

*SOLUTIONS GLOBALES DU SYSTÈME INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIEL  
NON LINÉAIRE DE LIOUVILLE–BOLTZMANN–POISSON  
ET L'ÉQUATION SPECTRALE*

PAR

M'HAMED KESRI (Alger)

**Abstract.** We prove some properties of solutions for the canonical equation of star clusters obtained using the same ideas as in Talpaert's works. Using these properties, we deduce the main result of the paper: in the case of spherical symmetry, if a stationary solution exists, then the total mass of the cluster is infinite.

**1. Introduction.** Les amas stellaires sont des regroupements d'étoiles dont les membres sont attirés gravitationnellement, et présentent des conditions de formation et d'évolution relativement semblables. Ils se classent en deux grandes catégories : amas ouverts et amas globulaires ; les amas globulaires qui font l'objet de notre étude sont pour la plupart sphériques et très peuplés. L'évolution d'un amas comporte deux phases distinctes, une phase de mélange dynamique et une phase de relaxation.

En équilibre dynamique, le problème physique s'exprime par le système d'équations intégré-différentielles

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0,$$

$$(II) \quad \Delta V = 4\pi G \int f d\vec{v},$$

où (I) (resp. (II)) est l'équation de Liouville–Boltzmann (resp. l'équation de Poisson). Les inconnues du système (I)–(II) sont :  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  qui représente la fonction de distribution des étoiles dans l'amas et  $V = V(\vec{r}, t)$ , le potentiel gravitationnel ;  $t$  est le temps,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\vec{v}$  la vitesse de l'étoile,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , et  $\vec{r}$  sa position,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ .

D'après les études théoriques de Lyndell-Bell [10] et les résultats numériques de Hénon [7], le mélange dynamique conduit toujours l'amas à l'état stationnaire, c'est-à-dire, à un état tel que la fonction de distribution ne dépend pas explicitement du temps :

---

2000 *Mathematics Subject Classification*: 45K05, 76P05, 70H33, 42B10, 85A05.

*Key words and phrases*: integro-differential system, Liouville–Boltzmann equation, Fourier transform, cluster mass model.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

L'équation de Liouville–Boltzmann s'écrit donc à l'état stationnaire et homogène sous la forme

$$\vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla_{\vec{r}} V \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0.$$

L'étude mathématique de l'équation de Liouville–Boltzmann homogène couplée avec l'équation de Poisson, (I)–(II), a été initiée par Coutrez [4]. Il a obtenu l'équation spectrale en coordonnées générales. Ensuite, dans [1] Arsen'ev a démontré l'existence de solutions faibles, en dimension quelconque. Dans l'article [16] Ukai et Okabe ont établi l'existence et l'unicité de la solution classique. Ces études ont été poursuivies par Bardos et Degond [2] qui ont démontré l'existence et l'unicité de la solution régulière, à condition que les données initiales soient assez petites. Dans le même ordre d'idées, nous citons les travaux de Horst [8] où il a démontré également l'existence globale de solutions pour le système de Vlasov–Maxwell relativiste. Dans l'article [6], R. J. DiPerna et P.-L. Lions ont étudié le système de Vlasov–Maxwell dans ses formes classique et relativiste. Ils ont démontré la stabilité, ainsi que l'existence faible de la solution globale avec donnée initiale quelconque. Le cas d'équation non homogène a été étudié par P. Degond et S. Mas-Gallic [5]. Ils ont démontré l'existence de la solution pour l'équation de Fokker–Planck. Nous pouvons citer également les travaux liés à l'existence et l'unicité de solution régulière dûs à E. Horst et R. Hunze [9], S. Wollman [18], J. Batt et H. Berestycki [3].

Cet article est structuré comme suit :

1. Introduction.
2. Équation spectrale : en introduisant des transformations intégrales de type Fourier adaptées au problème, on réduit la dimension d'espace dans lequel les équations sont données. Ceci permet d'obtenir l'équation spectrale de laquelle on peut déduire les moments centrés [15].
3. Solutions globales : On démontre certaines propriétés de l'équation canonique des amas stellaires à l'état stationnaire. On obtient cette équation en suivant les idées de [12]–[14]. En utilisant ses propriétés, on déduit le résultat principal de cet article : dans le cas de la symétrie sphérique, la masse totale de l'amas à l'état stationnaire et homogène est infinie.

## 2. Équation spectrale

**2.1. Changement de coordonnées.** Soit  $f$  une fonction de distribution,  $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Sa densité  $\varrho(\vec{r}, t)$  est donnée par

$$\varrho(\vec{r}, t) = \int f d\vec{v}.$$

On suppose que  $f$  est intégrable sur l'espace des vitesses et on désigne par  $\phi(\vec{r}, \vec{w}, t)$  sa transformée de Fourier usuelle sur cet espace. Donc on a

$$\phi(\vec{r}, \vec{w}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}, \vec{v}, t) \exp(i\vec{w}\vec{v}) d\vec{v}.$$

On désigne par  $r$  la distance radiale d'un point massique représentatif d'une étoile; sa vitesse se décompose en deux vitesses : radiale et transversale, notées respectivement par  $\vec{v}_r$  et  $\vec{v}_T$ . On note leurs modules respectivement  $v_r$  et  $v_T$ . On a

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_T \quad \text{implique} \quad \vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_T.$$

À partir des expressions de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , on déduit que  $\vec{v}_r$  et  $\vec{w}_r$  sont parallèles (ils sont sur le même axe radial). Mais les vecteurs  $\vec{v}_T$  et  $\vec{w}_T$  appartiennent au même plan perpendiculaire à l'axe radial de  $\vec{v}_r$  et  $\vec{w}_r$ . On note par  $\alpha$  l'angle formé par ces deux vecteurs.

