ACTA ARITHMETICA
169.4 (2015)

Points algébriques de degrés au plus 12 sur la quintique de Fermat

par

Thiéyacine Top et Oumar Sall (Ziguinchor)

1. Introduction. Étant donné une courbe algébrique projective lisse $\mathcal{C}$ définie sur un corps de nombres L, on note $\mathcal{C}(L)$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ rationnels sur L, et $\bigcup_{[L:\mathbb{Q}]\leq d}\mathcal{C}(L)$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ définis sur L de degré $\leq d$. Le degré d'un point algébrique est le degré de son corps de définition sur $\mathbb{Q}$.

Un célèbre théorème de Faltings (1983) (voir par exemple [Hi-Si-00]) affirme qu'une courbe algébrique de genre $g \geq 2$, plongée dans sa jacobienne, n'a qu'un nombre fini de points rationnels sur un corps de nombres donné. On peut traduire cela en disant que la courbe ne rencontre qu'en un nombre fini de points le groupe de Mordell–Weil des points rationnels de la jacobienne.

Déterminer $\bigcup_{[L:\mathbb{Q}]\leq d}\mathcal{C}(L)$ peut se traduire essentiellement en la détermination des points rationnels sur le produit symétrique de d copies de la courbe C, c'est-à-dire, $\mathrm{Sym}^d(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C}/S_d$, dont une description qualitative est donnée dans [Ab-Ha-91] et [De-Kl-94].

Notre travail va consister à déterminer explicitement les points algébriques de degré au plus 12 sur $\mathbb{Q}$ sur la quintique de Fermat, c'est-à-dire la courbe projective

$$F_5 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}}) : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0\}.$$

Il semble qu'une condition indispensable pour appliquer notre méthode est que le groupe de Mordell–Weil $J_5(\mathbb{Q})$ soit fini. Une description de $J_5(\mathbb{Q})$ est donnée dans [Kl-Tz-97].

On sait depuis Legendre qu'il existe exactement trois points rationnels sur $F_5(\mathbb{Q})$ donnés par

$$a = (0,-1,1), \quad b = (-1,0,1), \quad \infty = (-1,1,0).$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11G30; Secondary 14H25, 14H45.
Key words and phrases: algebraic point, algebraic curve, Fermat curve.

DOI: 10.4064/aa169-4-6

Notons D la droite d'équation projective $X+Y+Z=0$, et L_a, L_b et L_∞ les droites tangentes à F_5 en a, b et ∞ respectivement.

Gross et Rohrlich [Gr-Ro-78] montrent que les points de degré ≤ 2 sont les cinq points de F_5 situés sur D, c'est-à-dire

$$\bigcup_{[L:\mathbb{Q}]\leq 2} F_5(L) = \{a, b, \infty, p, \overline{p}\}$$

avec $a=(0,-1,1)$, $b=(-1,0,1)$, $\infty=(-1,1,0)$, $p=(\eta,\overline{\eta},-1)$, $\overline{p}=(\overline{\eta},\eta,-1)$, où η est une racine primitive sixième de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$, et $\overline{\eta}$ le complexe conjugué de η.

Klassen et Tzermias [Kl-Tz-97] étendent ce résultat en montrant que

$$\bigcup_{[L:\mathbb{Q}]\leq 6} F_5(L) = \{a, b, \infty, p, \overline{p}, \text{ et les points triviaux de degrés 4, 5 et 6}\}.$$

Soit R_1 un point de degré k ($4 \leq k \leq 6$) sur $\mathbb{Q}$ et $R_1, \ldots, R_k$ les conjugués de Galois de R_1. On désigne par L' une droite définie sur $\mathbb{Q}$ et par P' un des points a, b ou ∞. En outre, notons par C' une conique définie sur $\mathbb{Q}$ ayant un point de contact d'ordre 2 avec F_5 à l'une des paires de points (a,∞), (b,∞), (a,b), ou $(p,\overline{p})$. Pour une telle conique C', on désigne par $t(C')$ l'un des diviseurs effectifs $2a+2\infty$, $2b+2\infty$, $2a+2b$, ou $2p+2\overline{p}$. Alors :

