COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 99 2004 NO. 1

UN SYSTÈME DE RÉSULTANTS POUR TESTER LA PROPRETÉ D'UNE APPLICATION POLYNOMIALE

PAR

HAI ZHANG (Beijing)

Sommaire. Étant donnés n entiers strictement positifs $d_1, \dots, d_n$, nous construisons un système universel de résultants-test permettant de tester si une collection $P_1, \dots, P_n$ de polynômes de degrés respectifs $d_1, \dots, d_n$, à coefficients indeterminés, définit une application propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ dès lors que l'intersection des supports des diviseurs induits par les P_j, $j = 1, \dots, n$, dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété algébrique discrète ; le test s'effectue via l'évaluation des résultants-test sur les coefficients des polynômes, suivant le fait que cette évaluation donne 0 ou non. Une conjecture est aussi proposée concernant la construction d'un système universel de résultants-test permettant de décider la propreté de $P = (P_1, \dots, P_n)$ hors de toute restriction géométrique préalable.

1. Introduction. Étant donnée une application polynomiale P de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, définissant une sous-variété discrète (donc finie) de $\mathbb{C}^n$, se pose naturellement la question de décider si une telle application est topologiquement propre, ce qui revient à décider si $\mathbb{C}[X]$ est un $\mathbb{C}[P]$-module de type fini. Dans ce travail, nous introduirons, étant donnés n entiers strictement positifs $d_1, \dots, d_n$, une collection de polynômes de $\mathbb{Z}[U^{(1)}, \dots, U^{(n)}]$ (universels) permettant de tester si n polynômes $P_1, \dots, P_n$, de degrés respectifs $d_1, \dots, d_n$, à coefficients $U = (U^{(1)}, \dots, U^{(n)})$, soit

$$P_j(X) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} U^{(j)}_{m_j}\, m_j(X_1, \dots, X_n), \quad j = 1, \dots, n$$

($\mathcal{N}_{d_j}$ désignant l'ensemble des monômes en n variables de degré au plus d_j), définissent une application propre lorsque l'on sait déjà qu'ils définissent une variété discrète dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Ces résultants-test de propreté (indexés à la fois par $l \in \{0, \dots, D-1\}$ où $D := d_1 \dots d_n$ et par $\beta \in \mathbb{N}^n$) sont introduits dans la section 3 (définition 3) et classés en résultants principaux et résultants conditionnels d'ordre 0 et de type l, $l = 0, \dots, D-1$; leur construction repose sur le concept (introduit au paragraphe 3) de *polynôme caractéristique universel* ainsi que sur la théorie du résultant initiée par Macaulay (voir par exemple [4]) de laquelle nous nous

2000 *Mathematics Subject Classification*: 32A15, 32A21, 32A27, 32A30, 11G05, 11G10, 14C17, 14E25, 14Q20.

sommes inspirés ; leurs propriétés algébriques sont dégagées dans la section 4 ; enfin, dans la section 5, nous mettrons en lumière (théorème 5) leur rôle pour caractériser la propreté au sein de la classe des applications polynomiales de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ définissant une variété discrète dans l'espace projectif.

Après avoir élargi ensuite notre construction de système de résultants-test en introduisant les résultants-test (principaux et conditionnels) toujours d'indice $l = 0, \ldots, D-1$, mais cette fois d'ordre supérieur $\nu \in \{1, \ldots, D\}$, nous formulons aussi en guise de conclusion (conjecture 1) une conjecture relative au test de propreté dans le cas général (les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ ne sont plus supposés définir une variété discrète dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$).

Ce travail trouve sa principale motivation dans le rôle croissant que joue la clause de propreté dans la possibilité d'atteindre (via des méthodes d'inspiration analytique) des identités algébriques telles l'identité de Bézout.

2. Notations et préliminaires. On va introduire dans cette section préliminaire à la fois un certain nombre de notations, quelques définitions de base, ainsi que quelques propositions préliminaires. Commençons par les notations.

$\mathbf{R}$ désignera un anneau commutatif noethérien, intègre, unitaire, et $\mathbf{A} := \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ en les n variables $X_1, \ldots, X_n$.

Étant donné un entier positif d, $\mathcal{M}_d$ désigne l'ensemble des monômes en les n variables $X_1, \ldots, X_n$, de degré total d, et $\mathcal{N}_d$ celui des monômes de degré au plus d.

Étant donné $r \in \mathbb{N}^*$ et $(d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{N}^r$, on note

$$\mathbf{R}_{\vec{d}} := \mathbf{R}[U^{(1)}_{m_1},\, m_1 \in \mathcal{M}_{d_1}; \ldots; U^{(r)}_{m_r},\, m_r \in \mathcal{M}_{d_r}],$$
$$\mathbf{A}_{\vec{d}} := \mathbf{A}[U^{(1)}_{m_1},\, m_1 \in \mathcal{M}_{d_1}; \ldots; U^{(r)}_{m_r},\, m_r \in \mathcal{M}_{d_r}].$$

Il s'agit d'anneaux de polynômes à coefficients respectifs dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}$ en

$$\sum_{j=1}^{r} \operatorname{card} \mathcal{M}_{d_j} = \sum_{j=1}^{r} \binom{n + d_j - 1}{d_j}$$

variables. Parmi les éléments de $\mathbf{A}_{\vec{d}}$, on notera particulièrement les r formes homogènes

$$U_{\vec{d},j}(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{m_j \in \mathcal{M}_{d_j}} U^{(j)}_{m_j} m_j(X_1, \ldots, X_n), \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Si $\mathbf{I}$ désigne un idéal homogène de $\mathbf{A}$, on note $\mathbf{I}_{\vec{d}}$ l'idéal de $\mathbf{A}_{\vec{d}}$ engendré par $\mathbf{I}$ et les éléments $U_{\vec{d},1}, \ldots, U_{\vec{d},r}$ de $\mathbf{A}_{\vec{d}}$. On note enfin

$$\mathbf{C}_{\vec{d}}(\mathbf{I}) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{F \in \mathbf{R}_{\vec{d}};\ F\mathcal{M}_k \subset \mathbf{I}_{\vec{d}}\}.$$

La *codimension* (ou *hauteur*) d'un idéal premier $\mathcal{P}$ de $\mathbf{A}$ est par définition le plus grand entier k tel qu'il existe une chaîne $(\mathcal{P}_j)_{0\leq j\leq k}$ d'idéaux premiers de $\mathbf{A}$ deux à deux distincts tels que

$$(0) = \mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k-1} \subset \ldots \subset \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}.$$

On rappelle ici la première proposition classique ([6, proposition 1.5, page 13]):

PROPOSITION 1. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{I}$ un idéal premier homogène de $\mathbf{A}$ de codimension inférieure ou égale à $n-r$, tel que $\mathbf{I}\cap\mathbf{R} = (0)$. Alors, si $\vec{d} \in \mathbb{N}^r$,*

$$\mathbf{C}_{\vec{d}}(\mathbf{I}) = (0) \;\Leftrightarrow\; \operatorname{codim}\mathbf{I} < n - r.$$

De plus, si $\operatorname{codim}\mathbf{I} = n - r$, l'idéal $\mathbf{C}_{\vec{d}}(\mathbf{I})$ est un idéal principal, dont un générateur est appelé forme de Chow–Cayley de $\mathbf{I}$ relativement au multi-poids $\vec{d}$.

