ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXXVI.1-2 (2001)

Présentation jordanienne de l'algèbre de Weyl A_2

par J. Alev (Reims) et F. Dumas (Clermont-Ferrand)

Abstract. Let k be a commutative field. For any $a, b \in k$, we denote by $J_{a,b}(k)$ the deformation of the 2-dimensional Weyl algebra over k associated with the Jordanian Hecke symmetry with parameters a and b. We prove that: (i) any $J_{a,b}(k)$ can be embedded in the usual Weyl algebra $A_2(k)$, and (ii) $J_{a,b}(k)$ is isomorphic to $A_2(k)$ if and only if $a = b$.

Introduction. La donnée d'une symétrie de Hecke R sur un k-espace vectoriel V de dimension n permet de construire une algèbre de différentielles (complexe de de Rham) sur une déformation de l'algèbre des fonctions régulières de V (cf. [10], [8], [9], [7], [2], ...). On associe de façon canonique à cette algèbre de différentielles une algèbre d'opérateurs (algèbre de Weyl), qui peut être définie par générateurs et relations à partir des coefficients de R (cf. [2], section 12.3, ou [5], définition 1.4). On s'intéresse ici à l'exemple de la déformation "jordanienne" du plan, c'est-à-dire au cas où $n = 2$ et où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & a & -a & -ab \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $a, b \in k$. Le complexe de de Rham correspondant est défini en [9] (proposition 2), ou [7] (exemple 2.6.4). L'algèbre de Weyl associée, que l'on notera ici $J_{a,b}(k)$, est explicitée en [1] (paragraphe 3) et en [6] (paragraphe 2). L'étude de $J_{a,b}(k)$ sur le plan de la théorie des anneaux est amorcée en [5] et poursuivie en [4].

Dans le cas particulier où $a = b = 0$, la symétrie de Hecke R est la volte usuelle et $J_{0,0}(k)$ n'est autre que l'algèbre de Weyl classique $A_2(k)$ des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur le plan commutatif. Plus généralement, dans le cas uniparamétré $a = b$, plusieurs résultats de [5] ont mis en évidence des similitudes structurelles entre les algèbres $J_{a,a}(k)$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 16S32, 16W35, 16S36.
Key words and phrases: Weyl algebras, Jordanian deformation.

et $A_2(k)$. Le but principal de cette note est de démontrer qu'elles sont en fait isomorphes.

La méthode, directe et calculatoire, consiste à expliciter, dans une localisation appropriée $H_{a,b}(k)$ de $J_{a,b}(k)$, quatre éléments engendrant une sous-algèbre A isomorphe à $A_2(k)$, telle que $J_{a,b}(k) \subseteq A \subseteq H_{a,b}(k)$, et telle que $J_{a,b}(k) = A = H_{a,b}(k)$ dans le cas où $a = b$.

1. Définition (cf. [1], [6], [5], [4]). Soit k un corps commutatif. Pour tous $a, b \in k$, on note $J_{a,b}(k)$ l'algèbre de Weyl sur le plan de Jordan de paramètres a et b, c'est-à-dire par définition l'algèbre engendrée sur k par quatre générateurs $x_1, x_2, \partial_1, \partial_2$ soumis aux relations

$$\begin{array}{lll} (1,2) & x_1x_2 - x_2x_1 = ax_1^2, & \partial_1 x_1 - x_1\partial_1 = 1 + ax_1\partial_2, \\ (3,4) & \partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1 = -b\partial_2^2, & \partial_2 x_2 - x_2\partial_2 = 1 - bx_1\partial_2, \\ (5,6) & \partial_2 x_1 - x_1\partial_2 = 0, & \partial_1 x_2 - x_2\partial_1 = -ax_1\partial_1 - abx_1\partial_2 + bx_2\partial_2. \end{array}$$

