ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
86.1 (2005)

Inégalités de Markov tangentielles locales sur les courbes algébriques singulières de $\mathbb{R}^n$

par Laurent Gendre (Toulouse)

Abstract. We prove that every singular algebraic curve in $\mathbb{R}^n$ admits local tangential Markov inequalities at each of its points. More precisely, we show that the Markov exponent at a point of a real algebraic curve A is less than or equal to twice the multiplicity of the smallest complex algebraic curve containing A.

1. Introduction. Nous montrons que toutes les courbes algébriques de $\mathbb{R}^n$ admettent des inégalités de Markov tangentielles. Nous donnons une signification géométrique à l'exposant de ces inégalités en montrant qu'il est minoré par la multiplicité complexe du complexifié de la courbe réelle ; cette minoration est optimale pour certaines classes de courbes données explicitement dans [6]. Les techniques de démonstration que nous employons diffèrent de celles utilisées par les auteurs s'intéressant à ce sujet, puisqu'elles allient la théorie du pluripotentiel complexe et la géométrie analytique. Cependant la paramétrisation de Puiseux a déjà été employée par [3].

Dans l'article [5], Bos, Milman, Levenberg et Taylor montrent que les inégalités de Markov tangentielles d'exposant 1 caractérisent les sous-variétés algébriques lisses, sans bord et compacts de $\mathbb{R}^n$. Fefferman et Narasimhan montrent dans [10] qu'il existe des inégalités de Markov locales d'exposant 2 sur les sous-ensembles algébriques, uniquement pour les points réguliers. Récemment Baran et Pleśniak ont démontré dans [4] que l'image d'un compact HCP par une application analytique non dégénérée dans une sous-variété algébrique admet des inégalités de Markov tangentielles.

2. Notations et définitions. On identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, par conséquent, on a une injection naturelle entre $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]$. Nous conviendrons que $\mathbb{C}_i = \mathbb{C}^i \times \{0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^i \times \mathbb{C}^{n-i}$.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 41A17, 41A25, 32F45, 32U35, 32C25, 14H95, 14P10.

Key words and phrases: tangential Markov inequality.

Pour tout compact $K \subset \mathbb{C}^n$, on écrira

$$\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| \quad (f \text{ est une fonction continue dans } K),$$

la norme uniforme dans K. On notera $\|\cdot\|_2$ la norme Euclidienne dans $\mathbb{C}^n$ et

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - z_0\|_2 < r\} \quad (\forall r > 0)$$

la boule ouverte de centre z_0 et de rayon r.

2.1. *Cône tangent.* Si $E \subset \mathbb{C}^n$, on dira que $v \in \mathbb{C}^n$ est un *vecteur tangent* de E en $a \in \overline{E}$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, telles que $v = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(a - a_n)$. L'ensemble des vecteurs tangents à E en a est appelé *cône tangent* de E en a et on le note $C(E, a)$.

2.2. *Sous-ensemble algébrique de* $\mathbb{R}^n$*.* Si S est une partie de $\mathbb{K}^n$ $(n \geq 2)$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, l'ensemble

$$I^{\mathbb{K}}(S) := \{p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : p|_S = 0\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ayant un nombre fini de générateurs. Si $\mathcal{P}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, on écrira

$$\operatorname{loc} \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{K}^n : (\forall p \in \mathcal{P})\ p(x) = 0\}$$

le *locus* de $\mathcal{P}$.

Les *sous-ensembles algébriques* de $\mathbb{K}^n$ sont les parties A de $\mathbb{K}^n$ telles que

$$\operatorname{loc} I^{\mathbb{K}}(A) = A.$$

On notera respectivement A_{reg} et A_{sing} l'ensemble des points réguliers et singuliers de A dans $\mathbb{K}$. De l'identification $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, nous considérerons, pour tout sous-ensemble algébrique A de $\mathbb{R}^n$, le *complexifié* $\widetilde{A}$ de A comme étant le plus petit sous-ensemble algébrique complexe de $\mathbb{C}^n$ contenant A. On notera que

$$I^{\mathbb{C}}(\widetilde{A}) = I^{\mathbb{R}}(A) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

et $A = \widetilde{A} \cap \mathbb{R}^n$. Pour plus de précisions, il faut se référer au livre de Narasimhan ([15, p. 91]).

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est une *courbe algébrique* s'il existe des polynômes $p_1, \ldots, p_s$ dans $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ $(s \in \mathbb{N}^\star)$ tels que $A = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = \cdots = p_s(x) = 0\}$ et $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$.

2.3. *La fonction de Green avec pôle à l'infini dans les sous-ensembles algébriques de* $\mathbb{C}^n$

2.3.1. Définition. Si $K \subset \mathbb{C}^n$ est un compact, on définit la *classe de Lelong* comme ci-dessous :

$$L_K(\mathbb{C}^n) := \{u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n) : u|_K \le 0, \\ (\exists c_u \in \mathbb{R})\ (\forall z \in \mathbb{C}^n)\ u(z) \le c_u + \log(1+|z|)\},$$

où $|z| := \max_{1\le j\le n} |z_j|$ pour $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

La *fonction de Green avec pôle à l'infini* est définie par

$$V_K(z) := \sup\{u(z) : u \in L_K^+(\mathbb{C}^n)\} \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n), \tag{1}$$

où $L_K^+(\mathbb{C}^n) := \{u \in L_K(\mathbb{C}^n) : u \ge 0\}$. Notons que la définition (1) de la fonction de Green avec pôle à l'infini n'est valide que dans le cas où K est un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}^n$ (cf. [19, 2.7, p. 180]). Le théorème de Siciak–Zaharjuta ([20]) nous donne

$$V_K(z) = \log \Phi_K(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n),$$

où Φ_K est la fonction extrémale de Siciak définie par

$$\Phi_K(z) := \sup\{|p(z)|^{1/\deg(p)} : p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n],\ \|p\|_E \le 1,\ \deg p \ge 1\} \\ (\forall z \in \mathbb{C}^n).$$

2.3.2. *Inégalité de Bernstein–Walsh.* Du théorème de Zaharjuta nous déduisons l'inégalité de Bernstein–Walsh:

$$|p(z)| \le \|p\|_K e^{V_K(z)\deg(p)} \quad (\forall z \in \mathbb{C}^n)\ (\forall p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]). \tag{2}$$

2.4. *Compacts vérifiant la propriété* HCP*.* Nous dirons qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est HCP s'il vérifie l'assertion suivante : il existe des constantes réelles $C, \kappa, \delta_0 > 0$ telles que

$$d(z,E) \le \delta \ \Rightarrow\ V_K(z) \le C\delta^\kappa \quad (\forall \delta \in [0, \delta_0])\ (\forall z \in \mathbb{C}^n), \tag{3}$$

où $d(\cdot, E)$ est la distance Euclidienne à E. Par ailleurs, nous affirmerons qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{C}^n$ est *local-HCP* en $x \in E$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E \cap B(x, \varepsilon)$ est HCP. Naturellement, on dira que E est *local-HCP* s'il est local-HCP en chacun de ses points. Si E est compact, alors la propriété de local-HCP implique HCP. La notion d'HCP a été introduite par Pawłucki et Pleśniak dans [16], où il est montré que les compacts de $\mathbb{R}^n$ à pointe polynômiale (compacts UPC) sont HCP. La propriété fondamentale des compacts HCP est qu'ils admettent des inégalités de Markov. Les deux lemmes suivants donnent un exemple de local-HCP et de HCP.

LEMME 1. *Soient b un nombre complexe appartenant à εI, $|b| \ne \varepsilon$ ($I = [-1,1] \subset \mathbb{C}$) et r strictement positif tel que $r < \varepsilon - |b|$. Alors*

$$\sup_{D(b,r)} V_{\varepsilon I} \le c \log(1+r),$$

où $c = \max\{1, 2/\mathrm{dist}(b, \varepsilon\partial I)\}$ et $D(b,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-b| < r\}$.

Preuve. Sans perdre de généralité, on peut supposer $b > 0$. Il suffit d'estimer $\sup_{D(0,r)} V_{I'}$ où $I' = [2b - \varepsilon, \varepsilon]$. On a

$$\sup_{D(0,r)} V_{I'} = \log\left(\frac{ir}{\varepsilon - b} + \sqrt{\left(\frac{ir}{\varepsilon - b}\right)^2 - 1}\right).$$

Nous rappelons que la fonction de Green avec pôle à l'infini sur le segment $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$ est connue :

$$V_{[-1,1]}(z) = \log^+ |z + \sqrt{z^2 - 1}| \qquad (\forall z \in \mathbb{C}). \ \blacksquare$$

Du Lemme 1, nous déduisons que le segment $[-1,1]$ est local-HCP en 0.

