ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXXVII.2 (2001)

Le grand théorème de Picard pour les multifonctions analytiques finies

par Bernard Aupetit (Québec) et
Mustapha Ech-Chérif El Kettani (Fès)

Abstract. Let D be a domain of the complex plane containing the origin. The famous great theorem of Émile Picard asserts that if h is holomorphic on $D\backslash\{0\}$, with an essential singularity at 0, then the image under h of any pointed neighbourhood of 0 covers all the complex plane, with at most one exception. Introducing the concept of essential singularity for analytic multifunctions, we extend this theorem to a finite analytic multifunction K, of degree N, defined on $D\backslash\{0\}$. In this case $\bigcup_{0<|\lambda|<r} K(\lambda)$ covers all the complex plane, with at most $2N-1$ exceptions. In particular, this theorem can be used in the case of $N \times N$ matrices whose entries are holomorphic on $D \setminus \{0\}$ with essential singularities at 0. In this case, if their spectra avoid $2N$ points on a pointed neighbourhood of 0, these spectra must be constant.

0. Introduction. Rappelons que les multifonctions analytiques définies sur D sont les multifonctions du type $\lambda \mapsto K(\lambda)$, où $K(\lambda)$ est un compact non vide du plan complexe, qui sont semi-continues supérieurement et telles que le complémentaire de leur graphe

$$\Gamma = \{(\lambda, z) : z \in K(\lambda)\} \subset D \times \mathbb{C}$$

soit un ouvert pseudo-convexe. Ce sont les généralisations naturelles des fonctions holomorphes sur D et elles ont de très nombreuses propriétés et applications dans beaucoup de secteurs des mathématiques. On pourra trouver un exposé détaillé sur ces propriétés et applications dans [1, 2].

Dans le cas général des multifonctions analytiques définies sur tout le plan complexe, le petit théorème de Picard a été généralisé dans [3]. On a montré que $K(\lambda)^\wedge$ est constant ou sinon $\mathbb{C}\backslash\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} K(\lambda)^\wedge$ est un ensemble G_δ de capacité nulle, où $K(\lambda)^\wedge$ dénote l'enveloppe polynomialement convexe de $K(\lambda)$, c'est-à-dire la réunion de $K(\lambda)$ avec ses trous. Il n'y a aucun

2000 *Mathematics Subject Classification*: 32A12, 46Hxx, 47Axx.
Key words and phrases: analytic multifunction, distribution of spectral values, singularity, normal family, great theorem of Picard for finite analytic multifunctions.

espoir d'obtenir mieux, sauf bien sûr pour des classes des multifonctions analytiques plus restreintes.

Si on considère les multifonctions analytiques de degré N (voir le Théorème 1.1 plus loin), A. Zraïbi a pu montrer dans sa thèse [9] (voir aussi [1], pp. 161–166), en utilisant des idées de G. Rémoundos [8] et des calculs sur les déterminants de Vandermonde, que dans ce cas $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} K(\lambda)$ couvre tout le plan complexe avec au plus $2N-1$ exceptions. Ce résultat est d'ailleurs le meilleur possible ([1], Theorem 7.3.5).

C'est ce résultat qui a suggéré d'étendre le grand théorème de Picard aux cas des multifonctions analytiques finies de degré N. Tout d'abord il a fallu définir le concept de singularité essentielle (voir §2) et ensuite utiliser le critère fondamental de normalité de J. Dufresnoy (voir §3). Dans le §4 nous obtenons la meilleure généralisation possible du grand théorème de Picard en se servant du critère du Dufresnoy et en généralisant un théorème de Paul Montel (Théorème 4.2).

Ce résultat, déjà plutôt difficile à démontrer, suggère qu'il existe peut-être un grand théorème de Picard pour les multifonctions analytiques arbitraires, ce qui aurait d'intéressantes conséquences pour la distribution des valeurs spectrales des familles analytiques d'opérateurs. Peut-être est-il vrai que K est analytique multiforme sur D avec une singularité essentielle en 0, alors $\bigcup_{0<|\lambda|<r} K(\lambda)^\wedge$ couvre tout le plan complexe, avec possiblement un ensemble d'exceptions qui est de capacité nulle. Mais cela semble bien difficile à démontrer (voir au moins la forme faible du Théorème 4.1).