Dans le cas particulier où $a = b = 0$, on retrouve les relations $[\partial_1, x_1] = [\partial_2, x_2] = 1$ et $[\partial_1, x_2] = [\partial_2, x_1] = [\partial_1, \partial_2] = [x_1, x_2] = 0$ définissant l'algèbre de Weyl classique $A_2(k)$ (cf. [3]). Pour a et b quelconques, les relations (1)–(6) permettent d'exprimer $J_{a,b}(k)$ comme l'extension de Ore itérée :

$$J_{a,b}(k) = k[x_1, \partial_2][\partial_1; D][x_2; \sigma, d]$$

où D est la k-dérivation de $k[x_1, \partial_2]$ définie par

$$D(x_1) = 1 + ax_1\partial_2 \quad \text{et} \quad D(\partial_2) = -b\partial_2^2,$$

et où σ est le k-automorphisme et d la σ-dérivation de $k[x_1, \partial_2][\partial_1; D]$ définis par

$$\begin{array}{ll} \sigma(x_1) = x_1, & d(x_1) = -ax_1^2, \\ \sigma(\partial_2) = \partial_2, & d(\partial_2) = bx_1\partial_2 - 1, \\ \sigma(\partial_1) = \partial_1 - b\partial_2, & d(\partial_1) = b + ax_1\partial_1 + b(a-b)x_1\partial_2. \end{array}$$

2. Lemme. *Soient dans la sous-algèbre commutative $k[x_1, \partial_2]$ de $J_{a,b}(k)$ les éléments*

$$t = x_1\partial_2 \quad \text{et} \quad z = 1 + (a-b)x_1\partial_2 = 1 + (a-b)t.$$

Alors:

(i) $D(t) = z\partial_2$ *et* $d(t) = -zx_1$;

(ii) z *est normalisant dans* $J_{a,b}(k)$;

(iii) *en particulier, si* $a \neq b$, *l'algèbre* $J_{a,b}(k)$ *n'est pas simple.*

Preuve. Il est clair que $[z, x_1] = [z, \partial_2] = 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} D(t) &= D(x_1)\partial_2 + x_1 D(\partial_2) \\ &= (1 + at)\partial_2 + x_1(-b\partial_2^2) = (1 + at - bt)\partial_2 = z\partial_2, \\ d(t) &= d(x_1)\partial_2 + x_1 d(\partial_2) \\ &= -ax_1^2\partial_2 + x_1(bt - 1) = x_1(-at + bt - 1) = -zx_1. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\partial_1 z &= z\partial_1 + D(z) = z\partial_1 + (a-b)D(t)\\ &= z\partial_1 + (a-b)z\partial_2 = z(\partial_1 + (a-b)\partial_2),\\ x_2 z &= zx_2 + d(z) = zx_2 + (a-b)d(t)\\ &= zx_2 - (a-b)zx_1 = z(x_2 - (a-b)x_1),\end{aligned}$$

ce qui prouve (ii) et donc (iii) (cf. aussi la preuve du théorème 3.6 de [5]). ■

3. Notations. Notons $H_{a,b}(k)$ l'algèbre localisée de $J_{a,b}(k)$ suivant la partie multiplicative $\mathcal{Z}$ formée des puissances de l'élément normalisant z. On introduit dans $H_{a,b}(k)$ les éléments

(7) $\quad p_1 = x_1,$

(8) $\quad p_2 = \partial_2,$

(9) $\quad q_1 = z^{-1}(b\partial_2^2)x_2 + z^{-1}(bx_1\partial_2 - 1)\partial_1 + z^{-1}(a - b + b^2x_1\partial_2)\partial_2,$

(10) $\quad q_2 = z^{-1}(1 + ax_1\partial_2)x_2 + z^{-1}(ax_1^2)\partial_1 + z^{-1}ax_1(1 + bx_1\partial_2).$

On se propose de vérifier qu'ils engendrent dans $H_{a,b}(k)$ une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre de Weyl classique $A_2(k)$. On procède pour cela en plusieurs étapes.