- les points triviaux de degré 4 sont donnés par

$$L'.F_5 = R_1+R_2+R_3+R_4+P',$$

- les points triviaux de degré 5 sont donnés par

$$L'.F_5 = R_1+R_2+R_3+R_4+R_5,$$

- les points triviaux de degré 6 sont donnés par

$$C'.F_5 = R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6+t(C').$$

Notre résultat principal s'énonce comme suit :

Théorème 1.1. *Soit $R \in F_5(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $[\mathbb{Q}(R):\mathbb{Q}] = d$ $(7 \leq d \leq 12)$. On désigne par C une cubique, par Q une conique et par K une quartique qui sont définies sur $\mathbb{Q}$. Notons $R_1, \ldots, R_d$ les conjugués de Galois de R.*

(A) *Les points algébriques de degré 7 sur F_5 sont donnés par :*

- $C.F_5 = R_1+\cdots+R_7+m_1a+m_2b+m_3\infty$ *avec* $m_i \in \{2,3\}$ *et* $m_1+m_2+m_3=8$,
- $Q.F_5 = R_1+\cdots+R_7+m_1a+m_2b+m_3\infty$ *avec* $m_i \in \{0,1,2\}$ *et* $m_1+m_2+m_3=3$.

(B) *Les points algébriques de degré* 8 *sur* F_5 *sont donnés par :*

- $K.F_5 = R_1 + \ldots + R_8 + 4a + 4b + 4\infty$,
- $C.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$, *avec* $m_i \in \{1, 2, 3\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 7$,
- $Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{0, 1, 2\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 2$.

(C) *Les points algébriques de degré* 9 *sur* F_5 *sont donnés par :*

- $K.F_5 = R_1 + \cdots + R_9 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{3, 4\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 11$,
- $C.F_5 = R_1 + \cdots + R_9 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 6$,
- $Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_9 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{0, 1\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 1$.

(D) *Les points algébriques de degré* 10 *sur* F_5 *sont donnés par :*

- $K.F_5 = R_1 + \cdots + R_{10} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{2, 3, 4\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 10$,
- $C.F_5 = R_1 + \cdots + R_{10} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 5$,
- $Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_{10}$.

(E) *Les points algébriques de degré* 11 *sur* F_5 *sont donnés par :*

- $K.F_5 = R_1 + \cdots + R_{11} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ *avec* $m_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 9$,
- $C.F_5 = R_1 + \cdots + R_{11} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 4$.

(F) *Les points algébriques de degré* 12 *sur* F_5 *sont donnés par :*

- $K.F_5 = R_1 + \cdots + R_{12} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ $m_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 8$,
- $C.F_5 = R_1 + \cdots + R_{12} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$ $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $m_1 + m_2 + m_3 = 3$.

Commentaire. Une conique Q est déterminée par cinq conditions. Lorsqu'elle vérifie par exemple $Q.F_5 \geq 2a + b$, elle passe par a, b ayant comme tangente en a la droite L_a, on obtient donc une famille de coniques à deux paramètres.

2. Résultats auxiliaires. Pour un diviseur D sur F_5 défini sur $\mathbb{Q}$, nous notons $\mathcal{L}(D)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des fonctions rationnelles f sur F_5 telles que $f = 0$ ou $\operatorname{div}(f) \geq -D$; $\ell(D)$ désigne la $\mathbb{Q}$-dimension de $\mathcal{L}(D)$. Soient x, y les fonctions rationnelles sur F_5 données par $x(X, Y, Z) = X/Z$ et $y(X, Y, Z) = Y/Z$. Nous notons a_j, b_j et c_j les points de F_5 définis par

$a_j = (0, \epsilon^{2j+1}, 1)$, $b_j = (\epsilon^{2j+1}, 0, 1)$ et $c_j = (\epsilon^{2j+1}, 1, 0)$, avec $0 \leq j \leq 4$ et ϵ une racine primitive $10^{\text{ième}}$ de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On peut remarquer que $a = a_2$, $b = b_2$ et $\infty = c_2$.