LEMME 2. *La fonction $V_{[-1,1]}$ vérifie la propriété de continuité de Hölder avec un exposant $1/2$, c'est-à-dire*

$$\operatorname{dist}([-1,1], z) \leq \delta) \ \Rightarrow \ V_{[-1,1]}(z) \leq C\delta^{1/2} \qquad (\forall \delta \in [0,1]) \ (\forall z \in \mathbb{C}),$$

où $C > 0$ est une constante.

Preuve. Nous ne donnerons pas la démonstration qui pourra être trouvée dans [16] ou dans le livre de M. Klimek [12]. ■

2.4.1. *Critère de Sadullaev.* Ce critère caractérise l'algébricité des sous-ensembles analytiques de $\mathbb{C}^n$.

THÉORÈME 1 (Critère de Sadullaev). *Si $\widetilde{A}$ est un sous-ensemble analytique connexe de $\mathbb{C}^n$, alors la fonction de Green V_K avec pôle à l'infini est localement bornée dans $\widetilde{A}$ si et seulement si $\widetilde{A}$ est algébrique.*

Preuve. Voir la démonstration de [18, p. 497, Théorème 2.2]. ■

3. Résultat principal. Nous appellerons *morceau de courbe algébrique* tout sous-ensemble analytique connexe et irréductible d'une courbe algébrique.

THÉORÈME 2. *Soit A un morceau de courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout x_0 dans A, il existe des constantes réelles $C_1, C_2, \varepsilon_0 > 0$, dépendant de x_0 et localement majorées, telles que pour tous $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ et $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$) :*

(i) *Si $x_0 \in A_{\mathrm{sing}}$,*

$$|D_v p(x_0)| \leq C_1 \left(\frac{C_2(\deg(p))^2}{\varepsilon}\right)^k \|p\|_{A \cap B(x_0, \varepsilon^k)},$$

où k est la multiplicité complexe du point singulier x_0 dans $\widetilde{A}$ et v un vecteur unitaire dans $C(A, x_0)$.

(ii) *Si $x_0 \in A_{\mathrm{reg}} \setminus \partial A$,*

$$|D_v p(x_0)| \leq C_1 \left(\frac{C_2 \deg(p)}{\varepsilon}\right) \|p\|_{A \cap B(x_0, \varepsilon)},$$

où v est un vecteur unitaire de l'espace tangent $T_{x_0} A_{\mathrm{reg}}$.

(iii) *Si* $x_0 \in \partial A \setminus A_{\mathrm{sing}}$,

$$|D_v p(x_0)| \le C_1 \left(\frac{C_2 \deg(p)}{\varepsilon} \right)^2 \|p\|_{A \cap B(x_0, \varepsilon)},$$

où v *est un vecteur unitaire de l'espace tangent* $T_{x_0} A_{\mathrm{reg}}$.

La démonstration du Théorème 2 se fait en deux étapes. La première consiste à construire une paramétrisation de Puiseux réelle. Dans la deuxième étape, il s'agit de montrer qu'en tout point de A la fonction de Green avec pôle à l'infini vérifie la propriété de local-HCP sur le complexifié $\widetilde{A}$ de A, avec la métrique des géodésiques.

4. Construction de la paramétrisation de Puiseux. Dans cette partie, nous construisons une paramétrisation de Puiseux pour les courbes algébriques de $\mathbb{R}^n$ et nous la prolongeons dans la Proposition 2 à un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ partout dense. Cette construction est un raffinement de la démonstration de [9, p. 67].

Soit A est un sous-ensemble analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension pure 1, localement irréductible et tel que $0 \in A_{\mathrm{sing}}$, et $\widetilde{A}$ le complexifié de A, sous-ensemble algébrique dans $\mathbb{C}^n$ (donc $0 \in \widetilde{A}_{\mathrm{sing}}$). On suppose que la projection $\pi : \widetilde{A} \cap U \to U' \subset \mathbb{C}_1$ ($U = U' \times U'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ un polydisque centré en 0) est propre.

Pour toute fonction holomorphe f au voisinage d'un point a de $\mathbb{C}$ nous noterons $\mathrm{ord}_a f$ l'ordre d'annulation de f en a. Nous écrirons $\mu_a(\widetilde{A})$ la multiplicité complexe de tout point a dans $\widetilde{A}$ (cf. ([9, §11.1, p. 120]).

Pour toute suite d'entiers $0 \le l_1 < \cdots < l_r \le k-1$, où $k \in \mathbb{N}^\star$ et $r \in \mathbb{N}^\star$, nous noterons par $\mathcal{R}^{\langle r \rangle}$, avec $1 \le r \le k$, l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}^{\langle r \rangle} = \bigcup_{1 \le j \le r} [0, e^{2\pi i l_j / k}].$$

Proposition 1. *Sous les hypothèses et les notations ci-dessus, il existe une paramétrisation de Puiseux* $\varphi : \overline{D(0,1)} \to \widetilde{A} \cap U$ *définie dans un voisinage ouvert du disque unité fermé* $\overline{D(0,1)}$ *de* $\mathbb{C}_1$ *telle que* $\varphi(z) = (cz^k, \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z))$ $(\forall z \in \overline{D(0,1)})$, *où* $k = \mu_0(\widetilde{A})$, *les* ψ_j *sont holomorphes dans* $\overline{D(0,1)}$ *avec* $\mathrm{ord}_0\, \psi_j > k$ *et* $c \in \mathbb{C}$ *une constante dépendant de* φ; *il existe des entiers* $0 \le l_1 < \cdots < l_{r_A^+} \le k-1$ (*resp.* $0 \le l'_1 < \cdots < l'_{r_A^-} \le k-1$), *où* r_A^+ (*resp.* r_A^-) *est le nombre de branche(s) de la courbe réelle* A *dans* U, *ayant* 0 *comme extrémité*, *au-dessus de* $[0,1] \subset \overline{D(0,1)}$ (*resp. au-dessus de* $[-1,0] \subset \overline{D(0,1)}$), *de sorte que* $\varphi|_{\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle}}$ (*resp.* $\varphi|_{\mathcal{R}^{\langle r_A^- \rangle}}$) *paramétrise* $A \cap U \cap \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_1) \in [0,1]\}$ (*resp.* $A \cap U \cap \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_1) \in [-1,0]\}$).

Preuve. $\widetilde{A}$ est de dimension complexe 1, et $\widetilde{A}_{\text{sing}}$ est un ensemble discret. Donc il existe un polydisque $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\pi^{-1}(0) \cap \widetilde{A} \cap U = \{0\}$, où π est la projection. Nous avons supposé que le sous-ensemble algébrique A est localement irréductible ; il s'ensuit donc que le complexifié $\widetilde{A}$ est localement irréductible ([15, Proposition 2, p. 92]). La projection $\pi|_U$ est supposée propre, et d'après le théorème de structure des sous-ensembles analytiques complexes, $(\widetilde{A} \cap U, \pi, U')$ est un l-revêtement holomorphe ramifié. Fixons un point $a \in A \cap U$ tel que $a_1 \in \mathbb{R}$ où $a_1 = \pi(a)$. Soit $\gamma : [0, r_1[\to \widetilde{A}$ le relèvement du segment $[0, r_1[\subset \mathbb{C}_1$ passant par a dans A (i.e. $\exists t_0 \in [0, r_1[$, $\gamma(t_0) = a$, et $\forall t \in [0, r_1[$, $\pi \circ \gamma(t) = t$). Ce relèvement existe car $(\widetilde{A} \cap U, \pi, U')$ est un l-revêtement holomorphe ramifié. Comme $\widetilde{A} \cap U$ est irréductible, $\widetilde{A} \cap U \setminus \{0\}$ est connexe. Ceci nous permet de dire que $\Gamma_r = \pi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z_1| = r\}) \cap \widetilde{A}$, $\forall r \in [0, r_1[$, est une courbe de Jordan fermée. Donc le triplet $(\Gamma_r, \pi, |z_1| = r)$ est un l-revêtement. On peut ainsi construire une unique paramétrisation $\gamma_r : [0, 2\pi[\to \Gamma_r$ telle que $\pi \circ \gamma_r(t) = re^{ikt}$, avec $\gamma_r(0) = \gamma(r)$. Définissons donc

$$\zeta(z) := \left(\frac{\pi(z)}{r_1}\right)^{1/k}, \qquad \zeta(\gamma_r(t)) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/k} e^{it}.$$