4. Lemme. *Dans $H_{a,b}(k)$ on a $[p_1, p_2] = [p_1, q_2] = [p_2, q_1] = 0$ et $[p_1, q_1] = [p_2, q_2] = 1$.*

Preuve. Il est clair que $[p_1, p_2] = [x_1, \partial_2] = 0$. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}[p_1, q_2] &= [x_1, z^{-1}(1 + at)x_2 + z^{-1}(ax_1^2)\partial_1 + z^{-1}ax_1(1 + bt)]\\ &= z^{-1}(1 + at)[x_1, x_2] + z^{-1}(ax_1^2)[x_1, \partial_1] + 0\\ &= z^{-1}(1 + at)(ax_1^2) + z^{-1}(ax_1^2)(-1 - at)\\ &= 0,\\ [p_2, q_1] &= [\partial_2, z^{-1}(b\partial_2^2)x_2 + z^{-1}(bt - 1)\partial_1 + z^{-1}(a - b + b^2t)\partial_2]\\ &= z^{-1}(b\partial_2^2)[\partial_2, x_2] + z^{-1}(bt - 1)[\partial_2, \partial_1] + 0\\ &= z^{-1}(b\partial_2^2)(1 - bt) + z^{-1}(bt - 1)(b\partial_2^2)\\ &= 0,\\ [p_1, q_1] &= [x_1, z^{-1}(b\partial_2^2)x_2 + z^{-1}(bt - 1)\partial_1 + z^{-1}(a - b + b^2t)\partial_2]\\ &= z^{-1}(b\partial_2^2)[x_1, x_2] + z^{-1}(bt - 1)[x_1, \partial_1] + 0\\ &= z^{-1}(b\partial_2^2)ax_1^2 + z^{-1}(bt - 1)(-1 - at)\\ &= z^{-1}abt^2 + z^{-1}(1 + (a - b)t - abt^2)\\ &= z^{-1}z = 1,\\ [p_2, q_2] &= [\partial_2, z^{-1}(1 + at)x_2 + z^{-1}(ax_1^2)\partial_1 + z^{-1}ax_1(1 + bt)]\\ &= z^{-1}(1 + at)[\partial_2, x_2] + z^{-1}(ax_1^2)[\partial_2, \partial_1] + 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= z^{-1}(1+at)(1-bt) + z^{-1}(ax_1^2)(b\partial_2^2)\\ &= z^{-1}(1+(a-b)t-abt^2) + z^{-1}abt^2\\ &= z^{-1}z = 1,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ∎

5. Remarques et notations. Le calcul du crochet $[q_1, q_2]$ est beaucoup plus délicat. Chacun des deux q_i étant une somme de trois termes, $[q_1, q_2]$ est d'après (9) et (10) la somme des neuf crochets suivants :

$$\begin{aligned}C_1 &= [z^{-1}b\partial_2^2x_2, z^{-1}(1+at)x_2],\\ C_2 &= [z^{-1}b\partial_2^2x_2, z^{-1}(ax_1^2)\partial_1],\\ C_3 &= [z^{-1}b\partial_2^2x_2, z^{-1}ax_1(1+bt)],\\ C_4 &= [z^{-1}(bt-1)\partial_1, z^{-1}(1+at)x_2],\\ C_5 &= [z^{-1}(bt-1)\partial_1, z^{-1}(ax_1^2)\partial_1],\\ C_6 &= [z^{-1}(bt-1)\partial_1, z^{-1}ax_1(1+bt)],\\ C_7 &= [z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2, z^{-1}(1+at)x_2],\\ C_8 &= [z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2, z^{-1}(ax_1^2)\partial_1],\\ C_9 &= [z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2, z^{-1}ax_1(1+bt)].\end{aligned}$$

