ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LXXIX.1 (2002)

Exposants de Łojasiewicz dans le cas semi-algébrique p-adique

par Azzeddine Fekak (Casablanca) et Ahmed Srhir (Kénitra)

Abstract. We prove the rationality of the Łojasiewicz exponent for p-adic semi-algebraic functions without compactness hypothesis. In the parametric case, we show that the parameter space can be divided into a finite number of semi-algebraic sets on each of which the Łojasiewicz exponent is constant.

1. Introduction. Les nombres p-adiques ont été introduits par Hensel afin d'utiliser des méthodes d'Analyse en Arithmétique. Son point de départ a été l'observation que toute valeur absolue sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ non triviale est équivalente à la valeur absolue ordinaire ou à une (et une seule) valeur absolue p-adique. Ce résultat est connu sous le nom de théorème d'Ostrowski (cf. [1] et [21]). Comme le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ est construit en complétant le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue ordinaire, le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est construit en complétant $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique. Cette analogie dans la construction de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}_p$ a donnée l'idée à de nombreux mathématiciens de translater des résultats connus dans le cas réel vers le cas p-adique (voir [22]).

Le but de ce travail est de faire la géométrie algébrique p-adique et puis d'y étudier les inégalités et les exposants de Łojasiewicz. C'est donc l'analogue p-adique des travaux du premier auteur dans le cas réel (cf. [17]–[19]).

On commence tout d'abord par définir la valuation p-adique qui joue un rôle important ; c'est l'analogue de l'ordre dans le cas réel. Nous donnons aussi la définition d'un corps formellement p-adique et d'un corps p-adiquement clos. On remarquera l'analogie de construction de ces corps avec la construction des corps formellement réels et des corps réels clos.

Les ensembles semi-algébriques p-adiques sont définis comme des combinaisons booléennes d'ensembles de la forme $\{x \in K^m : P_n(f(x))\}$ où K

2000 *Mathematics Subject Classification*: 03C10, 11F85, 14P10.
Key words and phrases: Łojasiewicz exponent, p-adic semi-algebraic function, p-adic spectrum.

désigne un corps p-adiquement clos et $P_n(f(x))$ signifie que $f(x)$ est une puissance $n^{\text{ième}}$ dans K avec $f \in K[X_1, \dots, X_m]$.

Le théorème de Macintyre, qui est le théorème d'élimination des quantificateurs pour les corps p-adiquement clos, permet de montrer que la projection d'un ensemble semi-algébrique p-adique est aussi un ensemble semi-algébrique p-adique, et c'est ce résultat important qui a permis de fonder toute la géométrie algébrique p-adique.

Les fonctions semi-algébriques p-adiques seront définis comme les fonctions définies d'un ensemble semi-algébrique p-adique vers un autre dont le graphe est semi-algébrique p-adique. Nous donnons aussi la définition du spectre p-adique introduit par E. Robinson dans [28]. Il est l'analogue p-adique du spectre réel introduit par M. Coste et M.-F. Roy dans [12]. Le spectre p-adique est aussi quasi-compact. L'identification tilda dans le cas p-adique permet aussi d'avoir une correspondance entre les phénomènes géométriques et algébriques.

Tous les outils développés ici en géométrie algébrique p-adique permettent d'étudier les inégalités et les exposants de Łojasiewicz. Ainsi on a pu translater les résultats connus dans le cas réel (cf. [18]) vers le cas p-adique. On a pu aussi obtenir la rationalité de l'exposant de Łojasiewicz et aussi des résultats dans des situations paramétrées.

Soit K un corps p-adiquement clos. Les résultats que nous obtenons sont :

Résultat A. *Soit X un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de K^m. On note $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des fonctions semi-algébriques p-adiques continues sur X. Soient f et g dans $\mathcal{S}(X)$ telles que $\{x \in S : g(x) = 0\} \subset \{x \in S : f(x) = 0\}$. On pose*

$$l(f,g) = \inf\{\theta \geq 0 : \exists h \in \mathcal{S}(X) \text{ tel que } |f(x)|_p^\theta \leq |h(x)|_p |g(x)|_p \ \forall x \in X\}.$$

Alors on a :

(i) *$l(f,g) = a/b$ est un nombre rationnel.*

(ii) *Il existe une fonction semi-algébrique p-adique h continue sur X telle que*

$$|f(x)|_p^{a/b} \leq |h(x)|_p |g(x)|_p \quad \forall x \in X.$$

Résultat B. *Soient A un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de $K^n \times K^m$, et $f(x,t)$ et $g(x,t)$ deux fonctions semi-algébriques p-adiques continues par rapport à x sur A telles que $\{(x,t) \in A : g(x,t) = 0\} \subset \{(x,t) \in A : f(x,t) = 0\}$. Alors il existe une partition finie en semi-algébriques p-adiques $K^m = \bigcup S_i$, des fonctions semi-algébriques continues $h_i : A|_S \to K$ et des nombres rationnels a_i/b_i tels que :*

(i) *$|f(x,t)|_p^{a_i/b_i} \leq |h_i(x,t)|_p |g(x,t)|_p$ sur $A|_{S_i}$,*

(ii) *a_i/b_i est l'exposant de Łojasiewicz $l(f_t, g_t)$ pour tout $t \in S_i$.*

1.1. Définition. Une valuation v d'un corps K est dite une *p-valuation* si :

(1) $v(p) = \min\{v(x) > 0 : x \in K\}$,
(2) le corps résiduel de v est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

L'opérateur p-adique de Kochen est défini par

$$\gamma(x) = \frac{1}{p}\,\frac{x^p - x}{(x^p - x)^2 - 1}.$$

L'opérateur γ joue le rôle de l'opérateur "au carré" de la théorie des corps réels clos. En effet, dans le cas réel tout carré est positif. Dans le cas p-adique on a $v(\gamma(x)) \geq 0$ pour tout $x \in K$ et toute p-valuation v de K.

1.2. Définition. Soient K un corps p-valué et L une extension de K. Soit $O_K[\gamma(K)]$ le sous-anneau de K engendré par $\gamma(K)$ sur l'anneau de valuation O_K. On dit que L est *formellement p-adique sur K* si $1/p \notin O_K[\gamma(K)]$. Dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, on dit tout simplement que L est *formellement p-adique.*

1.3. Définition. On dit qu'un corps K est *p-adiquement clos* si K est formellement p-adique et n'admet pas d'extension algébrique formellement p-adique propre.

Pour la construction des corps p-adiquement clos, on a une théorie constructive analogue à la théorie constructive des corps réels clos. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [8], [20] et [26].

(i) Un corps L est formellement p-adique sur K si et seulement s'il existe une p-valuation sur L qui est une extension de la valuation sur K.
(ii) K est formellement p-adique si et seulement si K admet une p-valuation.
(iii) Soit K un corps p-adiquement clos. Alors K admet une unique p-valuation. Sous cette valuation K satisfait au lemme de Hensel et $v(K^*)$ est un $\mathbb{Z}$-groupe.

1.4. Théorème. *Soit K un corps p-valué. Deux clôtures p-adiques L et M sont K-isomorphes si et seulement si*

$$L^{(n)} \cap K = M^{(n)} \cap K \qquad \forall n \geq 2$$

avec $A^{(n)} = \{x \in A : \exists y \in A\ (x = y^n)\}$.

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps p-adiquement clos.

