}(\sigma - 1 + \delta + \beta, y)$ s'annulent. En utilisant les majorations du lemme 3.2, nous obtenons les deux inégalités

$$\frac{g_1(\theta)(\sigma - \beta + \delta)}{(\sigma - \beta + \delta)^2 + y^2} - \frac{m\eta_0^2}{(\sigma - \beta + \delta)((\sigma - \beta + \delta)^2 + y^2)} \leq 0,$$

$$\frac{g_1(\theta)(\sigma - 1 + \beta + \delta)}{(\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y^2} - \frac{m\eta_0^2}{(\sigma - 1 + \beta + \delta)((\sigma - 1 + \beta + \delta)^2 + y^2)} \leq 0,$$

ce qui équivaut à ce que $|\sigma - \beta + \delta|$ et $|\sigma - 1 + \beta + \delta|$ soient tous deux majorés par $\sqrt{m/g_1(\theta)}\,\eta_0$ et donc que δ soit majoré par le terme négatif $\sqrt{m/g_1(\theta)}\,\eta_0 + 1/2 - \sigma$, ce qui est absurde.

Comme l'application $y_0 \mapsto \min_{1-\sigma\leq\beta\leq\sigma,\,|y|\leq y_0} Q(\beta + iy)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, nous pouvons supposer y_0 assez grand, au moins supérieur à $\sigma - \beta$ et $\sigma - 1 + \beta$ (nous prendrons $y_0 \geq 10$). Par ailleurs, en prenant pour domaine $|y| \leq y_0$ et $1 - \sigma \leq \beta \leq \sigma$, comme $Q(1 - z) = Q(z)$ et $Q(\overline{z}) = Q(z)$, il nous suffit de nous restreindre aux deux côtés : ($y = y_0$, $1/2 \leq \beta \leq \sigma$) et ($0 \leq y \leq y_0$, $\beta = \sigma$).

Dans le premier cas, nous minorons $Q(\beta+iy_0)$ par le terme

$$Q_1(\sigma,\beta,y_0)=\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}},\qquad \text{où}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}&=\eta g_1(\theta)\Big(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+y_0^2}+\frac{\sigma-1+\beta}{(\sigma-1+\beta)^2+y_0^2}\Big)\\&\quad-|H(\sigma-\beta,y_0)|-|H(\sigma-1+\beta,y_0)|,\\ \mathcal{D}&=\eta g_1(\theta)\Big(\frac{\sigma-\beta+\delta}{(\sigma-\beta+\delta)^2+y_0^2}+\frac{\sigma-1+\beta+\delta}{(\sigma-1+\beta+\delta)^2+y_0^2}\Big)\\&\quad+|H(\sigma-\beta+\delta,y_0)|+|H(\sigma-1+\beta+\delta,y_0)|\end{aligned}\tag{35}$$

et nous minorons chaque valeur de H grâce au lemme 3.3 :

$$\begin{aligned}|H(\sigma-\beta,y_0)|&\le\frac{3my_0^2\eta^3}{2((\sigma-\beta)^2+y_0^2)^3}+\frac{M_1(0)\eta^3}{((\sigma-\beta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\&\le\Big(\frac{3m}{2y_0}+M_1(0)\Big)\frac{\eta_0^2}{y_0^3}\,\eta,\\ |H(\sigma-1+\beta,y_0)|&\le\frac{3my_0^2\eta^3(\sigma-1+\beta)}{((\sigma-1+\beta)^2+y_0^2)^3}+\frac{m_1\eta^4/(\sigma-1+\beta)}{((\sigma-1+\beta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\&\le\Big(3m+\frac{m_1\eta_0}{\sigma_0-1/2}\Big)\frac{\eta_0^2}{y_0^3}\,\eta,\\ |H(\sigma-\beta+\delta,y_0)|&\le\frac{3my_0^2\eta^3(\sigma-\beta+\delta)}{((\sigma-\beta+\delta)^2+y_0^2)^3}+\frac{m_1\eta^4/(\sigma-\beta+\delta)}{((\sigma-\beta+\delta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\&\le\Big(3m+\frac{m_1\eta_0}{\delta}\Big)\frac{\eta_0^2}{y_0^3}\,\eta,\\ |H(\sigma-1+\beta+\delta,y_0)|&\le\frac{3my_0^2\eta^3(\sigma-1+\beta+\delta)}{((\sigma-1+\beta+\delta)^2+y_0^2)^3}\\&\quad+\frac{m_1\eta^4/(\sigma-1+\beta+\delta)}{((\sigma-1+\beta+\delta)^2+y_0^2)^{3/2}}\\&\le\Big(3m+\frac{m_1\eta_0}{\delta}\Big)\frac{\eta_0^2}{y_0^3}\,\eta.\end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$Q_1(\sigma,\beta,y_0)\ge\frac{g_1(\theta)(2\sigma-1)\dfrac{y_0^2}{y_0^2+1}-\Big[\Big(\dfrac{3m}{2y_0}+3m+M_1(0)\Big)\eta_0^2+\dfrac{m_1}{1/2-\eta_0}\,\eta_0^3\Big]\dfrac{1}{y_0}}{g_1(\theta)(2\sigma+2\delta-1)+\Big[6m\eta_0^2+\dfrac{2m_1}{\delta}\,\eta_0^3\Big]\dfrac{1}{y_0}}.$$