Comme on va le voir plus loin, ces crochets appartiennent en fait à certaines sous-algèbres particulières de $H_{a,b}(k)$. Notons S le localisé suivant $\mathcal{Z}$ de l'anneau commutatif $k[x_1, \partial_2]$ et $T \subset S$ le localisé suivant $\mathcal{Z}$ du sous-anneau $k[t]$. Les dérivations D et d de $k[x_1, \partial_2]$, qui vérifient, comme on l'a vu,

$$\begin{aligned}D(x_1) &= 1+at, \quad & D(\partial_2) &= -b\partial_2^2,\\ D(t) &= z\partial_2, & D(z) &= (a-b)z\partial_2,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}d(x_1) &= -ax_1^2, \quad & d(\partial_2) &= bt-1,\\ d(t) &= -zx_1, & d(z) &= -(a-b)zx_1,\end{aligned} \tag{12}$$

se prolongent en des dérivations de S par

$$D(z^{-1}) = -(a-b)z^{-1}\partial_2 \quad \text{et} \quad d(z^{-1}) = (a-b)z^{-1}x_1. \tag{13}$$

En utilisant l'expression de $J_{a,b}(k)$ comme extension de Ore itérée dans la définition 1, cela permet d'obtenir après redressement cinq des crochets C_i comme des éléments de T (lemme 6), et les quatre autres comme des polynômes de degré 1 en $x_1\partial_1$ et ∂_2x_2 à coefficients dans T (lemme 7). Ils appartiennent donc au localisé suivant $\mathcal{Z}$ de la sous-algèbre $L_{a,b}(k)$ de $J_{a,b}(k)$ engendrée par t, $x_1\partial_1$ et ∂_2x_2. Les relations entre ces trois générateurs :

$$[x_1\partial_1, t] = [t, \partial_2x_2] = zt \quad \text{et} \quad [x_1\partial_1, \partial_2x_2] = -bzt,$$

se déduisent aisément de (1)–(6), mais ne seront pas utilisées dans la suite.

6. LEMME. *Les crochets C_3, C_6, C_7, C_8 et C_9 appartiennent au localisé suivant $\mathcal{Z}$ de la sous-algèbre $k[t]$ de $J_{a,b}(k)$, et vérifient $C_3 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 = -b$.*

Preuve. En utilisant les relations (12) et (13), on redresse C_3 et C_7 en

$$\begin{aligned}
C_3 &= [z^{-1}b\partial_2^2 x_2, z^{-1}ax_1(1+bt)] \\
&= (z^{-1}ab\partial_2^2)[x_2, z^{-1}(1+bt)x_1] \\
&= (z^{-1}ab\partial_2^2)d(z^{-1}(1+bt)x_1) \\
&= (z^{-1}ab\partial_2^2)(d(z^{-1})(1+bt)x_1 + z^{-1}d(1+bt)x_1 + z^{-1}(1+bt)d(x_1)) \\
&= (z^{-1}ab\partial_2^2)((a-b)z^{-1}x_1(1+bt)x_1 \\
&\quad + z^{-1}b(-zx_1)x_1 + z^{-1}(1+bt)(-ax_1^2)) \\
&= (z^{-2}ab\partial_2^2)x_1^2((a-b)(1+bt) - b(1+(a-b)t) + (1+bt)(-a)) \\
&= z^{-2}abt^2(-abt-2b) \\
&= z^{-2}(-a^2b^2t^3 - 2ab^2t^2), \\
C_7 &= [z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2, z^{-1}(1+at)x_2] \\
&= -z^{-1}(1+at)[x_2, z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2] \\
&= -z^{-1}(1+at)d(z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2) \\
&= -z^{-1}(1+at)(d(z^{-1})(a-b+b^2t)\partial_2 + z^{-1}d(a-b+b^2t)\partial_2 \\
&\quad + z^{-1}(a-b+b^2t)d(\partial_2)) \\
&= -z^{-1}(1+at)((a-b)z^{-1}x_1(a-b+b^2t)\partial_2 \\
&\quad + z^{-1}b^2(-zx_1)\partial_2 + z^{-1}(a-b+b^2t)(bt-1)) \\
&= -z^{-2}(1+at)((a-b)(a-b+b^2t)t \\
&\quad - b^2(1+(a-b)t)t + (a-b+b^2t)(bt-1)) \\
&= -z^{-2}(1+at)(b^3t^2 + (a^2-2b^2-ab)t - (a-b)) \\
&= z^{-2}(-ab^3t^3 + (2ab^2+a^2b-a^3-b^3)t^2 + 2b^2t + (a-b)).
\end{aligned}$$