La fonction ζ est holomorphe et injective sur $(\widetilde{A} \cap U) \setminus \{0\}$. Donc d'après le théorème de Riemann de prolongement des fonctions holomorphes sur les singularités, la fonction $z : D(0,1) \to \widetilde{A} \cap U$ telle que $\zeta \mapsto z(\zeta)$ est une injection holomorphe. Ainsi nous obtenons une paramétrisation de Puiseux pour $0 \in \widetilde{A}_{\text{sing}}$. Comme le point a n'est pas dans $\pi(A_{\text{sing}})$, on a donc $\{a^0, \ldots, a^{k-1}\} = \pi^{-1}(\{a_1\}) \cap \widetilde{A} \cap U$, en prenant par exemple $a = a^0$. D'après la construction de la fonction $z(\zeta)$, nous pouvons ordonner les points $(a^l)_{l \in \{0,\ldots,k-1\}}$ de sorte que $\zeta(a^l) \in [0, e^{2\pi i l/k}]$, $\forall l \in \{0, \ldots, k-1\}$. Définissons

$$\mathcal{E}^{\langle k \rangle} := \bigcup_{0 \le l \le k-1} [0, e^{2\pi i l/k}].$$

et la partie de $\mathcal{E}^{\langle k \rangle}$,

$$\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle} := \bigcup_{1 \le j \le r_A^+} [0, e^{2\pi i l_j/k}], \tag{4}$$

où r_A^+ est le nombre de branches, ayant pour extrémité 0, dans $A \cap U$ et $[0, e^{2\pi i l_j/k}]$ est un segment paramétrisant une branche de $A \cap U$ au-dessus du segment $[0,1]$. Bien sûr, l'entier naturel r_A^+ ne peut dépasser k et est toujours plus grand que 1. Ainsi $\varphi|_{\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle}}$ paramétrise analytiquement la partie de la courbe réelle A au-dessus du segment $[0,1]$. Pour les branches de $A \cap U$ au-dessus de $[-1,0]$, on se ramène au cas des branches au-dessus de $[0,1]$ par une rotation d'angle π. ■

Lemme 3. *Soit A un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 et $\widetilde{A}$ son complexifié dans $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \widetilde{A} \cap \mathbb{R}^n$. Alors il existe une transformation unitaire l de $\mathbb{C}^n$ telle que $l(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et la projection $\pi : l(\widetilde{A}) \to \mathbb{C}_1$ soit propre.*

Preuve. On injecte $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, et H_0 sera l'hyperplan à l'infini identifié à $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, de sorte que $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \cup \mathbb{C}^n$. La courbe A est algébrique dans $\mathbb{R}^n$, donc il existe des polynômes $p_1, \dots, p_s$ dans $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ($s \in \mathbb{N}^\star$) tels que

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = \cdots = p_s(x) = 0\}.$$

Si d_j est le degré de p_j, les polynômes p_j se décomposent ainsi :

$$p_j(x) = h_j(x) + q_j(x) \quad (\forall j \in \{1, \dots, s\}),$$

où $h_j, q_j \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, les h_j sont des polynômes homogènes avec $\deg(h_j) = d_j$ et $\deg(q_j) < d_j$. Considérons le sous-ensemble algébrique projectif $V \subset H_0 := \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$, défini comme ci-dessous :

$$V := \{[z] \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) : h_1(z) = \cdots = h_s(z) = 0\}.$$

Le sous-ensemble algébrique projectif V est bien défini puisque les h_j sont homogènes, et V est propre, car les h_j ne sont pas tous nuls. Maintenant identifions $\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,1)$ et $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Posons

$$\mathcal{L} := \{\widetilde{L} \in \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,1) : \widetilde{L} \subset \widetilde{A}\}\,;$$

c'est un fermé d'intérieur vide dans $\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,1)$. Par conséquent, $\mathcal{M} := \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,1) \setminus \mathcal{L}$ est un ouvert partout dense de $\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,1)$. Définissons

$$\mathcal{B} := \{\widetilde{L} \in \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n,1) : (\exists v_n \in \mathbb{R}^n)\, \|v_n\|_2 = 1,\, \widetilde{L} = \mathbb{C}v_n,\, [v_n] \notin V\}.$$

De toute évidence $\mathcal{B} \neq \emptyset$, car $\deg(h_j) = \deg(p_j)$ implique que V est au plus une hypersurface de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Nous souhaitons montrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, alors supposons que $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{M}$. Donc il existe $\widetilde{L}$ dans $\mathcal{B}$ tel que $\widetilde{L} \notin \mathcal{M}$. Il s'ensuit que $\widetilde{L} \subset \widetilde{A}$. Choisissons v_n dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\widetilde{L} = \mathbb{C}v_n$, puisque $\widetilde{L}$ est dans $\mathcal{B}$, et posons $L = \mathbb{R}v_n$. Nous avons $L \subset A$ car $\widetilde{A}$ est le complexifié de A et $L \subset \widetilde{L} \subset \widetilde{A}$. Comme $L \subset A$, on a

$$p_1(\lambda v_n) = \cdots = p_s(\lambda v_n) = 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}),$$

soit encore en multipliant chaque $p_j(\lambda v_n)$ par $1/\lambda^{d_i}$,

$$\frac{1}{\lambda^{d_1}}\, p_1(\lambda v_n) = \cdots = \frac{1}{\lambda^{d_s}}\, p_s(\lambda v_n) = 0 \quad (\forall \lambda > 0).$$

Quand $\lambda \to +\infty$, cela nous donne par définition des h_j :

$$h_1(v_n) = \cdots = h_s(v_n) = 0,$$

donc $[v_n]$ est dans V, ce qui contredit l'hypothèse que $\widetilde{L}$ est dans $\mathcal{B}$, donc on a bien $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

Définissons les polynômes projectivisés $p_j^\star$ des p_j comme ci-dessous :

$$p_j^\star(z_0,\dots,z_n) := z_0^{d_j} p_j(z_1/z_0,\dots,z_n/z_0) \quad (\forall j\in\{1,\dots,s\}).$$

Soit $\overset{\approx}{\widetilde{A}}$ la sous-variété algébrique projective de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\overset{\approx}{\widetilde{A}} := \{[z]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) : p_1^\star(z)=\cdots= \ p_s^\star(z)=0\}\,;$$

par définition de $\overset{\approx}{\widetilde{A}}$, on a $\widetilde{A}=\mathbb{C}^n\cap\overset{\approx}{\widetilde{A}}$. Comme $\overset{\approx}{\widetilde{A}}$ est fermé dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\overline{\widetilde{A}}\subset\overset{\approx}{\widetilde{A}} \quad\text{et}\quad \overline{\widetilde{A}}\setminus\widetilde{A}\subset\overset{\approx}{\widetilde{A}}.$$

De plus $\overset{\approx}{\widetilde{A}}\cap H_0=V$, par conséquent $\overline{\widetilde{A}}\cap H_0\subset V$, et $\widetilde{A}\cap H_0=\emptyset$. Puisque $\widetilde{A}\subset\overline{\widetilde{A}}\subset\overset{\approx}{\widetilde{A}}$, on a $\widetilde{A}\subset\overline{\widetilde{A}}\cap\mathbb{C}^n\subset\overset{\approx}{\widetilde{A}}\cap\mathbb{C}^n=\widetilde{A}$, donc

$$\widetilde{A}=\overline{\widetilde{A}}\cap\mathbb{C}^n=\overset{\approx}{\widetilde{A}}\cap\mathbb{C}^n.$$

Montrons que

$$\overline{\widetilde{A}}\setminus\widetilde{A}\subset V.$$

On a

$$\overline{\widetilde{A}}=\overline{\widetilde{A}}\cap(H_0\cup\mathbb{C}^n)=(\overline{\widetilde{A}}\cap H_0)\cup(\overline{\widetilde{A}}\cap\mathbb{C}^n)=(\overline{\widetilde{A}}\cap H_0)\cup\widetilde{A}.$$

Comme $\overline{\widetilde{A}}=(\overline{\widetilde{A}}\setminus\widetilde{A})\cup\widetilde{A}$, on en déduit que

$$(\lozenge_1)\qquad (\overline{\widetilde{A}}\setminus\widetilde{A})\cup\widetilde{A}=(\overline{\widetilde{A}}\cap H_0)\cup\widetilde{A}.$$

Choisissons $[z]\in\overline{\widetilde{A}}\setminus\widetilde{A}$. De l'égalité $(\lozenge_1)$, on déduit que $[z]\in\overline{\widetilde{A}}\cap H_0$, soit $\overline{\widetilde{A}}\setminus\widetilde{A}\subset\overline{\widetilde{A}}\cap H_0$. L'inclusion voulue est ainsi démontrée, sachant que $\overline{\widetilde{A}}\cap H_0\subset V$.