Nous voyons facilement que le terme de droite est une fonction croissante en la variable σ, donc on peut la minorer par sa valeur en σ_0, valeur que nous noterons $\kappa_1(y_0,\delta)$.

Regardons maintenant Q sur l'autre côté $0 \le y \le y_0$, $\beta = \sigma$. Nous allons utiliser le lemme 3.2 pour $\widetilde{F}(2\sigma-1,y)$, $\widetilde{F}(\delta,y)$ et $\widetilde{F}(2\sigma-1+\delta,y)$. Pour $\widetilde{F}(0,y)$, le lemme ne suffit plus lorsque y est proche de 0. À la place, nous utilisons la positivité de $\widetilde{F}$ et nous minorons ainsi $Q(\sigma+iy)$ par

$$\frac{1}{(2\sigma-1)^2+y^2}\,\frac{g_1(\theta)(2\sigma-1)-m\eta_0^2/(2\sigma-1)}{\dfrac{\delta g_1(\theta)+m\eta_0^2/\delta}{\delta^2+y^2}+\dfrac{(2\sigma-1+\delta)g_1(\theta)+m\eta_0^2/(2\sigma-1+\delta)}{(2\sigma-1+\delta)^2+y^2}},$$

puis par

$$Q_2(y)=\frac{1}{1+y^2}\,\frac{g_1(\theta)(2\sigma_0-1)-m\eta_0^2/(2\sigma_0-1)}{\dfrac{\delta g_1(\theta)+m\eta_0^2/\delta}{\delta^2+y^2}+\dfrac{(\delta+1)g_1(\theta)+m\eta_0^2/(\delta+2\sigma_0-1)}{(\delta+2\sigma_0-1)^2+y^2}}.$$

Nous étudions le sens de variation de Q_2 et pour cela regardons le signe du dénominateur de sa dérivée. À un facteur positif près, nous trouvons le trinôme du second degré suivant : $Q_3(y)=d_2y^2+d_1(\theta)y+d_0$, où les d_i sont des fonctions polynômes de δ. Le polynôme d_2 est positif pour $\delta \le 0.07$, négatif sinon, et le discriminant de Q_3 est toujours positif pour $\delta \ge 0.03$.

Supposons $\delta > 0.07$. Alors $Q_3(y) \ge 0$ est successivement positive puis négative sur $[0,+\infty[$ et donc Q_2 est d'abord croissante puis décroissante et son minimum est à déterminer entre $Q_2(0)$ et $Q_2(y_0)$. En fait nous pouvons même regarder sans trop de perte la limite de Q_2 en l'infini au lieu de $Q_2(y_0)$. Nous noterons respectivement ces valeurs $\kappa_2(\delta)$ et $\kappa_3(\delta)$:

$$(36)\quad \kappa_2(\delta)=\frac{g_1(\theta)(2\sigma_0-1)-m\eta_0^2/(2\sigma_0-1)}{(1+2\delta)g_1(\theta)+\left(\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{1}{\delta+2\sigma_0-1}\right)m\eta_0^2}=\frac{1}{1+2\delta}+\mathcal{O}(\eta_0),$$

$$(37)\quad \kappa_3(\delta)=\frac{g_1(\theta)(2\sigma_0-1)-m\eta_0^2/(2\sigma_0-1)}{\left(\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{1+\delta}{(\delta+2\sigma_0-1)^2}\right)g_1(\theta)+\left(\dfrac{1}{\delta^3}+\dfrac{1}{(\delta+2\sigma_0-1)^3}\right)m\eta_0^2}=\frac{1}{\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{1}{1+\delta}}+\mathcal{O}(\eta_0).$$

En remarquant que $\kappa_1(\cdot,\delta)$ est une fonction décroissante et que $\kappa_2(\delta) \le \kappa_1(10,\delta)$, nous voyons qu'il ne reste plus pour conclure qu'à choisir la valeur optimale de $\min(\kappa_2(\delta),\kappa_3(\delta))$ lorsque $\delta \in [0,1]$. À un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, nous prenons donc δ tel que

$$\frac{1}{1+2\delta} = \frac{1}{1/\delta + 1/(1+\delta)} \quad \text{et donc} \quad \kappa = \frac{1}{1+2\delta}.$$

