ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
104.1 (2012)

Quelques résultats d'isomorphisme entre groupes de cohomologie

par Salomon Sambou et Mansour Sané (Ziguinchor)

Résumé. Nous montrons des isomorphismes entre groupes de cohomologie des formes différentielles de classe C^∞ et celles de classe C^l pour un ouvert Ω d'une variété analytique complexe. On montre que ces résultats sont également vrais pour les courants prolongeables. On en déduit un résultat d'isomorphisme entre le groupe $H^l_{0,r}(S)$ de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe C^l sur une hypersurface réelle S et celui des courants sur S noté $H^{\mathrm{cour}}_{0,r}(S)$.

1. Introduction et préliminaires. Soit Ω un ouvert d'une variété analytique complexe X de dimension n.

On note $C^l_{p,r}(\Omega)$ l'espace des (p,r)-formes de classe C^l sur Ω et

$$Z^l_{0,r}(\Omega) = \{f \in C^l_{0,r}(\Omega) \mid \bar\partial f = 0\},$$
$$B^l_{0,r}(\Omega) = \{f \in C^l_{0,r}(\Omega) \mid \exists g \in C^l_{0,r-1}(\Omega),\ \bar\partial g = f\}.$$

Naturellement $B^l_{0,r}(\Omega) \subset Z^l_{0,r}(\Omega)$. Nous avons donc le groupe quotient

$$H^l_{0,r}(\Omega) := Z^l_{0,r}(\Omega)/B^l_{0,r}(\Omega),$$

appelé $(0,r)$-*ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes de classe* C^l *sur* Ω.

On peut par dualité étendre $\bar\partial$ aux courants. Notons

$$H^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(\Omega) := Z^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(\Omega)/B^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(\Omega)$$

le $(0,r)$-*ième groupe de* $\bar\partial$-*cohomologie pour les courants d'ordre* l *sur* Ω.

Il est connu que l'application naturelle $H^l_{0,r}(\Omega) \to H^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(\Omega)$ est un isomorphisme appelé *isomorphisme de Dolbeault.*

Considérons la sous-variété M définie, pour un ouvert local $U \subset X$, par

$$M \cap U = \{z \in U \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_d(z) = 0\}, \qquad 1 \le d < 2n,$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 32W05, 32W10, 32F10, 32F27, 32F32.
Key words and phrases: CR manifold, q-concave, hypersurface, differential form, current, Dolbeault isomorphism.

DOI: 10.4064/ap104-1-7

avec ρ_j des fonctions réelles de classe C^∞ sur U, $1 \le j \le d$, et $\bar\partial\rho_1 \wedge \cdots \wedge \bar\partial\rho_d \neq 0$ sur U. On appelle M *sous-variété CR* de codimension réelle d. L'opérateur $\bar\partial$ induit sur M un opérateur $\bar\partial_b$ qui vérifie aussi $\bar\partial_b^2 = 0$. On peut l'étendre aussi aux courants, ce qui donne le $(0,r)$-ième groupe $H^l_{0,r}(M)$ de $\bar\partial_b$ cohomologie des formes différentielles de classe C^l sur M et le groupe $H^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(M)$ pour les courants d'ordre l sur M. On note $T^{\mathbb{C}}_z M$ l'espace tangent complexe à M au point z.

Définition 1.1. Nous dirons que M est *q-concave au point* $z_0 \in M$, $1 \le q \le (n-d)/2$, si la forme de Levi

$$\mathcal{L}^M \rho_x(z_0).\xi := \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \rho_x(z_0)}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} \xi^\alpha \bar\xi^\beta$$

restreinte à $T^{\mathbb{C}}_{z_0} M$ admet au moins q valeurs propres strictement négatives, où $\rho_x = x_1\rho_1 + \cdots + x_d\rho_d$ avec $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus 0$ et $\xi \in T^{\mathbb{C}}_{z_0} M$. Nous dirons que M est *q-concave* si elle l'est en tout point.