Le problème étudié étant un problème à symétrie sphérique, sur l'espace des positions ainsi que sur le plan des vitesses transversales, la fonction de distribution  $f$  ne dépend que de la distance radiale  $r$ , la vitesse transversale  $v_r$ , la vitesse radiale  $v_T$  et du temps  $t$ . De même, le potentiel  $V$  ne dépend que de  $r$  et de  $t$ . D'où on exprime la fonction  $\phi$  dans les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} \phi(r, w_r, w_T, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \{f(r, v_r, v_T, t)v_T \\ &\quad \times \exp\{i(w_r v_r + w_T v_T \cos \alpha)\} d\alpha dv_r dv_T. \end{aligned}$$

Inversement, on obtient la fonction de distribution des étoiles  $f$  sous la forme

$$\begin{aligned} f(r, v_r, v_T, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \{\phi(r, w_r, w_T, t)w_T \\ &\quad \times \exp\{i(w_r v_r + w_T v_T \cos \alpha)\} d\alpha dw_r dw_T. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1.1. Avec les notations précédentes, pour tous  $w_T, v_T$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \exp\{i w_T v_T \cos \alpha\} d\alpha = 2\pi J_0(w_T v_T)$$

avec  $J_0$  la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Démonstration. On simplifie l'intégrale, après deux changements de variables consécutifs, ce qui donne le résultat.

À l'aide de cette proposition, les expressions de  $\phi$  et de  $f$  dans les nouvelles coordonnées décrites précédemment deviennent

$$\phi(r, w_r, w_T, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \iint f(r, v_r, v_T, t)v_T \exp\{i w_r v_r\} J_0(w_T v_T) dv_r dv_T,$$

$$f(r, v_r, v_T, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \iint \phi(r, w_r, w_T, t) w_T \exp\{-i w_r v_r\} J_0(-w_T v_T) dw_r dw_T.$$

**2.2. Position du problème.** On considère le système d'équations composé d'une équation aux dérivées partielles (2.2.1) non linéaire (l'équation de Liouville–Boltzmann) du premier ordre, et d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (2.2.2) (l'équation de Poisson) suivant :

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \nabla_{\vec{r}} f - \nabla_{\vec{v}} f \nabla_{\vec{r}} V = 0,$$

$$(2.2.2) \quad \Delta_{\vec{r}} V = 4\pi G \int f d\vec{v}.$$

Les inconnues du système sont la fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  et le potentiel  $V(\vec{r}, t)$  correspondant.

La méthode de résolution utilisée dans ce chapitre consiste à appliquer la transformation de Fourier qu'on note  $\mathcal{F}_{\vec{v}}$  au système (2.2.1)–(2.2.2). La solution  $f$  doit donc vérifier que  $f$ ,  $\vec{v} \nabla_{\vec{r}} f$  et  $\nabla_{\vec{v}} f \nabla_{\vec{r}} V$  soient intégrables sur l'espace des vitesses  $\mathbb{R}^3$ .

Notons  $L^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $C^0(\mathbb{R}^3)$  et  $C^1(\mathbb{R}^3)$  les espaces des fonctions intégrables, resp. continues et bornés, resp. continues et nulles à l'infini, resp. de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Posons

$$E = \left\{ f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3) : v_i f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3), \frac{\partial f}{\partial v_i} \in L^1(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3 \right\}.$$

D'après les propriétés de la transformation de Fourier,  $f \in E$  implique  $\mathcal{F}_{\vec{v}}(f) = \phi$  avec  $\phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^3)$ , de plus  $\phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^3)$  et  $w_i \phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$  pour  $i = 1, 2, 3$ . On pose

$$F = \{ \phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3) : w_i \phi(\cdot, \vec{w}, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3 \}.$$

Par conséquent,  $\mathcal{F}_{\vec{v}}$  agit de l'espace  $E$  dans  $F$ .

