ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
84.2 (2004)

Sur les paires d'équations pré-Schröder et leur équivalence

par Józef Kalinowski (Katowice)

Abstract. Pairs of functional pre-Schröder equations (S_n) are considered. We show that under some assumptions the system of two equations (S_3), (S_n) for some $n \geq 4$ is equivalent to the system of all equations (S_n) for $n \geq 2$. The results answer a question of Gy. Targonski [5] in a particular case.

1. Introduction. Dans [1] et [2] on considère le problème de l'équivalence entre des équations fonctionnelles du système

$$f^n(g(x)) = f(g_n(x)) \cdot f^{n-1}(x), \quad \text{pour tout entier } n \geq 2, \tag{S}$$

appelé *le système d'equations pré-Schröder*. Ici on emploi les notations de Z. Moszner [4] : g est une application donnée, d'un ensemble X en lui-même, $f : X \to Y$ une fonction inconnue, où $(Y, \cdot)$ est un demi-groupe commutatif, et g_n pour tout entier $n \geq 0$ désigne les itérées successives de la fonction g, c'est-à-dire

$$g_0(x) = x, \quad g_{n+1}(x) = g(g_n(x)).$$

Les équations du système (S) sont désignées par (S_n), $n \geq 2$.

Gy. Targonski [5] a demandé si une partie du système (S) est déjà équivalente à (S).

2. Préliminaires. Soit $(Y, \cdot)$ un demi-groupe commutatif. Désignons par 0 un élément dans Y pour lequel

$$\bigwedge_{y \in Y} 0 \cdot y = 0,$$

si un tel élément existe. Il est évident qu'il peut en exister au plus un.

Dans ce travail nous supposerons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $n > 1$, le demi-groupe $(Y, \cdot)$ est sans torsion de degré n, c'est-à-dire

$$\bigwedge_{x,y \in Y} (x^n = y^n) \;\Rightarrow\; (x = y). \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 39B72.
Key words and phrases: pre-Schröder equations.

Lemme 1 (voir [2]). *Si un demi-groupe* $(Y,\cdot)$ *satisfait à la loi de réduction* (1), *alors* Y *n'a pas de diviseurs de zéro.*

Concernant l'équivalence d'une partie du système (S) au tout système (S), il y a des résultats suivants :

Théorème 1 (voir [1, théorème 1]). *Soit* $(Y,\cdot)$ *un demi-groupe commutatif satisfaisant à la loi de réduction suivante* :

$$\bigwedge_{x,y,z\in Y} (xy = xz \wedge x \neq 0) \;\Rightarrow\; (y = z). \tag{2}$$

Si la fonction f *satisfait à l'équation* (S_2), *alors* f *est une solution du système* (S).

Théorème 2 (voir [2, théorème 4]). *Soit* $(Y,\cdot)$ *un demi-groupe commutatif satisfaisant à la loi de réduction* (1) *et sans torsion de degré* $n \geq 3$. *Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_n) *et* (S_{n+1}), *alors* f *est une solution du système* (S).

Théorème 3 (voir [2, théorème 5]). *Soit* $(Y,\cdot)$ *un demi-groupe commutatif satisfaisant à la loi de réduction* (1) *et sans torsion de degré* $n \geq 3$. *Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_n) *et* (S_{2n}), *alors* f *est une solution du système* (S).

Théorème 4 (voir [2, théorème 6]). *Soit* $(Y,\cdot)$ *un demi-groupe commutatif satisfaisant à la loi de réduction* (1) *et sans torsion de degré* $n \geq 2$. *Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_{n+1}) *et* (S_{2n+1}), *alors* f *est une solution du système* (S).

Ce travail est la continuation de la recherche précédente. On va étudier la question si deux équations (S_3), (S_n) pour $n \geq 4$ sont équivalentes à toutes les équations de (S).

3. Lemmes auxiliaires. Maintenant nous provons quatre lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit* $(Y,\cdot)$ *un demi-groupe commutatif et* $n \geq 4$. *Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_3) *et* (S_n), *alors*

$$f^n(g(x)) \cdot f^2(g_{n-3}(x)) = f^3(g_{n-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \tag{3}$$

Démonstration. Soit $n \geq 4$. Multiplions par $f^{n-1}(x)$ l'équation (S_3) avec x remplacé par $g_{n-3}(x)$; en utilisant la commutativité de la multiplication, nous pouvons écrire

$$f(g_n(x)) \cdot f^{n-1}(x) \cdot f^2(g_{n-3}(x)) = f^3(g_{n-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \tag{4}$$

En substituant (S_n) dans (4) nous obtenons la thèse. ∎

Corollaire 1. *Soit* $(Y, \cdot)$ *un demi-groupe commutatif satisfaisant à la loi de réduction* (1) *et sans torsion de degré* 3. *Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_3) *et* (S_4), *alors* f *est une solution du système* (S).

