

## Sur les polynômes $f(X, Y)$ tels que $K[f]$ est intégralement fermé dans $K[X, Y]$

par

MOHAMED AYAD (Calais)

**1. Introduction.** Soient  $K$  un corps de caractéristique 0, et  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme non constant. Dans [9, thm. 2.1], A. Nowicki a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $K[f]$  soit intégralement fermé dans  $K[X, Y]$ . Dans ce cas, on dira que  $f$  est *clos* sur  $K$ . L'une de ces conditions est reliée au Jacobien comme suit : Soit  $d$  la  $K$ -dérivation  $K[X, Y] \rightarrow K[X, Y]$  définie par

$$d(g) = [f, g] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial X} \\ \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix}$$

et soit  $\ker d = \{g(X, Y) \in K[X, Y]; [f, g] = 0\}$ ; alors il existe  $h(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $\ker d = K[h]$  ([10, thm. 2.1], [16, cor.]). De plus  $f$  est clos sur  $K$  si et seulement si  $\ker d = K[f]$  ([9, thm. 2.1], [16, thm. 1.7]).

Dans la suite nous ajouterons de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme soit clos et nous produirons des exemples de tels polynômes. Nous démontrerons en particulier le résultat suivant (cf. théorème 8) :

**THÉORÈME.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0,  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . Alors  $f$  est clos sur  $K$  si et seulement s'il existe  $a \in K$  tel que  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\bar{K}$ .*

Nous étudierons ensuite la classe des polynômes  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$  tels que pour tout  $a \in K$ ,  $f(X, Y) + a$  est absolument irréductible. De tels polynômes seront dits *totalement clos* sur  $K$ .

Dans la dernière partie, nous montrerons que certains résultats comme par exemple le théorème précédent ne sont pas vrais en caractéristique  $p > 0$ .

**2. Polynômes algébriquement dépendants sur  $K$ , jacobien et résultant.** Soient  $K$  un corps de caractéristique 0, et  $f(X, Y), g(X, Y) \in$

$K[X, Y]$  deux polynômes de degré  $m$  et  $n$  respectivement. A. Magnus [7] a montré que si  $(m, n) = 1$  et si  $[f, g] = 0$ , alors il existe des polynômes  $h(X, Y)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$  à coefficients dans  $K$  tels que

$$f(X, Y) = u(h(X, Y)), \quad g(X, Y) = v(h(X, Y)).$$

Le cas général est traité dans [9] et [16] et représente l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) contenue dans le :

**THÉORÈME 1.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle, et  $f(X, Y)$ ,  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  deux polynômes tels que l'un au moins dépend de  $X$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe des polynômes  $h(X, Y)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$  à coefficients dans  $K$  tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ ,  $g(X, Y) = v(h(X, Y))$ .*
- (ii) *Les polynômes  $f(X, Y)$ ,  $g(X, Y)$  sont algébriquement dépendants sur  $K$ .*
- (iii) *Le jacobien  $[f, g]$  est identiquement nul.*
- (iv) *Il existe un entier  $q \geq 1$  et deux polynômes  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  irréductible et  $A(Y) \in K[Y]$  non nul tels que*

$$\text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) = A(Y)[M(Z, T)]^q.$$

*Preuve.* Pour l'équivalence de (i), (ii), (iii), on consultera [9, thm. 2.1] et [16, lemma 1.1].

(i) $\Rightarrow$ (iv). Pour obtenir cette implication on utilisera le résultat suivant démontré dans [8, thm. 1]. En fait les énoncés explicites dans [8, thm. 1] supposent que le corps est algébriquement clos, mais comme l'écrivent les auteurs eux-mêmes dans l'introduction, le résultat est valable sur n'importe quel corps. Voir aussi [3, énoncé 10.14] pour une généralisation.

**LEMME 2.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p \geq 0$  et  $t, Z, T$  des variables algébriquement indépendantes sur  $K$ ,  $u(t), v(t) \in K[t]$  deux polynômes non tous deux constants. Alors il existe un entier  $l \geq 1$ ,  $c \in K^*$  et un polynôme irréductible  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  tels que  $\text{Res}_t(v(t) - Z, u(t) - T) = c[M(Z, T)]^l$ .*

*Preuve de l'implication.* Quitte à permuter  $f$  et  $g$ , on peut supposer que  $\deg_X g \geq 1$ , ce qui implique que  $\deg v(t) \geq 1$  et  $\deg_X h \geq 1$ . Posons

$$v(t) - Z = a(t - \alpha_1(Z)) \dots (t - \alpha_r(Z)), \quad h(X, Y) = a_m(Y)X^m + \dots + a_0(Y)$$

où  $a \in K$ ,  $a_0(Y), \dots, a_m(Y) \in K[Y]$ ,  $a_m(Y) \neq 0$  et  $\alpha_1(Z), \dots, \alpha_r(Z)$  sont les racines distinctes ou non de  $v(t) - Z$  dans une clôture algébrique de  $K(Z)$ . On a

$$\begin{aligned} & \text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) \\ &= \text{Res}_X(v(h(X, Y)) - Z, u(h(X, Y)) - T) \\ &= \text{Res}_X[a(h(X, Y) - \alpha_1(Z)) \dots (h(X, Y) - \alpha_r(Z)), u(h(X, Y)) - T]. \end{aligned}$$

Pour tout  $i = 1, \dots, r$ , soient  $\theta_1^{(i)}(Y, Z), \dots, \theta_m^{(i)}(Y, Z)$  les racines du polynôme  $h(X, Y) - \alpha_i(Z)$  dans une clôture algébrique de  $K(Y, Z)$ ; alors on a

$$\begin{aligned} & \text{Res}_X[a(h(X, Y) - \alpha_1(Z)), u(h(X, Y)) - T] \\ &= [aa_m(Y)]^{\deg_X f} \prod_{j=1}^m (u(h(\theta_j^{(1)}), Y)) - T = [aa_m(Y)]^{\deg_X f} (u(\alpha_1(Z)) - T)^m \end{aligned}$$

et pour tout  $i, 2 \leq i \leq r$  :

$$\begin{aligned} & \text{Res}_X(h(X, Y) - \alpha_i(Z), u(h(X, Y)) - T) \\ &= [a_m(Y)]^{\deg_X f} \prod_{j=1}^m (u(h(\theta_j^{(i)}), Y)) - T = a_m(Y)^{\deg_X f} (u(\alpha_i(Z)) - T)^m. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) \\ &= a^{\deg_X f} a_m(Y)^r a^{\deg_X f} [(u(\alpha_1(Z)) - T) \dots (u(\alpha_r(Z)) - T)]^m \\ &= a^{\deg_X f} a_m(Y)^r a^{\deg_X f} [\text{Res}_t(v(t) - Z, u(t) - T)]^m \frac{1}{a^{m \deg u}} \\ &= a_m(Y)^r a^{\deg_X f} [\text{Res}_t(v(t) - Z, u(t) - T)]^m. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2 ci-dessus on conclut que

$$\text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) = A(Y)[M(Z, T)]^q$$

avec  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$ ,  $A(Y) \in K[Y]$ ,  $A(Y) \neq 0$  et  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  irréductible.

(iv)  $\Rightarrow$  (ii). Dans l'identité contenue dans (iv) on pose  $Z = g(W, Y)$ ,  $T = f(W, Y)$  où  $W$  est une nouvelle variable et on a

$$\begin{aligned} & \text{Res}_X(g(X, Y) - g(W, Y), f(X, Y) - f(W, Y)) \\ &= A(Y)[M(g(W, Y), f(W, Y))]^q. \end{aligned}$$

Or les polynômes ci-dessus, dont on calcule le résultant, ont une racine commune  $X = W$ , et comme  $A(Y) \neq 0$ , on a  $M(g(W, Y), f(W, Y)) = 0$ , ce qui implique que les deux polynômes  $f$  et  $g$  sont algébriquement dépendants sur  $K$ .

**3. Polynômes clos de  $K[X, Y]$ .** Soit  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme et soit  $d : K[X, Y] \rightarrow K[X, Y]$  la  $K$ -dérivation définie par  $d(g) = [f, g]$ , et

$\tilde{d}$  son extension à  $K(X, Y)$ . On notera  $C_K(f)$  le noyau de  $d$  et  $\tilde{C}_K(f)$  celui de  $\tilde{d}$ .