1. Les multifonctions analytiques finies. Soit K une multifonction analytique définie sur D. Nous dirons qu'elle est *finie* si, quel que soit $\lambda \in D$, on a $K(\lambda)$ fini. Dans ce cas, on a le résultat suivant dû à B. Aupetit (voir [1], Theorem 7.1.7, Lemma 7.3.3, Theorem 7.3.5).

THÉORÈME 1.1. *Soient D un domaine du plan complexe et K une multifonction analytique finie sur D. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe un plus petit entier N et un sous-ensemble F discret de D tel que $K(\lambda)$ ait N points sur $D\setminus F$ et moins de N points sur F.*

(ii) *Il existe N fonctions holomorphes $a_1,\dots,a_N$ sur D telle que*

$$K(\lambda)=\{z : z^N + a_1(\lambda)z^{N-1}+\ldots+a_N(\lambda)=0\}.$$

(iii) *Il existe une fonction analytique f de D dans $M_N(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices $N\times N$, telle que $K(\lambda)$ soit le spectre de $f(\lambda)$.*

Bien sûr la réciproque est vraie. Autrement dit les multifonctions analytiques finies sur D ne sont pas autre chose que les multifonctions qui associent à un paramètre l'ensemble des valeurs propres d'une matrice $N\times N$ dont les coefficients dépendent holomorphiquement de ce paramètre. De telles multifonctions analytiques finies sont parfois appelées *fonctions algébroïdes de degré N.*

2. Singularités. Soit K une multifonction analytique sur $D \setminus \{0\}$ où D est un domaine du plan complexe contenant l'origine. Nous dirons que 0 est une *singularité éliminable* de K s'il existe $r > 0$ et $R > 0$ tels que $K(\lambda) \subset \overline{B}(0, R)$ pour $0 < |\lambda| < r$. Dans ce cas, il n'est pas difficile de démontrer qu'en posant $K(0) = \overline{\lim}_{\lambda\to 0} K(\lambda)$, au sens de la distance de Hausdorff, K admet une extension analytique à tout D. Cela résulte du fait, bien connu, que si φ est sous-harmonique sur $D \setminus \{0\}$ et si $\varphi(\lambda) \leq R$ pour $0 < |\lambda| < r$, alors φ admet une extension sous-harmonique sur tout D. Ce résultat vient également d'un résultat beaucoup plus général ([7], Proposition 6.1).

Supposons h holomorphe pour $0 < |\lambda| < r$ avec un pôle d'ordre n en 0. Alors elle peut s'écrire sous la forme $h(\lambda) = f(\lambda)/\lambda^n$, où f est holomorphe pour $|\lambda| < r$, avec $f(0) \neq 0$. Si on prend une transformation de Möbius $g(u) = 1/(u - a)$, il est facile de voir que $g(h(\lambda))$ est holomorphe dans un petit voisinage de 0. Réciproquement si $g(h(\lambda))$ est holomorphe dans un petit voisinage de 0, pour une certaine transformation de Möbius de la forme précédente, il est aussi facile de voir que h a au plus un pôle en 0. Cela nous amène à poser la définition suivante.

Si K est une multifonction analytique sur $D \setminus \{0\}$, où D est un domaine du plan complexe contenant l'origine, nous dirons que 0 est un *pôle* de K s'il existe une transformation de Möbius $g(u) = 1/(u - a)$ telle que $g(K(\lambda)) = \{1/(z - a) : z \in K(\lambda)\}$ devienne analytique dans un petit voisinage de 0.

Dans le cas où K est analytique sur $D \setminus \{0\}$, avec 0 ni éliminable ni un pôle, nous dirons que 0 est une *singularité essentielle* de K.