Le cas particulier suivant s'avère crucial:

DÉFINITION 1. Dans le cas où $\mathbf{I} = (0)$ (on peut prendre alors $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$) et $r = n$, la forme de Chow–Cayley de multi-poids $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ (unique au signe près) est appelée *résultant* des n formes homogènes en n variables $U_{\vec{d},1}, \ldots, U_{\vec{d},n}$ et on la note

$$\operatorname{Res}_{\vec{d}}(U_{\vec{d},1}, \ldots, U_{\vec{d},n}).$$

On a le résultat suivant ([4, 5.13.2, p. 163]):

PROPOSITION 2. *Si l'on décide d'affecter chaque variable $U^{(j)}_{m_j}$, $m_j \in \mathcal{M}_{d_j}$, $j = 1, \ldots, n$, du multi-poids $(\alpha_{J1}, \ldots, \alpha_{jn}) \in \mathbb{N}^n$, où les α_{jk}, $k = 1, \ldots, n$, sont définis par $m_j(X) = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, le résultant $\operatorname{Res}_{\vec{d}}$ des formes $U_{\vec{d},1}, \ldots, U_{\vec{d},n}$ est un polynôme en les variables $U^{(1)}_{m_1}, \ldots, U^{(n)}_{m_n}$, $m_1 \in \mathcal{M}_{d_1}$, $\ldots, m_n \in \mathcal{M}_{d_n}$, isobare de multi-poids $(D, \ldots, D)$, avec $D = d_1 \ldots d_n$, c'est-à-dire ne contenant que des monômes de multi-poids $(D, \ldots, D)$.*

La formule de changement de variables suivante régit le calcul de résultants (voir [4, 5.13.1, p. 163]):

PROPOSITION 3. *Soit $\vec{d} \in \mathbb{N}^n$, et $M = (a_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ une matrice à coefficients dans l'anneau $\mathbf{R}$. Si l'on écrit, pour $j = 1, \ldots, n$,*

$$\begin{aligned} U_{\vec{d},j}\Big(\sum_{j=1}^n a_{j1}X_j, \ldots \sum_{j=1}^n a_{jn}X_j\Big) &= \sum_{m_j\in\mathcal{M}_{d_j}} \widetilde{U}^{(j)}_{m_j} m_j(X_1, \ldots, X_n) \\ &= \widetilde{U}_{\vec{d},j}(X_1, \ldots, X_n), \end{aligned}$$

on a

$$\operatorname{Res}_{\vec{d}}(\widetilde{U}_{\vec{d},1}, \ldots \widetilde{U}_{\vec{d},n}) = (\det M)^D \operatorname{Res}_{\vec{d}}(U^{(1)}_{\vec{d}}, \ldots U^{(n)}_{\vec{d}}), \tag{1}$$

où $D = d_1 \ldots d_n$.

3. Notion de polynôme caractéristique universel. Nous nous proposons de démontrer dans cette section le résultat suivant :

THÉORÈME 1. *Soit* $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ *et* $f_1, \ldots, f_n$ *les* n *polynômes génériques en* n *variables (non homogènes) de degrés respectifs* $d_1, \ldots, d_n$,

$$f_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} U_{m_j}^{(j)} m_j(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[U_{m_j}^{(j)},\, m_j \in \mathcal{N}_{d_j}; X].$$

Soit $D := d_1 \ldots d_n$. *Il existe un polynôme*

$$F_{\vec{d}} \in \mathbb{Z}[T; A_1, \ldots, A_n; U_{m_1}^{(1)},\, m_1 \in \mathcal{N}_{d_1}; \ldots; U_{m_n}^{(n)},\, m_n \in \mathcal{N}_{d_n};\, Y_1, \ldots, Y_n]$$

tel que

$$\begin{aligned} (2)\quad & F_{\vec{d}}(T; A; U; Y_1, \ldots, Y_n) \\ &= \mathrm{Res}_{\vec{d}}(U_{\vec{d},1}, \ldots, U_{\vec{d},n})\ T^D + \sum_{l=1}^{D} F_{\vec{d};l}(A;\, U;\, Y_1, \ldots, Y_n) T^{D-l}, \end{aligned}$$

où les $F_{\vec{d};l}$, $l = 1, \ldots, D$, *sont dans* $\mathbb{Z}[A;\, U;\, Y_1, \ldots, Y_n]$, *et que*

$$(3)\quad F_{\vec{d}}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k X_k; A_1, \ldots, A_n; U; f_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, f_n(X_1, \ldots, X_n)\Big) \equiv 0.$$

DÉFINITION 2. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont n éléments spécifiés de $\mathbf{R}$, le polynôme

$$F_{\vec{d}}(T;\, a_1, \ldots, a_n; U; Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbf{R}[T; U; Y_1, \ldots, Y_n]$$

est appelé *polynôme caractéristique* de la forme linéaire $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ relativement au système de formes $(f_1, \ldots, f_n)$. Le polynôme $F_{\vec{d}}(T, A, U, f) \in \mathbb{Z}[A; U, X]\ [T]$ est, quant à lui, appelé *polynôme caractéristique universel* de la forme $\langle A, X\rangle := A_1X_1 + \ldots + A_nX_n$ relativement au système de formes $(f_1, \ldots, f_n)$ de degrés $d_1, \ldots, d_n$.