C'est-à-dire qu'à un $\mathcal{O}(\eta_0)$ près, $\delta = (\sqrt{5}-1)/2 = 0.61803\ldots$ et $\kappa = 1/\sqrt{5} = 0.44721\ldots$. Les calculs exacts donnent

$$\delta = 0.61963\ldots, \qquad \kappa = 0.44213\ldots. \ \blacksquare$$

Il reste à étudier le cas où $\beta \in [\sigma, 1]$, ou plutôt celui où $|\gamma| \geq k\gamma_0 + t_0$, puisque

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{R\log(k\gamma_0 + t_0)}, \qquad \beta \leq 1 - \frac{1}{R\log|\gamma|}.$$

Nous fixons la valeur $t_0 = 10$. Nous utiliserons le lemme préliminaire suivant pour montrer la proposition 4.4 ci-après.

Lemme 4.3. *Pour $t_0 = 10$,*

$$\Sigma(t) = \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ |\gamma| \geq t+t_0}} \frac{1}{(\gamma - t)^2} \leq \begin{cases} c_{30}(0) \leq 0.07063 & \textit{si } t = 0, \\ c_{30}(t) \textit{ défini en } (47) & \textit{si } t \geq T_0. \end{cases}$$

Démonstration. Nous rappelons que $N(u)$ désigne le nombre de zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire dans $[0, u]$. D'après un théorème de Rosser (cf. [14]), $N(u)$ vérifie

$$\left| N(u) - \frac{u}{2\pi}\log\left(\frac{u}{2\pi e}\right) - \frac{7}{8} \right| \leq 0.137\log u + 0.443\log\log u + 1.588 \qquad (u \geq 2).$$

Nous en déduisons cette inégalité plus pratique pour les applications numériques que nous voulons mener par la suite :

$$N_2(u) \leq N(u) \leq N_1(u), \qquad u \geq 2, \tag{38}$$

avec

$$N_1(u) = \frac{u}{2\pi}\log\left(\frac{u}{2\pi e}\right) + c_1\log u + c_2, \tag{39}$$

$$N_2(u) = \frac{u}{2\pi}\log\left(\frac{u}{2\pi e}\right) - c_1\log u - c_3, \tag{40}$$

où

$$c_1 = 0.29998, \qquad c_2 = 2.463, \qquad c_3 = 0.713. \tag{41}$$

Dans le cas où $t = 0$, en notant t_1 la plus petite partie imaginaire des zéros de zeta ($t_1 = 14.134725\ldots$), nous avons l'égalité

$$\Sigma(0) = \sum_{|\gamma| \geq t_1} \frac{1}{|\gamma|^2} \tag{42}$$

et les majorations successives suivantes :

$$\Sigma(0) \le 2 \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dN(u)}{u^2} = 4 \int_{t_1}^{+\infty} \frac{N(u)}{u^3}\, du \le 0.07063. \tag{43}$$

Dans le cas où $t \ge T_0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ \gamma \ge t+t_0}} \left[\frac{1}{(\gamma - t)^2} + \frac{1}{(\gamma + t)^2} \right] \\ &= \sum_{n \ge 0} \sum_{\substack{\varrho \in Z(\zeta) \\ t+t_0+n \le \gamma < t+t_0+n+1}} \left[\frac{1}{(\gamma - t)^2} + \frac{1}{(\gamma + t)^2} \right] \\ &\le \sum_{n \ge 0} (N(t+t_0+n+1) - N(t+t_0+n)) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(t_0+n)^2} + \frac{1}{(2t+t_0+n)^2} \right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Les encadrements (38) nous donnent l'inégalité

$$\begin{aligned} & N(t+t_0+n+1) - N(t+t_0+n) \\ &\le N_1(t+t_0+n+1) - N_2(t+t_0+n) \\ &\le \frac{t+t_0+n+1}{2\pi} \log\left(\frac{t+t_0+n+1}{2\pi e} \right) + c_1 \log(t+t_0+n+1) + c_2 \\ &\quad - \frac{t+t_0+n}{2\pi} \log\left(\frac{t+t_0+n}{2\pi e} \right) + c_1 \log(t+t_0+n) + c_3 \\ &\le \frac{t+t_0+n}{2\pi} \log\left(\frac{t+t_0+n+1}{t+t_0+n} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi} + 2c_1 \right) \log(t+t_0+n+1) - \frac{\log(2\pi e)}{2\pi} + c_2 + c_3. \end{aligned} \tag{45}$$