Un exemple très simple de multifonction analytique de degré 2, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ayant une singularité essentielle en 0, est donné par les spectres des matrices

$$\begin{pmatrix} e^{1/\lambda} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où bien sûr $K(\lambda) = \{z : z^2 - ze^{1/\lambda} - 1 = 0\}$ (voir l'argument de la démonstration du Théorème 4.4). Dans ce cas on aura

$$\bigcup_{0<|\lambda|<r} \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} e^{1/\lambda} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\},$$

quel que soit $r > 0$.

3. Familles normales. Commençons par remarquer que si l'on a une suite de multifonctions analytiques finies de degré N qui converge vers une multifonction L, cette multifonction n'est pas nécessairement à valeurs compactes dans le plan complexe, donc n'est pas nécessairement une multifonction analytique, au sens donné à la première page. Par exemple si on prend

$$K_n(\lambda) = \{z : z^N - n\lambda = 0\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

alors les $K_n(\lambda)$ vont converger vers $L(\lambda) = \{\infty\}$.

De plus si les K_n sont finies avec des degrés non bornés, il se peut que L ne soit pas finie. Prenons $D = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ et $K_n(\lambda) = \{z : z^n = \lambda\}$, pour $n = 1, 2, \ldots$ Il n'est pas bien difficile de voir que cette suite converge pour la distance de Hausdorff vers

$$L(\lambda) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \lambda = 0, \\ \{z : |z| = 1\} & \text{si } 0 < |\lambda| < 1. \end{cases}$$

Dans son gros article [5], J. Dufresnoy a défini la normalité des familles de multifonctions finies de degré fixé N, à valeur dans la sphère de Riemann, en utilisant la distance D_{S} définie sur les *ensembles de multiplicité* de la sphère de Riemann de la façon suivante:

$$D_{\mathrm{S}}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}, \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}) = \min_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \max_{1 \le i \le N} d(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}),$$

où $\mathcal{S}_N$ dénote l'ensemble des permutations de N éléments et où d dénote la distance cordale sur la sphère de Riemann, les $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ désignant des ensembles de multiplicité, c'est-à-dire des suites de N nombres où quelques valeurs peuvent être répétées (dans ce cas on dit qu'elles ont une multiplicité). Cette distance n'est pas équivalente à la distance de Hausdorff des ensembles (pour plus de détails voir le chapitre 1 de [6]), mais dans le cas des familles de multifonctions analytiques de degré N, il n'est pas difficile de voir que localement la convergence au sens de D_{S} est équivalente à la convergence selon la distance de Hausdorff Δ pour les compacts du plan complexe, si la limite a ses valeurs compactes dans le plan complexe, ou à la convergence selon la distance de Hausdorff modulo une transformation de Möbius (cela résulte du Théorème 1.1(iii) et du Théorème 1.2.3 de [6]) si la limite à des branches infinies.

Autrement dit une famille $\mathcal{F}$ de multifonctions analytiques de degré fixé N sera *normale au sens de Dufresnoy* si pour toute suite (K_n) de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite (K_{n_k}) qui converge uniformément sur tout compact de D vers L de façon que :

(i) ou bien $L(\lambda_0)$ est compact dans $\mathbb{C}$, auquel cas dans un voisinage E de λ_0 ou aura $\lim_{n\to\infty} \Delta(K_n(\lambda), L(\lambda)) = 0$,

(ii) ou bien $L(\lambda_0) \ni \infty$, auquel cas, dans un voisinage E de λ_0 et avec une transformation de Möbius convenable du type $g(u) = 1/(u - a)$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(g(K_n(\lambda)), g(L(\lambda))) = 0.$$

Dans son article [5], J. Dufresnoy a démontré les deux résultats fondamentaux suivants qui généralisent bien sûr des résultats de P. Montel.

Théorème 3.1. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de multifonctions algébroïdes méromorphes sur un domaine D du plan complexe, qui sont toutes de degré N et qui omettent toutes $2N+1$ valeurs données sur la sphère de Riemann. Alors cette famille $\mathcal{F}$ est normale au sens de Dufresnoy.*

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire les multifonctions analytiques finies de degré N, la valeur ∞ est toujours omise, autrement dit on obtient le résultat qui, avec le Théorème 4.2, sera la base de la démonstration du Théorème 4.3.