Démonstration. En posant $n = 4$ dans l'équation (3) nous obtenons

$$f^6(g(x)) = f^3(g_2(x)) \cdot f^3(x).$$

Puisque $(Y, \cdot)$ est sans torsion de degré 3, la fonction f vérifie l'équation (S_2). On peut alors appliquer le théorème 1. ∎

Lemme 2. *Soit* $(Y, \cdot)$ *un demi-groupe commutatif et* $n \geq 5$. *Si la fonction* f *satisfait à* (3), *alors*

$$f^n(g(x)) \cdot f^2(g_{n-3}(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)) = f^9(g_{n-4}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \tag{5}$$

Démonstration. En remplaçant x dans (S_3) par $g_{n-5}(x)$, puis en élévant l'équation à la puissance 3 on obtient

$$f^9(g_{n-4}(x)) = f^3(g_{n-2}(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)). \tag{6}$$

En multipliant (3) par $f^6(g_{n-5}(x))$ et en utilisant la commutativité, nous obtenons

$$f^n(g(x)) \cdot f^2(g_{n-3}(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)) = f^3(g_{n-2}(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)) \cdot f^{n-1}(x).$$

On conclut avec (6). ∎

Lemme 3. *Soit* $(Y, \cdot)$ *un demi-groupe commutatif et* $n \geq 6$. *Si la fonction* f *satisfait à* (5), *alors*

$$f^n(g(x)) \cdot f^{12}(g_{n-5}(x)) = f^9(g_{n-4}(x)) \cdot f^4(g_{n-6}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \tag{7}$$

Démonstration. En remplaçant x dans (S_3) par $g_{n-6}(x)$ et en élévant l'équation à la puissance 2 on obtient

$$f^6(g_{n-5}(x)) = f^2(g_{n-3}(x)) \cdot f^4(g_{n-6}(x)). \tag{8}$$

En multipliant (5) par $f^4(g_{n-6}(x))$ et en appliquant la commutativité, nous obtenons

$$\begin{aligned} f^n(g(x)) \cdot f^2(g_{n-3}(x)) \cdot f^4(g_{n-6}(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)) \\ = f^9(g_{n-4}(x)) \cdot f^4(g_{n-6}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned}$$

En utilisant (8) nous obtenons

$$f^n(g(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)) \cdot f^6(g_{n-5}(x)) = f^9(g_{n-4}(x)) \cdot f^4(g_{n-6}(x)) \cdot f^{n-1}(x),$$

d'où (7). ∎

Lemme 4. *Soit* $(Y, \cdot)$ *un demi-groupe commutatif. Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_3), (S_n), *alors*

$$f^n(g(x)) \cdot f^{\alpha_k}(g_{n-2k+1}(x)) \cdot f^{\beta_k}(g_{n-2k-1}(x)) = f^{\gamma_k}(g_{n-2k}(x)) \cdot f^{n-1}(x) \tag{9}$$

pour tous nombres impairs n, $n = 2k+1$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, *où les exposants sont donnés par*

$$\alpha_k = \frac{2}{9} \cdot 4^k - \frac{2}{3} \cdot k - \frac{2}{9}, \tag{10}$$

$$\beta_k = \frac{2}{9} \cdot 4^k + \frac{4}{3} \cdot k - \frac{2}{9}, \tag{11}$$

$$\gamma_k = \frac{4}{9} \cdot 4^k + \frac{2}{3} \cdot k + \frac{5}{9}, \tag{12}$$

ainsi que

$$f^n(g(x)) \cdot f^{a_k}(g_{n-2k-1}(x)) = f^{b_k}(g_{n-2k}(x)) \cdot f^{c_k}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x) \tag{13}$$

pour tous nombres pairs n, $n = 2k+2$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, *où les exposants sont donnés par*

$$a_k = \frac{8}{9} \cdot 4^k - \frac{2}{3} \cdot k - \frac{8}{9}, \tag{14}$$

$$b_k = \frac{4}{9} \cdot 4^k + \frac{2}{3} \cdot k + \frac{5}{9}, \tag{15}$$

$$c_k = \frac{4}{9} \cdot 4^k - \frac{4}{3} \cdot k - \frac{4}{9}. \tag{16}$$

Démonstration. Si f satisfait à (S_3), (S_n), alors d'après le lemme 1 la fonction f est une solution de l'équation (3). Donc en vertu des lemmes 2 et 3, f est une solution de (5) et (7).