Soit $\widetilde{L}$ fixé dans $\mathcal{B}$. Nous avons $\widetilde{L}\not\subset\widetilde{A}$ et $L\not\subset A$. Il s'ensuit que $\widetilde{L}\cap\widetilde{A}$ est un sous-ensemble algébrique propre de $\widetilde{L}$. Comme $\widetilde{L}$ est de dimension complexe 1 et $\widetilde{A}$ est algébrique, $\widetilde{L}\cap\widetilde{A}$ est fini, donc $L\cap A$ aussi.

Construisons la transformation unitaire l. Choisissons v_n dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\|v_n\|_2=1$ et $\mathbb{C}v_n=\widetilde{L}$ ($\widetilde{L}$ est dans $\mathcal{B}$). Rappelons que $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire usuel

$$(z|\zeta) := \sum_{j=1}^n z_j\overline{\zeta}_j \qquad (\forall z,\zeta\in\mathbb{C}^n),$$

où $z=(z_1,\dots,z_n),\ \zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt, on obtient une base $\mathbb{R}$-orthogonale [1] $(v_1,\dots,v_{n-1})$ dans $L^{\perp_{\mathbb{R}}}$. Le système $(v_1,\dots,v_{n-1})$ est $\mathbb{C}$-libre, donc

$$\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1,\dots,v_{n-1})=n-1.$$

[1] Avec le produit scalaire induit sur $\mathbb{R}^n$.

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \widetilde{L}^{\perp_{\mathbb{C}}} \quad \text{tel que} \quad \widetilde{L} \oplus \widetilde{L}^{\perp_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}^n.$$

On a

$$(\overline{\widetilde{A}} \setminus \widetilde{A}) \cap \overline{\widetilde{L}} \subset V \cap \overline{(a + \widetilde{L})} = \emptyset \qquad (\forall a \in \widetilde{A}),$$

car V est un sous-ensemble de H_0 et $[v_n]$ n'appartient pas à V. Ceci montre que la projection

$$(\Diamond_2) \qquad \pi_{\widetilde{L}} : \widetilde{A} \to \widetilde{L}^{\perp_{\mathbb{C}}}$$

est propre. D'après la construction de $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L}^{\perp}$, il existe donc une unique transformation unitaire de $\mathbb{C}^n$ notée l_1 telle que

$$(l_1(v_j)|e_k) = \delta_{j,k} \qquad (\forall j, k \in \{1, \ldots, n\}),$$

avec $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker, où $l_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. On déduit de $(\Diamond_2)$ que la projection

$$\pi^1 : l_1(\widetilde{A}) \to \mathbb{C}_{n-1}, \qquad (z', z_n) \mapsto z',$$

est propre. D'après le Théorème du [9, §3.2, p. 29], l'ensemble $\pi^1(l_1(\widetilde{A}))$ est algébrique dans $\mathbb{C}_{n-1}$. Posons $\widetilde{A}_0 = \widetilde{A}$. Par une recurrence descendante, en réitérant la manipulation précédente, on montre qu'il existe un triplet $(\widetilde{A}_k, \pi^k, l_k)$ $(\forall k \in \{1, \ldots, n-1\})$, pas nécessairement unique, vérifiant pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{cases} \widetilde{A}_{k+1} = l_{k+1}(\pi^k(\widetilde{A}_k)), \\ \pi^k : \widetilde{A}_k \subset \mathbb{C}_{n-k+1} \to \mathbb{C}_{n-k} \text{ est une projection propre,} \\ l_k \text{ est une transformation unitaire de } \mathbb{C}_{n-k+1}. \end{cases}$$

La projection $\pi = \pi^{n-1} \circ \cdots \circ \pi^1$ et la transformation unitaire $l = l_{n-1} \circ \cdots \circ l_1$ ont les propriétés souhaitées. ∎

Proposition 2. *Supposons A une courbe algébrique réelle de $\mathbb{R}^n$, localement irréductible, telle que $0 \in \widetilde{A}_{\mathrm{sing}}$ et φ la paramétrisation de Puiseux de la Proposition 1. Modulo un changement de coordonnées unitaire dans $\mathbb{C}^n$, laissant A dans $\mathbb{R}^n$, il existe une application holomorphe Ψ définie dans Ω' ouvert de $\mathbb{C}$ partout dense, avec $\overline{D(0,1)} \subset \Omega'$, telle que $\Psi|_{\overline{D(0,1)}} = \psi$ et*

$$|\Psi(z)| \le C(1 + |z|^{sk}) \qquad (\forall z \in \Omega'),$$

où $C, s > 0$ sont des constantes réelles ne dépendant que de $\widetilde{A}$.

Preuve. D'après le Lemme 3, il existe un changement de coordonnées unitaire et une projection $\pi : \widetilde{A} \to \mathbb{C}_1$, $\pi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1$, propre telle que $\pi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Comme $\widetilde{A}$ est algébrique, d'après la Proposition 1 du [13, p. 389], il existe deux constantes réelles $C, s > 0$ telles que

$$(5) \qquad (|\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{1/2} \le C(1 + |\xi_1|^s).$$

La projection π est propre et $\widetilde{A}$ est algébrique de dimension complexe 1, donc il existe un sous-ensemble fini $\sigma_1 \subset \mathbb{C}_1$ contenant 0 (car $0 \in \widetilde{A}_{\text{sing}}$) de sorte que

$$\pi : \widetilde{A} \setminus \pi^{-1}(\sigma_1) \to \mathbb{C} \setminus \sigma_1$$

soit un r-revêtement holomorphe ($r \in \mathbb{N}^\star$), avec

$$(\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_1) \qquad \operatorname{card}(\pi^{-1}(z_1) \cap \widetilde{A}) = r.$$

Donc pour tout $z_1 \in \mathbb{C}_1 \setminus \sigma_1$, il existe $V_{z_1,j}$ ($\forall j \in \{1, \dots, r\}$) des ouverts de $\widetilde{A} \setminus \pi^{-1}(\sigma_1)$ et $W_{z_1} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}_1}(z_1)$ (voisinage ouvert de z_1 de $\mathbb{C}_1$) avec $\alpha_{z_1,j}$ des fonctions holomorphes dans W_{z_1} ($\forall j \in \{1, \dots, r\}$),

$$\alpha_{z_1,j} : W_{z_1} \to V_{z_1,j}, \qquad \xi \mapsto (\xi, \alpha_{z_1,j}(\xi)).$$

Posons $\Omega = \mathbb{C}_1 \setminus \Delta$, où Δ est un ensemble fini de demi-droites de $\mathbb{C}_1$ ayant pour origine tous les points de σ_1 et contenant en particulier $[0, +\infty[$; ainsi Ω est simplement connexe ([2]). En appliquant le théorème de la monodromie, il existe des fonctions holomorphes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans Ω telles que

$$(\forall z_1 \in \Omega)\ (\exists W_{z_1} \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}_1}(z_1))\ (\forall j \in \{1, \dots, r\}) \qquad \alpha_j|_{W_{z_1}} = \alpha_{z_1,j}.$$