Il est clair que si  $f$  est le polynôme constant, alors  $C_K(f) = K[X, Y]$ . Plus généralement, on a

**THÉORÈME 3.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme non constant. Alors il existe  $h(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $C_K(f) = K[h]$ .*

*Preuve* (voir [10, thm. 2.8]). Il est prouvé dans [16, cor.] que si  $K$  est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle non dénombrable, il existe  $h$  tel que  $C_K(f) = K[h]$  et  $\tilde{C}_K(f) = K(h)$ .

La notion de polynôme clos peut être exprimée au moyen du noyau de la dérivation associée à ce polynôme. Certaines équivalences contenues dans le théorème qui suit ont été démontrées dans [9, thm. 2.1].

**THÉORÈME 4.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $C_K(f) = K[f]$ .
- (ii) *L'anneau  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X, Y]$ .*
- (iii)  *$K[f]$  est un élément maximal dans l'ensemble ordonné*

$$A = \{K[g]; g \in K[X, Y] \setminus K\}.$$

(iv) *Pour tout  $u(t) \in K[t]$  et  $h(X, Y) \in K[X, Y]$ , si  $f = u \circ h$ , alors  $\deg u = 1$ .*

(v) *Pour tout  $g(X, Y) \in K[X, Y]$ , s'il existe  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  irréductible,  $A(Y) \in K[Y] - \{0\}$  et  $q \in \mathbb{N}$  non nul tels que*

$$\text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) = A(Y)M(Z, T)^q,$$

*alors il existe  $c \in K$  et  $u(T) \in K[T]$  tels que  $M(Z, T) = c(Z - u(T))$ .*

*Preuve.* Pour l'équivalence des propriétés (i), (ii), (iii), on consultera [9, thm. 2.1].

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv). C'est clair.

(ii)  $\Rightarrow$  (v). Soit  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que

$$\text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) = A(Y)M(Z, T)^q$$

avec  $A(Y) \in A[Y] - \{0\}$ ,  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  irréductible, et  $q \in \mathbb{N}$  non nul ; alors  $M(g, f) = 0$ . L'examen du déterminant de Sylvester qui permet de calculer ce résultant montre qu'il est de la forme

$$A(Y)Z^m + A_{m-1}(Y, T)Z^{m-1} + \dots + A_0(Y, T)$$

avec  $m = \deg_X(f(X, Y))$ . Donc  $g$  est entier sur  $K[f]$  et, d'après (ii),  $g \in K[f]$ . Il existe donc  $u(t) \in K[t]$  tel que  $g - u(f) = 0$ , d'où  $M(Z, T) = c(Z - u(T))$  avec  $c \in K^*$ .

(v)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  un élément entier sur  $K[f]$ . D'après le théorème 1, on a

$$\text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) = A(Y)M(Z, T)^q$$

avec  $A(Y) \in K[Y] \setminus \{0\}$ ,  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  irréductible, et  $q \in \mathbb{N}$  non nul. D'après (v),  $M(Z, T) = c(Z - u(T))$  avec  $c \in K^*$  et par suite  $g = u(f) \in K[f]$  et  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X, Y]$ .

On dira qu'un polynôme  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  est *non composé* s'il vérifie la condition (iv) ci dessus.

L'utilisation du résultat qui suit ([14, lemma 3]) nous permettra de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme soit clos.

LEMME 5. *Soient  $F$  un corps,  $A(X_1, \dots, X_k)$ ,  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  des polynômes à coefficients dans  $F$  tel que le premier est non constant et le deuxième a un degré positif en chacune des variables. Alors le polynôme  $\psi(A(X_1, \dots, X_k), Z_1, \dots, Z_n)$  est réductible sur  $F$  si et seulement si  $A(X_1, \dots, X_k) = u(B(X_1, \dots, X_k))$  et  $\psi(u(t), Z_1, \dots, Z_n)$  est réductible sur  $F$  où  $u$  et  $B$  sont des polynômes à coefficients dans  $F$ .*

PROPOSITION 6. *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme non constant. Alors  $f$  est clos si et seulement si pour tout entier  $n \geq 1$  et tout polynôme  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  à coefficients dans  $K$  on a l'équivalence des propositions suivantes :*

- (i)  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  est irréductible sur  $K$ .
- (ii)  $\psi(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n)$  est irréductible sur  $K$ .

*Preuve.* Supposons que  $f$  est clos et soient  $n \geq 1$  un entier et  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  un polynôme à coefficients dans  $K$  de degré positif par rapport à chacune des variables.

Supposons que (ii) n'ait pas lieu ; alors puisque  $f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n$  sont algébriquement indépendants sur  $K$ ,  $\psi(f, Z_1, \dots, Z_n) \notin K$ . Il s'ensuit que  $\psi(f, Z_1, \dots, Z_n)$  est réductible sur  $K$ . Le lemme 5 montre qu'il existe des polynômes  $u(t), h(X, Y)$  à coefficients dans  $K$  tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$  et  $\psi(u(t), Z_1, \dots, Z_n)$  soit réductible sur  $K$ . Comme  $f$  est un polynôme clos, on a  $\deg u = 1$  et par suite  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  est réductible, ce qui montre que (i) n'est pas vérifiée.

Supposons que (i) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire que  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  soit réductible sur  $K$ . Posons

$$\psi(t, Z_1, \dots, Z_n) = \psi_1(t, Z_1, \dots, Z_n)\psi_2(t, Z_1, \dots, Z_n)$$

où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des polynômes à coefficients dans  $K$ , non constants ; alors on a

$$\psi(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n) = \psi_1(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n)\psi_2(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n).$$

Il est clair que les polynômes  $\psi_1(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n)$  et  $\psi_2(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n)$  sont non constants, donc  $\psi(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n)$  est réductible sur  $K$ , ce qui prouve que la proposition (ii) n'est pas vérifiée.

Supposons maintenant que  $\psi$  ne soit pas clos. On doit montrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  et un polynôme  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n)$  à coefficients dans  $K$  de degré positif en chacune des variables tels que les propositions (i) et (ii) ne soient pas équivalentes. Plus que cela, on va montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , un tel polynôme  $\psi$  existe. En effet puisque  $f$  n'est pas clos, il existe des polynômes  $h(X, Y)$ ,  $u(t)$  à coefficients dans  $K$ ,  $\deg u \geq 2$  tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  considérons le polynôme  $\psi(t, Z_1, \dots, Z_n) = t - u(Z_1, \dots, Z_n)$ . Il est clair qu'il est irréductible sur  $K$ . Mais on a

$$\psi(f(X, Y), Z_1, \dots, Z_n) = u(h(X, Y)) - u(Z_1, \dots, Z_n)$$

et ce dernier polynôme est réductible sur  $K$ , ce qui montre que (i) n'implique pas (ii).

**4. Extension du corps de base et théorème de Bertini.** Le résultat qui suit prouvera qu'il est inutile de préciser le corps sur lequel le polynôme  $f(X, Y)$  est clos.

**THÉORÈME 7.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0,  $E$  une extension de  $K$ ,  $X$  et  $Y$  des variables algébriquement indépendantes sur  $E$ , et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . Alors,  $f$  est clos sur  $K$  si et seulement si  $f$  est clos sur  $E$ .*

*Preuve.* Il est clair que si  $f$  n'est pas clos sur  $K$ , il ne l'est pas sur  $E$ .