2. Ensembles et fonctions semi-algébriques p-adiques

2.1. *Ensembles semi-algébriques p-adiques.* Un *ensemble semi-algébrique p-adique* de K^m est une combinaison booléenne (obtenue par intersection finie, réunion finie et passage au complémentaire) d'ensembles de la forme $\{x \in K^m : P_n(f(x))\}$ avec $f \in K[X_1, \ldots, X_m]$ et $P_n(f(x)) \Leftrightarrow f(x) \in K^{(n)}$.

Le théorème de Macintyre (cf. [5], [6], [15], [23], [24] et [26]) affirme que la projection d'un ensemble semi-algébrique p-adique est aussi un ensemble semi-algébrique p-adique :

2.2. Théorème (théorème de Macintyre). *Soit $S \subset K^{m+q}$ un ensemble semi-algébrique p-adique. Alors $D = \{x \in K^m : \exists y \in K^q \ (x, y) \in S\}$ est aussi un ensemble semi-algébrique p-adique.*

Le théorème de Macintyre, qui est le théorème d'élimination des quantificateurs pour les corps p-adiquement clos, est l'analogue p-adique du principe de Tarski–Seidenberg (cf. [9]) pour les corps réels clos. Il a été démontré d'abord par Macintyre (cf. [23]) en utilisant les travaux de Ax–Kochen (cf. [2]–[4]). Un résultat plus général est démontré par Prestel et Roquette (cf. [26]) où l'on trouve sa généralisation aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$; la preuve utilise la théorie des modèles. Une autre preuve a été donnée par Weispfenning (cf. [32]). Le théorème de décomposition cylindrique (cf. [15]) permet lui aussi de démontrer le théorème de Macintyre d'une manière plus algébrique. Le théorème de Macintyre est utilisé par Denef dans [13] pour montrer la rationalité des séries de Poincaré et dans [14] pour évaluer certains intégrales p-adiques.

2.3. Définition. Une *formule du premier ordre* du langage des corps p-adiques à paramètres dans K est une formule construite au moyen d'un nombre fini de conjonctions, disjonctions, négations et quantifications universelles ou existentielles sur des variables à partir des formules atomiques du genre $P_n(f(x))$ avec $f \in K[X_1, \ldots, X_m]$. Les *variables libres* d'une formule sont les variables des polynômes figurant dans la formule qui ne sont pas quantifiées.

D'après le théorème de Macintyre, si $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ est une formule du premier ordre du langage des corps p-adiques à paramètres dans K et à variables libres $x_1, \ldots, x_m$ alors $\{\underline{x} \in K^m : \Phi(\underline{x})\}$ est un ensemble semi-algébrique p-adique.

Signalons que dans le cas p-adique on dispose aussi d'un théorème de finitude p-adique (cf. [11] et [29]) qui est l'analogue p-adique du théorème de finitude réel (cf. [9]) :

2.4. Théorème (théorème de finitude p-adique). *Soit S un ensemble semi-algébrique p-adique ouvert* (*resp. fermé*) *de K^m. Alors S est réunion finie d'ensembles semi-algébriques p-adiques de la forme*

$$\{x \in K^m : f_1(x) \in K^{*(n_1)}, \dots, f_r(x) \in K^{*(n_r)}\}$$
$$(\textit{resp.}\ \{x \in K^m : f_1(x) \in K^{(n_1)}, \dots, f_r(x) \in K^{(n_r)}\})$$

avec $f_1, \dots, f_r \in K[\underline{X}]$.

2.5. THÉORÈME. *Soient K et L deux corps p-adiquement clos tels que $K \subset L$ et Φ une formule du premier ordre du langage des corps p-adiques à paramètres dans K. Alors Φ est vraie dans K si et seulement si Φ est vraie dans L.*

Pour la démonstration de ce théorème nous renvoyons le lecteur à [26].

3. Fonctions semi-algébriques p-adiques

3.1. DÉFINITION. Soient $A \subset K^m$ et $B \subset K^q$ deux ensembles semi-algébriques p-adiques. Une fonction $f : A \to B$ est dite *semi-algébrique p-adique* lorsque son graphe est semi-algébrique p-adique dans K^{m+q}.

REMARQUE. (i) Les fonctions semi-algébriques de A dans K forment un anneau. Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions semi-algébriques p-adiques alors le composé $g \circ f : A \to C$ est aussi une fonction semi-algébrique p-adique.

(ii) Soit $f : A \to B$ une fonction semi-algébrique p-adique. Si $S \subset A$ est un sous-ensemble semi-algébrique p-adique alors son image $f(S)$ est un ensemble semi-algébrique p-adique. Si $T \subset B$ est un ensemble semi-algébrique p-adique alors son image réciproque $f^{-1}(T)$ est un ensemble semi-algébrique p-adique.

3.2. PROPOSITION (lemme de sélection des courbes p-adiques ; cf. [16]). *Soit $S \subset K^{m+q}$ un ensemble semi-algébrique p-adique et soit l'ensemble semi-algébrique $A = \{x \in K^m : \exists y \in K^q\ (x, y) \in S\}$. Alors il existe une fonction semi-algébrique p-adique $f : A \to K^q$ telle que son graphe est contenu dans S.*

Soit $F \subset K^m$ un ensemble semi-algébrique p-adique. Pour tout $x \in K^m$, la distance de x à F est définie par

$$d(x, F) = \inf\{|x - y|_p : y \in F\}.$$

3.3. COROLLAIRE. *Il existe une fonction semi-algébrique p-adique h continue sur K^m et nulle sur $\overline{F}$ telle que $d(x, F) = |h(x)|_p$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à l'ensemble semi-algébrique p-adique S défini par $S = \{(x, t) \in K^{m+1} : d(x, F) = |t|_p\}$. ∎

4. Spectre p-adique. Le spectre p-adique a été introduit par E. Robinson dans [27] et [28]. Il est l'analogue p-adique du spectre réel introduit par M. Coste et M.-F. Roy dans [12]. Il a été généralisé aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ par Bröcker et Schinke dans [11] et indépendamment par Bélair dans [7]. Nous donnons sa définition et puis en suivant de près [9] on définira l'identification tilda p-adique pour avoir une correspondance entre les phénomènes géométriques et algébriques.

4.1. Définition. Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle *spectre p-adique* de A l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_p(A) := \{\text{homomorphisme } \alpha : A \to k(\alpha)\}/\sim_p$$

où $k(\alpha)$ est un corps p-adiquement clos et $\sim_p$ la relation d'équivalence définie par : $\alpha \sim_p \beta$ s'il existe un homomorphisme $\phi : k(\alpha) \to k(\beta)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & k(\alpha) \arrow[dl, "\phi"] \\ k(\beta) & \end{tikzcd}$$

L'image d'un élément $a \in A$ par α sera noté $a(\alpha)$.

Nous définissons une topologie sur $\mathrm{Spec}_p(A)$ engendré par les ensembles de la forme $B(a,n) = \{\alpha \in \mathrm{Spec}_p(A) : a(\alpha) \in k(\alpha)^{*(n)}\}$. Notons que $a(\alpha) \in k(\alpha)^{*(n)}$ ne dépend que de la classe d'équivalence de α. (Rappelons que $k(\alpha)^{*(n)}$ désigne le groupe des puissances $n^{\text{ièmes}}$ dans $k(\alpha)^*$.)