Corollaire 3.2 (Critère fondamental). *Soit $\mathcal{F}$ une famille de multifonctions analytiques finies de degré N qui omettent $2N$ valeurs données du plan complexe. Alors cette famille $\mathcal{F}$ est normale au sens de Dufresnoy.*

4. Résultats principaux. Nous commençons par donner une forme faible du grand théorème de Picard, dans le cas des multifonctions analytiques générales, résultat qui est une généralisation du théorème classique de Casorati–Weierstrass. Ce résultat nous sera utile dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit D un domaine du plan complexe contenant l'origine. Supposons que K est une multifonction analytique sur $D \setminus \{0\}$ qui admet une singularité essentielle en 0. Alors pour $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r)$ soit inclus dans D, l'ensemble $G = \bigcup_{0<|\lambda|<r} K(\lambda)$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Si G n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $s > 0$ tels que $K(\lambda) \cap \overline{B}(\alpha, s) = \emptyset$ pour $0 < |\lambda| < r$. Si on prend la transformation de Möbius $g(z) = s/(z-\alpha)$, alors $g(U) \subset B(0,1)$ où $U = \{z : |z-\alpha| > s\}$, donc $g(K(\lambda)) \subset B(0,1)$ pour $0 < |\lambda| < r$, ce qui veut dire que $g(K(\lambda))$ a une singularité éliminable en 0, donc que K a un pôle en 0, ce qui est contradictoire. ∎

Nous allons maintenant généraliser un résultat de P. Montel (1927), dont on trouvera la démonstration classique par exemple dans [4], page 438. Pour notre extension, nous aurons besoin du fait que si K est analytique multiforme alors $\lambda \mapsto \varrho(K(\lambda)) = \max\{|z| : z \in K(\lambda)\}$ est sous-harmonique ([1], Theorem 7.1.3).

Théorème 4.2. *Soit D le disque centré à l'origine et de rayon r et K une multifonction analytique finie de degré N sur $D \setminus \{0\}$, ayant une singularité essentielle en 0. Alors la suite de multifonctions analytiques de degré N définies par*

$$K_n(\lambda) = K(\lambda/2^n) \quad \text{pour } 0 < |\lambda| < 2r,\ n = 1, 2, \ldots$$

n'est pas normale (au sens défini dans §2).

Démonstration. D'après le théorème précédent il existe deux suites (s_k) et (α_k), convergeant vers 0, telles que

$$1/4 > |s_1| > |s_2| > \dots, \qquad \alpha_k \in K(s_k).$$

Soit (n_k) une suite croissante d'entiers tels que

$$1/2^{n_k+2} \le |s_k| \le 1/2^{n_k+1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Alors $\omega_k = 2^{n_k} s_k \in \overline{C}(1/4, 1/2)$, la couronne fermée de centre 0 et de rayons 1/4 et 1/2. De plus,

$$K_{n_k}(\omega_k) = K(2^{n_k} s_k / 2^{n_k}) = K(s_k) \ni \alpha_k.$$

Supposons que la famille $\{K_n\}$ soit normale. Alors la suite (K_{n_k}) contient une sous-suite, que nous noterons $(K_{n_{k_j}})$, qui converge uniformément sur tout compact de $D \setminus \{0\}$, donc en particulier sur $\overline{C}(1/4, 1/2)$, vers une multifonction analytique M de degré N ou vers une multifonction finie dont une ou plusieurs branches sont réduites à la constante ∞.