Nous savons d'après [B-S-T] que si M est q-concave avec $1 \le q \le (n-d)/2$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(M) \to H^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(M)$ est un isomorphisme pour $0 \le r \le q-1$ et pour $n-d-q+2 \le r \le n-d$, et est surjective pour $r = n-d-q+1$.

Considérons maintenant une hypersurface réelle S de X. C'est une sous-variété CR de codimension réelle 1.

Nous savons d'après [S2, théorème IV.A.1] que si S a une hessienne ayant q valeurs propres de même signe, $q \ge (n+1)/2$, alors l'application naturelle $H^\infty_{0,r}(S) \to H^{\infty,\mathrm{cour}}_{0,r}(S)$ est injective si $n-q+1 \le r \le q$ et est surjective si $n-q \le r \le q-1$.

Nous voulons obtenir l'analogue de ce résultat pour l'application naturelle $H^l_{0,r}(S) \to H^{\infty,\mathrm{cour}}_{0,r}(S)$. Notons que S n'est pas q-concave au sens de la définition 1.1.

2. Quelques résultats d'isomorphisme d'applications naturelles. Notons $\breve H^l_{0,r}(\Omega)$ (respectivement $H^l_{0,r}(\bar\Omega)$), $l = 0, 1, \ldots, \infty$, le $(0,r)$-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables d'ordre l (respectivement celui des formes différentielles de classe C^l sur $\bar\Omega$). Nous avons d'abord les propositions suivantes :

Proposition 2.1. *L'application naturelle*

$$\breve H^l_{0,r}(\Omega) \to \breve H^\infty_{0,r}(\Omega)$$

est un isomorphisme pour $0 \le r \le n$.

Démonstration. Injectivité. Soit $[T] \in \breve H^l_{0,r}(\Omega)$ tel que $[T] = 0$ dans $\breve H^\infty_{0,r}(\Omega)$. Il existe un courant S prolongeable tel que $T = \bar\partial S$. D'après [M],

$\hat{T} = \bar{\partial}\hat{S}$ où $\hat{T}$ et $\hat{S}$ sont des prolongements de T et S à support sur $\bar{\Omega}$. D'après [C], pour $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\hat{S} &= R_\varepsilon \hat{S} + \bar{\partial} A_\varepsilon \hat{S} + A_\varepsilon \hat{T},\\ \hat{T} &= \bar{\partial}\hat{S} = \bar{\partial} R_\varepsilon \hat{S} + \bar{\partial} A_\varepsilon \hat{T},\\ \hat{T}_{|\Omega} &= T = \bar{\partial} R_\varepsilon \hat{S}_{|\Omega} + \bar{\partial} A_\varepsilon \hat{T}_{|\Omega}.\end{aligned}$$

$A_\varepsilon \hat{T}$ a une régularité sur Ω meilleure que celle de $\hat{T}$ sur un ε-voisinage de Ω, donc $A_\varepsilon \hat{T}_{|\Omega}$ est d'ordre l. De plus, $R_\varepsilon \hat{S}_{|\Omega}$ est de classe C^∞. Donc T est d'ordre l, d'où l'injectivité de l'application naturelle.

Surjectivité. Soit $[T] \in \breve{H}^\infty_{0,r}(\Omega)$ et $\hat{T}$ une extension de T à support sur $\bar{\Omega}$ de T,

$$\begin{aligned}\hat{T} &= R_\varepsilon \hat{T} + \bar{\partial} A_\varepsilon \hat{T} + A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T} \quad \text{avec } \bar{\partial}\hat{T} = 0 \text{ sur } \Omega,\\ T &= \hat{T}_{|\Omega} = (R_\varepsilon \hat{T} + A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T}) + \bar{\partial} A_\varepsilon \hat{T}_{|\Omega}.\end{aligned}$$

$A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T}$ est à support sur un ε-voisinage de $\bar{\Omega}$; donc $A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T}_{|\Omega}$ est un courant prolongeable. La régularité de $A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T}_{|\Omega}$ est meilleure que celle de $\bar{\partial}T$ sur tout ouvert de X; donc $A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T}_{|\Omega}$ est un courant d'ordre l.