Dans le cas d'une donnée initiale assez petite  $f_0$  du système (2.2.1)–(2.2.2), d'après [2] on a l'existence d'une solution  $f$  qui vérifie  $f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3)$  ainsi que toutes ses dérivées partielles premières. Dans ce cas, on peut prendre

$$E = \{ f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3) : v_i f(\cdot, \vec{v}, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3), i = 1, 2, 3 \}.$$

L'équation de Liouville–Boltzmann dans le cas de la symétrie sphérique a été obtenue par Ogorodnikov [11], et s'écrit sous la forme

$$(2.2.3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0.$$

Puisque  $\varrho(\vec{r}, t) = (2\pi)^{3/2} \phi(\vec{r}, 0, 0, t)$ , on peut aussi avoir l'équation de Poisson sous la forme

$$(2.2.4) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right\} = 2(2\pi)^{5/2} G \iint f(\vec{r}, v_r, v_T, t) v_T dv_r dv_T.$$

**2.3. Transformation intégrale.** Pour l'étude de notre problème on utilisera une transformation intégrale de type Fourier notée  $\mathcal{F}_v$ , définie de la même manière que dans 2.2. Outre la linéarité, cette transformation a les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS 2.3.1. *La transformation  $\mathcal{F}_v$  vérifie les égalités*

$$(a) \mathcal{F}_v \left\{ v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = 2i \frac{\partial}{\partial w_T} \mathcal{F}_v(f) + i w_T \frac{\partial^2}{\partial w_r \partial w_T} \mathcal{F}_v(f),$$

$$(b) \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2}{\partial w_T^2} \mathcal{F}_v(f) + \frac{i}{r} \frac{w_r}{w_T} \frac{\partial}{\partial w_T} \mathcal{F}_v(f),$$

$$(c) \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = -i w_r \frac{\partial V}{\partial r} \mathcal{F}_v(f).$$

*Démonstration.* Par définition de  $\mathcal{F}_v$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v \left\{ v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) \\ = -i(2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w_T} \int \exp\{i w_r v_r\} dv_r \int v_T^2 J_0 \frac{\partial f}{\partial v_r} dv_T. \end{aligned}$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, et en supposant que  $v_T^2 f$  tend vers 0 quand  $v_T$  tend vers l'infini, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v \left\{ v_r v_T \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, w_T, t) \\ = -i(2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w_T} \iint v_T J_0 f \exp(i w_r v_r) dv_r dv_T \\ = -i(2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w_T} \iint w_T v_T^2 f \exp(i w_r v_r) J'_0(w_T v_T) dv_r dv_T. \end{aligned}$$

On en déduit (a).

En intégrant par parties, et sachant que  $f$  tend vers 0 quand  $v_r$  tend vers l'infini, on a

$$\iint v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp(i w_r v_r) v_T dv_r dv_T = - \iint v_T^3 f J_0 \exp(i w_r v_r) i w_r dv_r dv_T.$$

En utilisant la formule de Bessel d'ordre un (voir [17]), on obtient

$$w_T v_T J'_1(w_T v_T) + J_1(w_T v_T) = w_T v_T J_0(w_T v_T).$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp(i w_r v_r) v_T dv_r dv_T \\ = i w_r \int \int_{v_r v_T} v_T^3 f \left\{ J'_1 + \frac{1}{w_T v_T} J_1 \right\} \exp(i w_r v_r) dv_r dv_T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= iw_r \iint f \frac{v_T^2}{w_T} J_1(w_T v_T) \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T \\
&\quad - iw_r \iint v_T^2 f J_1'(w_T v_T) \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T.
\end{aligned}$$

D'après la deuxième formule d'ordre un, on a  $J_0'(w_T v_T) = -J_1(w_T v_T)$ , d'où

$$\begin{aligned}
&\iint v_T^2 \frac{\partial f}{\partial v_r} J_0 \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T \\
&= iw_r \iint f \frac{v_T^2}{w_T} J_0'(w_T v_T) \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T \\
&\quad + w_r \iint v_T^2 f J_1''(w_T v_T) \exp(iw_r v_r) v_T dv_r dv_T,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété (b).

La propriété (c) s'obtient de manière analogue moyennant une intégration par parties.

PROPRIÉTÉ 2.3.2. *Pour  $w_T = 0$ , on a*

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = 2i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2}{\partial w_T^2} \mathcal{F}_v(f),$$

de plus le membre de gauche est continue en  $w_T = 0$ .

*Démonstration.* En intégrant par parties, et sachant que  $f$  tend vers 0 quand  $v_r$  tend vers l'infini, on a

$$\mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} (r, w_r, 0, t) = -\frac{2}{r} (2\pi)^{-1/2} iw_r \int \int_{v_r v_T} v_T^3 f \exp(iw_r v_r) dv_r dv_T,$$

d'où l'on déduit la première partie du résultat.

On note que  $J_1(w_T v_T)/w_T$  tend vers  $v_T/2$  quand  $w_T$  tend vers 0, et d'après la démonstration de la propriété 2.3.1(b) on déduit que

$$\frac{i}{r} \frac{w_r}{w_T} \frac{\partial}{\partial w_T} \mathcal{F}_v(f) \rightarrow i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2}{\partial w_T^2} \mathcal{F}_v(f) \quad \text{quand } w_T \rightarrow 0,$$

ce qui montre la continuité.

THÉORÈME 2.3.1. *Dans le cas du problème à symétrie sphérique l'équation de Liouville–Boltzmann (2.2.1) s'écrit sous la forme*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial w_r} + i \frac{\partial V}{\partial r} w_r \phi \\
&\quad + i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_T^2} + \frac{i}{r} \frac{w_r}{w_T} \frac{\partial \phi}{\partial w_T} - \frac{i}{r} w_T \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_r \partial w_T} - \frac{2i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial w_r} = 0,
\end{aligned}$$

appelée équation spectrale en coordonnées sphériques; la fonction  $\phi$  est dite fonction caractéristique.