Plaçons nous dans le premier cas, où $M(\lambda) \not\ni \infty$ sur $\overline{C}(1/4, 1/2)$. Dans ce cas $(K_{n_{k_j}})$ est uniformément bornée sur le compact $\overline{C}(1/4, 1/2)$, donc il existe $R > 0$ tel que

$$K_{n_{k_j}}(\omega) \subset \overline{B}(0, R) \quad \text{pour } \omega \in \overline{C}(1/4, 1/2) \text{ et tout } n_{k_j}.$$

Le voisinage pointé $B(0, 1/2^{n_k+1}) \setminus \{0\}$ peut s'écrire comme la réunion dénombrable de couronnes $\overline{C}_j = \{\omega : 1/2^{n_{k_j}+2} \le |\omega| \le 1/2^{n_{k_j}+1}\}$ et de couronnes intercalaires $\overline{D}_j$ dont les frontières sont incluses dans les $\overline{C}_j$ précédents.

Si $\omega \in \overline{C}_j$, on a $2^{n_k}\omega \in \overline{C}(1/4, 1/2)$, donc $K(\omega) = K_{n_k}(2^{n_k}\omega) \subset \overline{B}(0, R)$, ainsi $\varrho(K(\omega)) \le R$ sur chaque $\overline{C}_j$. Comme $\lambda \mapsto \varrho(K(\lambda))$ est sous-harmonique sur $D \setminus \{0\}$, donc satisfait le principe du maximum, on a $\varrho(K(\omega)) \le R$ sur $\overline{D}_j$. Ainsi on a prouvé que $K(\omega) \subset \overline{B}(0, R)$ pour $0 < |\omega| < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, autrement dit 0 n'est pas une singularité essentielle, ce qui est absurde.

Supposons maintenant que $M(\lambda) \ni \infty$ sur $\overline{C}(1/4, 1/2)$. Le fait que $\alpha_k \in K(s_k)$, avec $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, implique que toutes les branches de M ne peuvent être réduites à ∞. Supposons que l'une des branches soit réduite à ∞. Il existe une transformation de Möbius g et un voisinage V de 0 tel que $g(K(\lambda))$ soit analytique multiforme (à valeurs compactes) sur $V \setminus \{0\}$. Le même argument que dans le cas précédent montrerait que $g(K(\lambda))$ admet une singularité non essentielle en 0, donc que 0 serait un pôle de $K(\lambda)$ sur $D \setminus \{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse. ∎

Théorème 4.3 (Grand théorème de Picard pour les multifonctions analytiques de degré N). *Soit D un domaine du plan complexe contenant l'origine et soit K une multifonction analytique finie de degré N sur $D \setminus \{0\}$*

ayant une singularité essentielle en 0. Alors $\bigcup_{\lambda\in D\setminus\{0\}} K(\lambda)$ *est tout le plan complexe moins possiblement* $2N-1$ *valeurs.*

Démonstration. On peut supposer que $D=\{z : |z|<r\}$. Supposons que $2N$ points ne sont pas dans $\bigcup_{0<|\lambda|<r} K(\lambda)$. Alors les multifonctions analytiques finies, de degré N, définies par

$$K_n(\lambda)=K(\lambda/2^n) \quad \text{pour } 0<|\lambda|<r,\ n=1,2,\dots,$$

ne prennent pas ces $2N$ valeurs exceptionnelles. D'après le critère fondamental de Dufresnoy (Corollaire 3.2), la famille $\{K_n\}$ est normale au sens défini dans §2, mais cela contredit le Théorème 4.2. ■

Nous montrons maintenant que $2N-1$ est la meilleure valeur possible.

THÉORÈME 4.4. *Soient* $a_1,\dots,a_{2N-1}$ *des nombres complexes deux à deux distincts. Considérons la multifonction analytique finie, de degré* N, *définie sur* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *par*

$$K(\lambda)=\{z : (z-a_1)\dots(z-a_N)+e^{1/\lambda}(z-a_{N+1})\dots(z-a_{2N-1})=0\}.$$

Alors K *admet une singularité essentielle en* 0 *et elle excepte les* $2N-1$ *points* $a_1,\dots,a_{2N-1}$.