Réciproquement, supposons que  $f$  n'est pas clos sur  $E$ ; alors en vertu du théorème 4, il existe des polynômes  $h(X, Y)$ ,  $u(t)$  à coefficients dans  $E$ ,  $\deg u \geq 2$  tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ . Quitte à permuter  $X$  et  $Y$  on peut supposer que  $n = \deg_X f \geq 1$ . On prend alors un entier  $m > n$  et l'on a  $f(X, X^m) = u(h(X, X^m))$ . On note  $K[Y][X]_{m-1}$  (resp.  $E[Y][X]_{m-1}$ ) le module sur  $K[Y]$  (resp.  $E[Y]$ ) formé des polynômes à coefficients dans  $K$  (resp.  $E$ ) dont le degré par rapport à  $X$  est au plus égal à  $m - 1$ . D'après le théorème de Kronecker les applications  $\theta$  et  $\hat{\theta}$  ci-dessous sont bijectives ([15, chap. 1, §6, cor. 1 et cor. 2] ou [3, énoncé 10.7]) :

$$\begin{aligned} \theta : K[Y][X]_{m-1} &\rightarrow K[X], & g(X, Y) &\mapsto g(X, X^m), \\ \hat{\theta} : E[Y][X]_{m-1} &\rightarrow E[X], & g(X, Y) &\mapsto g(X, X^m). \end{aligned}$$

L'hypothèse  $\deg_X f \geq 1$  montre que  $\deg f(X, X^m) \geq 1$  et  $\deg h(X, X^m) \geq 1$ . Soient  $a, b \in E$  tels que le polynôme  $A(X) = ah(X, X^m) + b$  soit unitaire et vérifie  $A(0) = 0$ . On pose  $u^*(t) = u\left(\frac{t-b}{a}\right)$  et l'on a

$$(1) \quad f(X, X^m) = u^*(A(X)) = u^*(ah(X, X^m) + b).$$

La méthode déjà employée pour la composition des polynômes à une indéterminée ([15, chap. 1, §3, thm. 6] ou [3, énoncé 4.9]) montre que  $u^*(t)$  et  $A(X)$  sont à coefficients dans  $K$ . En appliquant  $\widehat{\theta}^{-1}$  à (1), on obtient  $f(X, Y) = u^*(ah(X, Y) + b)$ . On pose

$$h_1(X, Y) = \theta^{-1}(A(X)) = \theta^{-1}(ah(X, X^m) + b).$$

Alors  $h_1(X, Y) \in K[X, Y]$  et  $h_1(X, X^m) = A(X) = ah(X, X^m) + b$  et par suite  $\widehat{\theta}(h_1) = \widehat{\theta}(ah + b)$ . Or  $\widehat{\theta}$  est injective, donc

$$h_1(X, Y) = ah(X, Y) + b \quad \text{et} \quad f(X, Y) = u^*(h_1(X, Y))$$

avec  $u^*(t) \in K[t]$ ,  $\deg u^* \geq 2$  et  $h_1(X, Y) \in K[X, Y]$ . On en déduit que  $f$  n'est pas clos sur  $K$ .

Aux conditions contenues dans le théorème 4, exprimant qu'un polynôme est clos, nous allons ajouter une sixième à travers le théorème qui suit, et déjà énoncé dans l'introduction.

**THÉORÈME 8.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0,  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . Alors  $f$  est clos sur  $K$  si et seulement s'il existe  $a \in K$  tel que  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .*

Pour la preuve de ce théorème, nous ferons usage du résultat suivant :

**LEMME 9.** *Soient  $F$  un corps algébriquement clos et  $f(X, Y) \in F[X, Y] \setminus F$  un polynôme de degré  $d$ . Alors  $f(X, Y) - \lambda$  est réductible sur  $F$  pour une infinité de  $\lambda \in F$  si et seulement si  $f(X, Y)$  est composé.*

*Preuve.* Voir [15, chap. 3, §3, cor. 1].

*Preuve du théorème 8.* Supposons que  $f$  n'est pas clos sur  $K$  ; alors en vertu du théorème 4, il existe des polynômes  $u(t)$ ,  $\deg u \geq 2$ ,  $h(X, Y)$  à coefficients dans  $K$  tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ . Soit  $a \in K$  ; on pose

$$v(t) = u(t) + a = \lambda(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n)$$

avec  $n \geq 2$ ,  $\lambda \in K^*$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{K}$ . On a

$$f(X, Y) + a = u(h) + a = v(h) = \lambda(h - \alpha_1) \dots (h - \alpha_n),$$

ce qui prouve que le polynôme  $f(X, Y) + a$  est réductible sur  $\overline{K}$  pour tout  $a \in K$ . Réciproquement, supposons que  $f$  soit clos sur  $K$  ; alors d'après le théorème 5,  $f$  est clos sur  $\overline{K}$ . D'après le lemme précédent, les valeurs de  $a \in K$  telles que  $f(X, Y) + a$  soit réductible sur  $\overline{K}$  sont en nombre fini. Comme  $K$  est infini, il existe  $a \in K$  tel que  $f(X, Y) + a$  est absolument irréductible.

Le lemme 9, qui est un cas particulier d'un théorème de Bertini, a été précisé par Y. Stein qui a démontré le résultat suivant [16, thm. 1.7].

Soit  $F$  un corps algébriquement clos de caractéristique zéro non dénombrable, et  $f(X, Y) \in F[X, Y] \setminus F$  un polynôme non composé de degré  $d$ . Pour tout  $a \in F$ , on pose

$$f(X, Y) + a = \prod_{i=1}^{n_a+1} (f_{a,i}(X, Y))^{r_{a,i}},$$

où  $f_{a,i}(X, Y)$  est un polynôme irréductible dans  $F[X, Y]$ ,  $n_a \in \mathbb{N}$  et  $r_{a,i}$  est un entier  $\geq 1$ . Alors  $\sum_{a \in F} n_a \leq d - 1$ .

Cette même inégalité a été établie par E. Cygan [4, thm. 2.5] lorsque  $F = \mathbb{C}$  et  $f(X_1, \dots, X_n)$  est un polynôme non composé.

Dans le cas d'un polynôme à deux indéterminées  $f(X, Y)$  de degré  $d$  à coefficients dans un corps algébriquement clos  $F$ , l'inégalité de Stein a été améliorée par D. Lorenzini pour prendre la forme suivante [6, cor. 1] :

$$\sum_{a \in F} n_a \leq \min_{b \in F} \left\{ \sum_i \deg f_{b,i} \right\} - 1 \leq d - 1.$$

On consultera [5] et [17] pour des développements de cette question.

En fait l'inégalité de Stein peut être interprétée ainsi : soit  $f(X, Y)$  un polynôme à coefficients dans  $F$  tel que le polynôme à trois indéterminées  $f(X, Y) + Z$  est irréductible sur  $F$  ; si en outre  $f(X, Y)$  est clos, le théorème de Stein implique que par spécialisation de  $Z$  dans  $F$ , le polynôme obtenu reste irréductible sur  $F$  sauf peut-être pour au plus  $d-1$  valeurs de  $Z$  dans  $F$ .

REMARQUE. En utilisant le résultat de Cygan, cité ci-dessus, et en adaptant l'énoncé du théorème 7 au cas de plusieurs variables, on peut démontrer que, pour qu'un polynôme non constant  $f(x_1, \dots, x_n)$  à coefficients dans un corps  $K$  de caractéristique zéro soit clos sur  $K$ , il faut et il suffit qu'il existe  $a \in K$  tel que  $f(x_1, \dots, x_n) + a$  soit irréductible sur  $\overline{K}$ .

**5. Exemples de polynômes clos de  $K[X, Y]$ .** Soit  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$  un polynôme tel que sa partie homogène dominante  $f^+(X, Y)$  ne soit pas de la forme  $f^+(X, Y) = c \cdot h^d(X, Y)$  avec  $h(X, Y) \in K[X, Y]$ ,  $d \geq 2$  ; alors il est évident que  $f(X, Y)$  est clos sur  $K$ .

Soient  $p$  et  $q$  des entiers rationnels tels que  $p > 0$  ou  $q > 0$  et  $(p, q) = 1$ . On dit qu'un polynôme non nul  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  est *homogène* de degré  $n$  dans la direction  $(p, q)$  si  $f(X, Y)$  s'écrit sous la forme

$$f(X, Y) = \sum_{pi+qj=n} a_{ij} X^i Y^j.$$

Si  $f$  est homogène dans la direction  $(p, q)$ , on dira que  $f$  est *primitif* si  $f$  ne s'exprime pas sous la forme  $f(X, Y) = a(h(X, Y))^d$  avec  $a \in K^*$ ,  $h(X, Y) \in$



$K[X, Y]$  homogène dans la direction  $(p, q)$  et  $d \geq 2$ . L'un des exemples de polynômes clos est fourni par la proposition suivante [9, prop. 2.3] :

EXEMPLE. Soient  $p, q$  des entiers  $p > 0$  et  $q > 0$  et soit  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme homogène dans la direction  $(p, q)$ . On suppose que  $f$  est primitif. Alors  $f$  est un polynôme clos sur  $K$ .