$R_\varepsilon \hat{T}$ est de classe C^∞.

Donc $[T] = [(R_\varepsilon \hat{T} + A_\varepsilon \bar{\partial}\hat{T})_{|\Omega}]$ qui appartient à $\breve{H}^l_{0,r}(\Omega)$, d'où la surjectivité de l'application naturelle. ∎

Proposition 2.2. *L'application naturelle*

$$H^\infty_{0,r}(\bar{\Omega}) \to H^l_{0,r}(\bar{\Omega})$$

est un isomorphisme pour $0 \le r \le n$.

Démonstration. Soit $[f] \in H^\infty_{0,r}(\bar{\Omega})$ telle que $[f] = 0$ dans $H^l_{0,r}(\bar{\Omega})$. Il existe $g \in C^l_{0,r-1}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial} g = f$ dans Ω. Soit $\tilde{g}$ une extension de classe C^l de g à X. On a

$$\tilde{g} = R_\varepsilon \tilde{g} + \bar{\partial} A_\varepsilon \tilde{g} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{g}.$$

Ceci entraîne que

$$\bar{\partial} g = \bar{\partial}(R_\varepsilon \tilde{g} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{g})_{|\bar{\Omega}}.$$

Puisque la régularité (1-0) de $A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{g}$ est meilleure que celle de f sur un ε-voisinage de $\bar{\Omega}$, $A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{g}$ est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega}$. Alors

$$h = (R_\varepsilon \tilde{g} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{g})_{|\Omega}$$

est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega}$ et on a $\bar{\partial} h = f$ sur Ω. Donc l'application naturelle est injective.

Soit $f \in H^l_{0,r}(\bar{\Omega})$. Alors

$$\tilde{f} = R_\varepsilon \tilde{f} + \bar{\partial} A_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{f}$$

où $\tilde{f}$ est une extension de classe C^l de f à X avec $\bar{\partial}\tilde{f} = 0$ sur Ω. On a

$$f = (R_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{f})_{|\Omega} + \bar{\partial}A_\varepsilon \tilde{f}_{|\Omega}$$

sur Ω. Observons que $R_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $\bar{\Omega}$. Donc $[f] = [(R_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \bar{\partial}\tilde{f})_{|\Omega}]$, ce qui donne le résultat voulu. ∎

Comme conséquence des propositions 2.1 et 2.2 nous avons la version C^l des annulations des groupes de $\bar{\partial}$-cohomologie des courants prolongeables de [S1], [S2] et [B], ainsi que les annulations des groupes de cohomologie des formes différentielles de classe C^l sur $\bar{\Omega}$ obtenus également dans ces travaux. Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit X une variété analytique complexe de dimension n, et $\Omega \subset\subset X$ un domaine à bord lisse de classe C^∞. Alors :*

(a) *Si Ω est complètement strictement $(q+1)$-convexe, $0 \le q \le n-2$, on a*

$$H^l_{0,r}(\bar{\Omega}) = 0 \quad \text{pour } 1 \le r \le q+1.$$

(b) *Si X est une variété de Stein et si elle est une extension q-convexe de Ω, $1 \le q \le n-1$, on a*

$$H^l_{0,r}(X \setminus \Omega) = 0 \quad \text{pour } n-q+1 \le r \le n-1.$$

(c) *Si Ω est complètement strictement q-convexe, $0 \le q \le n-1$, on a*

$$\breve{H}^l_{0,r}(\Omega) = 0 \quad \text{pour } 1 \le n-q \le r \le n.$$

(d) *Si X est une variété de Stein et si elle est une extension q-convexe de Ω, $1 \le q \le n-1$, on a*

$$\breve{H}^l_{0,r}(X \setminus \bar{\Omega}) = 0 \quad \text{pour } 1 \le r \le q \text{ et } r \le n-2.$$