Lemme 2.1 (voir [Kl-Tz-97]).

$$J_5(\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 = \langle [a - \infty], [b - \infty] \rangle.$$

On a les lemmes classiques suivants, qu'on montre de la même façon que dans [Ro-77], [Tz-98] et [Sa-00].

Lemme 2.2. *On a*

$$\operatorname{div}(x) = (a_0 + \cdots + a_4) - (c_0 + \cdots + c_4),$$
$$\operatorname{div}(x + y) = 4\infty - (c_0 + c_1 + c_3 + c_4).$$

Preuve. Les équations projective et affine de F_5 sont respectivement

$$F_5 : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0 \quad \text{et} \quad F_5 : x^5 + y^5 + 1 = 0.$$

On voit que la fonction x s'annule aux points $(0, y)$ avec $y^5 + 1 = 0$. Les relations $x(X, Y, Z) = X/Z$ et $y(X, Y, Z) = Y/Z$ montrent que x a un pôle aux mêmes points que y, i.e. aux points où $Z = 0$, donc aux points $(1, Y, 0)$ avec $1 + Y^5 = 0$.

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(x) &= (X = 0).F_5 - (Z = 0).F_5 \\ &= (m_0 a_0 + \cdots + m_4 a_4) - (n_0 c_0 + \cdots + n_4 c_4)\end{aligned}$$

où les m_i et n_i sont des entiers tels que

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} m_i = \deg(X = 0) \deg F_5 = 5 \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq i \leq 4} n_i = \deg(Z = 0) \deg F_5 = 5.$$

L'intersection $(X = 0).F_5$ comporte cinq points, de même que $(Z = 0).F_5$; donc les m_i et n_i sont tous non nuls et par suite $m_0 = m_1 = \cdots = m_4 = 1$ et $n_0 = n_1 = \cdots = n_4 = 1$. On obtient alors

$$\operatorname{div}(x) = (a_0 + \cdots + a_4) - (c_0 + \cdots + c_4).$$

Calculons maintenant $\operatorname{div}(x + y)$. On a $X^5 + Y^5 + Z^5 = 0$, i.e.

$$(X + Y)(X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4) + Z^5 = 0.$$

On voit que $X + Y = 0$ si et seulement si $Z = 0$ et $X = -Y$, ce qui correspond au point $c_2 = (-1, 1, 0) = \infty$. On a

$$\{\text{pôles de } x + y\} \subset \{\text{pôles de } x\} = \{\text{pôles de } y\} = \{c_0, \ldots, c_4\},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(x + y) = \operatorname{div}\left(\frac{X + Y}{Z}\right) &= (X + Y = 0).F_5 - (Z = 0).F_5 \\ &= 5\infty - (c_0 + \cdots + c_4),\end{aligned}$$

et comme $c_2 = \infty$, il en résulte que $\operatorname{div}(x + y) = 4\infty - (c_0 + c_1 + c_3 + c_4)$. ∎

LEMME 2.3. *Une Q-base de $\mathcal{L}(20\infty)$ est donnée par les fonctions*

$$f_{rs}(x,y) = \frac{x^r}{(x+y)^s} \qquad \text{avec } 0 \le r \le s \le 4.$$

Preuve. Le genre de F_5 est $g = (5-1)(5-2)/2 = 6$. D'après le théorème de Riemann–Roch, si $m \ge 2g-1$ alors $\ell(m\infty) = m+1-g$; donc on a $\ell(20\infty) = 15$. D'après le lemme 2.2 on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f_{rs} &= r\operatorname{div}(x) - s\operatorname{div}(x+y) \\ &= r(a_0 + \cdots + a_4) + (s-r)(c_0+c_1+c_2+c_4) - (4s+r)\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que f_{rs} a un unique pôle en ∞ d'ordre $4s+r$; ces pôles sont tous différents car si $0 \le r \le s \le 4$, $0 \le r' \le s' \le 4$ et $4s+r = 4s'+r'$, on a $r = r'$ et $s = s'$.