On utilise de même (11) et (13) pour le calcul de C_6 et C_8 :

$$\begin{aligned}
C_6 &= [z^{-1}(bt-1)\partial_1, z^{-1}a(1+bt)x_1] \\
&= z^{-1}a(bt-1)[\partial_1, z^{-1}(1+bt)x_1] \\
&= z^{-1}a(bt-1)D(z^{-1}(1+bt)x_1) \\
&= z^{-1}a(bt-1)(D(z^{-1})(1+bt)x_1 \\
&\quad + z^{-1}D(1+bt)x_1 + z^{-1}(1+bt)D(x_1)) \\
&= z^{-1}a(bt-1)(-(a-b)z^{-1}\partial_2(1+bt)x_1 \\
&\quad + z^{-1}bz\partial_2 x_1 + z^{-1}(1+bt)(1+at)) \\
&= z^{-2}a(bt-1)(-(a-b)(t+bt^2) \\
&\quad + bt(1+(a-b)t) + (1+bt)(1+at))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= z^{-2}a(bt-1)(abt^2+3bt+1)\\
&= z^{-2}(a^2b^2t^3+(3ab^2-a^2b)t^2-2abt-a),\\
C_8 &= [z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2, z^{-1}ax_1^2\partial_1]\\
&= -z^{-1}ax_1^2[\partial_1, z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2]\\
&= -z^{-1}ax_1^2D(z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2)\\
&= -z^{-1}ax_1^2(D(z^{-1})(a-b+b^2t)\partial_2\\
&\quad + z^{-1}D(a-b+b^2t)\partial_2 + z^{-1}(a-b+b^2t)D(\partial_2))\\
&= z^{-1}ax_1^2((a-b)z^{-1}\partial_2(a-b+b^2t)\partial_2\\
&\quad - z^{-1}b^2z\partial_2^2 - z^{-1}(a-b+b^2t)(-b\partial_2)^2)\\
&= z^{-2}at^2((a-b)(a-b+b^2t)-b^2(1+(a-b)t)+b(a-b+b^2t))\\
&= z^{-2}at^2(b^3t+a^2-b^2-ab)\\
&= z^{-2}(ab^3t^3+(a^3-ab^2-a^2b)t^2).
\end{aligned}
$$

Comme il est clair que C_9 est nul, il suffit d'additionner les quatre développements obtenus pour vérifier que

$$
\begin{aligned}
C_3+C_6+C_7+C_8+C_9 &= z^{-2}((2ab^2-a^2b-b^3)t^2+(2b^2-2ab)t-b)\\
&= z^{-2}(-b)(1+(a-b)t)^2 = -b. \blacksquare
\end{aligned}
$$

7. Lemme. *Les crochets C_1, C_2, C_4 et C_5 appartiennent au localisé suivant $\mathcal{Z}$ de la sous-algèbre $L_{a,b}(k)$ de $J_{a,b}(k)$ et vérifient $C_1+C_2+C_4+C_5=b$.*