Puis, en utilisant

$$\log\left(\frac{t+t_0+n+1}{t+t_0+n} \right) \le \frac{1}{t+t_0+n}$$

et $\log(t+t_0+n+1) \le \log t + \log(t_0+n+1)$, on obtient la majoration explicite :

$$N(t+t_0+n+1)-N(t+t_0+n) \tag{46}$$
$$\le \frac{1}{2\pi}+\left(\frac{1}{2\pi}+2c_1\right)\log t+\left(\frac{1}{2\pi}+2c_1\right)\log(t_0+n+1)$$
$$-\frac{\log(2\pi e)}{2\pi}+c_2+c_3$$
$$\le \left(\frac{1}{2\pi}+2c_1\right)\log t + a(n)$$

avec

$$a(n)=\left(\frac{1}{2\pi}+2c_1\right)\log(t_0+n+1)-\frac{\log(2\pi)}{2\pi}+c_2+c_3,$$

ce qui donne

$$\Sigma(t)\le\left(\frac{1}{2\pi}+2c_1\right)\log t\cdot\sum_{n\ge0}\left[\frac{1}{(t_0+n)^2}+\frac{1}{(2t+t_0+n)^2}\right] \tag{47}$$
$$+\sum_{n\ge0}a(n)\left[\frac{1}{(t_0+n)^2}+\frac{1}{(2t+t_0+n)^2}\right].$$

On notera $c_{30}(t)$ le terme de droite. Chaque fonction $c_{30}(kt)/\log t$ étant décroissante en t, pour $k=1,2,3,4$, on peut la borner par sa valeur en T_0 :

$$\frac{c_{30}(kt)}{\log t}\le\frac{c_{30}(kT_0)}{\log T_0},$$

et donc

$$c_{30}(k\gamma_0)\eta\le c_{30}(kT_0)\eta_0. \ \blacksquare \tag{48}$$

Dans la suite de cette section, nous posons $y_k=\gamma-k\gamma_0$.

Proposition 4.4. *Nous avons*

$$\sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\ |\gamma|\ge k\gamma_0+t_0}}\left(D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k)\right)$$
$$\ge-\left(M(-r/R)\eta+\frac{(1+2\kappa)m}{\sigma_0-1/2}\,\eta^2\right)c_{30}(kT_0)\eta_0.$$

Démonstration. D'après la majoration de $\widetilde{F}$ établie au paragraphe 3.2, nous avons

$$(49)\quad \sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\|\gamma|\ge k\gamma_0+t_0}} (D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k))$$

$$\ge \eta g_1(\theta) \sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\|\gamma|\ge k\gamma_0+t_0}} \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{\sigma-\beta+iy_k}+\frac{1}{\sigma-1+\beta+iy_k}$$

$$-\frac{\kappa}{\sigma-\beta+\delta+iy_k}-\frac{\kappa}{\sigma-1+\beta+\delta+iy_k}\Big)$$

$$-\sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\|\gamma|\ge k\gamma_0+t_0}} (|H(\sigma-\beta,y_k)|+|H(\sigma-1+\beta,y_k)|$$

$$+\kappa|H(\sigma-\beta+\delta,y_k)|+\kappa|H(\sigma-1+\beta+\delta,y_k)|).$$

Le terme général de la première somme est positif puisque $\delta\ge(\sqrt{5}-1)/2$, d'après le lemme de Stechkin (cf. [17, lemme 2]). Il reste à minorer la seconde somme de (49). Pour cela, nous utilisons le lemme 3.2 : puisque $0\ge(\sigma-\beta)/\eta\ge-(1-\sigma)/\eta\ge-r/R$, nous avons

$$|H(\sigma-\beta,y_k)|\le\frac{M(-r/R)}{y_k^2}\,\eta^2$$

et, en minorant $\sigma-1+\beta$, $\sigma-\beta+\delta$ et $\sigma-1+\beta+\delta$ par $\sigma_0-1/2$, nous déduisons que $|H(\sigma-1+\beta,y_k)|$, $|H(\sigma-\beta+\delta,y_k)|$ et $|H(\sigma-1+\beta+\delta,y_k)|$ sont majorés par $(M((\sigma_0-1/2)/\eta)/y_k^2)\eta^2$ et donc par $(m/((\sigma_0-1/2)y_k^2))\eta^3$.

L'inégalité (49) devient alors

$$(50)\quad \sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\|\gamma|\ge k\gamma_0+t_0}} (D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k))$$

$$\ge -\Big(M(-r/R)\,\eta^2+\frac{(1+2\kappa)m}{\sigma_0-1/2}\,\eta^3\Big)\sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\|\gamma|\ge k\gamma_0+t_0}}\frac{1}{y_k^2}$$

$$\ge -\Big(M(-r/R)\,\eta^2+\frac{(1+2\kappa)m}{\sigma_0-1/2}\,\eta^3\Big)c_{30}(k\gamma_0).$$

On achève la preuve en utilisant la borne triviale $c_{30}(k\gamma_0)\eta\le c_{30}(0)\eta_0$, lorsque $k=0$, et $c_{30}(k\gamma_0)\eta\le c_{30}(kT_0)\eta_0$, vu en (48), lorsque $k=1,2,3,4$.