La famille $\{f'_{rs} : 0 \le r \le s \le 4\}$ est par conséquent libre. D'autre part card$\{f_{rs} : 0 \le r \le s \le 4\} = 15$. En effet, si on note $\mathfrak{F}$ la famille constituée des éléments des fonctions f_{rs} on aura

$$\mathfrak{F} = \{f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{04}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{33}, f_{34}, f_{44}\}$$

Il reste à montrer que $\{f_{rs} : 0 \le r \le s \le 4\} \subset \mathcal{L}(20\infty)$. De la relation

$$\operatorname{div} f_{rs} = r(a_0 + \cdots + a_4) + (s-r)(c_0+c_1+c_2+c_4) - (4s+r)\infty$$

on déduit

$$\begin{aligned} 0 \le r \le s \le 4 &\Rightarrow 4s + r \le 20 \\ &\Rightarrow \operatorname{div} f_{rs} \ge -20\infty \\ &\Rightarrow \{f_{rs} : 0 \le r \le s \le 4\} \subset \mathcal{L}(20\infty). \ \blacksquare \end{aligned}$$

D'après [Tz-98, Fact 2] on a

LEMME 2.4.

(1) *La tangente L_a en a (respectivement L_b en b, L_∞ en ∞) a un point de contact d'ordre* 5 *avec F_5 en a (respectivement en b, en ∞).*
(2) *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de degré $d \le 4$. Si $\mathcal{C}$ a un point de contact d'ordre $> d$ avec F_5 en a, b ou ∞ alors $\mathcal{C}$ est réductible et contient respectivement L_a, L_b ou L_∞.*

Preuve. La première assertion est triviale et, combinée avec [Na-79, lemme 2.3.2, p. 74], donnera une preuve de la deuxième. ∎

REMARQUE 2.5. Soient D une courbe et t un point de $\{a, b, \infty\}$.

- $D.F_5 \ge t$ signifie que D passe par t.
- $D.F_5 \ge 2t$ signifie que D contient t et a pour tangente en t la droite L_t.
- $D.F_5 \ge 3t$ signifie que D contient t, a pour tangente en t la droite L_t et a un point d'inflexion en t avec la droite L_t.

- $D.F_5 \geq 4t$ signifie que D passe par t, a pour tangente en t la droite L_t et a un point d'hyperflexion en t avec la droite L_t.

3. Démonstration du théorème. Soient $R_1, \ldots, R_l$ les conjugués de Galois d'un point t sur F_5 de degré $l \leq 12$ au-dessus de $\mathbb{Q}$; alors $t = [R_1 + \cdots + R_l - l\infty] \in J_5(\mathbb{Q})$.

Les points algébriques sur F_5 de degré au plus 6 sur $\mathbb{Q}$ sont décrits dans [Kl-Tz-97] ; on peut donc supposer que $7 \leq l \leq 12$.

D'après le lemme 2.1, il existe des entiers d et e avec $0 \leq d, e \leq 4$ tels que $[R_1 + \cdots + R_l - l\infty] = [d(\infty - a) + e(\infty - b)]$, c'est-à-dire

$$[R_1 + \cdots + R_l + da + eb - (l + d + e)\infty] = 0.$$

On a $l+d+e \leq 20$, il existe alors un polynôme quartique $f(x, y)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que

$$\mathrm{div}(f(x, y)/(x + y)^4) = R_1 + \cdots + R_l + da + eb - (l + d + e)\infty.$$

Donc, d'après le lemme 2.2,

$$\mathrm{div}(f(x, y)) = R_1 + \cdots + R_l + da + eb + (20 - l - d - e)\infty - 4(c_0 + \cdots + c_4).$$

En utilisant l'homogénéisé F^* de $f(x, y)$ (voir [Tz-98, p. 4]) on a

$$F^*(X, Y, Z) = Z^4 f(X/Z, Y/Z),$$

où $F^*(X, Y, Z)$ définit une courbe de degré 4 donc une quartique K définie sur $\mathbb{Q}$:

$$K.F_5 = 4(Z = 0).F_5 + \mathrm{div}(f).$$

Or $(Z = 0).F_5 = (c_0 + \cdots + c_4)$, d'où l'existence d'une quartique K dans $\mathbb{P}^2$ telle que

$$(\bigstar) \qquad K.F_5 = R_1 + \cdots + R_l + da + eb + (20 - l - d - e)\infty.$$

Nous pouvons maintenant envisager les assertions consécutifs du théorème.