Preuve. Comme dans la preuve du lemme précédent, on utilise les relations (11), (12) et (13) pour redresser les quatre crochets en

$$
\begin{aligned}
C_1 &= [z^{-1}b\partial_2^2x_2, z^{-1}(1+at)x_2]\\
&= (z^{-1}b\partial_2^2d(z^{-1}(1+at)) - z^{-1}(1+at)\,d(z^{-1}b\partial_2^2))x_2\\
&= bz^{-1}\partial_2^2((a-b)z^{-1}x_1(1+at)+z^{-1}a(-zx_1))x_2\\
&\quad - z^{-1}(1+at)((a-b)z^{-1}x_1b\partial_2^2+z^{-1}b2\partial_2(bt-1))x_2\\
&= b(a-b)z^{-2}t(1+at)\partial_2x_2 - abz^{-1}t\partial_2x_2\\
&\quad - b(a-b)z^{-2}(1+at)t\partial_2x_2\\
&\quad - 2bz^{-2}(1+at)(bt-1)\partial_2x_2\\
&= z^{-2}(-abzt-2b(1+at)(bt-1))\partial_2x_2\\
&= z^{-2}(-ab(1+(a-b)t)t-2b(1+at)(bt-1))\partial_2x_2\\
&= z^{-2}((-a^2b-ab^2)t^2+(ab-2b^2)t+2b)\partial_2x_2,\\
C_2 &= [z^{-1}b\partial_2^2x_2, z^{-1}ax_1^2\partial_1]\\
&= z^{-1}b\partial_2^2(z^{-1}ax_1^2x_2+d(z^{-1}ax_1^2))\partial_1\\
&\quad - z^{-1}ax_1^2(z^{-1}b\partial_2^2\partial_1+D(z^{-1}b\partial_2^2))x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z^{-2}abt^2(x_2\partial_1 - \partial_1 x_2) + z^{-1}ab\partial_2^2((a-b)z^{-1}x_1^3 + z^{-1}(-2ax_1^3))\partial_1 \\
&\quad - z^{-1}abx_1^2(-(a-b)z^{-1}\partial_2^3 + z^{-1}(-2b\partial_2^3))x_2 \\
&= z^{-2}abt^2(ax_1\partial_1 - b\partial_2 x_2 + b + (a-b)bt) + z^{-2}abt^2(-a-b)x_1\partial_1 \\
&\quad - z^{-2}abt^2(-a-b)\partial_2 x_2 \\
&= z^{-2}(a^2bt^2)\partial_2 x_2 + z^{-2}(-ab^2t^2)x_1\partial_1 + z^{-2}ab^2t^2(1+(a-b)t) \\
&= z^{-2}(a^2bt^2)\partial_2 x_2 + z^{-2}(-ab^2t^2)x_1\partial_1 + z^{-1}(ab^2t^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_4 &= [z^{-1}(bt-1)\partial_1, z^{-1}(1+at)x_2] \\
&= z^{-1}(bt-1)(z^{-1}(1+at)\partial_1 + D(z^{-1}(1+at)))x_2 \\
&\quad - z^{-1}(1+at)(z^{-1}(bt-1)x_2 + d(z^{-1}(bt-1)))\partial_1 \\
&= z^{-2}(bt-1)(1+at)(\partial_1 x_2 - x_2\partial_1) \\
&\quad + z^{-1}(bt-1)(-(a-b)z^{-1}\partial_2(1+at) + z^{-1}(az\partial_2))x_2 \\
&\quad - z^{-1}(1+at)((a-b)z^{-1}x_1(bt-1) + z^{-1}b(-zx_1))\partial_1 \\
&= z^{-2}(bt-1)(1+at)(-ax_1\partial_1 + b\partial_2 x_2 - b - (a-b)bt) \\
&\quad + z^{-2}(bt-1)(1+at)(b-a)\partial_2 x_2 + z^{-2}a(bt-1)(1+(a-b)t)\partial_2 x_2 \\
&\quad - z^{-2}(1+at)(bt-1)(a-b)x_1\partial_1 + z^{-2}b(1+at)(1+(a-b)t)x_1\partial_1 \\
&= z^{-2}(bt-1)(b(1+at) + (b-a)(1+at) + a(1+(a-b)t))\partial_2 x_2 \\
&\quad + z^{-2}(1+at)(-a(bt-1) - (bt-1)(a-b) + b(1+(a-b)t))x_1\partial_1 \\
&\quad - z^{-2}b(bt-1)(1+at)(1+(a-b)t) \\
&= z^{-2}(ab^2t^2 + (2b^2-ab)t - 2b)\partial_2 x_2 \\
&\quad + z^{-2}(-a^2bt^2 + (2a^2-ab)t + 2a)x_1\partial_1 \\
&\quad + z^{-1}(-ab^2t^2 + (ab-b^2)t + b),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_5 &= [z^{-1}(bt-1)\partial_1, z^{-1}ax_1^2\partial_1] \\
&= z^{-1}(bt-1)aD(z^{-1}x_1^2)\partial_1 - z^{-1}ax_1^2 D(z^{-1}(bt-1))\partial_1 \\
&= z^{-1}(bt-1)a((b-a)z^{-1}\partial_2 x_1^2 + z^{-1}2x_1(1+at))\partial_1 \\
&\quad - az^{-1}x_1^2((b-a)z^{-1}\partial_2(bt-1) + z^{-1}bz\partial_2)\partial_1 \\
&= (z^{-2}a(b-a)(bt-1)t + z^{-2}2a(bt-1)(1+at) \\
&\quad - a(b-a)z^{-2}t(bt-1) - abz^{-1}t)x_1\partial_1 \\
&= az^{-2}((b-a)bt^2 - (b-a)t + 2abt^2 + 2(b-a)t - 2 \\
&\quad - b(b-a)t^2 + (b-a)t - bt(1+(a-b)t))x_1\partial_1 \\
&= z^{-2}((a^2b+ab^2)t^2 + (ab-2a^2)t - 2a)x_1\partial_1.
\end{aligned}
$$