Preuve du théorème 1. On décompose chaque forme f_j, $1 \le j \le n$, sous la forme

$$f_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{s=0}^{d_j} f_{j,s}(X_1, \ldots, X_n),$$

où, pour $s = 0, \ldots, d_j$,

$$f_{j,s}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{m_j \in \mathcal{M}_s} U_{m_j}^{(j)} m_j(X_1, \ldots, X_n)$$

(notons qu'en particulier $f_{j,d_j} = U_{\vec{d},j}$). On introduit ensuite les polynômes Φ_j, $j = 1, \ldots, n$, de $\mathbb{Z}[1/T; A; U; Y_1, \ldots, Y_n; X_1, \ldots, X_n]$, définis comme

$$\Phi_j(T,A,U,Y,X) := \sum_{s=0}^{d_j} f_{j,s}(X)\left(\frac{\langle A,X\rangle}{T}\right)^{d_j-s} - Y_j\left(\frac{\langle A,X\rangle}{T}\right)^{d_j}, \qquad j=1,\dots,n,$$

où

$$\langle A,X\rangle := A_1X_1+\ldots+A_nX_n.$$

Si l'on considère ces polynômes comme des formes homogènes en les variables $(X_1,\dots,X_n)$ et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[1/T;A;U;S]$, on peut considérer leur résultant

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Phi_1(T,A,U,Y)(X),\dots,\Phi_n(T,A,U,Y)(X)) \in \mathbb{Z}[1/T;A;U;Y_1,\dots,Y_n]$$

(ces polynômes étant vus comme des polynômes homogènes en X).

• Nous allons montrer dans un premier temps qu'il résulte des propositions 2 et 3 que

$$F_{\vec{d}}(T;A;U;Y) := T^D\,\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Phi_1(T,A,U,Y)(X),\dots,\Phi_n(T,A,U,Y)(X))$$

est bien un élément de $\mathbb{Z}[T;A;U;Y]$ (les puissances de T en dénominateur se trouvant bien ainsi chassées). Pour cela, posons, pour $j=1,\dots,n$,

$$\begin{aligned}\Psi_j(T,A,U,Y,X) &= \Phi_j\left(T,A,U,Y,\frac{X_1-A_2X_2-\ldots-A_nX_n}{A_1},X_2,\dots,X_n\right)\\ &= \sum_{s=0}^{d_j} f_{j,s}\left(\frac{X_1-A_2X_2-\ldots-A_nX_n}{A_1},X_2,\dots,X_n\right)\left(\frac{X_1}{T}\right)^{d_j-s} - Y_j\left(\frac{X_1}{T}\right)^{d_j}\\ &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=d_j}} \beta_\alpha^{(j)}(1/T,1/A_1,A_2,\dots,A_n,U,Y)X_1^{\alpha_1}\ldots X_n^{\alpha_n},\end{aligned}$$

où le degré en la variable $1/T$ du coefficient

$$\beta_\alpha^{(j)}(1/T,1/A_1,A_2,\dots,A_n,U,Y)$$

est inférieur ou égal à α_1. De la proposition 2, il résulte que

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Psi_1(T,A,U,Y;X),\dots,\Psi_n(T,A,U,Y;X))$$

est un élément de $\mathbb{Z}[1/T,1/A_1,A_2,\dots,A_n,U,Y]$ de degré en la variable $1/T$ au plus D. Comme la proposition 3 implique que

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Phi_1(T,A,U,Y;X),\dots,\Phi_n(T,A,U,Y;X)) = A_1^D\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Psi_1(T,A,U,Y;X),\dots,\Psi_n(T,A,U,Y;X)),$$

on en conclut que $F(T;A;U;Y)$ est bien un élément de

$$\mathbb{Z}[T,A,U,Y] = \mathbb{Z}[T,1/A_1,A_2,\dots,A_n,U,Y]\cap\mathbb{Z}[1/T,A_1,A_2,\dots,A_n,U,Y]$$

• Montrons maintenant la formule (2). Considérons pour cela l'homomorphisme H de $\mathbf{R}[1/T,A,U,Y,X]$ dans $\mathbf{R}[A,U,Y,X]$ transformant $1/T$

en 0, A en A, U en U, Y en Y et X en X. Cet homomorphisme commute avec la prise de résultant et l'on a donc

$$H[\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Phi_1(T,A,U,Y;X),\ldots,\Phi_n(T,A,U,Y;X))] = \mathrm{Res}_{\vec{d}}[f_{1,d_1}(U;X),\ldots,f_{n,d_n}(U;X)].$$

Il en résulte bien

$$F_{\vec{d}}(T,A,U,Y) = \mathrm{Res}_{\vec{d}}(U_{\vec{d},1},\ldots,U_{\vec{d},n})T^D + T^D G_{\vec{d}}(1/T,A,U,Y),$$

avec $G_{\vec{d}}(0,A,U,Y) \equiv 0$, le degré en $1/T$ de $G_{\vec{d}}$ étant inférieur ou égal à D. La représentation (2) en résulte.

• Reste à montrer

$$F_{\vec{d}}\Big(\sum_{l=1}^{n} A_l X_l; A; U; f_1,\ldots,f_n\Big) \equiv 0.$$

Si le degré du monôme $X^\alpha := X_1^{\alpha_1}\ldots X_n^{\alpha_n}$ est assez grand, il résulte de la théorie du résultant [5] qu'il existe des polynômes

$$h_{j,\alpha} \in \mathbb{Z}[1/T,A,U,Y,X], \quad j=1,\ldots,n,$$

tels que

$$F_{\vec{d}}(T;A;U;Y)X^\alpha = T^D \sum_{k=1}^{n} h_{k,\alpha}(T,A,U,Y,X)\Phi_k(T,A,U,Y,X).$$

On a alors

$$F_{\vec{d}}(T;A;U;Y)X^\alpha \equiv T^D \sum_{k=1}^{n} h_{k,\alpha}\Bigg[\sum_{s=0}^{d_k} f_{k,s}\bigg(\frac{\sum_{l=1}^{n} A_l X_l}{T}\bigg)^{d_k-s} - Y_k\bigg(\frac{\sum_{l=1}^{n} A_l X_l}{T}\bigg)^{d_k}\Bigg].$$

Par conséquent, en substituant,

$$F_{\vec{d}}\Big(\sum_{l=1}^{n} A_l X_l; A; U; f_1,\ldots,f_n\Big)X^\alpha \equiv T^D \sum_{k=1}^{n} h_{k,\alpha}(T,A,U,Y,X)\Big[\sum_{s=0}^{d_k} f_{k,s} - f_k\Big] \equiv 0.$$