(A) Pour $l = 7$ la relation $(\bigstar)$ s'écrit

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_7 + da + eb + (13 - d - e)\infty.$$

Dans ce cas $13 - d - e \geq 5$. D'après le lemme 2.4 (que l'on réutilisera plusieurs fois), $K \supset L_\infty$, il existe alors une cubique C définie sur $\mathbb{Q}$ telle que $K = C + L_\infty$ et donc

$$C.F_5 = R_1 + \cdots + R_7 + da + eb + (8 - d - e)\infty.$$

(1) Si $d = 4$, alors $C \supset L_a$ et un des R_i devrait être égal à a, ce qui est absurde. De même, on ne peut pas avoir $e = 4$. Ainsi, $0 \leq d, e \leq 3$.

(2) Si $0 \leq 8 - d - e \leq 3$, d'où $5 \leq d + e \leq 6$, alors il existe des rationnels m_1, m_2 et m_3 tels que

$$C.F_5 = R_1 + \cdots + R_7 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$$

et $m_i \in \{2, 3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 8$.

(3) Si $8-d-e \geq 4$, alors il existe une conique Q telle que $C = Q + L_\infty$ et

$$Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_7 + da + eb + (3-d-e)\infty.$$

Ceci est possible si $0 \leq d, e, 3-d-e \leq 2$, donc $0 \leq d, e \leq 2$ et $1 \leq d+e \leq 3$.

Dans tous les cas, il existe des rationnels m_1, m_2 et m_3 tels que

$$Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_7 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$$

et $m_i \in \{0,1,2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 3$.

(B) Pour $l = 8$ la relation ($\bigstar$) s'écrit

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + da + eb + (12-d-e)\infty.$$

(1) Supposons $12-d-e \leq 4$; d'autre part, $d+e \leq 8$ montre que $12-d-e \geq 4$. Donc $12-d-e = 4$, c'est-à-dire $d+e = 8$ et par suite $d = e = 4$. Ainsi on obtient la relation

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + 4a + 4b + 4\infty.$$

(2) Supposons $12-d-e \geq 5$; il existe une cubique C telle que

$$C.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + da + eb + (7-d-e)\infty.$$

Si $7-d-e \leq 3$, on a $0 \leq d, e \leq 3$ et $4 \leq d+e \leq 7$. Il existe donc des rationnels m_1, m_2 et m_3 tels que

$$C.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$$

et $m_i \in \{1,2,3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 7$.

Si $7-d-e \geq 4$, alors il existe une conique Q telle que $C = Q + L_\infty$ et

$$Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + da + eb + (2-d-e)\infty$$

avec $0 \leq d, e, 2-d-e \leq 2$. Il existe donc des rationnels m_1, m_2 et m_3 tels que

$$Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_8 + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$$

et $m_i \in \{0,1,2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 2$.

(C) Pour $l = 9$ la relation ($\bigstar$) s'écrit

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_9 + da + eb + (11-d-e)\infty.$$

(1) Supposons $11-d-e \leq 4$; d'autre part, $d+e \leq 8$ montre que $11-d-e \geq 3$. Donc $3 \leq 11-d-e \leq 4$.

Supposons $11-d-e = 3$. Alors $d+e = 8$ et par suite $d = e = 4$. Ainsi

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_9 + 4a + 4b + 3\infty.$$

Supposons $11-d-e=4$. Alors $d+e=7$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_9+4a+3b+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_9+3a+4b+4\infty. \end{aligned}$$

(2) Si $11-d-e \geq 5$, il existe une cubique C telle que $K = C + L_\infty$ et

$$C.F_5 = R_1+\cdots+R_9+da+eb+(6-d-e)\infty.$$

Supposons $6-d-e \leq 3$. Alors $3 \leq d+e \leq 6$. Il existe des rationnels m_1, m_2 et m_3 tels que

$$C.F_5 = R_1+\cdots+R_9+m_1a+m_2b+m_3\infty$$

et $m_i \in \{0,1,2,3\}$ et $m_1+m_2+m_3=6$.