On remarquera qu'il est possible de diminuer la taille de c_{30}, et par conséquent celle du terme reste $\mathcal{C}(\eta)$ décrit au paragraphe 2.4, en choisissant une valeur plus grande pour t_0. Comme nous n'avons besoin que de la négativité de $\mathcal{C}(\eta_0)$ et qu'en contrepartie la valeur finale de R augmente avec celle de t_0, nous nous contentons de prendre $t_0=10$. ∎

On finit la preuve de la proposition 2.5 en déduisant tout d'abord de la proposition 4.4 que

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\substack{\varrho\in Z(\zeta)\\|\gamma|\geq k\gamma_0+t_0}} \big(D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k)\big) \geq -\mathcal{C}_{31}(\eta)-\mathcal{C}_{32}(\eta)\kappa \tag{51}$$

avec

$$\mathcal{C}_{31}(\eta) = \left(M(-r/R)\eta + \frac{m}{\sigma_0-1/2}\,\eta^2\right)\sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kT_0)\eta_0, \tag{52}$$

$$\mathcal{C}_{32}(\eta) = \frac{2m}{\sigma_0-1/2}\sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kT_0)\eta_0\eta^2. \tag{53}$$

(Nous rappelons que c_{30} est défini au lemme 4.3.) La proposition 4.2, les inégalités (34) et (51) donnent finalement

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \sum_{\varrho\in Z(\zeta)} \big(D(\sigma-\beta+iy_k)+D(\sigma-1+\beta+iy_k)\big) \geq a_1\widetilde{F}(\sigma-\beta_0,0)-\mathcal{C}_3(\eta)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_3(\eta) = a_1\Bigg[&\Bigg(\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\sigma_0-\eta_0+\delta}\Big)g_1(\theta)\eta + \Big(\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{(\sigma_0-\eta_0+\delta)^3}\Big)m\eta^3\Bigg)\kappa\\ &-\big(g_1(\theta)\,\eta-m\eta^3\big)\Bigg] + \mathcal{C}_{31}(\eta)+\mathcal{C}_{32}(\eta)\kappa.\end{aligned} \tag{54}$$

Ainsi, $\mathcal{C}_3(\eta)$ s'écrit sous forme polynômiale $p_1\eta+p_2\eta^2+p_3\eta^3$, où

$$\begin{aligned}p_1 &= a_1g_1(\theta)\Bigg(\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\sigma_0-\eta_0+\delta}\Big)\kappa-1\Bigg) + M(-r/R)\sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kT_0)\eta_0,\\ p_2 &= \frac{(1+2\kappa)m}{\sigma_0-1/2}\sum_{k=0}^{4} a_k c_{30}(kT_0)\eta_0,\\ p_3 &= a_1m\Bigg(\Big(\frac{1}{\delta^3}+\frac{1}{(\sigma_0-\eta_0+\delta)^3}\Big)\kappa+1\Bigg).\end{aligned}$$

Les conditions imposées à κ et δ en (6) impliquent que p_1 est négative et p_2 et p_3 positives. Et avec les valeurs numériques choisies au début de la section, on a plus exactement :

$$p_1 = -413.18630\ldots,\qquad p_2 = 3\,275.49955\ldots,\qquad p_3 = 73\,082.74832\ldots.$$

4.2. *Étude de Δ_1 – preuve de la proposition 2.2.* Rappelons que le terme étudié est $\Delta_1(s) = T_1(s) - \kappa T_1(s+\delta)$, où

$$T_1(s) = -\frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right).$$

Lemme 4.5. *Nous avons*

$$\Delta_1(\sigma + ik\gamma_0) \le \begin{cases} c_1(0) & \text{si } k=0,\\ ((1-\kappa)/2)\log\gamma_0 + c_1(k) & \text{si } k=1,2,3,4,\end{cases}$$

avec

$$c_1(0) = -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_0+\delta}{2}+1\right),$$

$$c_1(k) = -\frac{1-\kappa}{2}\log\frac{2\pi}{k} + \frac{1}{2}\min(r_2(\sigma_0+2,3,kT_0), r_3(\sigma_0+2,3,kT_0)) \qquad \text{si } k\ge 1$$

et avec r_2 et r_3 définis en (27) *et* (30).