Ceci implique bien que l'on ait (3) et clôt la preuve du théorème 1. ∎

4. Résultants-test de propreté. Soient $\vec{d} = (d_1,\ldots,d_n) \in \mathbb{N}^n$ et

$$f_j(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} U_{m_j}^{(j)},\ m_j(X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{Z}[U_{m_j}^{(j)},\ m_j \in \mathcal{N}_{d_j}][X], \quad j=1,\ldots,n,$$

n polynômes (non homogènes) génériques de degrés respectifs $d_1, \dots, d_n$. On sait d'après le théorème 1, formule (2), que l'on peut écrire

$$F_{\vec{d}}(T; A; U; Y) = \mathrm{Res}_{\vec{d}}(f_{1,d_1}, \dots, f_{n,d_n})T^D + \sum_{l=1}^{D} F_{\vec{d},l}(A, U, Y)T^{D-l}.$$

Chaque polynôme $F_{\vec{d};l}$, $l = 0, \dots, D-1$, se développe sous la forme

$$F_{\vec{d};l}(A; U; Y) = F_{\vec{d};l,1}(A, U) + F_{\vec{d};l,2}(A, U, Y),$$

avec

$$F_{\vec{d};l,2}(A, U, 0) \equiv 0.$$

Chaque polynôme $F_{\vec{d};l,1}$ se développe suivant le bloc de variables $A = (A_1, \dots, A_n)$ sous la forme

$$F_{\vec{d};l,1}(A, U) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} V^{(0)}_{\vec{d};l,\beta}(U) A_1^{\beta_1} \dots A_n^{\beta_n},$$

tandis que chaque polynôme $F_{\vec{d};l,2}$ s'écrit sous la forme

$$F_{\vec{d};l,2}(A, U, Y) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^n \\ \gamma \in \mathbb{N}^n,\, \gamma \neq 0}} W^{(0)}_{\vec{d};l,\beta,\gamma}(U) A_1^{\beta_1} \dots A_n^{\beta_n} Y_1^{\gamma_1} \dots Y_n^{\gamma_n}.$$

DÉFINITION 3. Les polynômes de $\mathbb{Z}[U]$ que sont

$$F_{\vec{d};D}(U) = \mathrm{Res}_{\vec{d}}(f_{1,d_1}, \dots, f_{n,d_n})$$

(noté aussi $V^{(0)}_{\vec{d},D}(U)$) et les $V^{(0)}_{\vec{d};l,\beta}$, $l = 0, \dots, D-1$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ (lorsqu'ils ne sont pas identiquement nuls) sont appelés *résultants-test de propreté principaux* d'ordre 0 et de classe l associés au système de polynômes génériques $(f_1, \dots, f_n)$. Les polynômes $W^{(0)}_{\vec{d};l,\beta,\gamma}$, $l = 0, \dots, D-1$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, $\gamma \neq 0$, sont eux (toujours lorsqu'ils ne sont pas identiquement nuls) appelés *résultants-test de propreté conditionnels* (d'ordre 0 et de classe l) associés à $(f_1, \dots, f_n)$.

5. Propriétés algébriques des résultants-test de propreté. Si P est un élément de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, on note ${}^hP$ l'*homogénéisé* du polynôme P, c'est-à-dire le polynôme de $\mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ défini par

$${}^hP(X_0, \dots, X_n) = X_0^{\deg P} P(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0).$$

On dira qu'un système $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ *a une infinité de zéros à l'infini* si les polynômes homogènes ${}^hP_1, \dots, {}^hP_n$ définissent une variété algébrique de dimension strictement positive dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

On rappelle le résultat classique concernant la dimension des fibres d'un morphisme surjectif entre deux schémas irréductibles ([3, page 95] ou [8, page 76]):

PROPOSITION 4. *Soit $\Theta : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme surjectif entre deux schémas irréductibles, de dimensions respectives n et m. On a nécessairement $m \leq n$ d'une part et, d'autre part :*

(i) *Pour tout $y \in \mathcal{Y}$, les composantes irréductibles de la fibre de $\Theta^{-1}(y)$ sont de dimension au moins égale à $n - m$.*

(ii) *Il y a un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Y}$ tel que*

$$\forall y \in \mathcal{U}, \quad \dim \Theta^{-1}(y) = n - m.$$

Nous pouvons alors (dans le cas où $\mathbf{R} = \mathbb{C}$) énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Soient $P_1, \ldots, P_n$ n polynômes à coefficients complexes, de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$, avec*

$$P_j(X) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} u_{m_j}^{(j)} m_j(X_1, \ldots, X_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système $P = (P_1, \ldots, P_n)$ a une infinité de zéros dans l'infini.*

(ii) *L'évaluation en $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de tous les résultants-test de propreté (principaux et conditionnels, d'ordre l arbitraire entre 0 et $D = d_1 \ldots d_n$) est nulle.*

Preuve. (i)$\Rightarrow$(ii). La condition (i) signifie que les parties homogènes de plus haut degré $p_{1,d_1}, \ldots, p_{n,d_n}$ des polynômes $P_1, \ldots, P_n$ définissent une variété algébrique de dimension strictement positive dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Il résulte de la proposition 4 que pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, le système

$$(p_{1,d_1}, \ldots, p_{n,d_n}, a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n)$$

définit une sous-variété algébrique non vide de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Ainsi donc, pour tout $y \in \mathbb{C}^n$ et tout $t \in \mathbb{C}^*$, les polynômes homogènes

$$\varphi_j(t, a, u, y; X) := \sum_{s=0}^{d_j} p_{j,s}(X) \left(\frac{\langle a, X \rangle}{t} \right)^{d_j - s} - y_j \left(\frac{\langle a, X \rangle}{t} \right)^{d_j}, \quad j = 1, \ldots, n$$

(où $p_{j,s}$, $j = 1, \ldots, n$, $s = 0, \ldots, d_j$, désigne la composante homogène de degré s de P_j) définissent une sous-variété algébrique non vide de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Ceci implique (si l'on se réfère au rôle du résultant en théorie de l'élimination) que, pour tout $a \in \mathbb{C}^n$, tout $t \in \mathbb{C}^*$ et tout $y \in \mathbb{C}^n$,

$$F_{\vec{d}}(t; a; u; y) = t^{d_1 \ldots d_n} \mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Phi_1(t, a, u, y)(X), \ldots, \Phi_n(t, a, u, y)(X)) = 0.$$

On en déduit donc que l'évaluation en t, a, u, y de $F_{\vec{d}}$ est nulle, ce qui implique la nullité de $V_{\vec{d};D}^{(0)}(u)$, des $V_{\vec{d};l,\beta}^{(0)}(u)$, $l = 0, \ldots, D-1$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, et des $W_{\vec{d};l,\beta,\gamma}^{(0)}(u)$, $l = 0, \ldots, D-1$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, $\gamma \neq 0$, où $D := d_1 \ldots d_n$. Ceci constitue bien l'assertion (ii).