On additionne les quatre développements obtenus pour calculer

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 + C_4 + C_5 &= z^{-1}(ab^2t^2) + z^{-1}b(-abt^2 + (a-b)t + 1) \\
&= z^{-1}b(1+(a-b)t) = b. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème principal.

8. THÉORÈME. *Soient $a, b \in k$ quelconques. Alors il existe une sous-algèbre A de $H_{a,b}(k)$ isomorphe à l'algèbre de Weyl $A_2(k)$ usuelle, telle que $J_{a,b}(k) \subseteq A \subseteq H_{a,b}(k)$.*

Preuve. Soit A la sous-algèbre de $H_{a,b}(k)$ engendrée par p_1, q_1, p_2, q_2. D'après le lemme 4, on a $[p_1, p_2] = [p_1, q_2] = [p_2, q_1] = 0$ et $[p_1, q_1] = [p_2, q_2] = 1$. D'après la remarque 5 et les lemmes 6 et 7, on a aussi $[q_1, q_2] = 0$. Comme l'algèbre de Weyl classique $A_2(k)$ est simple, on en déduit que A est isomorphe à $A_2(k)$.

Par ailleurs, reprenons les relations (9) et (10) sous la forme du système

$$\begin{aligned} z^{-1}(b\partial_2^2)x_2 + z^{-1}(bt-1)\partial_1 &= q_1 - z^{-1}(a-b+b^2t)\partial_2, \\ z^{-1}(1+at)x_2 + z^{-1}(ax_1^2)\partial_1 &= q_2 - z^{-1}ax_1(1+bt), \end{aligned}$$

d'inconnues x_2 et ∂_1. Son déterminant vaut, dans le localisé S de $k[x_1, \partial_2]$ suivant $\mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} \Delta &= z^{-1}(b\partial_2^2)z^{-1}(ax_1^2) - z^{-1}(bt-1)z^{-1}(1+at) \\ &= z^{-2}(abt^2) - z^{-2}(1+at)(bt-1) = z^{-2}(1+(a-b)t) = z^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui permet par combinaisons linéaires d'inverser les relations en

$$\begin{aligned} x_2 &= (ax_1^2)q_1 + (1-bt)q_2 - ax_1, \\ \partial_1 &= (-1-at)q_1 + (b\partial_2^2)q_2 + (a-b)\partial_2. \end{aligned}$$