*Démonstration.* Par application de la transformation linéaire  $\mathcal{F}_v$  l'équation initiale (2.2.3) devient

$$(2.3.1) \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + \mathcal{F}_v \left\{ v_r \frac{\partial f}{\partial r} \right\} - \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} \\ + \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} - \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} \right\} = 0.$$

On a

$$(2.3.2) \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_v \{f\} = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

et par le calcul, on trouve

$$(2.3.3) \quad \mathcal{F}_v \left\{ v_r \frac{\partial f}{\partial r} \right\} = -i \frac{\partial^2}{\partial r \partial w_r} \mathcal{F}_v \{f\} = -i \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial w_r}.$$

En vertu des propriétés 2.3.1 de  $\mathcal{F}_v$ , les trois derniers termes de l'égalité (2.3.1) s'expriment comme suit :

$$(2.3.4) \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v} \right\} = -i w_r \frac{\partial V}{\partial r} \phi,$$

$$(2.3.5) \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} \right\} = i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_T^2} + \frac{i}{r} \frac{w_r}{w_T} \frac{\partial \phi}{\partial w_T},$$

$$(2.3.6) \quad \mathcal{F}_v \left\{ \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} \right\} = \frac{2i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial w_r} + \frac{i}{r} w_T \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_r \partial w_T}.$$

Des égalités (2.3.2)–(2.3.6) on déduit que l'équation de Liouville–Boltzmann, après la transformation par  $\mathcal{F}_v$ , s'écrit sous la forme donnée.

Dans le cas où  $w_T = 0$ , en vertu de la propriété 2.3.2, l'équation (2.2.1) s'écrit après transformation par  $\mathcal{F}_v$  sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial w_r} + i \frac{\partial V}{\partial r} w_r \phi + 2i \frac{w_r}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial w_T^2} - 2 \frac{i}{r} \frac{\partial \phi}{\partial w_r} = 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

### 3. Solutions globales

**3.1. Notions préliminaires.** Rappelons la forme de l'équation de Liouville–Boltzmann dans le cas de la symétrie sphérique telle qu'elle a été obtenue par Ogorodnikov, à l'état stationnaire :

$$(3.1.1) \quad v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_T^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} = 0.$$

Designons par :

- $\rho$  la densité spatiale (*massique*) de l'amas, donnée par

$$\rho(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},$$

- $I^2 = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\|^2$  le carré du moment cinétique d'un point massique représentant l'étoile de masse  $m$  en mouvement dans l'espace des phases  $(\vec{r}, \vec{v})$ ,
- $E = mv^2/2 + V$  son énergie mécanique totale.

PROPOSITION 3.1.1. *Dans le cas d'une fonction de distribution  $f$  à support compact sur l'espace des déplacements, l'équation précédente admet une solution du type*

$$f = K \exp \left\{ a_0 E - a'_0 \frac{I^2}{2} \right\},$$

où la densité  $\rho$  s'écrit

$$\rho(r) = \frac{K \exp(-a_0 V(r)) (2\pi)^{3/2}}{a_0^{3/2} (1 + \mu^2 r^2)}$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $a'_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mu^2 = a'_0/a_0$ .

*Démonstration.* La démonstration consiste à montrer que l'équation (3.1.1) admet une solution à variables séparées du type

$$(3.1.2) \quad f(r, v_r, v_T) = F(v_r)G(r, v_T).$$

En effet, si on remplace  $f$  dans (3.1.1) par (3.1.2), on obtient

$$v_r \frac{\partial(FG)}{\partial r} + \left( \frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) \frac{\partial(FG)}{\partial v_r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial(FG)}{\partial v_T} = 0.$$

Après simplification, la dernière équation s'écrit

$$F v_r \frac{\partial G}{\partial r} + \left( \frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) G \frac{dF}{dv_r} - \frac{v_r v_T}{r} F \frac{\partial G}{\partial v_T} = 0.$$

D'où, après la division par le produit  $v_r F G$  (supposé non nul), on a

$$(3.1.3) \quad \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial r} + \left( \frac{v_T^2}{r} - \frac{dV}{dr} \right) \frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r} - \frac{v_T}{r} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial v_T} = 0.$$

Deux cas peuvent se présenter :

- (i) Cas où  $v_T^2/r - dV/dr = 0$ , ce qui entraîne

$$V(r) = v_T^2 \log r + C_0, \quad C_0 \text{ une constante.}$$

L'équation (3.1.1) devient dans ce cas

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_r v_T}{r} \frac{\partial f}{\partial v_T} = 0,$$

d'où  $f(r, v_r, v_T) = F(v_r)\psi(rv_T) + G(v_r)$  avec  $F, G$  et  $\psi$  des fonctions arbitraires.