Le deuxième exemple de polynôme clos donné dans [9, prop. 2.2] est celui d'une composante d'un automorphisme de  $K[X, Y]$ . Plus précisément soit  $\theta : K[X, Y] \rightarrow K[X, Y]$  un automorphisme de  $K$ -algèbres tel que  $\theta(X) = f(X, Y)$ ,  $\theta(Y) = g(X, Y)$ ; alors  $f$  et  $g$  sont des polynômes clos. Nous verrons plus loin que ce résultat peut être redémontré en utilisant la proposition suivante :

PROPOSITION 10. Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$  un polynôme irréductible. On suppose qu'il existe  $(x, y) \in K^2$  tel que  $f(x, y) = 0$ . Alors  $f(X, Y)$  est clos sur  $K$ .

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe  $h(X, Y) \in K[X, Y]$ ,  $u(t) \in K[t]$ ,  $\deg u \geq 2$ , tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ . En posant

$$u(t) = \lambda(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_s),$$

$s \geq 2$ ,  $\lambda \in K^*$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \overline{K}$ , on peut écrire  $f(X, Y)$  sous la forme

$$f(X, Y) = \lambda(h(X, Y) - \alpha_1) \dots (h(X, Y) - \alpha_s)$$

et par suite

$$0 = f(x, y) = \lambda(h(x, y) - \alpha_1) \dots (h(x, y) - \alpha_s).$$

On conclut qu'il existe  $i \in \{1, \dots, s\}$  tel que  $h(x, y) = \alpha_i$ , d'où  $\alpha_i \in K$ , ce qui contredit l'irréductibilité du polynôme  $u$  sur  $K$ ; donc  $f(X, Y)$  est clos sur  $K$ .

COROLLAIRE 11. Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . On considère les assertions suivantes :

- (a) Il existe  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $K[f, g] = K[X, Y]$ .
- (b) Le polynôme  $f$  est irréductible sur  $K$  et il existe  $A(t), B(t) \in K[t]$  tels que  $f(A(t), B(t)) = 0$ .
- (c)  $f$  est clos.

Alors (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). Soit  $\theta : K[X, Y] \rightarrow K[X, Y]$  l'unique  $K$ -automorphisme tel que  $\theta(X) = f(X, Y)$ ,  $\theta(Y) = g(X, Y)$  et soit  $\theta^{-1}$  l'automorphisme réciproque. On pose  $\theta^{-1}(X) = h(X, Y)$  et  $\theta^{-1}(Y) = k(X, Y)$ . On a  $\theta^{-1}(\theta(X)) = X$ , donc  $f(h(X, Y), k(X, Y)) = X$ . Supposons que  $f(X, Y)$  se décompose dans  $\overline{K}[X, Y]$  sous la forme  $f(X, Y) = f_1(X, Y)f_2(X, Y)$ ;

alors on a

$$f_1(h(X, Y), k(X, Y))f_2(h(X, Y), k(X, Y)) = X.$$

On en déduit que (par exemple)  $f_1(h(X, Y), k(X, Y)) = c \in \overline{K}$ , ce qui contredit l'indépendance algébrique sur  $K$  de  $h$  et  $k$ . Ainsi  $f$  est absolument irréductible. En faisant  $X = 0, Y = t$  dans l'identité  $f(h(X, Y), k(X, Y)) = X$  on obtient  $f(h(t), k(0, t)) = 0$ , ce qui implique que  $f$  est paramétrée par les polynômes  $h(0, t), k(0, t)$ .

(b) $\Rightarrow$ (c). Cette implication découle de la proposition 10.

La proposition qui suit fournit un autre exemple de polynôme clos.

**PROPOSITION 12.** *Soient  $m \geq 2$  un entier,  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $L_1(X, Y), \dots, L_m(X, Y) \in K[X, Y]$  des polynômes de degré 1 tels que pour tout  $(i, j), i \neq j, L_i$  n'est pas associé à  $L_j$  et tel qu'il existe  $(x, y) \in K^2$  avec  $L_1(x, y) = L_2(x, y) = 0$ . Alors le polynôme*

$$f(X, Y) = \prod_{i=1}^m L_i(X, Y)^{r_i}, \quad r_i > 0, (r_1, \dots, r_m) = 1$$

*est clos sur  $K$ . De plus pour tout  $a \in K^*, f(X, Y) + a$  est absolument irréductible.*

*Preuve.* Ce résultat est démontré dans [6, cor. 2], dans le cas où  $K$  est algébriquement clos. Le cas général découle du théorème 5.

Un autre exemple de polynôme clos est fourni par les polynômes  $f(X, Y)$  de la forme  $f(X, Y) = F(X) + G(Y)$ . Plus précisément, en modifiant légèrement l'énoncé de [15, lemme 3, p. 27], on obtient la proposition suivante :

**PROPOSITION 13.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $F(t), G(t) \in K[t]$  des polynômes non constants. Alors le polynôme  $f(X, Y) = F(X) + G(Y)$  est clos sur  $K$ .*

La proposition qui suit permettra de retrouver certains polynômes clos déjà cités.

**PROPOSITION 14.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme non constant. Si les polynômes  $\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y), \frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y)$  sont premiers entre eux alors  $f(X, Y)$  est clos sur  $K$ .*

*Preuve.* Supposons que  $f$  n'est pas clos; alors il existe des polynômes  $h(X, Y), u(t)$  à coefficients dans  $K$  tels que  $\deg u \geq 2$  et  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ . On déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X}(X, Y) &= u'(h(X, Y)) \frac{\partial h}{\partial X}(X, Y), \\ \frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y) &= u'(h(X, Y)) \frac{\partial h}{\partial Y}(X, Y), \end{aligned}$$

ce qui prouve que le polynôme non constant  $u'(h(X, Y))$  divise les deux polynômes  $\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y)$ .

REMARQUES. (a) Il est clair que si  $f(X, Y)$  est de la forme  $f(X, Y) = A(X) + B(Y)$  où  $A$  et  $B$  sont des polynômes à coefficients dans  $K$ , tous deux non constants, alors  $f$  vérifie les conditions de la proposition 14 et est donc clos.

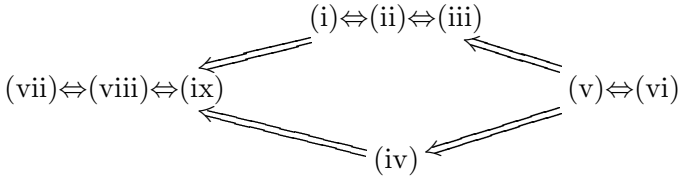
(b) Si le polynôme  $f(X, Y)$  est une composante d'un automorphisme de  $K[X, Y]$ , alors il existe  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $K[f, g] = K[X, Y]$ . On en déduit que le jacobien des deux polynômes  $f$  et  $g$  appartient à  $K^*$ , ce qui implique que  $\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y)$  sont premiers entre eux et ensuite grâce à la proposition 14,  $f$  est un polynôme clos.

**6. Polynôme totalement clos.** Soient  $K$  un corps de caractéristique 0,  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$  un polynôme de degré  $d$ . Nous avons vu précédemment que  $f$  est clos si et seulement s'il existe  $a \in K$  tel que  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ . De plus le théorème de Stein montre que si  $f$  est clos, alors pour tout  $a \in K$  sauf peut-être pour au plus  $d - 1$  valeurs,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ . Nous allons considérer dans la suite la classe des polynômes  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$  tels que pour tout  $a \in K$ ,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ . De tels polynômes sont évidemment clos. Avant de donner des exemples de polynômes totalement clos, examinons les assertions contenues dans la proposition suivante, où la notation  $A^*$  pour un anneau commutatif unitaire  $A$  de caractéristique nulle désigne son groupe des unités.

PROPOSITION 15. Soient  $K$  un corps,  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . On considère les propositions suivantes :

- (i) Pour tout  $u, v \in K[X, Y] \setminus \{0\}$ , si  $u \cdot v \in K[f]$  alors  $u \in K[f]$  et  $v \in K[f]$ .
- (ii)  $K(f)[X, Y]^* = K(f)^*$ .
- (iii) Pour tout polynôme  $P(t) \in K[t]$  irréductible,  $P(f(X, Y))$  est irréductible sur  $K$ .
- (iv) Pour tout  $a \in K$ ,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .
- (v) Pour tout  $a \in \overline{K}$ ,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .
- (vi)  $\overline{K}(f)[X, Y]^* = \overline{K}(f)^*$ .
- (vii)  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X, Y]$ .
- (viii)  $K(f)$  est algébriquement fermé dans  $K(X, Y)$ .
- (ix)  $K(f)$  est intégralement fermé dans  $K(f)[X, Y]$ .