On a aussi $K^m \subset \mathrm{Spec}_p(K[X_1,\dots,X_m])$ car tout point $a \in K^m$ peut être vu comme l'homomorphisme

$$\alpha : K[X_1,\dots,X_m] \to K, \qquad f(X_1,\dots,X_m) \mapsto f(a).$$

4.2. Définition. (i) Un *ensemble constructible* de $\mathrm{Spec}_p(A)$ est une combinaison booléenne d'ouverts de base. Donc un constructible s'écrit sous la forme

$$\bigcup_{\text{finie}} \{\alpha \in \mathrm{Spec}_p(A) : a_1(\alpha) \in k(\alpha)^{*(n_1)}, \dots, a_m(\alpha) \in k(\alpha)^{*(n_r)}\}$$

avec $a_1,\dots,a_m \in A$.

(ii) La *topologie constructible* de $\mathrm{Spec}_p(A)$ est la topologie dont les ensembles constructibles forment une base d'ouverts.

Soit S un ensemble semi-algébrique p-adique de K^m. Alors il existe un et un seul constructible $\widetilde{S}$ de $\mathrm{Spec}_p(K[X_1,\dots,X_m])$ tel que $\widetilde{S} \cap K^m = S$.

Si Φ est une formule du premier ordre du langage des corps p-adiques à paramètres dans K et à variables libres $x_1,\dots,x_m$ et si $S = \{(x_1,\dots,x_m) : \Phi(x_1,\dots,x_m)\}$, on a $\widetilde{S} = \{\alpha \in \mathrm{Spec}_p(K[X_1,\dots,X_m]) : \Phi(X_1(\alpha),\dots,X_m(\alpha))$ vraie dans $k(\alpha)\}$. Tous ces résultats se déduisent du théorème de Macintyre.

En utilisant le théorème de finitude p-adique (cf. [11] et [29]), on a la proposition suivante :

4.3. Proposition. *Soit S un ensemble semi-algébrique p-adique de K^m.*

(i) *L'application $S \mapsto \widetilde{S}$ est un isomorphisme de l'algèbre de Boole des ensembles semi-algébriques p-adiques de K^m sur l'algèbre de Boole des ensembles constructibles de* $\mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$.

(ii) *S est ouvert (resp. fermé) dans K^m si et seulement si $\widetilde{S}$ est ouvert (resp. fermé) dans* $\mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$.

(iii) *L'opération tilda commute à l'adhérence et à l'intérieur.*

Preuve. D'après le théorème de finitude p-adique tout ouvert semi-algébrique S s'écrit comme réunion finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in K^m : f_1(x) \in K^{*(n_1)}, \ldots, f_r(x) \in K^{*(n_r)}\}.$$

Le constructible $\widetilde{S}$ s'écrit alors sous la forme d'une réunion finie des ensembles

$$\{\alpha \in \mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m]) : \\ f_1(X(\alpha)) \in k(\alpha)^{*(n_1)}, \ldots, f_r(X(\alpha)) \in k(\alpha)^{*(n_r)}\}$$

qui est ouvert pour la topologie sur $\mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$.

Pour le point (iii), puisque les ouverts quasi-compacts forment une base d'ouverts de $\mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$, on a bien $\mathrm{int}(\widetilde{S}) = \widetilde{\mathrm{int}(S)}$. Le résultat analogue sur l'adhérence s'en déduit par passage au complémentaire. ∎

Soit $S \subset K^m$ un ensemble semi-algébrique p-adique. On peut évaluer les fonctions semi-algébriques en un point $\alpha \in \widetilde{S}$.

Soient $\alpha \in \widetilde{S}$ et $f : S \to K$ une fonction semi-algébrique. On note $f(\alpha)$ l'élément $f_{k(\alpha)}(X(\alpha))$ où $f_{k(\alpha)} : S_{k(\alpha)} \to k(\alpha)$ et $X(\alpha) = (X_1(\alpha), \ldots, X_m(\alpha))$ est l'évaluation des coordonnées en α. ($f_{k(\alpha)}$ est l'extension de la fonction semi-algébrique p-adique au corps p-adiquement clos $k(\alpha)$.) Avec ces notations, on a la proposition suivante :

4.4. Proposition. *Si $u(f) = \{x \in S : f(x) \in K^{*(n)}\}$, alors on a*

$$\widetilde{u(f)} = \{\alpha \in \widetilde{S} : f(\alpha) \in k(\alpha)^{*(n)}\}.$$

Preuve. Soit $\Phi(x,t)$ une formule du premier ordre du langage des corps p-adiques à paramètres dans K qui décrit le graphe de $f : t = f(x) \Leftrightarrow \Phi(x,t)$. L'élément $f(\alpha)$ est l'unique élément de $k(\alpha)$ qui vérifie $\Phi(x,t)$. On a

$$u(f) = \{x \in S : \forall t \in K \ (\Phi(x,t) \Rightarrow t \in K^{*(n)})\}$$

et

$$\widetilde{u(f)} = \{\alpha \in \widetilde{S} : \forall t \in K \ \forall X(\alpha) \in k(\alpha) \ (\Phi(X(\alpha), t) \Rightarrow t \in k(\alpha)^{*(n)})\}.$$

Donc

$$\widetilde{u(f)} = \{\alpha \in \widetilde{S} : f(\alpha) \in k(\alpha)^{*(n)}\}.$$

Une fonction semi-algébrique p-adique sur S peut donc être vue comme une fonction sur $\widetilde{S}$, prenant des valeurs dans un corps p-adiquement clos $k(\alpha)$ qui dépend du point $\alpha \in \widetilde{S}$. ■

5. Inégalités et exposants de Łojasiewicz dans le cas p-adique

5.1. Proposition. *Soit $S \subset K^m$ un ensemble semi-algébrique p-adique et soit $f : S \to K$ une fonction semi-algébrique p-adique. Alors il existe un polynôme $F(X,Y) \in K[X_1,\dots,X_m,Y]$ tel que $F(x,f(x)) = 0$ pour tout $x \in S$.*

Rappelons que si $\underline{x} = (x_1,\dots,x_m) \in K^m$, on a $|\underline{x}|_p = \sup_{i=1,\dots,m} |x_i|_p$.

5.2. Proposition. *Soient $S \subset K^m$ un ensemble semi-algébrique p-adique fermé et $f : S \to K$ une fonction semi-algébrique p-adique continue. Alors il existe une constante $c > 0$ et un entier N tel que*

$$|f(x)|_p \le c(1+|x|_p)^N \quad \forall x \in S.$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, montrons tout d'abord un lemme :

5.3. Lemme. *Soit $f : S = \{x : |x|_p \ge a\} \to K$ une fonction semi-algébrique p-adique continue. Alors il existe $c > 0$ et un entier N tel que*

$$|f(x)|_p \le c|x|_p^N \quad \textit{pour } |x|_p \textit{ assez grand.}$$

Preuve. Il existe un polynôme $F(X,Y) = q_0(X)Y^m + q_1(X)Y^{m-1} + \dots + q_m(X)$ tel que $F(x,f(x)) = 0$. Donc $q_0(x)f(x)^m + q_1(x)f(x)^{m-1} + \dots + q_m(x) = 0$, ou encore

$$f(x) = \frac{1}{q_0(x)}\left[-q_1(x) - \frac{q_1(x)}{f(x)} - \dots - \frac{q_m(x)}{f^{m-1}(x)}\right] \quad \text{pour } q_0(x) \ne 0 \text{ et } f(x) \ne 0.$$