(e) *Si X est une variété de Kähler et si Ω est à bord lipschitzien et est $\log\delta$-pseudoconvexe, alors pour tout fibré holomorphe hermitien E sur X, on a*

$$H^l_{0,r}(X, \bar{\Omega}, E) = 0 \quad \text{pour } 1 \le r \le n-1.$$

(f) *Si X est une variété de Kähler et si Ω est à bord lipschitzien et est $\log\delta$-pseudoconvexe, on a*

$$\breve{H}^l_{0,r}(\Omega) = 0 \quad \text{pour } 1 \le r \le n-1.$$

Proposition 2.4. *Soit X une variété analytique complexe et S une hypersurface lisse de X de classe C^∞. Alors l'application*

$$H^\infty_{0,r}(S) \to H^l_{0,r}(S)$$

est un isomorphisme pour $0 \le r \le n-1$.

Démonstration. Quitte à restreindre X, on peut supposer que S partage X en deux composantes connexes X^+ et X^-. Notons $C^l_{0,r}(A)$ l'espace des

$(0,r)$-formes de classe C^l sur A dont le $\bar\partial$ ou le $\bar\partial_b$ est aussi de classe C^l sur A, où A peut désigner X, $\bar X^+$, $\bar X^-$ ou S. Des suites courtes

$$0 \to C^l_{0,r}(X) \to C^l_{0,r}(\bar X^+) \oplus C^l_{0,r}(\bar X^-) \to C^l_{0,r}(S) \to 0$$

et

$$0 \to C^\infty_{0,r}(X) \to C^\infty_{0,r}(\bar X^+) \oplus C^\infty_{0,r}(\bar X^-) \to C^\infty_{0,r}(S) \to 0$$

on a les suites longues

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & H^l_{0,0}(X) & \longrightarrow & H^l_{0,0}(\bar X^+) \oplus H^l_{0,0}(\bar X^-) & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & \\
0 \longrightarrow & H^\infty_{0,0}(X) & \longrightarrow & H^\infty_{0,0}(\bar X^+) \oplus H^\infty_{0,0}(\bar X^-) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & H^l_{0,0}(S) & \longrightarrow & H^l_{0,1}(X) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & \\
\longrightarrow & H^\infty_{0,0}(S) & \longrightarrow & H^\infty_{0,1}(X) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

où les applications naturelles $f_0, g_0, f_1, \ldots$ sont des isomorphismes. Donc l'application naturelle $h_r : H^l_{0,r}(S) \to H^\infty_{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \le r \le n-1$. ∎

Théorème 2.5. *Soit Ω un ouvert à bord C^∞ d'une variété analytique complexe X de dimension n. Soit $b\Omega$ le bord de Ω. Alors :*

(a) *Si $b\Omega$ est strictement q-concave, $q \ge (n+1)/2$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(\bar\Omega) \to \breve H^l_{0,r}(\Omega)$, $l = 0, 1, \ldots, \infty$, est un isomorphisme si $0 \le r \le q-1$ et est injective si $r = q$.*
(b) *Si $b\Omega$ est strictement q-convexe, $q \ge (n+1)/2$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(\bar\Omega) \to \breve H^l_{0,r}(\Omega)$, $l = 0, 1, \ldots, \infty$, est un isomorphisme si $r \ge n-q+1$ et est surjective si $r = n-q$.*

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement des propositions 2.1 et 2.2 et de [S2, corollaire III.10]. ∎

Comme application des résultats précédents, on a :

Théorème 2.6. *Soit X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de X. Si S a une hessienne ayant q valeurs propres de même signe, $q \ge (n+1)/2$, alors l'application naturelle*

$$H^l_{0,r}(S) \to H^{\infty,\mathrm{cour}}_{0,r}(S), \qquad l = 0, 1, \ldots, \infty,$$

est injective si $n-q+1 \le r \le q$ et surjective si $n-q \le r \le q-1$.