(ii)⇒(i). La condition (ii) implique que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, tout $a \in \mathbb{C}^n$ et tout $y \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(\Phi_1(t,a,u,y)(X),\ldots,\Phi_n(t,a,u,y)(X)) = 0,$$

soit que la sous-variété de $\mathbb{P}^{n-1}$ définie par les polynômes homogènes $\Phi_j(t,a,u,y)(X)$, $j = 1,\ldots,n$, est non vide; cette sous-variété contient donc un point $x(t,a,y)$ (les variables u étant spécifiées).

Supposons que les polynômes $P_1,\ldots,P_n$ n'aient qu'un nombre fini de zéros à l'infini, ce qui signifie que la variété algébrique

$$\{\zeta \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C});\, p_{j,d_j}(\zeta) = 0,\, j = 1,\ldots,n\}$$

est de dimension strictement inférieure à 1. Il existerait donc (d'après la proposition 1) $a_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\{\zeta \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C});\, p_{j,d_j}(\zeta) = 0,\, j = 1,\ldots,n,\, \langle a_0,\zeta\rangle = 0\} = \emptyset.$$

Pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ et tout $y \in \mathbb{C}^n$, on aurait $\langle a_0, x(t,a,y)\rangle \neq 0$ (sinon le point $x(t,a,y)$ serait un point où $p_{1,d_1}(x) = \ldots = p_{n,d_n}(x) = \langle a_0, x\rangle = 0$). On pourrait donc, quitte à multiplier les coordonnées homogènes de $x(t,a,y)$ par une même constante non nulle, supposer

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \quad \langle a_0, x(t,a,y)\rangle = t.$$

Mais alors on aurait, pour tout $y \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}\Phi_j(t,a_0,u,y,x(t,a_0,y)) &= \sum_{s=0}^{d_j} p_{j,s}(x(t,a_0,y)) - y_j \\ &= P_j(x(t,a_0,y)) - y_j = 0, \qquad j = 1,\ldots,n,\end{aligned}$$

ce qui montrerait que le morphisme polynomial $P = (P_1,\ldots,P_n)$ serait bien surjectif de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ et tout $y \in \mathbb{C}^n$, on aurait

$$x(t,a_0,y) \in P^{-1}(y) \cap \{\zeta;\, \langle a_0,\zeta\rangle = t\}.$$

Ceci impliquerait que pour tout $y \in \mathbb{C}^n$, la fibre $P^{-1}(y)$ serait une variété algébrique de cardinal infini, donc certainement de dimension supérieure ou égale à 1. Ceci contredit la seconde assertion de la proposition 4.

L'hypothèse selon laquelle les polynômes $P_1,\ldots,P_n$ n'ont qu'un nombre fini de zéros est par conséquent absurde dès que la clause (i) se trouve remplie. On a bien prouvé ainsi l'implication (ii)⇒(ii) et achevé la preuve du théorème 2. ∎

Étant donnés $\vec{d} \in \mathbb{N}^n$, le résultat suivant caractérise en termes des résultants-test de propreté principaux le fait que n polynômes (non homogènes) en n variables et à coefficients complexes, de degrés respectifs

$d_1, \ldots, d_n$,

$$P_j(X) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} u^{(j)}_{m_j} m_j(X_1, \ldots, X_n), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

soient tels que leurs homogénéisés définissent une sous-variété discrète de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

THÉORÈME 3. *Soient $P_1, \ldots, P_n$ n polynômes à coefficients complexes, de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$, avec*

$$P_j(X) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} u^{(j)}_{m_j} m(X_1, \ldots, X_n), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système de polynômes homogènes ${}^hP = ({}^hP_1, \ldots, {}^hP_n)$ définit une sous-variété discrète de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

(ii) *Il existe un entier l tel que $0 \le l \le D = d_1 \ldots d_n$ et un résultant-test de propreté principal d'ordre l ($V^0_{\vec{d};D}$ si $l = D$ ou $V^{(0)}_{\vec{d};l,\beta}$ pour un certain $\beta \in \mathbb{N}^n$ si $l < D$) dont l'évaluation en le système de coefficients u est non nulle.*

Preuve. (i)$\Rightarrow$(ii). Supposons que les polynômes homogènes ${}^hP_j$, $j = 1, \ldots, n$, définissent une sous-variété discrète (donc finie) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Il existe donc (d'après la proposition 1) $a_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que les polynômes homogènes $(p_{1,d_1}, \ldots, p_{n,d_n}, \langle a_0, X\rangle)$ définissent l'ensemble vide dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que l'évaluation en le système de coefficients u de tous les résultants-test de propreté principaux de tout ordre l entre 0 et D soit nulle. On aurait donc, pour tout entier l entre 0 et D,

$$F_{\vec{d};l,1}(A, u) \equiv 0,$$

(comme polynômes en $A = (A_1, \ldots, A_n)$). Nous allons montrer que ceci contredit l'hypothèse faite sur les ${}^hP_j$, $1 \le j \le n$.

On considère le $\mathbb{C}$-homomorphisme d'algèbres

$$h : \mathbb{C}[T, T^{-1}, A, Y, X] \to \mathbb{C}[T, T^{-1}, A, X]$$

tel que

$$h(T) = T, \qquad h(T^{-1}) = T^{-1}, \qquad h(A) = A, \qquad h(Y) = 0, \qquad h(X) = X.$$

Comme

$$h(F_{\vec{d}}(T; A; u; Y)) = \sum_{l=0}^{D} F_{\vec{d};l,1}(A, u) T^l \equiv 0,$$

il viendrait

$$\mathrm{Res}_{\vec{D}}(h(\Phi_1(T, A, u, Y; X)), \ldots, h(\Phi_n(T, A, u, Y; X))) \equiv 0,$$

chaque $h(\Phi_j(T,A,u,Y;X))$ étant considéré ici comme un polynôme en X à coefficients dans $\mathbb{C}[T^{-1},A]$, en fait

$$h(\Phi_j(T,A,u,Y;X)) = \sum_{s=0}^{d_j} p_{j,s}(X)\left(\frac{\langle A,X\rangle}{T}\right)^{d_j-s}, \quad j=1,\dots,n.$$