(ii) Cas où  $v_T^2/r - dV/dr \neq 0$ . Dans ce cas le seul terme dépendant de  $v_r$  dans l'équation (3.1.3) est  $\frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r}$  ; il ne peut être qu'une constante (car il est indépendant de  $v_r$ ) :

$$(3.1.4) \quad \frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r} = C.$$

Après résolution de cette équation on obtient

$$F(v_r) = K \exp\left(\frac{C}{2} v_r^2\right) \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

En tenant compte de la condition  $\lim F(v_r) = 0$ , quand  $v_r \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $C < 0$ . Par suite on pose  $C = -a_0$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}_*^+$ , ce qui implique

$$F(v_r) = K \exp\left(\frac{-a_0}{2} v_r^2\right).$$

Revenons à l'équation (3.1.3) pour chercher l'expression de  $G$ . En effet, de (3.1.3), après simplification par  $rG$ , on obtient

$$r \frac{\partial G}{\partial r} + \left(v_T^2 G - rG \frac{dV}{dr}\right) \frac{1}{v_r F} \frac{dF}{dv_r} - v_T \frac{\partial G}{\partial v_T} = 0.$$

En utilisant (3.1.4), on a

$$(3.1.5) \quad r \frac{\partial G}{\partial r} - v_T \frac{\partial G}{\partial v_T} = a_0 \left(v_T^2 - r \frac{dV}{dr}\right) G.$$

L'équation caractéristique de (3.1.5) s'écrit

$$(3.1.6) \quad \frac{dr}{r} = -\frac{dv_T}{v_T} = \frac{dG}{a_0(v_T^2 - r \frac{dV}{dr})G}.$$

*Recherche des intégrales premières.* 1) De la double égalité (3.1.6), on a

$$(1) \quad \frac{dr}{r} = -\frac{dv_T}{v_T},$$

d'où

$$(2) \quad r v_T = \text{const},$$

donc l'intégrale première correspondante s'écrit

$$(3) \quad \kappa(r, v_T) = r v_T.$$

2) Cherchons une autre intégrale première à partir de (3.1.6), en introduisant le triplet  $(\lambda, \mu, \nu)$  tel que

$$\lambda r - \mu v_T + \nu a_0 \left(v_T^2 - r \frac{dV}{dr}\right) G = 0.$$

Si on prend  $\nu = 1/G$ , on obtient

$$\lambda r - \mu v_T + a_0 v_T^2 - a_0 r \frac{dV}{dr} = 0.$$

Si de plus

$$\lambda = a_0 \frac{dV}{dr},$$

on a

$$ra_0 \frac{dV}{dr} - \mu v_T + a_0 v_T^2 - a_0 r \frac{dV}{dr} = 0,$$

d'où l'on obtient nécessairement

$$\mu = a_0 v_T.$$

Soit  $U$  une intégrale première du système; alors

$$dU = \lambda dr + \mu dv_T + \nu dG,$$

d'où

$$dU = a_0 \frac{dV}{dr} dr + a_0 v_T dv_T + \frac{dG}{G},$$

et finalement

$$U(r, v_T, G) = \log G + g(r, v_T), \quad g(r, v_T) = a_0 V(r) + \frac{1}{2} a_0 v_T^2.$$

On a donc

$$U(r, v_T, G) = a_0 V + \frac{1}{2} a_0 v_T^2 + \log G.$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles (3.1.5) est telle que

$$(3.1.7) \quad \Phi \left\{ \psi(rv_T), \frac{1}{2} a_0 (v_T^2 + 2V) + \log G \right\} = 0,$$

où  $\Phi$  et  $\psi$  sont des fonctions arbitraires. À partir de (3.1.7), on obtient

$$\log G = -\frac{1}{2} a_0 (v_T^2 + 2V) + \psi(rv_T),$$

ce qui entraîne

$$G(r, v_T) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} a_0 (v_T^2 + 2V) + \psi(rv_T) \right\},$$

et, par conséquent,

$$f(r, v_r, v_T) = K \exp \left\{ -\frac{1}{2} a_0 (v_r^2 + v_T^2 + 2V) \right\} \exp \{ \psi(rv_T) \}.$$

Sachant que  $E = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_T^2) + V$  et  $I^2 = r^2 v_T^2$ ,  $\psi$  est choisie de telle sorte que  $f$  s'écrit sous la forme

$$f = K \exp \left\{ -a_0 E - a'_0 \frac{I^2}{2} \right\}$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $a'_0 \in \mathbb{R}^+$ .

Pour trouver l'expression de la densité  $\varrho$ , on a, d'après 2.2,

$$\varrho(r, t) = 2\pi \int \int f(r, v_r, v_T, t) v_T dv_r dv_T.$$

On remplace  $f$  par l'expression qu'on a trouvé, ensuite on intègre, et on a le résultat.

REMARQUE 3.1.1. Les constantes  $a_0$  et  $a'_0$  intervenant dans l'exponentielle

$$f(E, I^2) = K \exp \left\{ -a_0 E - \frac{1}{2} a'_0 I^2 \right\}$$

doivent avoir les dimensions suivantes :  $a_0$  a pour dimension  $[L^{-2}T^2]$ ,  $L$  étant l'unité de longueur du déplacement,  $T$  celle du temps, tandis que  $a'_0$  a pour dimension  $[L^{-4}T^2]$ .