Comme la projection $\pi : \widetilde{A} \to \mathbb{C}_1$ est propre, il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^n$, où $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, tel que la projection

$$\pi|_U : \widetilde{A} \cap U \to U', \qquad (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \xi_1,$$

soit une application propre et vérifie $\pi^{-1}(0) \cap \widetilde{A} \cap U = \{0\}$; cette dernière assertion est possible car σ_1 est un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}_1$. Le sous-ensemble algébrique $\widetilde{A} \cap U$ est irréductible, car la courbe algébrique réelle A est supposée localement irréductible (cf. [15, Proposition 2, p. 92]). D'après le théorème de structure locale des sous-ensembles analytiques, il existe $\sigma_2 \subset \mathbb{C}_1$ ($\sigma_2 \subset \sigma_1$) fini tel que $\pi : (\widetilde{A} \cap U) \setminus \pi^{-1}(\sigma_2) \to \mathbb{C}_1 \setminus \sigma_2$ soit un k-revêtement holomorphe ramifié ($k \in \mathbb{N}^\star$). On peut donc construire la paramétrisation de Puiseux associée à la singularité 0 de $\widetilde{A}$ à partir de la projection $\pi|_U$ comme dans la Proposition 1. Notons cette paramétrisation

$$\varphi(z) = (cz^k, \psi(z)) \qquad (\forall z \in \overline{D(0,1)}).$$

Considérons les secteurs suivants :

$$\mathcal{S}_j := \left\{ z \in D'(0,1) : \frac{2\pi j}{k} < \arg(z) \leq \frac{2\pi(j+1)}{k} \right\} \qquad (\forall j \in \{0, \dots, k-1\}),$$

où $k = \mu_0(\widetilde{A})$ et $D'(0,1) = \overline{D(0,1)} \setminus \{0\}$. Introduisons les changements de coordonnées locales suivantes :

$$\theta_j : D'(0,1) \to \mathcal{S}_j, \qquad \xi \mapsto (\xi/c)^{1/k}.$$

([2]) L'auteur remercie Julien Duval de cette idée.

Les fonctions θ_j sont holomorphes dans $D'(0,1)$. Notons

$$\mathcal{S}_j' = \mathcal{S}_j \setminus \Delta_j, \quad \Delta_j := \theta_j(\Delta), \quad \Omega_j := \theta_j(\Omega).$$

On a $\Omega_j \subset \mathcal{S}'{}_j$ et d'après le théorème de l'image ouverte, Ω_j est ouvert. Il est clair que θ_j dans $\overline{D(0,1)} \setminus \Delta \subset D'(0,1)$ paramétrise $\mathcal{S}_j'$. Donc la fonction $\varphi \circ \theta_j$ paramétrise un morceau d'une feuille au-dessus de $\overline{D(0,1)} \setminus \Delta \subset \mathbb{C}_1$. On en déduit l'existence d'un α_{i_j} tel que $\psi \circ \theta_j = \alpha_{i_j}$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \Delta$. Comme par construction la fonction α_{i_j} est holomorphe dans $\Omega \supset \overline{D(0,1)} \setminus \Delta$, la fonction ψ se prolonge sur l'ouvert Ω_j en une fonction ψ_j holomorphe dans Ω_j. De l'inégalité (5) on déduit que

$$|\psi_j(z)| \le c_j(1+|z|)^{sk} \quad (\forall z \in \Omega_j)\ (\forall j \in \{0,\dots,k-1\}).$$

Comme les prolongées ψ_j coïncident sur $\Omega_j \cap \overline{D(0,1)}$ avec ψ, d'après le théorème du prolongement analytique, ψ se prolonge sur l'ouvert Ω' défini par

$$\Omega' = \bigcup_{1 \le j \le k-1} \Omega_j.$$

Soit Ψ sa prolongée ; elle vérifie donc

$$(\forall z \in \Omega') \quad |\Psi(z)| \le c(1+|z|^{sk}),$$

avec $\overline{\Omega'} = \mathbb{C}_1$. Précisons que si $k=1$, la démonstration est beaucoup plus simple puisque le prolongement s'effectuera directement dans $\mathbb{C}_1 \setminus \Delta$. ■

5. Propriété HCP **de la fonction de Green avec pôle à l'infini dans $\widetilde{A}$.** Dans cette partie, nous allons montrer dans la Proposition 4 que la courbe algébrique A vérifie la local-HCP dans le complexifié $\widetilde{A}$ muni de la métrique des géodésiques.

Proposition 3. *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible. Modulo un changement de coordonnées unitaire laissant A dans $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes réelles $c_1, c_2, \varepsilon_0, \varrho_1 > 0$ dépendant uniquement de φ telles que pour tous $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ et $z \in D(0, \varrho_1)$,*

$$V_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \circ \varphi(z) \le c_2 V_{\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle}}(z), \tag{6}$$
$$(\textit{resp. } V_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \circ \varphi(z) \le c_2 V_{\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^-\rangle}}(z)),$$

avec

$$\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle} = \bigcup_{1 \le j \le r_A^+} [0, e^{2\pi i k_j/k}] \quad \Big(\textit{resp. } \mathcal{R}^{\langle r_A^-\rangle} = \bigcup_{1 \le j \le r_A^-} [0, e^{2\pi i k_j'/k}]\Big),$$

où $k = \mu_0(\widetilde{A})$, r_A^+ (resp. r_A^-) est le nombre de composantes connexes de $A \cap B(0, c_1\varepsilon^k) \cap \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_1) > 0\}$ (resp. de $A \cap B(0, c_1\varepsilon^k) \cap \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_1) < 0\}$). Les ensembles $\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle}$ et $0 \le k_1 < \dots <$

$k_{r_A^+} \leq k$ *(resp.* $\mathcal{R}^{\langle r_A^- \rangle}$ *et* $0 \leq k_1' < \cdots < k_{r_A^-}' \leq k$*) sont construits comme dans la Proposition* 1.

Preuve. Montrons l'estimation (6) pour $\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle}$ seulement ; la démonstration pour $\mathcal{R}^{\langle r_A^- \rangle}$ est identique. Notons

$$\varphi(z) = (cz^k, \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z)) \quad (\forall z \in \overline{D(0,1)})$$

la paramétrisation de Puiseux de la Proposition 1. Soit $\varepsilon_0 \in]0,1[$. Il existe une constante réelle $c_1 > 0$ dépendant de c et des fonctions composantes $\psi_2, \ldots, \psi_n$ telle que $\varphi(\overline{D(0,\varepsilon)}) \subset B(0, c_1\varepsilon^k)$ pour tout ε dans $]0, \varepsilon_0[$.

On a les inclusions suivantes : pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$(7) \quad \varphi(\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle}) \subset A, \quad \varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle}) \subset A \cap \varphi(\overline{D(0,\varepsilon)}) \subset A \cap B(0, c_1\varepsilon^k),$$

ce qui nous donne

$$L_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n) \subset L_{A \cap \varphi(D(0,\varepsilon))}(\mathbb{C}^n) \subset L_{\varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle})}(\mathbb{C}^n).$$

Majorons directement la fonction $V_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)}$. D'après la Proposition 2, la fonction $\varphi(z) = (cz^k, \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z))$ se prolonge holomorphiquement dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ partout dense, d'une telle façon que

$$(\lozenge) \qquad \max_{2 \leq j \leq n} |\psi_j(z)| \leq C(1 + |z|^{ks}) \quad (\forall z \in \Omega).$$

L'ensemble $A \cap B(0, c_1\varepsilon^k)$ n'est pas pluripolaire dans $\widetilde{A}$, car φ est holomorphe dans $D(0,1)$ et $\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^+ \rangle}$ est un continu de $\mathbb{C}$.

D'après le critère de Sadullaev, $V_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)}$ est dans $L^\infty_{\text{loc}}(\widetilde{A})$, car $\widetilde{A}$ est algébrique (cf. [18, p. 497, Théorème 2.2 et p. 501, Proposition 3.4]), donc il existe une constante réelle $C_{A,\varepsilon} > 0$ telle que

$$V_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(z) \leq C_{A,\varepsilon} + \log(1 + |z|) \quad (\forall z \in \widetilde{A}).$$

Soit $u \in L_{A \cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n)$. On a

$$(\lozenge\lozenge) \qquad u \circ \varphi(z) \leq C_{\varphi,A,\varepsilon} + ks\log(1 + |z|) \quad (\forall z \in \Omega),$$

où le réel ks est celui de l'estimation $(\lozenge)$ ci-avant.

Soient ϱ une constante réelle dans $]\varepsilon_0, 1[$ et H_ϱ la fonction

$$H_\varrho(z) := ks\log^+(|z|/\varrho) \quad (\forall z \in \mathbb{C})\ (\forall \varrho \in]\varepsilon_0, 1[),$$

où $x^+ := \max(0,x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. La fonction H_ϱ est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$ $(\forall \varrho > 0)$ et vérifie les propriétés ci-dessous :

1. $H_\varrho(z) = 0$ $(\forall z \in D(0,\varrho))$ $(\forall \varrho \in]\varepsilon_0, 1[)$.
2. $H_\varrho(z) \geq -ks\log\varrho$ $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0,1))$ $(\forall \varrho \in]\varepsilon_0, 1[)$.
3. $H_\varrho(z) \leq c_\varrho + ks\log(1 + |z|)$ $(\forall z \in \mathbb{C})$, où $c_\varrho > 0$ est une constante.