En prenant la norme p-adique, on a

$$|f(x)|_p \le \frac{1}{|q_0(x)|_p} \sup_{i=1}^{m} \left|\frac{q_i(x)}{f^{i-1}(x)}\right|_p.$$

Si $|f(x)|_p \ge 1$ alors

$$|f(x)|_p \le \frac{1}{|q_0(x)|_p} \sup_{i=1}^{m} |q_i(x)|_p.$$

$q_0(X)$ est un polynôme à une seule variable p-adique. Donc il n'a qu'un nombre fini de racines. Ainsi pour $|x|_p$ assez grand, il existe une constante $c > 0$ et un entier N tel que

$$|f(x)|_p \le c|x|_p^N.$$

L'inégalité reste vraie si $|f(x)|_p \le 1$ quitte à changer la constante c. ■

Preuve de la proposition. Pour $r \in K$, posons $v(r) = \sup\{|f(x)|_p : x \in A_r\}$ avec $A_r = \{x \in S : |x|_p = |r|_p\}$. Alors A_r est un ensemble semi-algébrique fermé borné. D'après le lemme de sélection des courbes p-adiques (cf. [16] et [30]), il existe une fonction semi-algébrique p-adique h telle que $|h(r)|_p = v(r)$. Pour $|r|_p$ assez grand, il existe une constante $c > 0$ et un entier N tel que $|h(r)|_p \leq c_1 |r|_p^N$ pour $|r|_p \geq |t|_p$. Soit c_2 le maximum de $|h(r)|_p$ pour $|r|_p \leq |t|_p$ et $c = \sup\{c_1, c_2\}$. On a

$$|f(x)|_p \leq c(1 + |x|_p)^N \qquad \forall x \in S. \ \blacksquare$$

Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique nulle complet avec une valeur absolue $|\cdot| : F \to \mathbb{R}^+$. Le corps $F^*(X) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F((X^{1/s}))$ des séries formelles de Puiseux sur F est la clôture algébrique du corps $F((X))$ des séries formelles de Laurent sur F. Pour plus de détails sur les séries formelles de Puiseux nous renvoyons le lecteur à [31].

Le polynôme $P(X,Y) = \sum_{i=0}^{d} P_i(X) Y^i \in F[X,Y]$ avec $P_d(X) \neq 0$ peut être factorisé comme suit :

$$P(X,Y) = P_d(X) \prod_{i=1}^{d} (Y - \alpha_i(X))$$

où $\alpha_i(X)$ est une série de Puiseux sur F. Nous pouvons choisir s suffisamment grand pour que $\alpha_i(X)$ s'écrit sous la forme

$$\alpha_i(x) = \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij} x^{j/s}$$

où $M \in \mathbb{Z}$ et les c_{ij} sont dans F. Si on pose $x = z^s$ on obtient la relation

$$P(z^s, y) = P_d(z^s) \prod_{i=1}^{d} (y - \beta_i(z))$$

où $\beta_i(z) = \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}\, z^j$ est une série formelle de Laurent en z.

Pour $\delta > 0$ et tout $w \in F$ avec $0 < |w| < \delta$, la série $\beta_i(w) = \sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}\, w^j$ converge et satisfait la relation

$$P(w^s, y) = P_d(w) \prod_{i=1}^{d} (y - \beta_i(w)).$$

En prenant F le complété de la clôture algébrique de K, on a le résultat suivant dont la démonstration se trouve dans [30] :

5.4. Proposition. *Soit $c : K \to K$ une fonction semi-algébrique p-adique continue. Alors il existe $e \geq 1$, $b \in K^*$ et une série de Laurent*

$\sum_{i=M}^{\infty} c_i z^i$ *qui converge sur un voisinage non vide* $B(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$ *et qui vérifie*

$$c(bw^e) = \sum_{i=M}^{\infty} c_i w^i \quad \textit{sur ce voisinage.}$$

Si $\lim_{w\to 0} c(w)$ *existe alors la série de Laurent ne contient aucune puissance négative.*

5.5. Proposition. *Soient* S *un ensemble semi-algébrique* p*-adique fermé borné de* K^m *et* $f, g : S \to K$ *deux fonctions semi-algébriques* p*-adiques continues tel que* $\{x \in S : g(x) = 0\} \subset \{x \in S : f(x) = 0\}$*. Alors il existe* $c > 0$ *et* $\alpha > 0$ *tels qu'on ait la propriété* $P(\alpha)$ *suivante :*

$$P(\alpha) : \quad |f(x)|_p^{\alpha} \leq c|g(x)|_p \quad \forall x \in S.$$

De plus $\alpha_0 = \inf\{\alpha \geq 0 : P(\alpha) \text{ vraie}\}$ *est un nombre rationnel et l'inégalité est réalisée pour ce* α_0*.*

α_0 est appelé *l'exposant de Łojasiewicz* de f par rapport à g sur S.

Preuve. Posons $K_v = \{x \in S : |f(x)|_p = |v|_p\}$ et considérons l'ensemble

$$L = \{(v, w) \in K \times K : |w|_p = \inf\{|g(x)|_p : x \in K_v\}\}.$$

(On pose inf $= 1$ lorsque $K_v = \emptyset$). L est un ensemble semi-algébrique p-adique. Donc d'après le lemme de sélection des courbes p-adiques, il existe une fonction semi-algébrique p-adique $h : K \to K$ tel que $|h(v)|_p = \inf_{x\in K_v} |g(x)|_p$. Alors il existe un entier $c \geq 0$, $b \in K^*$ et une série de Laurent $\sum_{i\geq m} c_i z^i$ qui converge dans un voisinage $B(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$ et vérifie $h(bz^e) = \sum_{i\geq m} c_i z^i$. Posons $v = bz^e$. Alors $h(v)$ est une série de Puiseux convergente sur un voisinage de 0. On peut donc écrire

$$|h(v)|_p \sim c|v|_p^{m/e} \quad \text{pour } |v|_p \text{ assez petit, avec } c = |c_m/b|_p.$$

Alors pour $|v|_p$ assez petit on a

$$|h(v)|_p \geq \tfrac{1}{2} c|v|_p^{m/e}.$$

Donc pour $|f(x)|_p$ assez petit on a

$$|g(x)|_p \geq \tfrac{1}{2} c|f(x)|_p^{m/e},$$

soit

$$|f(x)|_p^{m/e} \leq c'|g(x)|_p \quad \text{pour } |f(x)|_p < \delta \text{ (avec } c' = 2/c).$$

Pour $|f(x)|_p \geq \delta$ cette inégalité reste vraie puisque $g(x)$ ne s'annule pas. D'où l'inégalité

$$|f(x)|_p^{m/e} \leq c'|g(x)|_p \quad \forall x \in S.$$

On montre que ce m/e est le α_0 recherché. ∎

Passons maintenant à l'étude des exposants et des inégalités de Łojasiewicz dans le cas où S est un fermé *non nécessairement borné*. La quasi-compacité de la topologie du spectre p-adique sera un outil qui permettra d'avoir une compensation de compacité lorsque on suppose S seulement fermé.