Supposons $6-d-e \geq 4$. Alors il existe une conique Q telle que $C = Q + L_\infty$ et

$$Q.F_5 = R_1+\cdots+R_9+da+eb+(1-d-e)\infty$$

avec $0 \leq d, e, 1-d-e \leq 2$, donc il existe des rationnels m_1, m_2 et m_3 tels que

$$Q.F_5 = R_1+\cdots+R_9+m_1a+m_2b+m_3\infty$$

et $m_i \in \{0,1\}$ et $m_1+m_2+m_3=1$.

(D) Pour $l=10$ la relation ($\bigstar$) s'écrit

$$K.F_5 = R_1+\cdots+R_{10}+da+eb+(10-d-e)\infty.$$

(1) Supposons $10-d-e \leq 4$; d'autre part $d+e \leq 8$ montre que $10-d-e \geq 2$. Donc $2 \leq 10-d-e \leq 4$.

Supposons $10-d-e=2$. Alors $d+e=8$ et par suite $d=e=4$. Ainsi

$$K.F_5 = R_1+\cdots+R_{10}+4a+4b+2\infty.$$

Supposons $10-d-e=3$. Alors $d+e=7$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_{10}+4a+3b+3\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{10}+3a+4b+3\infty. \end{aligned}$$

Supposons $10-d-e=4$. Alors $d+e=6$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_{10}+4a+2b+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{10}+3a+3b+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{10}+2a+4b+4\infty. \end{aligned}$$

(2) Si $10-d-e \geq 5$, il existe une cubique C telle que $K = C + L_\infty$ et

$$C.F_5 = R_1+\cdots+R_{10}+da+eb+(5-d-e)\infty.$$

Si $5-d-e \leq 3$ alors $2 \leq d+e \leq 5$. Par suite,

$$C.F_5 = R_1+\cdots+R_{10}+m_1a+m_2b+m_3\infty$$

avec $m_i \in \{0,1,2,3\}$ et $m_1+m_2+m_3=5$.

Si $5 - d - e \geq 4$, il existe une conique Q telle que $C = Q + L_\infty$ et

$$Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_{10} + da + eb + (-d - e)\infty$$

avec $0 \leq -d - e$, donc $d = e = 0$, d'où

$$Q.F_5 = R_1 + \cdots + R_{10}.$$

(E) Pour $l = 11$ la relation ($\bigstar$) s'écrit

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_{11} + da + eb + (9 - d - e)\infty.$$

(1) Supposons $9-d-e \leq 4$; d'autre part $d+e \leq 8$ montre que $9-d-e \geq 1$. Donc $1 \leq 9 - d - e \leq 4$.

Supposons $9 - d - e = 1$. Alors $d + e = 8$ et par suite $d = e = 4$. Ainsi on obtient la relation

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_{11} + 4a + 4b + \infty.$$

Supposons $9 - d - e = 2$. Alors $d + e = 7$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1 + \cdots + R_{11} + 4a + 3b + 2\infty \\ &= R_1 + \cdots + R_{11} + 3a + 4b + 2\infty. \end{aligned}$$

Supposons $9 - d - e = 3$. Alors $d + e = 6$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1 + \cdots + R_{11} + 4a + 2b + 3\infty \\ &= R_1 + \cdots + R_{11} + 3a + 3b + 3\infty \\ &= R_1 + \cdots + R_{11} + 2a + 4b + 3\infty. \end{aligned}$$

Supposons $9 - d - e = 4$. Alors $d + e = 5$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1 + \cdots + R_{11} + 4a + b + 4\infty \\ &= R_1 + \cdots + R_{11} + 3a + 2b + 4\infty \\ &= R_1 + \cdots + R_{11} + 2a + 3b + 4\infty \\ &= R_1 + \cdots + R_{11} + a + 4b + 4\infty. \end{aligned}$$

(2) Si $9 - d - e \geq 5$, il existe une cubique C telle que $K = C + L_\infty$ et

$$C.F_5 = R_1 + \cdots + R_{11} + da + eb + (4 - d - e)\infty.$$

On a $4 - d - e \leq 3$, donc $3 \leq d + e \leq 6$. Par suite,

$$C.F_5 = R_1 + \cdots + R_{11} + m_1 a + m_2 b + m_3 \infty$$

avec $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 4$.