Démonstration. Si $k=0$, nous avons immédiatement, grâce à la croissance de $\mathfrak{Re}(\Gamma'/\Gamma)$ sur $[0;+\infty[$,

$$\Delta_1(\sigma) \le -\frac{1-\kappa}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\sigma_0+\delta}{2}+1\right) = c_1(0).$$

Si $k\ge 1$, utilisons le lemme 3.5 en prenant $x_0 = \sigma_0+2$, $x_1 = 3$ et $y_0 = kT_0$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\sigma+ik\gamma_0) &\le \frac{1-\kappa}{2}\log\gamma_0 + \frac{1-\kappa}{2}\log\frac{k}{2\pi}\\ &\quad + \frac{1}{2}\min(r_2(\sigma_0+2,3,kT_0), r_3(\sigma_0+2,3,kT_0))\\ &\le \frac{1-\kappa}{2}\log\gamma_0 + c_1(k)\end{aligned}$$

où les $c_1(k)$ sont des constantes négatives. ■

Ainsi, en sommant le lemme 4.5 pour $k=0,1,2,3,4$,

$$\sum_{k=0}^{4} a_k\Delta_1(\sigma+ik\gamma_0) \le \frac{A(1-\kappa)}{2}\log\gamma_0 + c_1 \qquad \text{avec } c_1 = \sum_{k=0}^{4} a_k c_1(k) \tag{55}$$

et donc

$$f(0)\sum_{k=0}^{4} a_k\Delta_1(\sigma+ik\gamma_0) \le \frac{A}{2}(1-\kappa)g_1(\theta)\eta\log\gamma_0 + \mathcal{C}_1(\eta)$$

où $\mathcal{C}_1$ est la fonction négative donnée par

$$\mathcal{C}_1(\eta) = c_1 g_1(\theta)\eta \le -2\,704.319\,\eta. \tag{56}$$

4.3. *Étude de $D(s-1)$ – preuve de la proposition 2.3.* Rappelons que $D(\sigma-1+it)=\widetilde{F}(\sigma-1,t)-\kappa\widetilde{F}(\sigma-1+\delta,t)$. Nous montrons tout d'abord une proposition intermédiaire :

PROPOSITION 4.6. *Nous avons*

$$D(\sigma-1+it) \tag{57}$$
$$\leq \begin{cases} \widetilde{F}(\sigma-1,0)-\kappa\left(\dfrac{g_1(\theta)}{\delta}\,\eta-\dfrac{m}{(\sigma_0-1+\delta)^3}\,\eta^3\right) & si\ t=0,\\ M(-r/R)\,\dfrac{\eta^2}{t^2}-\left(g_1(\theta)\,\dfrac{\sigma_0-1+\delta}{2}\,\eta-\dfrac{m}{\sigma_0-1+\delta}\,\eta^3\right)\dfrac{\kappa}{t^2} & si\ t\geq T_0. \end{cases}$$

Démonstration. Nous utilisons simplement les majorations du lemme 3.2. Dans le cas où $t=0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} D(\sigma-1) &= \widetilde{F}(\sigma-1,0)-\kappa\widetilde{F}(\sigma-1+\delta,0)\\ &\leq \widetilde{F}(\sigma-1,0)-\kappa\left(\frac{g_1(\theta)}{\sigma-1+\delta}\,\eta-|H(\sigma-1+\delta,0)|\right)\\ &\leq \widetilde{F}(\sigma-1,0)-\kappa\left(\frac{g_1(\theta)}{\sigma-1+\delta}\,\eta-\frac{m}{(\sigma-1+\delta)^3}\,\eta^3\right) \end{aligned} \tag{58}$$

et on conclut en observant que $\sigma_0\leq\sigma\leq 1$.

Dans le cas où $t\geq T_0$, nous avons les inegalites successives (nous rappelons que $-r/R\leq\sigma-1\leq 0$ et $\sigma_0-1+\delta\leq\sigma-1+\delta\leq T_0\leq t$) :

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}(\sigma-1,t)-\kappa\widetilde{F}(\sigma-1+\delta,t)\\ &\leq \frac{\eta g_1(\theta)(\sigma-1)}{(\sigma-1)^2+t^2}+|H(\sigma-1,t)|-\kappa\left(\frac{\eta g_1(\theta)(\sigma-1+\delta)}{(\sigma-1+\delta)^2+t^2}-|H(\sigma-1+\delta,t)|\right)\\ &\leq \frac{M((\sigma-1)/\eta)\eta^2}{(\sigma-1)^2+t^2}-\kappa\left(\frac{\eta g_1(\theta)(\sigma-1+\delta)}{2t^2}-\frac{m\eta^3}{(\sigma-1+\delta)((\sigma-1+\delta)^2+t^2)}\right)\\ &\leq \frac{M(-r/R)\eta^2}{t^2}-\kappa\left(\frac{\eta g_1(\theta)(\sigma_0-1+\delta)}{2t^2}-\frac{m\eta^3}{(\sigma_0-1+\delta)t^2}\right), \end{aligned} \tag{59}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ∎