Les assertions 1–3 sont immédiates à montrer. Maintenant, nous allons prouver que l'on peut choisir ϱ dans $]\varepsilon_0, 1[$ de sorte que

$$(\Diamond\Diamond\Diamond) \quad H_\varrho(z) \geq u \circ \varphi(z) \quad (\forall u \in L_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n))\ (\forall z \in \Omega \setminus D(0,1)).$$

Pour cela minorons $\Delta_\varrho(z) := H_\varrho(z) - u \circ \varphi(z)$ dans $\Omega \setminus D(0,1)$; pour le moment ϱ est fixé dans $]\varepsilon_0, 1[$. En réorganisant les termes et par l'estimation $(\Diamond\Diamond)$, on a

$$\Delta_\varrho(z) \geq -ks \cdot \log \varrho - C_{\varphi,A,\varepsilon} - ks \log 2 \quad (\forall z \in \Omega \setminus D(0,1)).$$

Si $\varrho < \frac{1}{2}e^{-C_{\varphi,A,\varepsilon}/sk}$, on a bien $\Delta_\varrho(z) \geq 0$ $(\forall z \in \Omega \setminus D(0,1))$. Quitte à diminuer $\varepsilon_0 > 0$, on peut choisir ϱ_1 dans $]\varepsilon_0, 1[\, \cap\,]0, \frac{1}{2}e^{-C_{\varphi,A,\varepsilon}/sk}[$ tel que $\Delta_{\varrho_1}(z) \geq 0$ pour tout z dans $\Omega \setminus D(0,1)$.

Comme $\overline{D(0,1)}$ est dans l'ouvert Ω d'après la Proposition 2, et que l'estimation $(\Diamond\Diamond\Diamond)$ est valide pour $\varrho = \varrho_1$, on a

$$\limsup_{\zeta \to z,\, \zeta \in \Omega} u \circ \varphi(\zeta) \leq H_{\varrho_1}(z) \quad (\forall z \in \partial\Omega),$$

donc d'après [12, Corollaire 2.9.14, p. 69], la fonction

$$W_{\varrho_1}(z) = \begin{cases} \max(u \circ \varphi(z), H_{\varrho_1}(z)), & z \in \Omega, \\ H_{\varrho_1}(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \end{cases}$$

est bien définie et sous-harmonique dans $\mathbb{C}$. De plus, on a $(ks)^{-1}W_{\varrho_1} \in L_{\varphi(\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle})}(\mathbb{C})$ et $W_{\varrho_1}|_{D(0,\varrho_1)} = u \circ \varphi$, d'après les propriétés 1 et 3 de H_{ϱ_1}, énoncées plus haut. Il s'ensuit que

$$u \circ \varphi(z) \leq W_{\varrho_1}(z) \leq ksV_{\varepsilon\mathcal{R}^{\langle k\rangle}}(z) \quad (\forall z \in D(0,\varrho_1)).$$

Nous concluons donc

$$u \circ \varphi(z) \leq ksV_{\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle}}(z) \quad (\forall z \in D(0,\varrho_1))\ (\forall u \in L_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}(\mathbb{C}^n)). \ \blacksquare$$

COROLLAIRE 1. *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible telle que $0 \in A_{\mathrm{reg}}$. Modulo un changement de coordonnées unitaire laissant A dans $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes réelles $\varepsilon_0, \varrho, c_1, c_2 > 0$ dépendant de la paramétrisation $\varphi(z) = (cz, \psi(z))$ de la Proposition 2, telles que :*

- *si* $0 \in A_{\mathrm{reg}} \setminus \partial A$,

$$(8) \qquad V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon)} \circ \varphi(z) \leq c_2 V_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(z) \quad (\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_0[)\ (\forall z \in D(0,\varrho))\,;$$

- *si* $0 \in A_{\mathrm{reg}} \cap \partial A$,

$$(9) \qquad V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon)} \circ \varphi(z) \leq c_2 V_{[0,\varepsilon]}(z) \quad (\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_0[)\ (\forall z \in D(0,\varrho)).$$

Preuve. Remarquons qu'ici $k = \mu_0(\widetilde{A}) = 1$ car $0 \in \widetilde{A}_{\mathrm{reg}}$. La démonstration est identique à celle de la Proposition 3. $\blacksquare$

5.1. *Métrique des géodésiques et continuité de Hölder dans le sous-ensemble algébrique $\widetilde{A}$.* Définissons la métrique des géodésiques dans $\widetilde{A}$. Considérons l'ensemble $(\mathfrak{S}_{[0,1]}, \preccurlyeq)$ des subdivisions de l'intervalle $[0,1]$ muni de la relation d'ordre suivante :

$$\sigma \preccurlyeq \tau \;\Leftrightarrow\; \text{la subdivision } \sigma \text{ est moins fine que } \tau.$$

Maintenant, si γ est une fonction de $[0,1]$ dans $\widetilde{A}$ et σ est une subdivision dans $\mathfrak{S}_{[0,1]}$, nous définirons $V_\sigma(\gamma)$ par

$$V_\sigma(\gamma) := \sum_{j=0}^{p-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|_2, \quad \sigma = (t_0, \dots, t_p),$$

où $\|z\|_2 := (\sum_{j=1}^n |z_j|^2)^{1/2}$ $(\forall z \in \mathbb{C}^n)$. Définissons le sous-ensemble des fonctions à variation bornée ci-dessous :

$$\mathrm{CVB}^{(\xi_1,\xi_2)}([0,1], \widetilde{A}) := \{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], \widetilde{A}) : \gamma(0) = \xi_1,\ \gamma(1) = \xi_2,\ \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]}} V_\sigma(\gamma) < +\infty\},$$

où $\mathcal{C}^0([0,1], \widetilde{A})$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\widetilde{A}$. On peut définir désormais une métrique dans $\widetilde{A}$, appelée *métrique des géodesiques*, en posant

$$d(\xi_1, \xi_2) := \inf\{V(\gamma) : \gamma \in \mathrm{CVB}^{(\xi_1,\xi_2)}([0,1], \widetilde{A})\} \quad (\forall \xi_1,\, \xi_2 \in \widetilde{A}),$$

où

$$V(\gamma) := \sup\{V_\sigma(\gamma) : \sigma \in \mathfrak{S}_{[0,1]}\}.$$

Lemme 4. *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$ localement irréductible et ξ_0 un point fixé dans A. On considère l'espace métrique $(\widetilde{A}, d)$, où $d(\cdot,\cdot)$ est la métrique des géodésiques dans $\widetilde{A}$ et $\varphi(z) = (cz^k, \psi(z))$ la paramétrisation de Puiseux de la Proposition 1, telle que $\varphi : D(0,1) \to U$, $\varphi(0) = \xi_0$ et $U \subset \widetilde{A}$ ouvert.*

- *Si $\xi_0 \in \widetilde{A}_{\mathrm{reg}}$, il existe des constantes réelles $c_1, c_2 > 0$ ne dépendant que de φ telles que*

$$c_1|\widehat{z}_1 - \widehat{z}_2| \le d(\varphi(\widehat{z}_1), \varphi(\widehat{z}_2)) \le c_2|\widehat{z}_1 - \widehat{z}_2| \quad (\forall \widehat{z}_1, \widehat{z}_2 \in D(0,1)). \tag{10}$$

- *Si $\xi_0 \in \widetilde{A}_{\mathrm{sing}}$, on peut rétrécir le voisinage U de ξ_0 de sorte que $\widetilde{A} \cap U = \{\xi_0\}$ et*

$$c_1|\widehat{z}_1|^k \le d(\varphi(0), \varphi(\widehat{z}_1)) \le c_2|\widehat{z}_1|^k \quad (\forall \widehat{z}_1 \in D(0,1)), \tag{11}$$

  où k est la multiplicité complexe du point singulier ξ_0 de $\widetilde{A}$.

Preuve. La démonstration est directe avec un développement en série de Taylor de la paramétrisation φ au voisinage de 0. ∎

Nous allons démontrer, dans la Proposition 4, que la fonction extrémale $V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon^k)}$ vérifie la propriété HCP dans $\widetilde{A}$, muni de la métrique des géodésiques.