Pour tout $t\in\mathbb{C}^*$ et tout $a\in\mathbb{C}^n$, les polynômes homogènes (en $X=(X_1,\dots,X_n)$)

$$\Phi_j(t,a,u,0;X) = \sum_{s=0}^{d_j} p_{j,s}(X)\left(\frac{\langle a,X\rangle}{t}\right)^{d_j-s}, \quad j=1,\dots,n,$$

auraient donc un zéro commun $x(t,a)$ dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. On aurait nécessairement

$$\langle a_0, x(t,a)\rangle \neq 0$$

(car sinon la sous-variété de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ définie par les polynômes homogènes $p_{1,d_1},\dots,p_{n,d_n}$ et $\langle a_0,X\rangle$ serait non vide, ce qui contredirait la propriété résultant du choix de a_0). Quitte à renormaliser les coordonnées, on peut supposer que

$$\langle a_0, x(t,a)\rangle = t \quad \forall t\in\mathbb{C}^*.$$

Mais alors

$$\Phi_j(t,a,u,0;x(t,a)) = P_j(x(t,a)) = 0, \quad j=1,\dots,n,$$

ce qui montre que le point $x(t,a)$ serait un point de la variété des zéros communs aux P_j dans $\mathbb{C}^n$. Comme $\langle a_0,x(t,a)\rangle = t$ et que t est arbitraire, cette sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^n$ ne saurait être finie, ce qui contredit bien sûr l'hypothèse faite sur les ${}^hP_j$ (ils sont censés définir une sous-variété discrète de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$).

(ii)⇒(i). Supposons qu'il existe l dans $\{0,\dots,D\}$ et β dans $\mathbb{N}^n$ tel que le résultant-test de propreté principal $V^{(0)}_{\vec{d};l,\beta}$ (ou $V^{(0)}_{\vec{d};D}$ si $l=D$) soit non nul. Il résulte alors du théorème 2 que les polynômes homogènes $p_{1,d_1},\dots,p_{n,d_n}$ définissent une variété discrète (donc finie) dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Il reste à voir que l'ensemble $\mathcal{Z}(P)$ des zéros communs aux P_j, $j=1,\dots,n$, dans $\mathbb{C}^n$ est fini. D'après la formule (3) du théorème 1, on a

$$\sum_{l=0}^{D} F_{\vec{d};l}(A,u,P(X))(\langle A,X\rangle)^l \equiv 0. \tag{4}$$

Si $x\in\mathcal{Z}(P)=\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ P_1(\zeta)=\ldots=P_n(\zeta)=0\}$, l'identité (4) ci-dessus implique, si l'on spécifie $X=x$,

$$\sum_{l=0}^{D} F_{\vec{d};1,l}(A,u)(\langle A,x\rangle)^l \equiv 0. \tag{5}$$

L'hypothèse (ii) implique qu'il existe un entier l entre 0 et D tel que $F_{\vec{d};l}(A,u) \not\equiv 0$ (en tant que polynôme en A), ce qui donne que l'on peut écrire (5) sous la forme

$$\sum_{l=0}^{L} F_{\vec{d};1,l}(A,u)(\langle A,x\rangle)^l \equiv 0$$

avec $F_{\vec{d};1,L}(A,u) \not\equiv 0$ (comme polynôme en A). Il résulte du principe des tiroirs de Siegel (ici intervient le fait que l'on travaille avec le corps des complexes) que l'on peut trouver n n-uplets de nombres complexes $(a_{j1},\dots,a_{jn})$, $j=1,\dots,n$, tels que d'une part la matrice $a_j = (a_{jk})_{1\le j,k\le n}$ soit inversible, et d'autre part

$$F_{\vec{d};1,L}(a_j,u) \neq 0, \qquad j=1,\dots,n.$$

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{Z}(P)$ se trouve bien inclus dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$, ce qui conduit bien au fait que les ${}^hP_j$, $j=1,\dots,n$, définissent une sous-variété discrète de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ceci achève la preuve de (ii)$\Rightarrow$(i) et donc du théorème 3. ∎

6. Résultants-test de propreté et propreté des applications polynomiales. Dans cette section, nous nous proposons de caractériser la propreté (au sens topologique) d'une application polynomiale $P=(P_1,\dots,P_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Nous rappelons tout d'abord l'équivalence entre plusieurs caractérisations de la propreté (tant algébriques que topologiques).

PROPOSITION 5. *Soit $P=(P_1,\dots,P_n)$ une application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, avec $d_j = \deg P_j$, $j=1,\dots,n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'application P est une application propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ (au sens topologique : l'image réciproque de tout compact pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}^n$ est un compact de $\mathbb{C}^n$).*

(ii) *L'algèbre $\mathbb{C}[X]$ est une extension entière de $\mathbb{C}[P]$.*

(iii) *$\mathbb{C}[X]$ est un $\mathbb{C}[P]$-module de type fini.*

(iv) *La variété algébrique $\mathcal{Z}(P) := \{\zeta\in\mathbb{C}^n;\, P_1(\zeta)=\dots=P_n(\zeta)=0\}$ est non vide ; pour tout $u\in\mathbb{C}^n$, la variété algébrique*

$$\mathcal{Z}(P-u) := \{\zeta\in\mathbb{C}^n;\, P_1(\zeta)-u_1=\dots=P_n(\zeta)-u_n=0\}$$

est de dimension 0 ; *enfin, si*

$$(Y,X)\mapsto \Delta(Y,X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \Delta_\alpha(X) Y_1^{\alpha_1}\dots Y_n^{\alpha_n}$$

est un Bezoutien de l'application P, c'est-à-dire le déterminant d'une matrice $(Q_{jk})_{1\le j,k\le n}$ de polynômes en (Y,X) tels que

$$P_j(X) - P_j(Y) = \sum_{k=1}^{n} Q_{jk}(Y,X)(X_k - Y_k), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

les applications

$$u \in \mathbb{C}^n \mapsto \text{Résidu} \begin{bmatrix} \Delta_\alpha(\zeta)\zeta_j^{d_1+\ldots+d_n-n+1} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n \\ P_1 - u_1, \ldots, P_n - u_n \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n,\ j = 1, \ldots, n,$$

sont des applications polynomiales en u.

Preuve. On se réfèrera par exemple à l'article de H. Bass, E. Connell et D. Wright consacré à la conjecture du Jacobien [1, page 294]) ainsi qu'à [9] (ou à l'article de Michel Hickel et Jean-Yves Boyer [2]) en ce qui concerne l'équivalence avec le point (iv) dans lequel intervient le résidu de Grothendieck. ∎

On rappelle aussi le concept d'application polynomiale dominante : une application polynomiale $P = (P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ est dite *dominante* si le corps $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ est une extension de degré fini (ce degré étant $d(P)$) du corps $\mathbb{C}(P_1, \ldots, P_n)$.