L'équation de Poisson en symétrie sphérique et à l'état stationnaire s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dV}{dr} \right\} = 4\pi G \rho.$$

Afin d'introduire des variables sans dimensions dans cette équation, posons

$$x = \mu r, \quad U(x) = a_0 V(r).$$

L'équation de Poisson devient donc

$$\frac{\mu^2}{x^2} \frac{d}{d(\frac{x}{\mu})} \left\{ \frac{x^2}{\mu^2} \frac{1}{a_0} \frac{dU}{d(\frac{x}{\mu})} \right\} = \frac{4\pi GK(2\pi)^{3/2} \exp(-U)}{a_0^{3/2} (1 + \frac{\mu^2}{a_0} x^2)},$$

d'où

$$\mu^2 \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\} = \frac{4\pi GK(2\pi)^{3/2} \exp(-U)}{a_0(1 + x^2)}.$$

Si on pose

$$\lambda = \frac{4\pi GK(2\pi)^{3/2}}{\mu^2 a_0^{1/2}},$$

on obtient

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\} = \lambda \frac{\exp(-U)}{1 + x^2}.$$

Soit l'opérateur  $L$  défini par

$$L(U) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\}.$$

THÉORÈME 3.1.1. *Considérons le système associé au problème à symétrie sphérique*

$$(S) \begin{cases} L(U) = \lambda \frac{\exp(-U)}{1 + x^2}, & \text{avec } \lambda = \frac{4\pi GK(2\pi)^{3/2}}{\mu^2 a_0^{1/2}}, \\ U(x_0) = C_1, \\ U'(x_0) = C_2, \end{cases}$$

où  $a_1 = x_0(C_1 - \ln \lambda)$  et  $a_2 = x_0 C_2 + \ln \lambda - C_1$ . Pour  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$ , le système (S) possède une solution unique de classe  $C^2$  sur  $[x_0, \infty)$ , qui s'écrit sous la forme

$$U(x) = \frac{z(x)}{x} + \ln \lambda.$$

*Démonstration.* Le système (S) est équivalent au système

$$(S') \begin{cases} U(x) = \frac{z(x)}{x} + \ln \lambda, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{x \exp(-z/x)}{1+x^2}, \\ z(x_0) = a_1, \\ z'(x_0) = a_2. \end{cases}$$

Ce dernier admet une solution unique de classe  $C^2$  sur un intervalle fini  $[x_0, R)$ . Il suffit de montrer que toute solution du système suivant est prolongeable à  $[x_0, +\infty)$  :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx} = F(x, X), \\ X(x_0) = (a_1, a_2), \end{cases}$$

avec  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $x_1 = z$ ,  $x_2 = z'$  et

$$F(x, X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x \exp(-x_1/x) \end{pmatrix}.$$

Pour cela, démontrons que, pour tout  $R > 0$ , la solution  $X$  est bornée sur  $[x_0, R)$ . En effet, soit  $X(x)$  une solution de ce système; alors pour tout  $x$  dans  $[x_0, R)$ , on a

$$x_2(x) = x_2(x_0) + \int_{x_0}^x x_2'(s) ds,$$

d'où

$$x_2(x) = x_2(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{s \exp(-x_1(s)/s)}{1+s^2} ds,$$

donc

$$|x_2(x)| < a_2 + \int_{x_0}^x \exp\left(-\frac{x_1(s)}{s}\right) ds,$$

ce qui implique qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|x_2(x)| < a_2 + C(R - x_0).$$

En effet, il suffit de noter que  $x_1(\cdot)$  est convexe (car d'après (S'), sa dérivée seconde est positive), et donc que soit  $x_1(\cdot)$  est bornée sur  $[x_0, R)$ , soit  $x_1(s) \rightarrow \infty$  quand  $s \rightarrow R^-$ .

Posons  $a_2 + C(R - x_0) = M_1$ . Alors

$$\exists \xi \in [x_0, x] \quad \text{telle que} \quad |x_1(x) - x_1(x_0)| = |(R - x_0)x'_1(\xi)|,$$

donc  $|x_1(x) - x_1(x_0)| \leq (R - x_0)M_1$ , d'où

$$|x_1(x)| \leq |x_1(x_0)| + (R - x_0)M_1.$$

Posons

$$|x_1(x_0)| + (R - x_0)M_1 = M_2, \quad \max(M_1, M_2) = M;$$

donc  $|x_1(x)| + |x_2(x)| \leq 2M$ , et, par conséquent,  $\|X(x)\|$  est bornée sur  $[x_0, R)$ , donc  $X(x)$  est prolongeable à  $[x_0, +\infty)$ . ■

REMARQUE 3.1.2. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{t \exp(-x/t)}{1 + t^2}, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = a, \end{cases}$$

n'est pas bien posé. En effet, posons

$$F(t, x) = \frac{t \exp(-x/t)}{1 + t^2}.$$

Alors pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\lim F(t, x)$  n'existe pas quand  $(t, x)$  tend vers  $(0, x_0)$ . En effet, si  $x_0 \neq 0$ , posons  $A_n = (-x_0/n, x_0)$ ; alors  $F(A_n)$  tend vers  $\text{sign}(-x_0)\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Si  $x_0 = 0$  et  $A_n = (-1/n^2, 1/n)$ ,  $F(A_n)$  tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $F$  ne peut être prolongée par continuité à  $\mathbb{R}^2$ .