PROPOSITION 4. *Soit A une courbe algébrique de $\mathbb{R}^n$, localement irréductible, muni de la métrique des géodésiques $d(\cdot,\cdot)$ dans $\widetilde{A}$. Alors, la fonction extrémale ci-dessus vérifie la propriété de continuité de Hölder locale dans $\widetilde{A}$ pour la métrique $d(\cdot,\cdot)$. Plus précisément, il existe ε_0, $\mu_0 \in\,]0,1[$ dépendant de x_0, tels que pour tous $\varepsilon \in\,]0,\varepsilon_0[$ et $\mu \in\,]0,\mu_0[$:*

- *Si $x_0 \in A_{\mathrm{sing}}$,*

$$V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon^k)}(\xi) \le C(x_0)\mu^{1/2k} \qquad (\forall \xi \in B_{\widetilde{A}}(x_0,\varepsilon^k\mu)), \tag{12}$$

où k est la multiplicité complexe du point singulier x_0 dans $\widetilde{A}$.

- *Si $x_0 \in A_{\mathrm{reg}} \cap \partial A$,*

$$V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon)}(\xi) \le C(x_0)\mu^{1/2} \qquad (\forall \xi \in B_{\widetilde{A}}(x_0,\varepsilon\mu)). \tag{13}$$

- *Si $x_0 \in A_{\mathrm{reg}} \setminus \partial A$,*

$$V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon)}(\xi) \le C(x_0)\mu \qquad (\forall \xi \in B_{\widetilde{A}}(x_0,\varepsilon\mu)). \tag{14}$$

Ici $B_{\widetilde{A}}(x_0,r) := \{\xi \in \widetilde{A} : d(x_0,\xi) < r\}$, r est un réel strictement positif et $C(x_0) > 0$ une constante localement supérieurement majorée.

Preuve. Commençons par démontrer (12). Comme nous l'avons fait dans les démonstrations précédentes, nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que $x_0 = 0$. D'après la Proposition 3, modulo un changement de coordonnées unitaire, il existe des constantes réelles $\varrho, \varepsilon_0, c_1 > 0$, dépendant seulement de la paramétrisation de Puiseux φ construite dans la Proposition 1, avec $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \varrho < 1$, telles que le (6) de la Proposition 3 soit vrai.

Soit ξ dans $B_{\widetilde{A}}(x_0,\varepsilon^k\mu)$. D'après le (11) du Lemme 4,

$$|\widehat{z}|^k \le \varepsilon^k\mu/c_1, \quad \text{où} \quad \varphi(\widehat{z}) = \xi.$$

D'après (6), pour tous $\varepsilon \in\,]0,\varepsilon_0]$ et $\theta \in \{2k_j^\sigma\pi/k : j \in \{1,\dots,r_A^\sigma\}\}$, on a

$$(\square_1) \quad V_{A\cap B(0,\widetilde{c}_1\varepsilon^k)} \circ \varphi(z) \le \widetilde{c}_2 V_{\varepsilon\mathcal{R}^{\langle r_A^\sigma\rangle}}(z) \le \widetilde{c}_2 V_{\varepsilon I}(e^{-i\theta}z) \qquad (\forall z \in D(0,\varrho))$$

où $\sigma \in \{+,-\}$ et $0 < \varepsilon_0 < \varrho$.

Choisissons $0 < \mu_0 < c_1$ de sorte que

$$\mu/c_1 < \varrho^k \qquad (\forall \mu \in\,]0,\mu_0]),$$

donc

$$(|\widehat{z}|/\varepsilon)^k < \mu/c_1 < \varrho^k.$$

Avec l'inégalité ($\square_1$) et le Lemme 1, puisqu'on a choisit μ_0 tel que $\mu_0/c_1 < 1$, nous déduisons

$$V_{A\cap B(0,\widetilde{c}_1\varepsilon^k)}(\xi) \leq \widetilde{c}_2 V_I(e^{-i\theta}\widehat{z}/\varepsilon) \leq C\mu^{1/2k}.$$

Pour démontrer (13) la technique de démonstration est identique. En effet, soit $\xi \in B_{\widetilde{A}}(0,\varepsilon\mu)$, donc il existe $\widehat{z} \in D(0,1)$ tel que $\varphi(\widehat{z}) = \xi$. D'après le (10) du Lemme 4, on a $d(0,\xi) \geq c_1|\widehat{z}|$, d'où $|\widehat{z}| \leq \varepsilon\mu/c_1$. On conclut avec le Lemme 2:

$$V_{A\cap B(0,\widetilde{c}_1\varepsilon)}(\xi) \leq \widetilde{c}_2 V_{\varepsilon I}(\widehat{z}) \leq C\mu^{1/2}.$$

L'estimation (14) est identique à démontrer. ∎

6. Démonstration du Théorème 2. Avant de démontrer le Théorème 2, nous avons besoin de ce lemme :

Lemme 5. *Soit* $\varphi : D(0,r) \to \mathbb{C}^n$ *une application holomorphe définie dans le disque ouvert* $D(0,r)$ *de* $\mathbb{C}$ $(r>0)$ *telle que* $\varphi(0)=0$. *Notons* $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ *et* $k = \min_{1\leq j\leq n}\operatorname{ord}_0(\varphi_j)$. *Alors il existe un réel* $r_0 > 0$, *qui dépend uniquement de l'application* φ, *tel que pour tous* $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, $r \in\,]0,r_0[$, $z \in D(0,r_0/2)$,

$$\frac{\left|\frac{\partial}{\partial z}(p\circ\varphi)(z)\right|}{\sqrt{\sum_{1\leq j\leq n}|\varphi_j'(z)|^2}} \leq \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|z+\frac{r}{2}e^{i\theta}|^{k-1}}\cdot\frac{\|p\circ\varphi\|_{D(0,r_0)}}{r}. \tag{15}$$

Preuve. Les fonctions composantes de φ se développent en série entière car φ est holomorphe, donc pour tout $l \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\varphi_l(\xi) = \sum_{k_l\leq j} a_{l,j}\xi^j, \qquad k_l = \operatorname{ord}_0(\varphi_l),\ k_l \geq 1.$$

Comme $a_{l,k_l} \neq 0$ lorsque $z \to 0$, il existe $r_l \in\,]0,1[$ tel que

$$|\varphi_l(\xi)| \geq c_{\varphi,l}|\xi|^{k_l-1} \qquad (\forall \xi \in D(0,r_l)),$$

d'où

$$\|\varphi'(\xi)\|_2 \geq c_\varphi|\xi|^{k-1} \qquad (\forall\xi\in D(0,r_0)), \qquad r_0 = \min_{1\leq l\leq n} r_l, \qquad k = \min_{1\leq j\leq n} k_l.$$

Majorons $\left|\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p\circ\varphi)\right|$. La singularité en 0 est artificielle. Donc la fonction $\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p\circ\varphi)$ est holomorphe dans $D(0,r_0)$. Nous pouvons appliquer successivement la formule intégrale de Cauchy à $\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p\circ\varphi)$ et obtenir

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p\circ\varphi)(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z,r/2)}\frac{1}{\zeta^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\zeta,r/2)}\frac{p\circ\varphi(\xi)}{(\zeta-\xi)^2}\,d\xi\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(z+\frac{r}{2}e^{i\theta_2}\right)^{k-1}}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{p\circ\varphi\left(z+\frac{r}{2}e^{i\theta_2}+\frac{r}{2}e^{i\theta_1}\right)}{\frac{r}{2}e^{i\theta_1}}\,d\theta_1\,d\theta_2\end{aligned}$$

pour tous $r \in]0, r_0[$ et $z \in D(0, r/2)$, d'où

$$\left|\frac{1}{z^{k-1}}\frac{\partial}{\partial z}(p\circ\varphi)(z)\right| \le \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left|z+\frac{r}{2}e^{i\theta}\right|^{k-1}}\,\frac{\|p\circ\varphi\|_{D(z,r_0)}}{r}\,d\theta$$

pour r et z comme ci-dessus. Cela prouve l'estimation (15). ∎

Preuve du Théorème 2. (i) Commençons par démontrer le (i) du Théorème 2. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et que $0 \in A_{\text{sing}}$.