Alors on a les implications et équivalences suivantes :



Toutes les autres implications sont fausses.

*Preuve.* Il est clair que l'équivalence  $(v) \Leftrightarrow (vi)$  est une conséquence immédiate de l'équivalence  $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ . Ces deux équivalences sont signalées sans démonstration dans [12, lemma 5], en relation avec la conjecture du jacobien. Aussi allons nous démontrer complètement les implications contenues dans la proposition 15.

$(i) \Rightarrow (ii)$ . Soit  $h(X, Y)/A(f) \in K(f)[X, Y]^*$ . Alors il existe  $k(X, Y)/B(f) \in K(f)[X, Y]$  tel que

$$(h(X, Y)/A(f)) \cdot (k(X, Y)/B(f)) = 1,$$

d'où  $h(X, Y)k(X, Y) \in K[f]$  et par suite  $h(X, Y)/A(f) \in K(f)^*$ .

$(ii) \Rightarrow (i)$ . Soient  $u(X, Y), v(X, Y) \in K[X, Y]^*$  tels que  $u(X, Y)v(x, Y) = A(f) \in K(f)$  avec  $A(f) \neq 0$ . Alors

$$(u(X, Y)/A(f)) \cdot v(X, Y) = 1,$$

donc  $u(X, Y)/A(f)$  et  $v(X, Y)$  appartiennent à  $K(f)[X, Y]^*$  et par suite  $u(X, Y), v(X, Y) \in K[f]^*$ .

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ . Supposons que  $K(f)[X, Y]^* \neq K(f)^*$ ; alors il existe

$$A(X, Y)/D(f) \in K(f)[X, Y]^* \setminus K(f)^*$$

avec  $A(X, Y) \in K[X, Y]$  et  $D(f) \in K[f]$ . Il s'ensuit que  $A(X, Y) \in K(f)[X, Y]^*$  et  $A(X, Y) \notin K[f]$ . Il existe donc  $B(X, Y) \in K[X, Y]$  et  $P(f) \in K[f] \setminus \{0\}$  tels que

$$(2) \quad A(X, Y)B(X, Y) = P(f).$$

En décomposant le polynôme  $P(t)$  en facteurs irréductibles dans  $K[t]$ , on peut écrire (2) sous la forme

$$(3) \quad A(X, Y)B(X, Y) = P_1(f) \dots P_r(f).$$

Si tous les  $P_i(f)$  étaient irréductibles dans  $K[X, Y]$ , on aurait  $A(X, Y) = \lambda P_{i_1}(f) \dots P_{i_s}(f)$  avec  $\lambda \in K^*$  et par suite  $A(X, Y)$  appartiendrait à  $K[f]$ , ce qui est exclu. Il existe donc  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $P_i(f)$  est réductible dans  $K[X, Y]$  bien que  $P_i(t)$  soit irréductible dans  $K[t]$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme  $P(t) \in K[t]$  irréductible tel que  $P(f)$  est réductible dans  $K[X, Y]$ . Posons  $P(f) = g_1(X, Y) \dots g_r(X, Y)$  avec  $r \geq 2$  et  $g_1(X, Y), \dots, g_r(X, Y) \in K[X, Y]$  irréductibles. Il est clair que pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $g_i(X, Y) \in K(f)[X, Y]^*$ . Si pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$   $g_i(X, Y)$  appartenait à  $K[f]$ , on aurait en posant

$g_i(X, Y) = P_i(f)$  la relation  $P(f) = P_1(f) \dots P_r(f)$  et par suite  $P(t) = P_1(t) \dots P_r(t)$ , ce qui contredit l'irréductibilité de  $P(t)$  sur  $K$ . Il existe donc  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $g_i(X, Y) \notin K(f)^*$  et  $g_i(X, Y) \in K(f)[X, Y]^*$ .

(v) $\Rightarrow$ (iii). Supposons qu'il existe un polynôme  $P(t) \in K[t]$  irréductible tel que  $P(f(X, Y))$  soit réductible sur  $K$  et soit  $h(X, Y)$  un facteur irréductible de  $P(f)$  dans  $K[X, Y]$ . On pose

$$P(t) = \lambda(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_r), \quad \lambda \in K^*, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \overline{K}.$$

On a  $P(f(X, Y)) = \lambda(f(X, Y) - \alpha_1) \dots (f(X, Y) - \alpha_r)$ . Comme pour tout  $i = 1, \dots, r$ ,  $f(X, Y) - \alpha_i$  est irréductible sur  $\overline{K}$ , il existe  $\mu \in K^*$  et  $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, r\}$  tels que

$$h(X, Y) = \mu(f(X, Y) - \alpha_{i_1}) \dots (f(X, Y) - \alpha_{i_s}).$$

On en déduit que  $h(X, Y) \in K[X, Y] \cap \overline{K}[f] = K[f]$ . Il s'ensuit que  $P(f(X, Y)) = P_1(f) \dots P_e(f)$ , d'où  $P(t)$  est réductible sur  $K$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

(v) $\Rightarrow$ (iv). Cette implication est évidente.

(i) $\Rightarrow$ (vii). Soit  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $g(X, Y)$  soit entier sur  $K[f]$  et  $g \neq 0$ ; alors il existe  $a_0(f), \dots, a_{n-1}(f) \in K[f]$ ,  $a_0(f) \neq 0$ , tels que

$$g^n + a_{n-1}(f)g^{n-1} + \dots + a_1(f)g + a_0(f) = 0,$$

d'où

$$g(g^{n-1} + a_{n-1}(f)g^{n-2} + \dots + a_1(f)) = -a_0(f) \in K[f] \setminus \{0\}$$

et par suite  $g \in K[f]$ .

(vii) $\Leftrightarrow$ (ix). Supposons que  $K(f)$  soit intégralement fermé dans  $K(f)[X, Y]$  et soit  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  un élément entier sur  $K[f]$ ; alors  $g \in K(f)[X, Y]$  et est entier sur  $K(f)$ , donc  $g(X, Y) \in K(f)$  et est entier sur  $K[f]$ . Or  $K[f]$  est intégralement fermé dans son corps des fractions  $K(f)$ , donc  $g(X, Y) \in K[f]$ .

Réciproquement, supposons que  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X, Y]$  et soit  $g(X, Y)/D(f)$  un élément de  $K(f)[X, Y]$ , entier sur  $K(f)$ ; alors  $g(X, Y)$  est entier sur  $K(f)$ . En écrivant l'équation intégrale de  $g$  sur  $K(f)$  sous la forme

$$g^n + \frac{a_{n-1}(f)}{d(f)} g^{n-1} + \dots + \frac{a_1(f)}{d(f)} g + \frac{a_0(f)}{d(f)} = 0$$

où  $a_0(f), \dots, a_{n-1}(f), d(f) \in K[f]$ ,  $d(f) \neq 0$ , nous voyons que  $d(f) \cdot g$  est un élément de  $K[X, Y]$  entier sur  $K[f]$ . D'après l'hypothèse,  $d(f) \cdot g \in K[f]$ . Il s'ensuit que  $g/D(f) \in K(f)$ .

(viii) $\Rightarrow$ (vii). Cette implication est évidente.

(vii) $\Rightarrow$ (viii). Pour obtenir cette implication on utilisera le résultat suivant [15, chap. 1, §2, thms. 3 et 4].

THÉORÈME 16. Soient  $F$  un corps,  $X_1, \dots, X_n$  des variables algébriquement indépendantes sur  $K$  et soit  $E$  un corps tel que  $F \subset E \subset F(X_1, \dots, X_n)$  et que le degré de transcendance de  $E$  sur  $F$  soit égal à 1. Alors il existe  $g \in E$  tel que  $E = F(g)$ . Si de plus  $E$  contient un polynôme non constant, on peut choisir  $g$  polynomial.