Remarquons que l'équation (5) est de la forme (9) pour $k = 2$, avec $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 6$, $\gamma_2 = 9$. Alors les exposants α_2, β_2, γ_2 sont donnés par (10)–(12) pour $k = 2$.

Pareillement, l'équation (7) est de la forme (13) pour $k = 2$, avec $a_2 = 12$, $b_2 = 9$, $c_2 = 4$. Il s'ensuit que les exposants a_2, b_2, c_2 sont donnés par (14)–(16) pour $k = 2$.

La preuve se fait par récurrence par rapport à k. Pour $k = 2$ la thèse a eté démontrée ci-dessus. Supposons que les formules (9) et (13) sont vraies pour un $k \geq 2$ fixé. En remplaçant x dans (S_3) par $g_{n-2k-2}(x)$ et en élévant l'équation à la puissance α_k on a

$$f^{3\alpha_k}(g_{n-2k-1}(x)) = f^{\alpha_k}(g_{n-2k+1}(x)) \cdot f^{2\alpha_k}(g_{n-2k-2}(x)). \tag{17}$$

En multipliant (9) par $f^{2\alpha_k}(g_{n-2k-2}(x))$, par commutativité on obtient

$$\begin{aligned} f^n(g(x)) \cdot f^{\alpha_k}(g_{n-2k+1}(x)) \cdot f^{2\alpha_k}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{\beta_k}(g_{n-2k-1}(x)) \\ = f^{\gamma_k}(g_{n-2k}(x)) \cdot f^{2\alpha_k}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{18}$$

En employant (17), on peut écrire (18) comme

$$\begin{aligned} f^n(g(x)) \cdot f^{3\alpha_k+\beta_k}(g_{n-2k-1}(x)) \\ = f^{\gamma_k}(g_{n-2k}(x)) \cdot f^{2\alpha_k}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{19}$$

En vertu des formules (10)–(12) et (14)–(16), on a

$$a_k = 3\alpha_k + \beta_k, \quad b_k = \gamma_k, \quad c_k = 2\alpha_k,$$

ce qui donne (13) pour k.

En remplaçant x dans (S_3) par $g_{n-2k-3}(x)$ et en élévant l'équation à la puissance b_k on a

$$f^{3b_k}(g_{n-2k-2}(x)) = f^{b_k}(g_{n-2k}(x)) \cdot f^{2b_k}(g_{n-2k-3}(x)). \tag{20}$$

En multipliant (13) par $f^{2b_k}(g_{n-2k-3}(x))$, par commutativité on obtient

$$\begin{aligned} &f^n(g(x)) \cdot f^{a_k}(g_{n-2k-1}(x)) \cdot f^{2b_k}(g_{n-2k-3}(x)) \\ &\quad = f^{b_k}(g_{n-2k}(x)) \cdot f^{2b_k}(g_{n-2k-3}(x)) \cdot f^{c_k}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{21}$$

D'après (20), l'équation (21) s'écrit

$$\begin{aligned} &f^n(g(x)) \cdot f^{a_k}(g_{n-2k-1}(x)) \cdot f^{2b_k}(g_{n-2k-3}(x)) \\ &\qquad = f^{3b_k+c_k}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{22}$$

En vertu des formules (10)–(12) et (14)–(16), on a

$$\alpha_{k+1} = a_k, \quad \beta_{k+1} = 2b_k, \quad \gamma_{k+1} = 3b_k + c_k,$$

ce qui donne (9) pour $k+1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &f^n(g(x)) \cdot f^{\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-1}(x)) \cdot f^{\beta_{k+1}}(g_{n-2k-3}(x)) \\ &\qquad = f^{\gamma_{k+1}}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{23}$$

En remplaçant x dans l'équation (S_3) par $g_{n-2k-4}(x)$, puis après avoir élévé à la puissance α_{k+1} on a

$$f^{3\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-3}(x)) = f^{\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-1}(x)) \cdot f^{2\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-4}(x)). \tag{24}$$