Soit S un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de K^m. Soient f et g deux fonctions semi-algébriques continues sur S telles que $\{x \in S : g(x) = 0\} \subset \{x \in S : f(x) = 0\}$. On dira que θ est un *exposant de Łojasiewicz* de f par rapport à g sur S s'il existe une fonction semi-algébrique p-adique h telle que

$$|f(x)|_p^\theta \leq |h(x)|_p |g(x)|_p \quad \forall x \in S.$$

On note $l(f, g)$ la borne inférieure des nombres réels positifs θ vérifiant l'inégalité.

Nous allons montrer que $l(f, g)$ est toujours un nombre rationnel et que l'inégalité de Łojasiewicz est atteinte avec cette borne. Voici d'abord un résultat de [30] :

5.6. Proposition. *Soit $f : K \to K$ une fonction semi-algébrique p-adique. Pour chaque e et l entiers avec $e \geq 1$, $l \leq 0$ et $b \in K^*$, il existe $N \geq 0$, $c_1, \ldots, c_N \in K$ et $\varepsilon, \delta \in K^*$ tels que*

$$\left| f(bw^e) - \sum_{i=l}^{N} c_i w^i \right|_p < |\varepsilon w^N|_p \quad \textit{pour } 0 < |w|_p < |\delta|_p.$$

Si $\lim_{w \to 0} f(w)$ existe alors on peut prendre $l = 0$.

5.7. Corollaire. *Soit f une fonction semi-algébrique p-adique non identiquement nulle sur $\{x \in K^* : |x|_p < \varepsilon\}$. On pose*

$$\eta = \inf\{\theta \geq 0 : \exists c > 0 \textit{ tel que } |f(x)|_p \geq c|x|_p^\theta \textit{ pour } |x|_p \textit{ suffisamment petit}\}.$$

Alors on a :

(i) *η est un nombre rationnel.*

(ii) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$|f(x)|_p \sim c|x|_p^\eta \quad \textit{pour } |x|_p \textit{ suffisamment petit.}$$

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe un N tel que

$$\left| f(bw^e) - \sum_{i=l}^{N} c_i w^i \right|_p < |\varepsilon w^N|_p,$$

ou encore

$$|f(bw^e) - c_l w^l (1 + \Phi(w))|_p < |\varepsilon w^N|_p \quad \text{avec } \Phi(0) = 0.$$

On pose $x = bw^e$, ce qui donne

$$\lim_{|x|_p \to 0} \frac{|f(x)|_p}{|c_l|_p |x/b|_p^{l/e}} = 1.$$

En prenant $|x|_p$ assez petit on a

$$|f(x)|_p \geq \tfrac{1}{2} |c_l|_p |x/b|_p^{l/e}.$$

Ceci implique que $\eta \geq l/e$.

Si $|f(x)|_p \geq c|x|_p^\theta$, en divisant les deux membres par $|c_l|_p |x/b|_p^{l/e}$, on a

$$\lim_{|x|_p \to 0} \frac{|f(x)|_p}{|c_l|_p |x/b|_p^{l/e}} \leq 1.$$

Pour $|x|_p$ assez petit on a

$$c|x|_p^\theta \leq c'|x|_p^{l/e} \quad \text{avec } c \text{ et } c' \text{ non nuls.}$$

Ceci implique que $l/e \leq \theta$, d'où $l/e \leq \eta$, soit $l/e = \eta$. ∎

5.8. Proposition. *Soit X un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de K^m. Soient f et g deux fonctions semi-algébriques p-adiques continues sur X telles que $\{x \in S : g(x) = 0\} \subset \{x \in S : f(x) = 0\}$. On pose*

$$\eta = \inf\{\theta \geq 0 : |f(x)|_p^\theta / |g(x)|_p \textit{ prolongée par } 0 \textit{ lorsque } f(x) = 0 \textit{ est continue sur } X\}.$$

Alors η est un nombre rationnel.

Preuve. Pour $x_0 \in X$ et $u \in K$ posons

$$K_{x_0,u} = \{y \in X : |x_0 - y|_p \leq 1 \text{ et } |f(y)|_p = |u|_p\}$$

et définissons la fonction $v(x_0, u)$ par

$$v(x_0, u) = \begin{cases} \sup\{|g(y)|_p : y \in K_{x_0,u}\} & \text{si } K_{x_0,u} \neq \emptyset, \\ 1 & \text{si } K_{x_0,u} = \emptyset. \end{cases}$$

D'après le lemme de sélection des courbes p-adiques, il existe une fonction semi-algébrique p-adique $h(x_0, u)$ tel que $v(x_0, u) = |h(x_0, u)|_p$. On remarque que pour tout x_0, si $u \neq 0$ alors $v(x_0, u) \neq 0$.

Pour tout nombre rationnel a/b on pose

$$C_{a/b} = \{x_0 \in X : f(x_0) = 0,\ \exists c(x_0) > 0,\ |v(x_0, u)|_p \sim c(x_0)|u|_p^{a/b} \text{ pour } |u|_p \text{ suffisamment petit}\}.$$

D'après le théorème de Macintyre, $C_{a/b}$ est un ensemble semi-algébrique p-adique de K^m. Soit $\widetilde{C}_{a/b}$ le constructible de $\operatorname{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$ qui lui est associé par l'identification tilda p-adique. Soient $\alpha \in \operatorname{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$, $k(\alpha)$ le corps p-adiquement clos associé et $v_{k(\alpha)} : X_{k(\alpha)} \to k(\alpha)$ l'extension de la fonction semi-algébrique v au corps $k(\alpha)$. Par le corollaire précédent, il existe $c(\alpha) > 0$ et $a/b \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|v_{k(\alpha)}(x(\alpha), u)|_p \sim c(\alpha)|u|_p^{a/b} \quad \text{pour } |u|_p \text{ suffisamment petit.}$$

On a donc $\alpha \in \widetilde{C}_{a/b}$. Ceci montre que les $\widetilde{C}_{a/b}$ forment un recouvrement de $\{x \in X : f(x) = 0\}^{\sim}$. D'après la quasi-compacité de la topologie du spectre p-adique (cf. [11]), on déduit que $\{x \in X : f(x) = 0\}^{\sim}$ n'est recouvert que par un nombre fini de $\widetilde{C}_{a/b}$. D'où la finitude des nombres rationnels a/b. En prenant le plus grand des a/b quand x_0 varie dans l'ensemble $\{x \in X : f(x) = 0\}$ on a la formule suivante vérifiée par le a/b :

$$(*) \quad \begin{aligned} &\forall x_0 \in X,\ f(x_0) = 0,\ \exists c(x_0) > 0 \quad |v(x_0, u)|_p \geq c(x_0)|u|_p^{a/b}, \\ &\exists a_0 \in X,\ f(a_0) = 0,\ \exists c(a_0) > 0 \quad |v(a_0, u)|_p \sim c(a_0)|u|_p^{a/b} \\ &\hspace{20em} \text{pour } |u|_p \text{ suffisamment petit.} \end{aligned}$$

On va montrer que $\eta = a/b$. Alors la formule précédente entraîne que sur l'ensemble $L = \{y \in X : |y - x_0|_p < 1,\ f(y) \neq 0\}$ on a

$$c(x_0)|f(y)|_p^{a/b} \leq |g(y)|_p \quad \text{pour } |f(y)|_p \text{ assez petit.}$$