Démonstration. Quitte à restreindre X, on peut supposer que S partage X en deux composantes connexes X^+ et X^-. Puisque $H^l_{0,r}(\bar{X}^+) \simeq H^\infty_{0,r}(\bar{X}^+)$ et $H^l_{0,r}(\bar{X}^-) \simeq H^\infty_{0,r}(\bar{X}^-)$ pour $0 \le r \le n$, on remplace, grâce à la proposition 2.4, les données de classe C^∞ par des données de classe C^l, dans la suite longue de la preuve de [S2, théoréme IV.A.1]. On obtient alors le diagrame commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^l_{0,r}(X) \arrow[r] \arrow[d, "c_r"'] & H^l_{0,r}(\bar{X}^+) \oplus H^l_{0,r}(\bar{X}^-) \arrow[r] \arrow[d, "a_r"'] & H^l_{0,r}(S) \arrow[r] \arrow[d, "b_r"'] & {} \\
{} \arrow[r] & H^{l,\mathrm{cour}}_{0,r}(X) \arrow[r] & \breve{H}^l_{0,r}(X^+) \oplus \breve{H}^l_{0,r}(X^-) \arrow[r] & H^{\infty,\mathrm{cour}}_{0,r}(S) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^l_{0,r+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "c_{r+1}"'] & H^l_{0,r+1}(\bar{X}^+) \oplus H^l_{0,r+1}(\bar{X}^-) \arrow[r] \arrow[d, "a_{r+1}"'] & \cdots \\
{} \arrow[r] & H^{l,\mathrm{cour}}_{0,r+1}(X) \arrow[r] & \breve{H}^l_{0,r+1}(X^+) \oplus \breve{H}^l_{0,r+1}(X^-) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les applications naturelles.

On peut supposer sans perte de généralité que X^+ se situe du coté convexe de S. D'après le théorème 2.5, a_r et a_{r+1} sont injectives si $n-q+1 \le r \le q$ et surjectives si $n-q \le r \le q-1$. Puisque c_r et c_{r+1} sont des isomorphismes, on a le résultat grâce au lemme des 5. ∎

Nous avons aussi la proposition suivante comme autre application :

PROPOSITION 2.7. *Soit X une variété de Stein de dimension $n \ge 1$ et $\Omega \subset X$ un domaine relativement compact à bord $b\Omega$ lisse de classe C^∞ tel que X soit une extension q-convexe de Ω. Alors*

$$H^l_{0,r}(b\Omega) = 0 \quad \text{pour } l = 0, 1, \ldots, \infty \text{ et } n-q \le r \le q-1.$$

Remerciements. Ce travail a été réalisé grâce au projet FIRST du Ministère Chargé de la Recherche Scientifique du Sénégal.

Références

[B-S-T] M. Baldé, S. Sambou et B. Touré, *Sur les groupes de $\bar\partial_b$-cohomologie des courants d'ordre l*, C. R. (Math. Rep.) Acad. Sci. Soc. R. Can. 28 (2006), 85–90.

[B] J. Brinkschulte, *The $\bar\partial$-problem with support conditions on some weakly pseudoconvex domains*, Ark. Mat. 42 (2004), 259–282.

[C] E. M. Chirka, *Regularization and $\bar\partial$-homotopy on a complex manifold*, Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 73–76.

[M] A. Martineau, *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, Strasbourg RCP 25 (1966).

[S1] S. Sambou, *Résolution du $\bar\partial$ pour les courants prolongeables*, Math. Nachr. 235 (2002), 179–190.

[S2] S. Sambou, *Équation de Cauchy–Riemann pour les courants prolongeables*, thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, 2001.

Salomon Sambou, Mansour Sané
Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Ziguinchor
Ziguinchor BP 523, Senegal
E-mail: ssambou@refer.fr
sanemansour@yahoo.fr

Received 23.6.2011
and in final form 20.9.2011 (2478)