Finalement, en prenant $t=k\gamma_0$ dans (58) et (59) avec successivement $k=0,1,2,3,4$, la proposition 4.6 permet d'achever la preuve de la proposition 2.3 :

$$\sum_{k=0}^{4}a_kD(\sigma-1+ik\gamma_0)\leq a_0\widetilde{F}(\sigma-1,0)+\mathcal{C}_2(\eta)$$

où $\mathcal{C}_2(\eta)$ s'écrit sous la forme polynômiale

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_2(\eta) = q_1\eta + q_2\eta^2 + q_3\eta^3 \quad \text{avec} \\ &\quad q_1 = -\kappa\left(a_0\,\frac{g_1(\theta)}{\delta} + \frac{\sigma_0 - 1 + \delta}{2}\,g_1(\theta)\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{(kT_0)^2}\right) \le 0, \\ (60) \qquad &\quad q_2 = M(-r/R)\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{(kT_0)^2} \ge 0, \\ &\quad q_3 = \frac{a_0 m\kappa}{(\sigma_0 - 1 + \delta)^3} + \frac{m\kappa}{\sigma_0 - 1 + \delta}\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{(kT_0)^2} \ge 0 \end{aligned}$$

et ici

$$q_1 = -1\,151.623, \qquad q_2 = 1.360 \cdot 10^{-15}, \qquad q_3 = 27\,424.672.$$

4.4. *Étude du reste Δ_2 – preuve de la proposition 2.4.* Rappelons que $\Delta_2(s) = T_2(s) - \kappa T_2(s+\delta)$, avec

$$T_2(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4} + i\,\frac{T}{2}\right)H(\sigma - 1/2, t - T)\,dT + H(\sigma, t).$$

Lemme 4.7. *Nous avons*

$$\Delta_2(\sigma + ki\gamma_0) \le \mathcal{C}_4(\eta, k) \quad \textit{avec} \quad \mathcal{C}_4(\eta, k) = \mathcal{C}_{41}(\eta, k) + \mathcal{C}_{42}(\eta, k)$$

où $\mathcal{C}_{41}(\eta, k)$ et $\mathcal{C}_{42}(\eta, k)$ sont définis en (61) *et* (63).

Démonstration. 1. Étudions d'abord le terme intégral. Pour simplifier, on écrit x pour $\sigma - 1/2$ ou $\sigma - 1/2 + \delta$ et y pour $k\gamma_0$. Nous rappelons que le lemme 3.2 donne

$$|H(x, y - T)| \le \frac{M(x/\eta)\eta^2}{x^2 + (y-T)^2} \le \frac{m\eta^3}{x(x^2 + (y-T)^2)},$$

et que

$$\left|\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4} + i\,\frac{T}{2}\right)\right| \le U_0(T),$$

où U_0 est défini au lemme 3.6. Ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathfrak{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4} + i\,\frac{T}{2}\right)\right||H(x, y-T)|\,dT$$
$$\le \frac{m\eta^3}{2\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U_0(T)}{x^2 + (y-T)^2}\,dT = C_{40}(\eta, x, y).$$

Lorsque $y = k\gamma_0$, l'intégrale ci-dessus est de l'ordre de $\log(k\gamma_0 + 1)$ et le η^3 qui la précède est de l'ordre de $1/\log^3\gamma_0$, ce qui fait qu'il est facile de montrer que cette quantité est décroissante en γ_0 et qu'elle est donc majorée par $C_{40}(\eta, x, kT_0)$. Nous notons $C_{41}(\eta, k)$ la majoration trouvée ainsi pour l'intégrale :

$$C_{41}(\eta, k) = C_{40}(\eta, \sigma_0 - 1/2, kT_0) + \kappa C_{40}(\eta, \sigma_0 - 1/2 + \delta, kT_0). \tag{61}$$

2. Il nous reste à approcher $H(\sigma, k\gamma_0)$ grâce au lemme 3.2 :

$$|H(\sigma, k\gamma_0)| + \kappa|H(\sigma + \delta, k\gamma_0)| \leq C_{42}(\eta, k) \tag{62}$$

avec

$$C_{42}(\eta, k) = \begin{cases} (1/\sigma_0^3 + \kappa/(\sigma_0 + \delta)^3)m\eta^3 & \text{si } k = 0, \\ (1/\sigma_0 + \kappa/(\sigma_0 + \delta))m\eta^3/(kT_0)^2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{63}$$ ■

Finalement :

$$\sum_{k=0}^{4} a_k \Delta_2(\sigma + ik\gamma_0) \leq \mathcal{C}_4(\eta) = \sum_{k=0}^{4} a_k \left(\mathcal{C}_{41}(\eta, k) + \mathcal{C}_{42}(\eta, k)\right) \tag{64}$$

avec

$$\mathcal{C}_4(\eta) \leq 2\,391\,006.764\eta^3.$$

4.5. *Conclusion.* Nous détaillons ci-dessous les étapes consécutives des calculs. Nous donnons les valeurs successives prises pour r et R, ainsi que celles des paramètres η_0, κ et δ impliqués et enfin celles trouvées pour R_0.