*Preuve de l'implication (vii)  $\Rightarrow$  (viii).* Soit  $\theta$  un élément de  $K(X, Y)$  algébrique sur  $K(f)$ ; alors le degré de transcendance sur  $K$  du corps  $E = K(f, \theta)$  est égal à 1. En tenant compte du fait que  $E$  contient le polynôme non constant  $f$  et en utilisant le théorème 16 on conclut qu'il existe  $h(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $E = K(h)$ . On en déduit qu'il existe des polynômes  $u(t), v(t), w(t)$  à coefficients dans  $K$  tels que  $f = u(h)$  et  $\theta = v(h)/w(h)$ . Comme  $f$  est clos on a  $\deg u = 1$  et il existe  $d(t) \in K[t]$  tel que  $h = d(f)$  et  $\theta = (v \circ d(f))/(w \circ d(f))$  ce qui montre que  $\theta \in K(f)$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (vii). En vertu du théorème 4, il suffit de montrer que pour tous polynômes  $u(t), h(X, Y)$  à coefficients dans  $K$ , si  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$  alors  $\deg u = 1$ . Supposons que

$$f(X, Y) = u(h(X, Y)) = a(h(X, Y) - \theta_1) \dots a(h(X, Y) - \theta_n)$$

où  $\theta_1, \dots, \theta_n$  sont les racines de  $u$  et  $n = \deg u$ . Comme  $f$  est irréductible sur  $\bar{K}$ , on conclut que  $n = 1$ .

REMARQUES. (a) Le contre-exemple qui suit montre que (iv) n'implique pas (v). Soient  $K = \mathbb{Q}$ ,  $\bar{K} = \overline{\mathbb{Q}}$  et

$$f(X, Y) = (X^2 - 2)Y + X = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})Y + X.$$

Pour tout  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , mais on a

$$\begin{aligned} f(X, Y) + \sqrt{2} &= (X + \sqrt{2})[(X - \sqrt{2})Y + 1], \\ f(X, Y) - \sqrt{2} &= (X - \sqrt{2})[(X + \sqrt{2})Y + 1]. \end{aligned}$$

Avec le même exemple, nous voyons que (iv) n'implique pas (iii), puisque en prenant  $P(t) = t^2 - 2$ , on a

$$P(f) = f^2 - 2 = (X^2 - 2)[(X^2 - 2)Y^2 + 2XY + 1].$$

(b) Soient  $K = \mathbb{Q}$ ,  $\bar{K} = \overline{\mathbb{Q}}$  et

$$f(X, Y) = X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY).$$

Il est clair que  $f(X, Y)$  est réductible sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , il ne vérifie donc ni (iv) ni (v). Il est aussi clair que pour tout  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $f(X, Y) - \alpha$  est irréductible sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Supposons qu'il existe  $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$  irréductible tel que  $P(f)$  soit réductible dans  $\mathbb{Q}[X, Y]$ . Posons  $P(t) = \lambda(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_r)$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}[t]$ ,  $P(f) = h_1(X, Y) \dots h_s(X, Y)$  dans  $\mathbb{Q}[X, Y]$ . On en déduit que

$$h_1(X, Y) \dots h_s(X, Y) = \lambda(f(X, Y) - \alpha_1) \dots (f(X, Y) - \alpha_r).$$

Comme les facteurs du second membre sont irréductibles sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , on conclut que pour tout  $i$ ,  $h_i(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y] \cap \overline{\mathbb{Q}}[f] = \mathbb{Q}[f]$  et par suite  $P(t)$  est réductible sur  $\mathbb{Q}$ , ce qui est exclu. On conclut que  $P(f)$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X, Y]$ , ce qui prouve que (iii) n'implique ni (iv) ni (v).

(c) Soient  $K$  un corps de caractéristique 0 et  $f(X, Y) = XY$ ; alors  $X \in K(f)[X, Y]^*$  et  $X \notin K(f)^*$ , de sorte que (i) n'est pas vérifiée. D'autre part, soit  $g(X, Y) \in K[X, Y]$  un élément entier sur  $K[f]$ ; alors  $g(X, Y)$  et  $f(X, Y)$  sont algébriquement dépendants sur  $K$ . Le théorème 1 montre qu'il existe des polynômes  $u(t), v(t), h(X, Y)$  à coefficients dans  $K$  tels que

$$XY = f(X, Y) = u(h(X, Y)) \quad \text{et} \quad g(X, Y) = v(h(X, Y)).$$

Il est clair que  $\deg u = 1$ , ce qui implique que  $K[f] = K[h]$  et  $g(X, Y) \in K[f]$  et par suite  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X]$ . En conclusion, la proposition (vii) n'implique pas la proposition (i).

(d) à la lumière des théorèmes 4, 7 et 8, si l'une des propositions (iv)–(ix) est vérifiée, le polynôme  $f(X, Y)$  est clos sur  $K$  et sur  $\overline{K}$ . En fait la proposition (iii) implique aussi que  $f$  est clos. En effet, supposons que  $f$  n'est pas clos sur  $K$ ; alors il existe des polynômes  $h(X, Y), u(t)$  à coefficients dans  $K$ ,  $\deg u \geq 2$ , tels que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$ . Posons  $u(t) = u_n t^n + \dots + u_1 t + u_0$  et soit  $P(t) = t - u_0$ . Alors on a

$$P(f) = u(h) - u_0 = h(u_n h^{n-1} + \dots + u_1),$$

ce qui prouve que  $P(f)$  est réductible dans  $K[X, Y]$ .

(e) On remarquera que dans les propositions 6 et 15(iii), il est question de substituer à une variable  $t$  le polynôme  $f(X, Y)$ . Soient  $n \geq 1$  un entier,  $\psi(t_1, \dots, t_n)$  et  $f(X, Y)$  deux polynômes à coefficients dans  $K$  tels que  $f$  soit clos et  $\psi$  soit irréductible. Si  $n \geq 2$ , la proposition 6 montre que  $\psi(f(X, Y), t_2, \dots, t_n)$  est irréductible sur  $K$ . Par contre, si  $n = 1$ , cela peut ne pas être le cas comme on peut le constater avec les polynômes  $\psi(t_1) = t_1$  et  $f(X, Y) = XY$ .

(f) Nous reprenons de [1] la définition qui suit des polynômes h ereditairement irréductibles.

**DÉFINITION.** On dit qu'un polynôme  $f(X, Y)$  à coefficients dans  $K$  est *h ereditairement irréductible* si pour tout couple de polynômes non constants  $(A(X), B(Y))$  à coefficients dans  $K$  le polynôme  $f(A(X), B(Y))$  est irréductible sur  $K$ .

Les propriétes de ces polynômes sont étudiées dans [1] et [13]. Le polynôme  $f(X, Y) = (X^2 + 1)Y + 1$  est h ereditairement irréductible sur n'importe quel corps de caractéristique nulle [13, answer to problem 1], mais il est clair qu'il n'est pas totalement clos. D'autre part le polynôme  $f(X, Y) = X - Y$  est totalement clos mais n'est pas h ereditairement irréductible puisque  $f(X^2, Y^2) = (X - Y)(X + Y)$ .

**7. Exemples de polynômes totalement clos.** Soient  $K$  un corps et  $\theta : K[X, Y] \rightarrow K[X, Y]$  un  $K$ -automorphisme tel que  $\theta(X) = f(X, Y)$ ,  $\theta(Y) = g(X, Y)$ . Alors  $f$  est irréductible sur  $\overline{K}$  (voir la preuve du corollaire 11). Le même argument vaut pour  $f(X, Y) + a$  pour tout  $a \in K$ . Le polynôme  $f(X, Y)$  vérifie donc l'assertion (iv) contenue dans la proposition 15.

Nous produisons maintenant un exemple de polynômes totalement clos vérifiant l'assertion (v) de la proposition 15.