En résumé, les relations (7)–(10) sont équivalentes à

$$x_1 = p_1, \tag{14}$$

$$\partial_2 = p_2, \tag{15}$$

$$x_2 = (ap_1^2)q_1 + (1-bp_1p_2)q_2 - ap_1, \tag{16}$$

$$\partial_1 = (-1-ap_1p_2)q_1 + (bp_2^2)q_2 + (a-b)p_2. \tag{17}$$

Ceci prouve que la sous-algèbre A contient x_1, x_2, ∂_1 et ∂_2, donc $J_{a,b}(k) \subseteq A \subseteq H_{a,b}(k)$. ■

9. COROLLAIRE. *Pour tout $a \in k$, l'algèbre $J_{a,a}(k)$ est isomorphe à l'algèbre de Weyl classique $A_2(k)$.*

Preuve. Lorsque $a = b$, on a $z = 1$ et $J_{a,b}(k) = A = H_{a,b}(k)$. ■

10. REMARQUE. Il est facile de vérifier que $J_{a,b}(k) \simeq J_{ca,cb}(k)$ pour tous $a, b, c \in k$, $c \neq 0$, et que $J_{1,0}(k) \simeq J_{0,1}(k)$; (cf. [5], exemple 2.4, et [4], preuve du théorème 2.2). On peut dès lors résumer les résultats de cette note sous la forme de l'énoncé suivant.

Soient $a, b \in k$; deux cas seulement sont possibles:

(i) si $a = b$, alors l'algèbre $J_{a,b}(k)$ est isomorphe à l'algèbre de Weyl $A_2(k)$;

(ii) si $a \neq b$, alors il existe $c \in k$ distinct de 1 tel que $J_{a,b}(k)$ soit isomorphe à la sous-algèbre non-simple $J_{1,c}(k)$ de $A_2(k)$.

Les algèbres $J_{1,c}(k)$ sont de gl-dim et K-dim égales à 3 si k est de caractéristique nulle (cf. [4], théorème 2.2), et égales à 4 si k est de caractéristique première (cf. [5], corollaire 3.17). Sont-elles deux à deux non-isomorphes ? Sont-elles toutes isomorphes ?

Références

[1] A. Aghamohammadi, *The two-parametric extension of h deformation of* GL(2), *and the differential calculus on its quantum plane*, Modern Phys. Lett. A 8 (1993), no. 27, 2607–2613.

[2] E. E. Demidov, *Some aspects of the theory of quantum groups*, Russian Math. Surveys 48 (1993), no. 6, 41–79.

[3] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[4] H. Fujita, E. Kirkman and J. Kuzmanovich, *Global and Krull dimensions of quantum Weyl algebras*, J. Algebra 216 (1999), 405–416.

[5] A. Giaquinto and J. J. Zhang, *Quantum Weyl algebras*, ibid. 176 (1995), 861–881.

[6] V. Karimipour, *The quantum de Rham complexes associated with* $\mathrm{SL}_h(2)$, Lett. Math. Phys. 30 (1994), 87–98.

[7] G. Maltsiniotis, *Le langage des espaces et des groupes quantiques*, Comm. Math. Phys. 151 (1993), 275–302.

[8] Yu. I. Manin, *Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes*, Theoret. Math. Phys. 92 (1992), 997–1023.

[9] E. E. Mukhin, *Yang–Baxter operators and the non-commutative de Rham complex*, Russian Math. Surveys 46 (1991), no. 4, 192–193.

[10] J. Wess and B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, Nuclear Phys. B Proc. Suppl. 18 (1990), 302–312.

Université de Reims
Mathématiques, U.M.R. 6056
B.P. 1039
51687 Reims Cedex, France
E-mail: jacques.alev@univ-reims.fr

Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 2)
Laboratoire de Mathématiques Pures
63177 Aubière Cedex, France
E-mail: Francois.Dumas@math.univ-bpclermont.fr

Reçu par la Rédaction le 25.2.2000 (1177)