En multipliant (22) par $f^{2\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-4}(x))$ et par commutativité on obtient

$$\begin{aligned} &f^n(g(x)) \cdot f^{\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-1}(x)) \cdot f^{2\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-4}(x)) \cdot f^{\beta_{k+1}}(g_{n-2k-3}(x)) \\ &\qquad = f^{\gamma_{k+1}}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{2\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-4}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned} \tag{25}$$

En employant (24), on peut écrire (25) comme

$$\begin{aligned} &f^n(g(x)) \cdot f^{3\alpha_{k+1}+\beta_{k+1}}(g_{n-2k-3}(x)) \\ &\qquad = f^{\gamma_{k+1}}(g_{n-2k-2}(x)) \cdot f^{2\alpha_{k+1}}(g_{n-2k-4}(x)) \cdot f^{n-1}(x). \end{aligned}$$

En vertu des formules (10)–(12) et (14)–(16) on a

$$a_{k+1} = 3\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad b_{k+1} = \gamma_{k+1}, \quad c_{k+1} = 2\alpha_{k+1},$$

ce qui donne (13) pour $k+1$.

Les égalités (9) et (13) sont vraies pour tout $k \geq 2$. ■

Remarque 1. On peut prouver par récurrence que tous les exposants α_k, β_k, γ_k, a_k, b_k, c_k donnés par (10)–(12) et (14)–(16) pour tout $k \geq 2$ sont des nombres naturels.

REMARQUE 2. Une vérification directe montre que pour tout $k \geq 2$,

$$\beta_k = \alpha_k + 2k, \tag{26}$$

$$\gamma_k = 2\alpha_k + 2k + 1, \tag{27}$$

$$a_k + 1 = b_k + c_k, \tag{28}$$

$$a_k + 2k + 2 = 2b_k. \tag{29}$$

4. Le théorème principal. Maintenant nous prouvons le théorème principal de ce travail. Le théorème montre le rôle que l'équation (S_3) joue au système des équations (S).

THÉORÈME 5. *Soit* $(Y, \cdot)$ *un demi-groupe commutatif satisfaisant à la loi de réduction* (1) *et sans torsion de degré* α_k *donné par* (10) *avec* $k = (n-1)/2$ *pour* $n \geq 4$ *impair, et de degré* b_k *donné par* (15) *avec* $k = (n-2)/2$ *pour* $n \geq 4$ *pair. Si la fonction* f *satisfait aux équations* (S_3) *et* (S_n) *pour un* $n \geq 4$, *alors* f *est une solution du système* (S).

Démonstration. Pour $n = 4$ la thèse résulte du corollaire 1.

Posons $n = 2k + 1$ avec $k \geq 2$. On emploie le lemme 4. D'après (9) nous obtenons

$$f^{2k+1}(g(x)) \cdot f^{\alpha_k}(g_2(x)) \cdot f^{\beta_k}(x) = f^{\gamma_k}(g(x)) \cdot f^{2k}(x). \tag{30}$$

Des égalités (26), (27) il suit que

$$f^{2k+1}(g(x)) \cdot f^{\alpha_k}(g_2(x)) \cdot f^{\alpha_k+2k}(x) = f^{2\alpha_k+2k+1}(g(x)) \cdot f^{2k}(x).$$

Si $f(g(x)) \neq 0$ la loi de réduction (1) donne

$$f^{\alpha_k}(g_2(x)) \cdot f^{\alpha_k+2k}(x) = f^{2\alpha_k}(g(x)) \cdot f^{2k}(x).$$

De $f(g(x)) \neq 0$ en employant (S_3) nous obtenons $f(x) \neq 0$. La loi de réduction (1) et la commutativité nous donnent encore

$$[f(g_2(x)) \cdot f(x)]^{\alpha_k} = [f^2(g(x))]^{\alpha_k}. \tag{31}$$

Si $f(g(x)) = 0$, de (S_3) avec x remplacé par $g(x)$, il vient que $f(g_2(x)) = 0$ et on déduit (31) aussi.

Puisque $(Y, \cdot)$ est un demi-groupe sans torsion de degré α_k pour $k = (n-1)/2$, la fonction f vérifie (S_2). On peut alors appliquer le théorème 1 et on déduit la thèse pour tous n impair, $n \geq 5$.