**THÉORÈME 17.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle,  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ , et  $f^+(X, Y)$  la forme homogène dominante de  $f(X, Y)$ . On suppose que les polynômes  $\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y)$  engendrent l'idéal unité et que  $f^+(X, Y)$  n'a pas de facteurs multiples dans  $K[X, Y]$ . Alors pour tout  $a \in \overline{K}$ ,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .*

*Preuve.* Supposons qu'il existe  $a \in \overline{K}$  tel que  $f(X, Y) + a$  soit réductible sur  $\overline{K}$  et soient  $f_1(X, Y), \dots, f_r(X, Y)$ ,  $r \geq 2$ , les facteurs irréductibles distincts ou non de  $f(X, Y)$  dans  $\overline{K}[X, Y]$ . S'il existait  $(x_0, y_0) \in \overline{K}^2$  tel que  $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$ , alors ce point serait un point multiple de la courbe  $f(X, Y) + a = 0$  et par conséquent  $\frac{\partial f}{\partial X}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial Y}(x_0, y_0) = 0$ , ce qui est exclu. On conclut que les points communs aux courbes  $f_1(x, y) = 0$  et  $f_2(x, y) = 0$  (et il y en a d'après le théorème de Bezout) sont à l'infini. Un tel point  $(x_0, y_0, 0)$  avec  $x_0 = 1$  ou  $y_0 = 1$  sera tel que  $(x_0, y_0)$  est un point multiple de  $f^+(x, y) = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi  $f(x, y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$  pour tout  $a \in \overline{K}$ .

Rappelons (cf. [2] ou [11]) qu'un *polynôme de différences généralisées* de type  $(d, e)$  à coefficients dans un corps  $F$  est un polynôme de la forme

$$P(u, v) = au^e + bv^d + \sum_{di+ej < d} a_{ij}u^i v^j$$

où  $a_{ij}, a, b \in F$  et  $ab \neq 0$ . Si  $A(u), B(v)$  sont des polynômes non constants à coefficients dans  $F$ , et si  $P(u, v)$  est un polynôme de différences généralisées de type  $(d, e)$ , alors  $P(A(u), B(v))$  est un polynôme de différences généralisées de type  $(d \deg B, e \deg A)$ . Le résultat suivant est un outil pour la construction de polynômes totalement clos.

**THÉORÈME 18.** *Soient  $P(u, v)$  un polynôme de différences généralisées de type  $(d, e)$ , et  $f(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_m)$  des polynômes à coefficients dans  $F$  tels que  $(d \deg g, e \deg f) = 1$ . Alors le polynôme  $P(f, g)$  est irréductible sur  $F$ . En particulier, si  $(d, e) = 1$ , le polynôme  $P(u, v)$  est irréductible sur  $F$ .*

*Preuve.* Cf. [2, thm. et cor. 2] ou [11].

Ainsi, il est clair que, si les conditions du théorème 18 sont vérifiées, les polynômes  $P(u, v)$  et  $P(f, g)$  sont absolument irréductibles. De plus pour tout  $a \in \overline{F}$ ,  $P(u, v) + a$  est encore un polynôme de différences générali-



sées, donc irréductible sur  $\overline{F}$ . Il s'ensuit que tout polynôme de différences généralisées vérifie la condition (iv) de la proposition 15 et donc est totalement clos.

L'exemple précédent se généralise sous la forme suivante.

**THÉORÈME 19.** *Soit  $K$  un corps de caractéristique zéro,  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ , et  $f(X, Y) = A_n(X)Y^n + \dots + A_0(X)$  avec  $A_n(X), \dots, A_0(X) \in K[X]$  et  $A_n(X)A_0(X) \neq 0$ . Pour tout  $i = 0, \dots, n$  soit  $m_i = \deg A_i$ . On pose  $d = \sup_{i=0, \dots, n} m_i$  et l'on suppose que, d'une part, on a*

$$(m_0 - m_n, n) = 1, \quad nm_i + i(m_0 - m_n) \leq nm_0$$

*et que, d'autre part,  $d = m_0$  ou  $d = m_n$ . On suppose en outre que pour tout  $\lambda \in \overline{K}$ ,  $(A_0(X) - \lambda, A_1(X), \dots, A_n(X)) = 1$ . Alors, pour tout  $\lambda \in \overline{K}$ ,  $f(X, Y) - \lambda$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .*

*Preuve.* Posons

$$f(X, Y) = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^{m_j} a_j^i X^i \right) Y^j$$

avec  $a_j^i \in K$ . Considérons le polynôme

$$g_\lambda(X, Y) = X^d \left[ f\left(\frac{1}{X}, Y\right) - \lambda \right] = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^{m_j} a_j^i X^{d-i} \right) Y^j - \lambda X^d.$$

Si  $d = m_0$ , le polygone de Newton de  $g_\lambda(X, Y)$  comporte un seul côté. Soit  $y = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1 + \gamma_2} + \dots$  un développement de Puiseux en 0 d'une racine  $y$  de  $g_\lambda$ , avec  $c_i \neq 0$  pour tout  $i$ . Alors  $\gamma_1 = (m_n - m_0)/n$ . Comme on a supposé que  $(m_0 - m_n, n) = 1$ , il s'ensuit que  $f(X, Y) - \lambda$  possède une racine dans  $\overline{K}((X^{-1/n}))$  mais pas dans  $\overline{K}((X^{-1/q}))$  avec  $q | n$ . Donc  $f(X, Y) - \lambda$  est irréductible sur  $\overline{K}((X^{-1/n}))$  et par conséquent sur  $\overline{K}(X)$ . La condition posée sur les  $A_i(X)$  implique que  $f(X, Y) - \lambda$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .

Le cas  $d = m_n$  peut être traité de manière analogue en montrant que la courbe  $f(X, Y) - \lambda = 0$  possède une unique place à l'infini.

On observera que les polynômes de différences généralisées vérifient ce théorème et entrent dans le cas où  $d = m_0$ .

Étant donné un couple de polynômes  $u(t), v(t) \in K[t]$ , dont l'un au moins n'est pas constant, on peut lui associer un polynôme irréductible  $f(X, Y) \in K[X, Y]$ , unique à la multiplication près par une constante dans  $K$ , et vérifiant  $f(u(t), v(t)) = 0$ . On peut le construire comme suit : soit  $\varphi : K[X, Y] \rightarrow K[t]$  l'unique  $K$ -homomorphisme tel que  $\varphi(X) = u(t)$  et  $\varphi(Y) = v(t)$ ; alors  $\ker \varphi$  est un idéal premier de  $K[X, Y]$  de hauteur 1, donc principal, engendré par un polynôme irréductible  $f(X, Y)$  défini à la multiplication près par une constante dans  $K$ . Ce polynôme sera appelé le *polynôme minimal* sur  $K$  du couple  $(u, v)$ . Cela étant, on a

**THÉORÈME 20.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$  un polynôme irréductible. On suppose qu'il existe  $u(t), v(t) \in K[t]$ , non tous deux constants, tels que  $f(u(t), v(t)) = 0$ . Alors pour tout  $a \in \overline{K}$ ,  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .*

Pour la démonstration, nous ferons usage d'un résultat qui est probablement déjà dans la littérature :

**LEMME 21.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique nulle et  $f(X, Y) \in K[X, Y]$  un polynôme irréductible. On suppose qu'il existe  $u(t), v(t) \in K(t)$ , non tous deux constants, tels que  $f(u(t), v(t)) = 0$ . Alors  $f(X, Y)$  est absolument irréductible.*

*Preuve.* Soit  $f_1(X, Y)$  un facteur unitaire absolument irréductible de  $f$  tel que  $f_1(u(t), v(t)) = 0$ . Si  $f_1$  est défini sur une extension finie de  $K$ , mais non sur  $K$ , il y a un polynôme  $f_2$  conjugué de  $f_1$  sur  $K$  et relativement premier à  $f_1$ . Par conjugaison  $f_2(u(t), v(t)) = 0$  et  $R(u(t)) = S(v(t)) = 0$  où  $R, S$  sont les résultants de  $f_1$  et  $f_2$  par rapport à  $Y$  et  $X$ , respectivement. Comme  $u, v$  ne sont pas tous deux constants, on a une contradiction.

*Preuve du théorème 20.* D'après le lemme précédent,  $f(X, Y)$  est le polynôme minimal sur  $\overline{K}$  du couple  $(u(t), v(t))$ . Soient  $a \in \overline{K}$  et  $g_a(X, Y)$  un facteur irréductible de  $f(X, Y) + a$  dans  $\overline{K}[X, Y]$ ; alors il existe  $b \in \overline{K}$  tel que  $g_a(u(t), v(t)) = b$  ou encore  $g_a(u(t), v(t)) - b = 0$ ; ainsi  $f(X, Y)$  divise  $g_a(X, Y) - b$ . En tenant compte des degrés, on conclut qu'il existe  $c \in \overline{K}^*$  tel que  $f(X, Y) + a = cg_a(X, Y)$  et par suite  $f(X, Y) + a$  est irréductible sur  $\overline{K}$ .