Soit p un polynôme dans $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ fixé. Si $v \in C(A, 0)$ est un vecteur tangent unitaire, alors la branche localement irréductible de A tangente à v est paramétrisée par $\varphi|_{\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle}}$ ou $\varphi|_{\mathcal{R}^{\langle r_A^-\rangle}}$ (φ paramétrisation de Puiseux), d'après la Proposition 1. On peut donc choisir un entier l dans $\{0, \ldots, k-1\}$ tel que le segment $[0, e^{2\pi il/k}] \subset \mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle} \cup \mathcal{R}^{\langle r_A^-\rangle}$ et $\varphi|_{[0,e^{2\pi il/k}]}$ paramétrise la branche de A à laquelle le vecteur v est tangent. Pour des commodités d'écriture et de calculs, nous ne changerons rien au résultat voulu, si nous transformons le segment $[0, e^{2\pi il/k}]$ en $[0, 1]$ par une rotation dans $\mathbb{C}$ d'angle $-2\pi l/k$ (bien évidemment, $\mathbb{C}$ est orienté dans le sens direct). L'ensemble $\mathcal{R}^{\langle r_A^+\rangle} \cup \mathcal{R}^{\langle r_A^-\rangle}$ n'est en rien modifié par cette rotation.

D'après l'inégalité (15) du Lemme 5, on a

$$|D_v p(0)| \le \frac{c}{r^k}\,\|p\circ\varphi\|_{D(0,r)} \qquad (\forall r \in]0, r_0]),$$

la constante réelle $r_0 > 0$ ne dépendant que de φ. D'après le (12) de la Proposition 4, il existe $\mu_0, \varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\xi \in \widetilde{A}$ avec $d(\xi, 0) \le \varepsilon^k\mu$,

$$(\square_1) \qquad V_{A\cap B(x_0,c_1\varepsilon^k)}(\xi) \le C(x_0)\mu^{1/2k}.$$

Quitte à diminuer la valeur de μ_0, on peut donc écrire

$$(16) \qquad |D_v p(0)| \le \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k}\,\|p\circ\varphi\|_{D(0,\varepsilon\mu)} \qquad (\forall \mu \in]0, \mu_0[)\ (\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[).$$

Avec le (10) du Lemme 4 nous obtenons

$$(17) \qquad \|p\circ\varphi\|_{D(0,\varepsilon\mu)} \le \|p\|_{B_{\widetilde{A}}(0,c_2(\varepsilon\mu)^k)} \qquad (\forall \mu \in]0, \mu_0[)\ (\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[)$$

(car $\varphi(D(0,\varepsilon\mu)) \subset B_{\widetilde{A}}(0, c_2(\varepsilon\mu)^k)$). D'après les estimations (16) et (17), on obtient

$$|D_v p(0)| \le \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k}\,\|p\|_{B_{\widetilde{A}}(0,c_2(\varepsilon\mu)^k)} \qquad (\forall \mu \in]0, \mu_0[)\ (\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[),$$

soit avec l'inégalité de Bernstein–Walsh (2) du paragraphe 2.3,

$$|D_v p(0)| \le \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k}\,\|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \exp\Big(\deg(p) \sup_{B_{\widetilde{A}}(0,c_2(\varepsilon\mu)^k)} V_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}\Big).$$

En utilisant la propriété HCP de la fonction de Green ($\square_1$), on obtient, pour tous $\mu \in]0, \mu_0[)$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$|D_v p(0)| \leq \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \exp(C_3 \deg(p)(\mu^k)^{1/2k}),$$

d'où

$$|D_v p(0)| \leq \frac{c}{(\varepsilon\mu)^k} \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)} \exp(C_3 \deg(p)\mu^{1/2}).$$

En posant $\mu = \widetilde{C}/(\deg p)^2$ avec $0 < \widetilde{C} < \mu_0$,

$$|D_v p(0)| \leq c\, e^{C_3\sqrt{\widetilde{C}}} \left(\frac{\widetilde{C}(\deg(p))^2}{\varepsilon}\right)^k \|p\|_{A\cap B(0,c_1\varepsilon^k)}.$$

Le (i) du Théorème 2 est donc montré.

Pour (ii) et (iii), la démonstration est techniquement identique, seulement il faut utiliser le (13) et (14) de la Proposition 4, le (10) du Lemme 4 et le Lemme 2. ∎

Un exemple intéressant a été démontré par Bos, Milman, Levenberg et Taylor ([6]) d'inégalités de Markov tangentielles sur certaines courbes algébriques de $\mathbb{R}^2$. Ils montrent que l'exposant k est optimum sur les courbes de type

$$\Gamma = \{(t^p, t^q) : t \in [0,1]\},$$

où $p < q$ sont deux entiers naturels premiers entre eux. Pour des inégalités globales, ils montrent que k ne peut être plus petit que p. Or cet entier k est aussi la multiplicité complexe du point $(0,0)$ de la courbe algébrique complexifiée $\widetilde{\Gamma}$ de Γ, sans oublier que tous les autres points de Γ sont des points réguliers, donc localement ont un exposant de Markov au moins égal à 1 ou p. Le Théorème 1 conforte l'idée que la multiplicité des points d'une courbe algébrique influence l'exposant de Markov ; on peut même penser que les points singuliers d'une courbe algébrique réelle se comportent comme un bord, ce qui expliquerait l'apparition du $2k$ à l'exposant.

Références

[1] M. Baran, *Bernstein type theorem for compact sets in* $\mathbb{R}^n$, J. Approx. Theory 79 (1994), 190–198.

[2] —, *Markov inequalities with polynomial parametrization*, Ann. Polon. Math. 60 (1994), 69–79.

[3] M. Baran and W. Pleśniak, *Bernstein and van der Corput–Schaake type inequalities on semialgebraic curves*, Studia Math. 125 (1997), 83–96.

[4] —, —, *Polynomial inequalities on algebraic sets*, Studia Math. 141 (2000), 209–219.

[5] L. Bos, N. Levenberg, P. D. Milman and B. A. Taylor, *Tangential Markov inequalities characterize submanifolds of* $\mathbb{R}^n$, Indiana Univ. Math. J. 44 (1995), 115–138.

[6] L. Bos, N. Levenberg, P. D. Milman and B. A. Taylor, *Tangential Markov inequalities on real algebraic varieties*, ibid. 47 (1998), 1257–1272.

[7] L. Bos and P. D. Milman, *Sobolev–Gagliano–Nirenberg and Markov type inequalities on subanalytic domains*, preprint, 1995.

[8] A. Brudnyĭ, *Bernstein-type inequality for algebraic functions*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 93–116.

[9] E. M. Chirka, *Complex Analytic Sets*, Math. Appl. (Soviet Ser.) 46, Kluwer, 1985.

[10] C. Fefferman and R. Narasimhan, *A local inequality on real algebraic varieties*, Math. Z. 223 (1996), 673–692.

[11] P. Goetgheluck, *Inégalité de Markov sur les ensembles effilés*, J. Approx. Theory 30 (1980), 149–154, 1980.

[12] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, London Math. Soc. Monogr. 6, Oxford Univ. Press, 1991.

[13] S. Łojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser, 1991.

[14] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, Holt, Reinehart and Winston, 1966.

[15] R. Narasimhan, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, Lecture Notes in Math. 25, Springer, 1966.

[16] W. Pawłucki and W. Pleśniak, *Markov's inequalities and C^∞ functions on sets with polynomial cusps*, Math. Ann. 275 (1986), 467–480.

[17] —, —, *Extension of C^∞ functions from sets with polynomial cusps*, Studia Math. 88 (1988), 279–287.

[18] A. Sadullaev, *An estimate for polynomials on analytic sets*, Math. USSR-Izv. 20 (1983), 493–502.

[19] J. Siciak, *Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$*, Ann. Polon. Math. 39 (1981), 175–211.

[20] V. P. Zaharjuta, *Extremal plurisubharmonic function, orthogonal polynomials and the Bernstein–Walsh theorem for analytic functions of several complex variables*, ibid. 33 (1976), 137–148 (in Russian).

[21] A. Zeriahi, *Inégalités de Markov et développement en série de polynômes orthogonaux de fonctions C^∞ et A^∞*, in: Several Complex Variables (Stockholm, 1987/1988), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, 683–701.

Laboratoire Émile Picard
UMR 5580, UFR MIG
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31 062 Toulouse Cedex 4, France
E-mail: gendre@picard.ups-tlse.fr
laugendre@yahoo.fr

Reçu par la Rédaction le 9.5.2005
Révisé le 15.6.2005 (1580)