Pour tout nombre réel strictement positif ε, $|f(x)|_p^{\varepsilon + a/b}/|g(x)|_p$ prolongée par 0 lorsque $f(x) = 0$ est continue sur X, d'où $\eta \leq a/b$. Si $|f(x)|_p^{\theta}/|g(x)|_p$ prolongée par 0 lorsque $f(x) = 0$ est continue sur X alors elle est bornée au voisinage de a_0 de la formule précédente ; donc sur ce voisinage il existe $c > 0$ tel que $|g(x)|_p \geq c|f(x)|_p^{\theta}$. Ceci entraîne que $a/b \leq \theta$, d'où $a/b \leq \eta$ et par suite $\eta = a/b$. ∎

On a le résultat suivant :

5.9. Résultat A. *Soit X un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de K^m. On note $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des fonctions semi-algébriques p-adiques continues sur X. Soient f et g dans $\mathcal{S}(X)$ telles que $\{x \in S : g(x) = 0\} \subset \{x \in S : f(x) = 0\}$. On pose*

$$l(f, g) = \inf\{\theta \geq 0 : \exists h \in \mathcal{S}(X) \text{ tel que } |f(x)|_p^{\theta} \leq |h(x)|_p |g(x)|_p\ \forall x \in X\}.$$

Alors on a :

(i) *$l(f, g) = a/b$ est un nombre rationnel.*

(ii) *Il existe une fonction semi-algébrique p-adique h continue sur X telle que*

$$|f(x)|_p^{a/b} \leq |h(x)|_p |g(x)|_p \quad \forall x \in X.$$

Preuve. On pose

$$a/b = \inf\{\theta \geq 0 : |f(x)|_p^{\theta}/|g(x)|_p \text{ prolongée par 0 lorsque } f(x) = 0 \text{ est continue sur } X\}.$$

On va montrer que $l(f,g) = a/b$. Si $|f(x)|_p^\theta \leq |h(x)|_p\,|g(x)|_p$ sur X alors pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, $|f(x)|_p^{\theta+\varepsilon}/|g(x)|_p$ prolongée par 0 lorsque $f(x) = 0$ est continue sur X. Donc $a/b \leq \theta + \varepsilon$. Ainsi $a/b \leq l(f,g)$.

Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de montrer le point (ii). On pose

$$k(x) = \begin{cases} |f(x)|_p^{a/b}/|g(x)|_p & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction k est localement bornée sur X. Donc d'après la proposition 5.2, il existe $c > 0$ et un entier N tel que

$$|k(x)|_p \leq c(1 + |x|_p)^N \quad \forall x \in X.$$

Par conséquent,

$$|f(x)|_p^{a/b} \leq c(1 + |x|_p)^N |g(x)|_p \quad \forall x \in X. \ \blacksquare$$

Comme conséquence de ce résultat on a :

5.10. Corollaire. *Soit X un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de K^m. Soit g une fonction semi-algébrique p-adique continue sur X et $V = \{x \in X : g(x) = 0\}$. On pose*

$$l(g) = \inf\{\theta \geq 0 : \exists h \in \mathcal{S}(X) \text{ tel que } d(x,V)^\theta \leq |h(x)|_p |g(x)|_p\ \forall x \in X\}.$$

Alors on a :

(i) *$l(g) = a/b$ est un nombre rationnel.*

(ii) *Il existe une fonction semi-algébrique p-adique h continue sur X telle que*

$$d(x,V)^{a/b} \leq |h(x)|_p |g(x)|_p \quad \forall x \in X.$$

Preuve. On a $d(x,V) = \inf\{|x-y|_p : y \in V\}$. Alors il existe une fonction semi-algébrique p-adique f telle que $|f(x)|_p = d(x,V)$; puis on applique la proposition précédente. $\blacksquare$

5.11. Corollaire. *Soient A et B deux ensembles semi-algébriques p-adiques fermés dans X. On pose*

$$l(A,B) = \inf\{\theta \geq 0 : \exists h \in \mathcal{S}(X) \text{ tel que } d(x, A \cap B)^\theta \leq |h(x)|_p d(x,B)\ \forall x \in A\}.$$

Alors on a :

(i) *$l(A,B) = a/b$ est un nombre rationnel.*

(ii) *Il existe une fonction semi-algébrique p-adique h continue sur A telle que*

$$d(x, A \cap B)^{a/b} \leq |h(x)|_p d(x,B) \quad \forall x \in A.$$

Preuve. D'après le corollaire 3.3, il existe une fonction semi-algébrique p-adique f telle que $|f(x)|_p = d(x,B)$ et il existe une fonction semi-algébrique

p-adique g telle que $|g(x)|_p = d(x, A \cap B)$. On a

$$g(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \qquad \forall x \in A,$$

puis on applique la proposition précédente. ∎

6. Inégalité de Łojasiewicz p-adique avec paramètres. On peut considérer un ensemble semi-algébrique p-adique $X \subset K^n \times K^m$ comme une famille de sous-ensembles de K^n indexée par K^m. La *fibre* de la famille X au point $t \in K^m$ est

$$X_t = \{x \in K^n : (x,t) \in X\}.$$

La *restriction* de la famille X au sous-ensemble semi-algébrique S de K^m est $X|S = X \cap (K^n \times S)$.

Soient $X \subset K^n \times K^m$ et $Y \subset K^n \times K^m$ deux familles d'ensembles semi-algébriques p-adiques. Une *famille semi-algébrique p-adique* de fonctions de X dans Y est une fonction semi-algébrique p-adique $f : X \to Y$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & K^n \times K^m \end{tikzcd}$$

Si $t \in K^m$ la *fibre* de f en t est la fonction semi-algébrique p-adique $f_t : X_t \to Y_t$ définie par : $f_t(x) = y \Leftrightarrow f(x,t) = (y,t)$.

Nous allons donner un analogue p-adique des résultats du chapitre 7 de [9] sur les familles semi-algébriques d'ensembles ou de fonctions. Nous avons tous les outils nécessaires pour le faire, à savoir le spectre p-adique, l'élimination des quantificateurs (le théorème de Macintyre) et le théorème de finitude p-adique.

L'idée est de montrer que sur une fibre une propriété reste valable sur un sous-ensemble semi-algébrique $S \subset K^m$ tel que $\alpha \in \widetilde{S}$ (où α est un point de $\mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$*).*

6.1. Proposition. *Soit $X \subset K^n \times K^m$ une famille semi-algébrique d'ensembles défini par une formule $\phi(x,t)$ du premier ordre dans le langage des corps p-adiques à variables libres $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $t = (t_1, \ldots, t_m)$. Soit $\alpha \in$* $\mathrm{Spec}_p(K[T_1, \ldots, T_m])$.