Par conséquent, puisqu'on étudie le problème en équilibre dynamique, c'est-à-dire, l'équation de Liouville–Boltzmann est sans second membre, nous avons considéré un modèle permettant des interactions entre particules (étoiles) sans collisions; il existe alors  $r_0 > 0$  tel que la fonction de distribution  $f$  s'annule à l'intérieur de l'intervalle  $[0, r_0]$ .

### 3.2. Modèle de masse à l'infini

PROPOSITION 3.2.1. *Les solutions  $z(x)$  du système  $(S')$  vérifient :*

- (1)  $z/x$  est non bornée,
- (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = +\infty$ ,
- (3) la fonction  $\exp(-z/x)$  tend vers zéro moins rapidement que  $1/x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.* (1) Supposons qu'il existe une constante  $A > 0$  telle que  $z/x < A$  pour tout  $x$  positif. Par suite

$$\frac{x \exp(-z/x)}{1 + x^2} > \frac{x \exp(-A)}{1 + x^2},$$

donc  $z' > \frac{1}{2} \exp(-A) \ln(1+x^2) + C_1$  avec une constante  $C_1$ , ce qui implique  $z' > \exp(-A) \ln x + C_1$ . En intégrant, on aura

$$z > C_1 x + \exp(-A)(x \ln x - x) + C_2$$

avec une constante  $C_2$ , d'où

$$\frac{z}{x} > C_1 + \exp(-A)(\ln x - 1) + \frac{C_2}{x}.$$

Comme  $\ln x$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a une contradiction. Donc la fonction  $z/x$  ne peut être bornée.

(2) De (1) on sait que  $z$  est non bornée. Et comme  $z''$  est positif quel que soit  $x$  positif,  $z$  est une fonction convexe. Par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = +\infty$ .

(3) D'après (2), il existe

$$\frac{x \exp(-z/x)}{1+x^2} < \frac{x}{1+x^2}, \quad \forall x > a,$$

d'où pour tout  $x > a$  on a

$$\int_a^x z''(t) dt < \int_a^x \frac{t dt}{1+t^2},$$

ce qui donne

$$z'(x) - z'(a) < \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2).$$

En intégrant encore une fois, on aura

$$\begin{aligned} z(x) - z(a) &< \frac{1}{2} \int_a^x \ln(1+t^2) dt + x \left( z'(x) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2) \right) \\ &\quad - a \left( z'(a) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2) \right). \end{aligned}$$

On pose

$$C = z(a) - a \left( z'(a) - \frac{1}{2} \ln(1+a^2) \right).$$

On a donc

$$z(x) < \frac{1}{2} \int_1^x \ln(1+t^2) dt + P + C$$

avec  $P = \frac{1}{2} \int_a^1 \ln(1+t^2) dt$ , d'où

$$z(x) < \frac{1}{2} \int_1^x \ln(2t^2) dt + P + C,$$

donc

$$z(x) < P + C + \frac{x}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + x \ln x - x + 1.$$

On pose  $A = P + C - \frac{1}{2} \ln 2 + 1$  et  $B = \frac{1}{2} \ln 2 - 1$ . On aura

$$z(x) < A + x(\ln x + B) \quad \forall x > a,$$

d'où

$$\frac{z}{x} < \frac{A}{x} + \ln x + B.$$

Mais au voisinage de l'infini, on a  $A/x + \ln x + B < \ln x + C$  avec une constante  $C$ . Donc

$$\exp\left(-\frac{z}{x}\right) > \exp(-C - \ln x)$$

pour tout  $x$  au voisinage de l'infini. Par conséquent,

$$\exp\left(-\frac{z}{x}\right) > \frac{\exp(-C)}{x}$$

pour  $x$  assez grand.

**THÉORÈME 3.2.1.** *Dans le cas de la symétrie sphérique, la masse totale de l'amas à l'état stationnaire et homogène est infinie.*

*Démonstration.* On a

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x \exp(-z/x)}{1 + x^2}.$$

Divisons par  $x$ ; pour  $\lambda$  une constante réelle on a

$$\frac{1}{x^2} \left\{ \frac{dz}{dx} + x \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} \right\} = \frac{\lambda \exp(-z/x)}{\lambda (1 + x^2)},$$

d'où

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dz}{dx} \frac{1}{x} + x^2 \left\{ -\frac{z}{x} \right\} \right\} = \lambda \frac{\exp(-z/x - \ln \lambda)}{1 + x^2}.$$

Multipliant par  $\mu^2$ , on a

$$\frac{\mu^2}{x^2} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{dU}{dx} \right\} = \mu^2 \lambda \frac{\exp(-U)}{1 + x^2}$$

avec

$$\lambda = \frac{4\pi GK(2\pi)^{3/2}}{\mu^2 a_0^{1/2}} \quad \text{et} \quad U(x) = \frac{z(x)}{x} + \ln \lambda.$$

Ensuite divisons par  $a_0$ , ce qui donne

$$\frac{\mu^2}{x^2} \frac{d}{d(x/\mu)} \left\{ \frac{x^2}{\mu^2} \frac{1}{a_0} \frac{dU}{d(x/\mu)} \right\} = \frac{\mu^2 \exp(-U) 4\pi GK(2\pi)^{3/2}}{a_0(1 + x^2) \mu^2 a_0^{3/2}}.$$