Étant donnée une application polynomiale dominante P de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et un polynôme arbitraire $Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré supérieur ou égal à 1, on notera

$$\mathcal{P}_{P,Q} \in \mathbb{C}[T, Y_1, \ldots, Y_n]$$

le polynôme caractéristique de Q relativement à l'extension $(\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(P))$; il s'agit d'un polynôme de degré en T exactement $d(P)$, de la forme

$$\mathcal{P}_{P,Q}(T,Y) = T^{d(P)} + \sum_{k=0}^{d(P)-1} \mathcal{P}_{P,Q;k}(Y)T^k,$$

où $\mathcal{P}_{P,Q;k} \in \mathbb{C}(Y)$ pour $0 \leq k \leq d(P) - 1$ et de plus

$$\mathcal{P}_{P,Q}(Q(X), P(X)) \equiv 0$$

(en tant qu'élément de $\mathbb{C}(X)$).

On trouvera la proposition suivante dans [7, section 3] :

Proposition 6. *Soit $P = (P_1, \ldots, P_n)$ une application polynomiale dominante de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, avec* $\deg Q \geq 1$. *On a alors :*

(i) *Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{U}_Q$ de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour* $0 \leq k \leq d(P)-1$, *$\mathcal{P}_{P,Q;k}$ soit une fonction régulière dans $\mathcal{U}$. De plus, pour tout s dans $\mathcal{U}_Q$, l'ensemble $P^{-1}(s)$ est constitué de $d(P)$ points distincts et l'on a*

$$\mathcal{P}_{P,Q}(T,s) = \prod_{\zeta \in P^{-1}(s)} (T - Q(\zeta)), \qquad \forall s \in \mathcal{U}_Q.$$

(ii) *Si P est de plus une application polynomiale propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, les fractions rationnelles $\mathcal{P}_{P,Q;k}$, $0 \le k \le d(P)-1$, sont toutes dans $\mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_n]$.*

Considérons une application polynomiale $P=(P_1,\dots,P_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Si $d_1,\dots,d_n$ sont les degrés respectifs des polynômes P_j,

$$P_j(X)=\sum_{m_j\in\mathcal{N}_{d_j}} u^{(j)}_{m_j} m_j(X_1,\dots,X_n), \quad j=1,\dots,n,$$

on introduira dans cette section le polynôme caractéristique universel

$$F_{\vec{d}}(T;A;U;Y)\in\mathbb{Z}[T;A;U;Y]$$

de la forme $\langle A,X\rangle$ relativement aux formes à coefficients génériques

$$f_j(X)=\sum_{m_j\in\mathcal{N}_{d_j}} U^{(j)}_{m_j} m_j(X_1,\dots,X_n), \quad j=1,\dots,n.$$

Concernant les interactions entre la propreté de P et la fonction polynomiale

$$(t,a,y)\mapsto F_{\vec{d}}(t;a;u;y),$$

nous pouvons énoncer le premier résultat suivant.

Théorème 4. *Soient*

$$P=(P_1,\dots,P_n), \quad F_{\vec{d}}(T;A;U;Y)\in\mathbb{Z}[T;A;U;Y]$$

comme précédemment; on suppose de plus que P induit une application polynomiale propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, de degré $d(P)$. Le système $P=(P_1,\dots,P_n)$ a alors un nombre fini de zéros à l'infini. De plus, soit Q un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 et

$$\mathcal{P}_{P,Q}(T,Y)\in\mathbb{C}[T,Y]$$

le polynôme caractéristique de Q relativement à l'extension $(\mathbb{C}(X):\mathbb{C}(P))$ (comme P est propre, il s'agit bien d'un élément de $\mathbb{C}[T,Y]$ et non de $\mathbb{C}(T,Y)$); pour tout $s\in\mathbb{C}^n$, tout $a\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ et tout $t\in\mathbb{C}$ tel que $\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s)\neq 0$ et $F_{\vec{d}}(t;a;u;s)\neq 0$, on a

$$\frac{\frac{d}{dt}[F_{\vec{d}}(t;a;u;s)]}{F_{\vec{d}}(t;a;u;s)}=\frac{\frac{d}{dt}[\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s)]}{\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s)}. \tag{6}$$

Preuve. Nous détaillerons la preuve de ce résultat en 7 points.

• Si $d(P)=D=d_1\dots d_n=\deg_T F$, le résultat est évident puisque l'on est assuré que le cardinal de $P^{-1}(s)$ (qui vaut $d(P)$ pour s générique) est exactement égal au produit $d_1\dots d_n$ si s est générique, ce qui implique, d'après le théorème de Bézout, que

$$\{x\in\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C});\ {}^hP_1(x)=\dots={}^hP_n(x)=0\}=\emptyset.$$

On en déduit donc

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(p_{1,d_1},\dots,p_{n,d_n}) \neq 0.$$

Pour $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, le polynôme $F_{\vec{d}}[T;a;u;Y] \in \mathbb{C}[T,Y]$, du fait qu'il est de degré en T exactement $d(P)$ et que

$$F_{\vec{d}}[\langle A,X\rangle;a;u;P] \equiv 0,$$

est exactement (à une constante non nulle près) le polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}$. La conclusion du théorème est alors dans ce cas évidente.

Nous continuons donc la preuve en supposant maintenant $d(P) < D = d_1 \dots d_n$. On se donne $R > 0$, et $s \in \mathbb{C}^n$, $\|s\| \leq R$, fixé arbitrairement et $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

• On introduit une perturbation du système P, dans l'occurrence, τ désignant un paramètre complexe non nul ayant vocation à tendre vers 0, la perturbation

$$P^{(\tau)}(X) = (P_1(X) + \tau X_1^{d_1},\dots,P_n(X) + \tau X_n^{d_n}).$$

La propreté de l'application P implique l'existence de constantes $K,\gamma,\delta > 0$ telles que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n, \qquad \|\zeta\| \geq K \ \Rightarrow\ \|P(\zeta)\| \geq \gamma \|\zeta\|^\delta$$

(la norme que l'on prend ici est toujours la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$). Pour $\|\zeta\| \geq \varrho(R)$, avec $\varrho(R) > 1$ assez grand, il vient donc

$$\|P(\zeta)\| \geq 2R.$$

Il résulte du théorème de Rouché que, dès que

$$0 < |\tau| \leq \varepsilon(R),$$

avec $0 < \varepsilon(R) \ll 1$ et $\|s\| \leq R$, le nombre de zéros communs (comptés avec multiplicité) de $P^{(\tau)} - s$ dans la boule euclidienne de rayon $\varrho(R)$ reste constant et égal à $d(P)$ (ceci est en effet vrai lorsque $\tau = 0$ et que s est générique, avec $\|s\| < R$, voir le point (i) de la proposition 6, et reste valable si $|\tau| \leq \varepsilon(R)$, pourvu que $\varepsilon(R)$ soit choisi assez petit, toujours grâce au théorème de Rouché).