(i) *L'ensemble semi-algébrique p-adique $X_\alpha = \{x \in k(\alpha)^m : \phi(x, t(\alpha))\}$ ne dépend que de X et non pas du choix de ϕ. On appelle X_α la fibre de la famille X en α.*

(ii) *Soit $Y \subset K^n \times K^m$ une autre famille semi-algébrique d'ensembles. Alors $X_\alpha = Y_\alpha$ si et seulement s'il existe un ensemble semi-algébrique S tel que $\alpha \in \widetilde{S}$ et $X|S = Y|S$.*

Preuve. Supposons que Y est définie par une formule $\psi(x,t)$ et soit $Y_\alpha = \{x \in k(\alpha) : \psi(x, t(\alpha))\}$. On a alors : $X_\alpha = Y_\alpha \Leftrightarrow k(\alpha)$ satisfait

$$\forall x \in k(\alpha)^n \quad \phi(x, t(\alpha)) \;\Leftrightarrow\; \psi(x, t(\alpha)).$$

En posant $S = \{t \in K^m : \forall x \in k(\alpha)\ \phi(x,t) \Leftrightarrow \psi(x,t)\} = \{t \in K^m : X_t = Y_t\}$, on obtient donc : $X_\alpha = Y_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in \widetilde{S}$, ce qui donne (ii) et aussi (i) si $X = Y$. ■

Soient $X \subset K^n \times K^m$ et $Y \subset K^{n'} \times K^m$ deux familles semi-algébriques d'ensembles. Soient $\alpha \in \mathrm{Spec}_p(K[X_1, \ldots, X_m])$ et $f : X \to Y$ une famille semi-algébrique de fonctions. Le graphe de f est l'ensemble

$$\Gamma f = \{(x,y,t) \in K^n \times K^{n'} \times K^m : (x,t) \in X \text{ et } f(x,t) = (y,t)\}.$$

On note $(\Gamma f)_\alpha$ la fibre de Γf en α.

6.2. Proposition. (i) *L'ensemble $(\Gamma f)_\alpha \subset k(\alpha)^n \times k(\alpha)^{n'}$ est le graphe d'une fonction semi-algébrique $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ appelée la fibre de la famille f en α.*

(ii) *Soit $\phi : X_\alpha \to Y_\alpha$ une fonction semi-algébrique p-adique. Alors il existe un ensemble semi-algébrique $S \subset K^m$ tel que $\alpha \in \widetilde{S}$ et une famille semi-algébrique de fonctions $f : X|S \to Y|S$ telle que $f_\alpha = \phi$.*

Preuve. (i) Soit $\phi(x,y,t)$ une formule du premier ordre du langage des corps p-adiques à paramètres dans K qui décrit Γf et soit $\psi(y,t)$ une formule qui décrit Y. D'après la proposition précédente, le corps $k(\alpha)$ satisfait

$$\forall x \in k(\alpha)^n\ \forall y \in k(\alpha)^{n'}\ \forall y' \in k(\alpha)^m \qquad (\phi(x,y,t(\alpha)) \text{ et } \phi(x,y',t(\alpha)) \Rightarrow y = y')$$

et

$$\forall x \in k(\alpha)^n\ \forall y \in k(\alpha)^{n'} \quad (\phi(x,y,t(\alpha)) \Rightarrow \psi(y,t(\alpha))).$$

Donc l'ensemble défini par $(\Gamma f)_\alpha = \{(x,y) \in k(\alpha)^n \times k(\alpha)^m : \phi(x,y,t(\alpha))\}$ est bien le graphe d'une fonction semi-algébrique de $X_\alpha = \{x \in k(\alpha)^n : \exists y \in k(\alpha)^m\ \phi(x,y,t(\alpha))\}$ dans l'ensemble $Y_\alpha = \{y \in k(\alpha)^m : \psi(y,t(\alpha))\}$.

(ii) Soit $G \subset X_\alpha \times Y_\alpha$ le graphe de la fonction ϕ et soit $\Gamma \subset K^n \times K^{n'} \times K^m$ un ensemble semi-algébrique tel que $\Gamma_\alpha = G$. Posons

$$\begin{aligned} S = \{t \in K^m : \forall x \in K^n\ & (\exists y \in K^m\ (x,y,t) \in \Gamma \Leftrightarrow (x,t) \in X) \\ & \text{et } \forall y, y' \in K^m\ ((x,y,t),(x,y',t) \in \Gamma \Rightarrow y = y') \\ & \text{et } \forall y \in K^m\ ((x,y,t) \in \Gamma \Rightarrow (y,t) \in Y))\}. \end{aligned}$$

D'après la définition de l'identification tilda p-adique, on a $\alpha \in \widetilde{S}$. Soit $f : X|S \to Y|S$ la famille de fonctions définie par $f(x,t) = (y,t) \Leftrightarrow t \in S$ et $(x,y,t) \in \Gamma$. Ainsi on a $f_\alpha = \phi$. ■

6.3. Remarque. (a) Si deux familles semi-algébriques de fonctions $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ vérifient $f_\alpha = g_\alpha$ alors il existe un ensemble semi-algébrique p-adique $S \subset K^m$ tel que $\alpha \in \widetilde{S}$ et $f|(X|S) = g|(X|S)$.

(b) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux familles semi-algébriques de fonctions indexées par K^m alors $(g \circ f)_\alpha = g_\alpha \circ f_\alpha$.

6.4. Résultat B. *Soient A un ensemble semi-algébrique p-adique fermé de $K^n \times K^m$, et $f(x,t)$ et $g(x,t)$ deux fonctions semi-algébriques p-adiques continues par rapport à x sur A telles que $\{(x,t) \in A : g(x,t) = 0\} \subset \{(x,t) \in A : f(x,t) = 0\}$. Alors il existe une partition finie en semi-algébriques p-adiques $K^m = \bigcup S_i$, des fonctions semi-algébriques continues $h_i : A|S \to K$ et des nombres rationnels a_i/b_i tels que :*

(i) $|f(x,t)|_p^{a_i/b_i} \leq |h_i(x,t)|_p |g(x,t)|_p$ *sur* $A|S_i$,

(ii) a_i/b_i *est l'exposant de Łojasiewicz* $l(f_t, g_t)$ *pour tout* $t \in S_i$.

Preuve. On note $f_t(x) = f(x,t)$ et $g_t(x) = g(x,t)$ les fibres en t de f et g. Les fonctions f_t et g_t sont semi-algébriques sur A_t. On note $a/b = \eta_t$ l'exposant de Łojasiewicz de f_t par rapport à g_t sur A_t. Il vérifie la formule suivante (voir la preuve de la proposition 5.8) :

$$\forall x_0 \in \mathrm{zeros}(f_t)\ \exists c(x_0) > 0 \qquad |v_t(x_0,u)|_p \geq c(x_0)|u|_p^{a/b}, \qquad hfill$$
$$\exists a_0 \in \mathrm{zeros}(f_t)\ \exists c(a_0) > 0 \qquad |v_t(a_0,u)|_p \sim c(a_0)|u|_p^{a/b}$$
$$\text{pour } |u|_p \text{ suffisamment petit}$$

avec $\mathrm{zeros}(f_t) = \{x_0 : f(x_0,t) = 0\}$ et v_t est la fonction v de la preuve de la proposition 5.8 en remplaçant f par f_t et g par g_t. On va montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'exposants rationnels a/b qui vérifient cette formule quand t varie dans K^m.

Pour un tel a/b on pose

$$D_{a/b} = \{t \in K^m : \forall x_0 \in \mathrm{zeros}(f_t)\ \exists c(x_0) > 0\ |v_t(x_0,u)|_p \geq c(x_0)|u|_p^{a/b} \text{ et}$$
$$\exists a_0 \in \mathrm{zeros}(f_t)\ \exists c(a_0) > 0\ |v_t(a_0,u)|_p \sim c(a_0)|u|_p^{a/b}$$
$$\text{pour } |u|_p \text{ suffisamment petit}\}.$$

L'ensemble $D_{a/b}$ est semi-algébrique p-adique de K^m.