Posons $n = 2k + 2$ pour $k \geq 2$. On emploi le lemme 4. D'après (13) nous obtenons

$$f^{2k+2}(g(x)) \cdot f^{a_k}(g(x)) = f^{b_k}(g_2(x)) \cdot f^{c_k}(x) \cdot f^{2k+1}(x).$$

Des égalités (15), (16) il suit que $b_k = c_k + 2k + 1$, donc

$$f^{2k+2}(g(x)) \cdot f^{a_k}(g(x)) = f^{b_k}(g_2(x)) \cdot f^{b_k}(x).$$

De l'égalité (29) il vient que $a_k = 2b_k - 2k - 2$. Par commutativité nous obtenons

$$[f^2(g(x))]^{b_k} = [f(g_2(x)) \cdot f(x)]^{b_k}.$$

Puisque $(Y, \cdot)$ est un demi-groupe sans torsion de degré b_k pour $k=(n-2)/2$, la fonction f vérifie (S_2). On peut alors appliquer le théorème 1 et on déduit la thèse pour tous n pair, $n \geq 6$.

De la considération précédente on obtient que les équations (S_3), (S_n) pour $n \geq 4$ sont équivalentes au système (S). Ainsi, le théorème est démontré. ∎

Remarque 3. Il résulte du travail [2] que le système (S) est équivalent à chaque des systèmes (S_3), (S_4) (théorème 2), (S_3), (S_5) (théorème 4) et (S_3), (S_6) (théorème 3).

Exemple 1. Soit Z un ensemble infini, $g : Z \to Z$ une fonction. Si $x_0 \in Z$, nous définissons

$$x_n = g_n(x_0) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Supposons que

$$x_n \neq x_m \quad \text{pour } n \neq m.$$

Soit $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. L'ensemble $Y = \{-1, 1\}$ avec multiplication est un groupe commutatif avec la loi de réduction (1). La structure $(Y, \cdot)$ est sans torsion de degré pair.

La fonction

$$f(x_n) = \begin{cases} -1 & \text{pour } n = 0, \\ 1 & \text{pour } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

est une solution des équations (S_3), (S_{2n+1}) pour tous $n \geq 2$, dans l'ensemble X.

En effet, pour $x_0 \in X$ on a

$$1 = 1^3 = f^3(g(x_0)) = f(g_3(x_0)) \cdot f^2(x_0) = 1 \cdot (-1)^2 = 1,$$
$$1 = 1^{2n+1} = f^{2n+1}(g(x_0)) = f(g_{2n+1}(x_0)) \cdot f^{2n}(x_0) = 1 \cdot (-1)^{2n} = 1.$$

Pour $x_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$ nous obtenons

$$1 = 1^3 = f^3(g(x_m)) = f(g_3(x_m)) \cdot f^2(x_m) = 1 \cdot 1^2 = 1,$$
$$1 = 1^{2n+1} = f^{2n+1}(g(x_m)) = f(g_{2n+1}(x_m)) \cdot f^{2n}(x_m) = 1 \cdot 1^{2n} = 1.$$

Nous observons que la fonction f ne vérifie pas l'équation (S_2) dans X, parce que pour $x_0 \in X$,

$$1 = 1^2 = f^2(g(x_0)) \neq f(g_2(x_0)) \cdot f^1(x_0) = 1 \cdot (-1)^1 = -1.$$

Donc, les hyphothèses que l'ensemble Y est un demi-groupe commutatif avec la loi de réduction (1) ne suffit pas pour que le théorème 5 soit vrai. Il faut supposer que la structure $(Y, \cdot)$ est sans torsion.

Références

[1] J. Drewniak et J. Kalinowski, *Les relations entre les équations pré-Schröder I*, Ann. Polon. Math. 32 (1976), 5–11.
[2] J. Kalinowski, *L'équivalence entre les équations pré-Schröder*, en préparation.
[3] M. Kuczma, B. Choczewski and R. Ger, *Iterative Functional Equations*, Encyclopedia Math. Appl. 32, Cambridge Univ. Press, 1990.
[4] Z. Moszner, *Sur un problème relatif aux équations de pré-Schröder*, Ann. Polon. Math. 27 (1973), 289–292.
[5] Gy. Targonski, *Problem P 63*, Aequationes Math. 4 (1970), 251.

Department of Mathematics
Silesian University
Bankowa 14
40-007 Katowice, Poland
E-mail: kalinows@ux2.math.us.edu.pl

Reçu par la Rédaction le 19.5.2004
Révisé le 5.11.2004 (1518)