(F) Pour $l = 12$ la relation ($\bigstar$) s'écrit

$$K.F_5 = R_1 + \cdots + R_{12} + da + eb + (8 - d - e)\infty.$$

(1) Supposons $8 - d - e \leq 4$; d'autre part, $d + e \leq 8$ montre que $8 - d - e \geq 0$. Donc $0 \leq 8 - d - e \leq 4$.

Supposons $8-d-e=0$. Alors $d+e=8$ et par suite $d=e=4$. Ainsi

$$K.F_5 = R_1+\cdots+R_{12}+4a+4b.$$

Supposons $8-d-e=1$. Alors $d+e=7$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_{12}+4a+3b+\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+3a+4b+\infty. \end{aligned}$$

Supposons $8-d-e=2$. Alors $d+e=6$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_{12}+4a+2b+2\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+3a+3b+2\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+2a+4b+2\infty. \end{aligned}$$

Supposons $8-d-e=3$. Alors $d+e=5$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_{12}+4a+b+3\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+3a+2b+3\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+2a+3b+3\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+a+4b+3\infty. \end{aligned}$$

Supposons $8-d-e=4$. Alors $d+e=4$, d'où

$$\begin{aligned} K.F_5 &= R_1+\cdots+R_{12}+4a+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+3a+b+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+2a+2b+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+a+3b+4\infty \\ &= R_1+\cdots+R_{12}+4b+4\infty. \end{aligned}$$

(2) Si $8-d-e\geq 5$, il existe une cubique C telle que $K=C+L_\infty$ et

$$C.F_5 = R_1+\cdots+R_{12}+da+eb+(3-d-e)\infty.$$

On a $3-d-e\leq 3$, donc $0\leq d+e\leq 3$. Par suite,

$$C.F_5 = R_1+\cdots+R_{12}+m_1a+m_2b+m_3\infty$$

avec que $m_i\in\{0,1,2,3\}$ et $m_1+m_2+m_3=3$.

Remerciements. Nous remercions très chaleureusement notre professeur Marc Hindry.

Références

[Ab-Ha-91] D. Abramovich and J. Harris, *Abelian varieties and curves in $W_d(C)$*, Compos. Math. 78 (1991), 227–238.

[De-Kl-94] O. Debarre and M. Klassen, *Points of low degree on smooth plane curves*, J. Reine Angew. Math. 446 (1994), 81–87.

[Gr-Ro-78] B. Gross and D. Rohrlich, *Some results on the Mordell–Weil group of the Jacobian of the Fermat curve*, Invent. Math. 44 (1978), 201–224.

[Hi-Si-00] M. Hindry and J. Silverman, *Diophantine Geometry, An Introduction*, Grad. Texts in Math. 201, Springer, New York, 2000.

[Kl-Tz-97] M. Klassen and P. Tzermias, *Algebraic points of low degree on the Fermat quintic*, Acta Arith. 82 (1997), 393–401.

[Na-79] M. Namba, *Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math. 767, Springer, Berlin, 1979.

[Ro-77] D. Rohrlich, *Points at infinity on the Fermat curves*, Invent. Math. 39 (1977), 95–127.

[Sa-00] O. Sall, *Points algébriques de petit degré sur les courbes de Fermat*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), 67–70.

[Tz-98] P. Tzermias, *Algebraic points of low degree on the Fermat curve of degree seven*, Manuscripta Math. 97 (1998), 483–488.

Thiéyacine Top, Oumar Sall
U.F.R. Sciences et Technologies
Université Assane SECK de Ziguinchor
BP 600, Ziguinchor, Senegal
E-mail: thieyacinetop@yahoo.fr
oumarsfr@yahoo.fr

Reçu le 13.11.2014
et révisé le 29.4.2015 (7996)