Démonstration. Posons $q(z)=(z-a_1)\dots(z-a_N)$ et $r(z)=(z-a_{N+1})\dots(z-a_{2N-1})$; alors $K(\lambda)$ est définie par le polynôme

$$p_\lambda(z)=q(z)+e^{1/\lambda}r(z). \tag{1}$$

Si on dénote par $z_1(\lambda),\dots,z_N(\lambda)$ les branches de $K(\lambda)$ répétées avec leurs multiplicités, on a donc

$$(z-z_1(\lambda))\dots(z-z_N(\lambda))=p_\lambda(z), \tag{2}$$

$$z_1(\lambda)+\dots+z_N(\lambda)=a_1+\dots+a_N+e^{1/\lambda}. \tag{3}$$

Cette relation (3) implique que 0 n'est pas une singularité éliminable pour K, puisque K ne peut être bornée dans aucun voisinage de 0. Montrons maintenant que $\lambda=0$ ne peut pas être un pôle pour K. Pour cela il suffit de montrer que $g(K(\lambda))$ n'est pas bornée au voisinage de 0, pour toute transformation de Möbius de la forme $g(z)=1/(z-b)$. Nous avons

$$\begin{aligned} g(z_1(\lambda))\dots g(z_N(\lambda)) &= \frac{(-1)^N}{(b-z_1(\lambda))\dots(b-z_N(\lambda))} \\ &= \frac{(-1)^N}{q(b)+e^{1/\lambda}r(b)}, \end{aligned} \tag{4}$$

d'après les relations (1) et (2). On ne peut pas avoir $q(b)=r(b)=0$, car les a_i sont distincts deux à deux. Si $r(b)\neq 0$, comme $e^{1/\lambda}$ admet une singularité essentielle en 0, il existe une suite (λ_n) convergeant vers 0 telle que e^{1/λ_n} converge vers $-q(b)/r(b)$, donc $g(K(\lambda_n))$ ne peut pas être bornée.

Si $r(b) = 0$, auquel cas $q(b) \neq 0$, en considérant la $(N-1)$-ième fonction symétrique de $s_1 = g(z_1(\lambda)), \ldots, s_N = g(z_N(\lambda))$ on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{N-1} \leq N} s_{i_1} \ldots s_{i_{N-1}} &= (s_1 \ldots s_N)\left[\frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_N}\right] \\ &= \frac{(-1)^N}{q(b)}[z_1(\lambda) - b + \ldots + z_N(\lambda) - b] \\ &= \frac{(-1)^N}{q(b)}[a_1 + \ldots + a_N + e^{1/\lambda} - Nb],\end{aligned}$$

d'après les relations (3) et (4). Cela prouve donc que $g(K(\lambda))$ ne peut pas être bornée au voisinage de 0 puisque $e^{1/\lambda}$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut quant λ s'approche de 0. ∎

Références

[1] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, Universitext, Springer, New York, 1991.

[2] —, *Analytic multifunctions and their applications*, dans : P. M. Gauthier (ed.), Complex Potential Theory (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 439, Kluwer, Dordrecht, 1994, 1–74.

[3] B. Aupetit et A. Zraïbi, *Distribution des valeurs des fonctions analytiques multiformes*, Studia Math. 79 (1984), 217–226.

[4] R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, *Volume 1*, Academic Press, New York, 1979.

[5] J. Dufresnoy, *Théorie nouvelle des familles complexes normales*, Ann. École Norm. Sup. 1 (1944), 1–44.

[6] M. Ech-Chérif El Kettani, *Grand théorème de Picard pour les multifonctions analytiques finies*, thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1996.

[7] T. Ransford, *Interpolation and extrapolation of analytic multivalued functions*, Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 480–504.

[8] G. Rémoundos, *Extension aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations*, Mémorial des sciences mathématiques 23, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[9] A. Zraïbi, *Sur les fonctions analytiques multiformes*, thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1983.

Département de mathématiques
et de statistique
Faculté des sciences et de génie
Université Laval
Québec, Canada, G1K 7P4
E-mail : baupetit@mat.ulaval.ca

Département de mathématiques
et informatique
Faculté des sciences Dhar El-Mahraz
B.P. 1796 Atlas
Fès, Maroc
E-mail : melkettani@caramail.com

Reçu par la Rédaction le 7.6.2001 (1273)