Soit $\alpha \in \mathrm{Spec}_p(K[X_1,\ldots,X_m])$; f_α et g_α étant les fibres de f et g en α, elles sont donc des fonctions semi-algébriques p-adiques sur $k(\alpha)^n$ et vérifient la formule $(*)$ de la preuve de la proposition 5.8 avec un certain nombre rationnel a/b. Ceci montre que $\alpha \in \widetilde{D}_{a/b}$. De cela on déduit que les $\widetilde{D}_{a/b}$ forment un recouvrement de $\widetilde{K^m} = \mathrm{Spec}_p(K[X_1,\ldots,X_m])$ et d'après la quasi-compacité de la topologie du spectre p-adique on peut extraire un nombre fini de $\widetilde{D}_{a/b}$ qui recouvrent $\mathrm{Spec}_p(K[X_1,\ldots,X_m])$, d'où un nombre fini de $D_{a/b}$ qui recouvrent K^m. Puisque a/b est l'exposant de Łojasiewicz de

f_α par rapport à g_α sur X_α, il existe une fonction semi-algébrique p-adique continue $H : X_\alpha \to k(\alpha)$ telle que

$$|f_\alpha(x)|_p^{a/b} \le |H(x)|_p |g_\alpha(x)|_p \quad \text{sur } X_\alpha.$$

La fonction H est la fibre en α d'une fonction semi-algébrique p-adique continue $h : X|S^\alpha \to K$ avec $\alpha \in \widetilde{S^\alpha}$ et on peut supposer $\widetilde{S^\alpha} \subset \widetilde{D}_{a/b}$ et que sur S^α on a

$$|f(x,t)|_p^{a/b} \le |h(x,t)|_p\, |g(x,t)|_p.$$

Les $\widetilde{S^\alpha}$ recouvrent $\widetilde{K^m}$ et donc par compacité du spectre p-adique, on peut extraire un recouvrement fini, $K^m = \bigcup_{i\in I} S_i$ avec I fini. ■

6.5. Corollaire. *Soient A et B deux ensembles semi-algébriques p-adiques fermés de $K^n \times K^m$. Alors il existe une partition finie en semi-algébriques p-adiques $K^m = \bigcup S_i$ et des fonctions $h_i : A|S_i \to K^m$ et des a_i/b_i tels que :*

(i) *$d(x, A_t \cap B_t)^{a_i/b_i} \le |h_i(x,t)|_p d(x, B_t)$ pour tout $x \in A_t$ et tout $t \in S_i$,*

(ii) *a_i/b_i est l'exposant de Łojasiewicz de $d(x, B_t)$ par rapport à $d(x, A_t \cap B_t)$ pour tout t variant dans S_i.*

Preuve. D'après le lemme de sélection des courbes p-adiques, il existe deux fonctions semi-algébriques p-adiques f et g telles que $|f(x,t)|_p = d(x, A_t \cap B_t)$ et $|g(x,t)|_p = d(x, B_t)$; puis on applique la proposition précédente. ■

Les auteurs remercient le Professeur M. Coste de l'Université de Rennes 1 et le Professeur A. El Khadiri de l'Université de Kénitra pour leurs remarques sur les résultats de ce travail.

Références

[1] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Presse Univ. de France, 1975.

[2] J. Ax et S. Kochen, *Diophantine problems over local fields I*, Amer. J. Math. 87 (1965), 605–630.

[3] —, —, *Diophantine problems over local fields II*, ibid., 439–456.

[4] —, —, *Diophantine problems over local fields III*, Ann. of Math. 83 (1966), 437–456.

[5] L. Bélair, *Le théorème de Macintyre*, Ann. Sci. Math. Québec 14 (1990), 109–120.

[6] —, *Substructures and uniform elimination for p-adic fields*, Ann. Pure Appl. Logic 39 (1988), 1–17.

[7] —, *Spectres p-adiques en rang fini*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 305 (1987), 1–4.

[8] —, *The universal part of the theory of p-adically closed fields (pCF)*, Abstracts Amer. Math. Soc. 5 (1984), 198.

[9] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Springer, Berlin, 1987.

[10] D. Bollaerts, *On the Poincaré series associated to the p-adic points on a curve*, Acta Arith. 51 (1988), 9–30.

[11] L. Bröcker and J.-H. Schinke, *On the L-adic spectrum*, Schrift. Math. Inst. Univ. Münster 40 (1986).

[12] M. Coste et M.-F. Roy, *La topologie du spectre réel*, in: Ordered Fields and Real Algebraic Geometry, Contemp. Math. 8, Amer. Math. Soc., 1982, 27–59.

[13] J. Denef, *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety*, Invent. Math. 77 (1987), 1–23.

[14] —, *On the evaluation of certain p-adic integrals*, in: Progr. Math. 59, Birkhäuser, 1985, 25–47.

[15] —, *p-adic semi-algebraic sets and cell decomposition*, J. Reine Angew. Math. 369 (1986), 154–166.

[16] J. Denef and L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. of Math. 128 (1988), 79–138.

[17] A. Fekak, *Interprétation algébrique de l'exposant de Łojasiewicz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 310 (1990), 193–196.

[18] —, *Exposants de Łojasiewicz pour les fonctions semi-algébriques*, Ann. Polon. Math. 56 (1992), 123–131.

[19] —, *Interprétation algébrique de l'exposant de Łojasiewicz dans le cas p-adique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 318 (1994), 739–742.

[20] M. Jarden and P. Roquette, *The Nullstellensatz over p-adically closed fields*, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 425–460.

[21] N. Koblitz, *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta Functions*, Grad. Texts in Math. 58, Springer, Berlin, 1977.

[22] S. Kochen, *Integer valued rational functions over p-adic fields*, in: Proc. Sympos. Pure Math. 12, Amer. Math. Soc., 1970, 57–73.

[23] A. Macintyre, *On definable subsets of p-adic fields*, J. Symbolic Logic 41 (1976), 605–610.

[24] A. Macintyre, K. McKenna and L. van den Dries, *Elimination of quantifiers in algebraic structures*, Adv. Math. 47 (1983), 74–84.

[25] J. Oesterlé, *Réduction modulo* p^n *de sous-ensembles analytiques fermés de* $\mathbb{Z}_p^N$, Invent. Math. 66 (1982), 325–341.

[26] A. Prestel and P. Roquette, *Formally p-Adic Fields*, Lecture Notes in Math. 1050, Springer, Berlin, 1984.

[27] E. Robinson, *Affine schemes and p-adic geometry*, thèse de doctorat, Cambridge Univ., 1983.

[28] —, *The p-adic spectrum*, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986), 281–296.

[29] —, *The geometric theory of p-adic fields*, J. Algebra 110 (1987), 158–172.

[30] P. Scrowcroft et L. van den Dries, *On the structure of semialgebraic sets over p-adic fields*, J. Symbolic Logic 53 (1988), 1138–1164.

[31] R. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton Univ. Press, Princeton, and Berlin, Springer, 1978.

[32] V. Weispfenning, *Quantifier elimination and decision procedures for valued fields*, in: Lecture Notes in Math. 1103, Springer, Berlin, 1984, 419–472.

École Royale Navale
Bd. Sour Jdid
Casablanca (01), Maroc
E-mail: fekak@caramail.com

Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
B.P. 133, Kénitra, Maroc
E-mail: ahmedsrhir@hotmail.com

Reçu par la Rédaction le 15.1.2001
Révisé le 1.9.2001 (1237)