Sachant que  $U = a_0 V$  et  $x = \mu r$ , on a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dV}{dr} \right\} = \frac{4\pi GK(2\pi)^{3/2} \exp(-a_0 V)}{a_0^{3/2} (1 + \mu^2 r^2)}.$$

Mais

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dV}{dr} \right\} \quad \text{et} \quad \varrho = \frac{K \exp(-a_0 V) (2\pi)^{3/2}}{a_0^{3/2} (1 + \mu^2 r^2)}.$$

On retrouve bien l'équation de Poisson qui donne la densité  $\varrho$  en fonction du potentiel  $V$ . En conclusion, on trouve

$$\varrho = \frac{1}{4\pi G} \frac{z'' \mu^2}{x a_0}.$$

D'autre part, sachant que l'élément de masse  $dM$  du système est donné par  $dM = \varrho dv$  (avec  $dv$  étant l'élément de volume de l'espace des positions), on a  $dM = \varrho 4\pi r^2 dr$ , d'où

$$dM = \left\{ \frac{1}{4\pi G} \frac{z'' \mu^2}{x a_0} \right\} \left\{ 4\pi \left( \frac{x^2}{\mu^2} \right) d\left( \frac{x}{\mu} \right) \right\},$$

ce qui donne

$$dM = \frac{x z''}{G a_0 \mu} dx.$$

En intégrant sur l'espace des positions, on déduit la valeur de la masse  $M$  :

$$G M a_0 \mu = \int_{r_0}^{+\infty} x z'' dx,$$

c'est-à-dire,

$$M = \frac{1}{G a_0 \mu} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{x^2 \exp(-z/x)}{1 + x^2} dx.$$

D'après la proposition 3.2.1(3),  $\exp(-z/x)$  décroît moins rapidement que  $1/x$  au voisinage de l'infini, d'où

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{x^2 \exp(-z/x)}{1 + x^2} dx$$

diverge car

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2} dx$$

diverge. Cela implique que  $M = +\infty$ , donc la masse est infinie.

#### RÉFÉRENCES

- [1] A. A. Arsen'ev, *Global existence of weak solution of Vlasov's systems of equations*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 15 (1975), 136–147 (in Russian).
- [2] C. Bardos and P. Degond, *Global existence for the Vlasov–Poisson equation in 3 space variables with small initial data*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (1985), 101–118.

- [3] J. Batt and H. Berestycki, *Locally isotropic time-periodic and cylindrically symmetric stationary solutions of the Vlasov–Poisson system*, Rapport de recherche du C.M.A, Paris, 87-10, 1987.
- [4] R. Coutrez, Communication de l’observatoire Royal de Belgique, no. 15, 1950.
- [5] P. Degond and S. Mas-Gallic, *Existence of solutions and diffusion approximation for a model Fokker–Planck equation*, Transport Theory Statist. Phys. 16 (1987), 589–636.
- [6] R. J. Diperna and P.-L. Lions, *Global weak solutions of Vlasov–Maxwell systems*, Comm. Pure Appl. Math. 52 (1989), 729–757.
- [7] M. Hénon, *L’évolution initiale d’un amas sphérique*, Ann. Astrophys. 27 (1964), 83. Voir aussi : Bull. Astr. 3 (1968), 241.
- [8] E. Horst, *Global solutions of the relativistic Vlasov–Maxwell system of plasma physics*, Habilitationsschrift, Univ. München, 1984.
- [9] E. Horst and R. Hunze, *Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation*, Math. Methods Appl. Sci. 6 (1984), 262–279.
- [10] D. Lynden-Bell, *Stellar dynamics*, Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 124 (1962), 1–9, 95–123.
- [11] K. Ogorodnikov, *Dynamics of Stellar Systems*, translated from the Russian by J. B. Sykes, Pergamon Press, 1965.
- [12] Y. Talpaert, *Études des orbites stellaires*, Tome II, Mémoire Univ. Libre de Bruxelles, 1968.
- [13] —, *Structure et évolution des amas stellaires dans la phase de relaxation*, Bull. Acad. Roy. Belg. 58 (1972), 1135.
- [14] —, *Contribution à l’étude de la structure et de l’évolution des amas d’étoiles en dynamique stellaire*, thèse, Univ. Libre de Bruxelles, 1974.
- [15] Y. Talpaert and F. Lefèvre, *Étude hydrodynamique des amas stellaires à symétrie sphérique I*, Bull. Acad. Roy. Belg. 58 (1972), 759.
- [16] S. Ukai and T. Okabe, *On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov’s equation*, Osaka J. Math. 15 (1978), 245–261.
- [17] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1944.
- [18] S. Wollman, *Existence and uniqueness theory of the Vlasov–Poisson system with application to the problem with cylindrical symmetry*, J. Math. Anal. Appl. 90 (1982), 138–170.

Faculté des mathématiques  
Université U.S.T.H.B.  
B.P. 32 El-Alia, Bab-Ezzouar  
16111 Alger, Algérie  
E-mail: mkesri@usthb.dz

Received 1 July 2005;  
revised 20 December 2005

(4634)