**REMARQUE.** Soient  $K = \mathbb{Q}$ ,  $f(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$ ,  $u(t) = 2t/(1 + t^2)$ ,  $v(t) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ ; alors  $f(u(t), v(t)) = 0$  et  $f(X, Y) + 1 = X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY)$  est réductible sur  $\overline{K}$ . Donc le théorème précédent est faux si on suppose seulement que  $u(t)$  et  $v(t)$  sont des fractions rationnelles.

**8. Le cas de la caractéristique  $p > 0$ .** Certains résultats établis précédemment ne sont plus valables lorsque la caractéristique est positive.

L'analogie du théorème 4 s'écrit

**THÉORÈME 22.** *Soient  $K$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $f(X, Y) \in K[X, Y] \setminus K$ . On considère les assertions suivantes :*

- (i)  $C_K(f) = K[f]$ .
- (ii) *L'anneau  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X, Y]$ .*
- (iii)  *$K[f]$  est un élément maximal dans l'ensemble ordonné*

$$A = \{K[g]; g \in K[X, Y] \setminus K\}.$$

(iv) *Pour tout  $u(t) \in K[t]$  et  $h(X, Y) \in K[X, Y]$ , si  $f = u \circ h$ , alors  $\deg u = 1$ .*

(v) Pour tout  $g(X, Y) \in K[X, Y]$ , s'il existe  $M(Z, T) \in K[Z, T]$  irréductible,  $A(Y) \in K[Y] \setminus \{0\}$ , et  $q \in \mathbb{N}$  non nul tels que

$$\text{Res}_X(g(X, Y) - Z, f(X, Y) - T) = A(Y)M(Z, T)^q,$$

alors, il existe  $c \in K$  et  $u(T) \in K[T]$  tels que  $M(Z, T) = c(Z - u(T))$ .

Alors on a (v)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) et (i)  $\Rightarrow$  (iv), mais (iv) n'implique pas (i).

*Preuve.* (v)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) et (i)  $\Rightarrow$  (iv). Même démonstration qu'en caractéristique nulle.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $E$  la fermeture algébrique de  $K(f)$  dans  $K(X, Y)$ ; alors le degré de transcendance de  $E$  sur  $K$  est égal à 1. D'après le théorème 16, il existe  $h(X, Y) \in K[X, Y]$  tel que  $E = K(h)$ . On a  $K[f] \subset K[h]$ , et d'après (iii),  $K[f] = K[h]$ , donc  $K[f]$  est intégralement fermé dans  $K[X, Y]$ .

(iv)  $\not\Rightarrow$  (i). Soit  $K$  un corps de caractéristique deux et  $f(X, Y) = Y + X^2$ . Alors il est clair que  $f$  vérifie (iv). Mais on a

$$C_K(f) = K[X^2, Y] \supset K[Y + X^2] = K[f]$$

et l'inclusion est stricte, donc (i) n'est pas vérifiée.

On va montrer maintenant que les analogues des théorèmes 7 et 8 ne sont pas vrais en caractéristique  $p > 0$ . Soit  $K$  un corps non parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $b \in K \setminus K^p$ ,  $\beta \in \bar{K}$  tel que  $\beta^p = b$ ,  $f(X, Y) = (X^p + bY^p) = (X + \beta Y)^p$ . Le polynôme  $f(X, Y)$  est composé sur le corps  $K(\beta)$ . Supposons maintenant que  $f(X, Y) = u(h(X, Y))$  avec  $u(t) \in K[t]$ ,  $h(X, Y) \in K[X, Y]$ ; alors  $\deg u = 1$  ou  $\deg u = p$ . Sans perte de généralité supposons que  $h(0, 0) = 0$ . Si  $\deg u = p$ ,  $u(t) = u_p t^p + u_{p-1} t^{p-1} + \dots + u_0$ , alors  $\deg h = \deg_X h = \deg_Y h = 1$ , ainsi  $h(X, Y) = cX + dY$ , d'où

$$X^p + bY^p = u_p(cX + dY)^p + u_{p-1}(cX + dY)^{p-1} + \dots + u_0.$$

Faisant  $Y = 0$ , il vient  $X^p = u_p c^p X^p + u_{p-1} c^{p-1} X^{p-1} + \dots + u_0$ , donc  $u_p = 1$  et  $u_i = 0$  si  $i \neq p$ . Donc  $X^p + bY^p = (cX + dY)^p = c^p X^p + d^p Y^p$ , d'où  $b = d^p$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. On en conclut que  $\deg u = 1$  et que  $f$  n'est pas composé sur  $K$ . Ainsi le théorème 7 n'est pas vérifié si la caractéristique de  $K$  est positive.

Le même exemple montre, à la lumière du théorème 22, que  $K[f]$  est intégralement fermé mais on a, pour tout  $a \in K$ ,  $f(X, Y) + a = (X^p + bY^p) + a = (X + \beta Y + \gamma)^p$  où  $\gamma \in \bar{K}$  vérifie  $\gamma^p = a$ . Donc l'analogue du théorème 8 n'est pas vérifié si la caractéristique de  $K$  est positive.

**PROBLÈME.** Il serait intéressant de trouver les bonnes hypothèses sur le corps  $K$  (parfait et/ou infini?) pour que les théorèmes 7 et 8 soient vrais en caractéristique  $p > 0$ .

Je remercie D. Lorenzini qui m'a signalé une erreur dans une première version de ce travail ainsi que P. Ryckelynck pour les discussions intéres-

santes sur ce sujet. Je remercie le referee qui m'a suggéré de considérer la caractéristique  $p > 0$  et signalé certaines références placées à la fin de ce travail.

### Références

- [1] S. S. Abhyankar and L. A. Rubel, *Every difference polynomial has a connected zero-set*, J. Indian Math. Soc. 43 (1979), 69–78.
- [2] G. Angermüller, *A generalization of the Ehrenfeucht's irreducibility criterion*, J. Number Theory 36 (1990), 80–84.
- [3] M. Ayad, *Théorie de Galois, 115 Exercices Corrigés. Niveau II*, Ellipses, Paris, 1997.
- [4] E. Cygan, *Factorization of polynomials*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 40 (1992), 45–52.
- [5] S. Kaliman, *Two remarks on polynomials in two variables*, Pacific J. Math. 154 (1992), 285–295.
- [6] D. Lorenzini, *Reducibility of polynomials in two variables*, J. Algebra 156 (1993), 65–75.
- [7] A. Magnus, *On polynomial solutions of a differential equation*, Math. Scand. 3 (1955), 255–260.
- [8] J. H. Mc Kay and S. S. Wang, *An inversion formula for two polynomials in two variables*, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986), 245–257.
- [9] A. Nowicki, *On the jacobian equation  $J(f, g) = 0$  for polynomials in  $k[x, y]$* , Nagoya Math. J. 109 (1988), 151–157.
- [10] A. Nowicki and M. Nagata, *Rings of constants for  $k$ -derivations in  $k[x_1, \dots, x_n]$* , J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988), 111–118.
- [11] L. Panaitopol and D. Stefanescu, *On the generalized difference polynomials*, Pacific J. Math. 143 (1990), 341–348.
- [12] M. Razar, *Polynomial maps with constant jacobian*, Israel J. Math. 32 (1979), 97–106.
- [13] L. A. Rubel, A. Schinzel and H. Tverberg, *On difference polynomials and hereditary irreducible polynomials*, J. Number Theory 12 (1980), 230–235.
- [14] A. Schinzel, *Reducibility of polynomials in several variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 11 (1963), 633–638.
- [15] A. Schinzel, *Polynomials with Special Regard to Reducibility*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [16] Y. Stein, *The total reducibility order of a polynomial in two variables*, Israel J. Math. 68 (1989), 109–122.
- [17] A. Vistoli, *The number of reducible hypersurfaces in a pencil*, Invent. Math. 112 (1993), 247–262.

Université du Littoral-Cote d'Opale  
 50, Rue Ferdinand Buisson  
 BP699  
 62228 Calais Cedex, France  
 E-mail: ayad@lma.univ-littoral.fr

Reçu le 16.2.1999  
 et révisé le 9.11.2001

(3558)