Nous donnons aussi le terme reste

$$\mathcal{C}(\eta) = \mathcal{C}_1(\eta) + \mathcal{C}_2(\eta) + \mathcal{C}_3(\eta) + \mathcal{C}_4(\eta) = \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_3\eta^3,$$

où α_1 est négative sous la condition (6), et α_2 et α_3 sont toujours positives. Ainsi, comme on l'a expliqué au paragraphe 2.4, $\mathcal{C}(\eta)$ est négatif sur $[0, \eta_0]$ lorsque $\mathcal{C}(\eta_0)$ est négatif, et il n'influe donc pas sur la valeur finale de R_0.

Étape	R	r	$\eta_0 \cdot 10^3$	κ	δ
1	9.645908801	5.94292	7.67418...	0.44213...	0.61963...
2	5.942924086	5.72033	7.97280...	0.43927...	0.62051...
3	5.720337336	5.69922	8.00233...	0.43898...	0.62060...
4	5.699223507	5.69714	8.00525...	0.43895...	0.62061...
5	5.697149422	5.69694	8.00553...	0.43895...	0.62061...
6	5.696944343	5.69692	8.00556...	0.43895...	0.62061...

Étape	α_1	α_2	α_3	$\mathcal{C}(\eta_0)$	R_0
1	−3 442.756	3 275.500	2 491 514.184	−25.10138...	5.942924086...
2	−3 364.052	3 411.712	2 515 484.337	−25.32921...	5.720337335...
3	−3 354.978	3 425.245	2 517 937.234	−25.33799...	5.699223506...
4	−3 354.069	3 426.585	2 518 180.091	−25.33873...	5.697149421...
5	−3 353.979	3 426.714	2 518 204.048	−25.33878...	5.696944342...
6	−3 353.970	3 426.727	2 518 206.418	−25.33879...	5.696924085...

Références

[1] Y. Cheng, *An explicit zero-free region for the Riemann zeta-function*, Rocky Mountain J. Math. 30 (2000), 135–148.

[2] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., Grad. Texts in Math. 74, Springer, 2000.

[3] K. Ford, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002), 565–633.

[4] —, *Zero-free regions for the Riemann zeta function*, dans : Number Theory for the Millennium, II (Urbana, IL, 2000), A K Peters, 2002, 25–56.

[5] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 24 (1896), 199–220.

[6] D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. 64 (1992), 265–338.

[7] H. Kadiri, *Zero-free regions for the Dirichlet L-functions*, prépublication.

[8] —, *Régions explicites sans zéros pour les fonctions L de Dirichlet*, thèse, 2002 ; http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/26/95/index_fr.html.

[9] N. M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, Uspekhi Mat. Nauk 13 (1958), 185–192 (in Russian).

[10] J. van de Lune, H. J. J. te Riele and D. T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV*, Math. Comp. 46 (1986), 667–681.

[11] K. S. McCurley, *Explicit zero-free regions for Dirichlet L-functions*, J. Number Theory 19 (1984), 7–32.

[12] O. V. Popov, *A derivation of a modern bound for the zeros of the Riemann zeta function by the Hadamard method*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 96 (1994), 42–45 (in Russian).

[13] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1859, 671–680.

[14] J. B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. 63 (1941), 211–232.

[15] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), 64–94.

[16] —, —, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$, Math. Comp. 29 (1975), 243–269.

[17] S. B. Stechkin, *The zeros of the Riemann zeta-function*, Mat. Zametki 8 (1970), 419–429 (in Russian) ; English transl.: Math. Notes 8 (1970), 706–711.

[18] —, *Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta-function*, Trudy Mat. Inst. Steklov 189 (1989), 110–116 (in Russian); English transl.: Proc. Steklov Inst. Math. no. 4, 1990, 127–134.

[19] C. J. de la Vallée Poussin, *La fonction zéta de Riemann et les nombres premiers en général*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I 20 (1896), 183–256.

[20] —, *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, Mém. Couronnés et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci. Lett. Beaux-Arts Belg. 59 (1899–1900), 74 pp.

[21] S. Wedeniwski, *The first* 10 *billion zeros of the Riemann zeta function are calculated and satisfy the Riemann hypothesis*, http://www.zetagrid.net.

[22] A. Weil, *Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] 1952, Tome Supplémentaire, 252–265 ; Oeuvres Scientifiques (Collected Papers), Vol. II, Springer, New York, 1979, 48–61.

Département de Mathématiques et Statistique
Université de Montréal
CP 6128 succ. Centre-Ville
Montréal, QC, H3C 3J7, Canada
E-mail: kadiri@dms.umontreal.ca

Reçu le 5.2.2002
et révisé le 10.11.2004 (4209)