Comme

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(p_{1,d_1}(X)+\tau X_1^{d_1},\dots,p_{n,d_n}(X)+\tau X_n^{d_n}) = \tau^D + v_1\tau^{D-1} + v_2\tau^{D-2} + \dots,$$

il est possible, quitte à affiner le choix de $\varepsilon(R)$, de supposer que si τ appartient au disque épointé $D(0,\varepsilon(R)) \setminus \{0\}$, on a

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(p_{1,d_1}(X) + \tau X_1^{d_1},\dots,p_{n,d_n}(X) + \tau X_n^{d_n}) \neq 0.$$

On peut aussi affiner ce choix de $\varepsilon(R)$ en affirmant (toujours à l'aide du théorème de Rouché) que, pour tout entier $N \geq \varrho(R)$, il existe $\varepsilon_N(R) \ll 1$ tel que, pour

$$0 \leq |\tau| \leq \varepsilon_N(R), \qquad \|s\| \leq R,$$

les $D-d(P)$ points de $\mathcal{Z}(P^{(\tau)}-s)$ qui n'appartiennent pas à la boule euclidienne de rayon $\varrho(R)$ sont tous dans $\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|\geq N\}$.

On peut ainsi construire une suite d'entiers $(N_m)_{m\geq 1}$ strictement croissante vers ∞ telle que

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \forall\tau\in D(0,1/N_{m+1}),\ \forall s\in\mathbb{C}^n \text{ avec } \|s\|\leq R,$$
$$\mathcal{Z}(P^{(\tau_m)}-s)\cap\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|\geq\varrho(R)\}\subset\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|\geq N_m\},$$

tout en supposant de plus que

$$\forall\tau\in D(0,N_1),\qquad \mathrm{Res}_{\vec{d}}(p_{1,d_1}(X)+\tau X_1^{d_1},\dots,p_{n,d_n}(X)+\tau X_n^{d_n})\neq 0.$$

• Soit $(\tau_m)_{m\geq 1}$ une suite de nombres réels tendant vers 0, avec $0<\tau_m<1/N_{m+1}$ pour tout entier $m\geq 1$. Il résulte de l'assertion (i) de la proposition 6 qu'il existe, pour chaque $m\in\mathbb{N}^*$, un ouvert de Zariski $\mathcal{U}_{a,m}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout s dans $\mathcal{U}_{a,m}$,

$$\mathcal{P}_{P^{(\tau_m)},\langle a,X\rangle}(T,s)=\prod_{\zeta\in(P^{(\tau_m)})^{-1}[s]}(T-\langle a,\zeta\rangle).$$

De même, il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{U}_{a,\infty}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout s dans $\mathcal{U}_{a,\infty}$,

$$\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s)=\prod_{\zeta\in P^{-1}[s]}(T-\langle a,\zeta\rangle).$$

De plus, si $s\in\mathcal{U}_{a,m}$, l'ensemble $(P^{(\tau_m)})^{-1}[s]$ est constitué de D points distincts $\zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)$, $\nu=1,\dots,D$, tandis que, si $s\in\mathcal{U}_{a,\infty}$, $P^{-1}[s]$ est constitué de $d(P)$ points $\zeta_1^{(0)}(s),\dots,\zeta_{d(P)}^{(0)}(s)$. L'ouvert

$$\Omega_a:=\mathcal{U}_{a,\infty}\cap\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathcal{U}_{a,m}$$

est un ensemble dense de $\mathbb{C}^n$ (au sens de la topologie usuelle) du fait du théorème de Baire.

• Considérons un point de $\Omega_a\cap\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|\leq R\}$, dense dans $\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|\leq R\}$. On peut, pour tout $m\in\mathbb{N}$, indexer les points $\zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)$, $\nu=1,\dots,D$, de $(P^{(\tau_m)})^{-1}[s]$ de manière à ce que

$$\forall\nu\in\{d(P)+1,\dots,D\},\qquad \|\zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)\|\geq N_m.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(\tau_m)_{m\geq 1}$, on peut supposer que

$$\text{(7)}\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)}{\|\zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)\|}=y_\nu\in\{\zeta\in\mathbb{C}^n;\ \|\zeta\|=1\}\quad\text{pour } d(P)<\nu\leq D,$$

et

$$\text{(8)}\qquad \lim_{m\to\infty}\zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)=\zeta_\nu\in P^{-1}[s]\quad\text{pour } 1\leq\nu\leq d(P).$$

Notons $\mathcal{L}_\nu$, $\nu = d(P)+1,\dots,D$, l'hyperplan

$$\mathcal{L}_\nu := \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ \langle \zeta, y_\nu\rangle = 0\}$$

et

$$\mathcal{V} := \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\nu=d(P)+1}^{D} \mathcal{L}_\nu .$$

L'ouvert $\mathcal{V}$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathcal{V}$,

$$\lim_{m\to\infty} |\langle \alpha, \zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)\rangle| = \infty \quad \text{pour } \nu \in \{d(P)+1,\dots,D\}. \tag{9}$$

• Supposons que $a \in \mathcal{V}$. Pour tout $m \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{C}$ avec $t \neq \langle a,\zeta\rangle$ pour tout $\zeta \in (P^{(\tau_m)})^{-1}(s)$ et $F_{\vec{d}}(t;a;u^{(\tau_m)};s) \neq 0$, on a, compte-tenu du fait que le théorème 4 est valide lorsque $d(P) = D$, donc pour le système perturbé $P^{(\tau_m)}$, et que s est supposé appartenir à Ω_a,

$$\frac{\frac{d}{dt}[F_{\vec{d}}(t;a;u^{(\tau_m)};s)]}{F_{\vec{d}}(t;a;u^{(\tau_m)};s)} = \sum_{\nu=1}^{D} \frac{1}{t - \langle a, \zeta_\nu^{(\tau_m)}(s)\rangle}, \tag{10}$$

où $u^{(\tau_m)}$ désigne le vecteur des coefficients du système polynomial perturbé $P^{(\tau_m)}$, $m \geq 1$. Compte-tenu de (8) et (9), on a, en faisant tendre dans (10) m vers ∞, que, pour tout $t \in \mathbb{C}$ avec $t \neq \langle a,\zeta\rangle$ pour $\zeta \in P^{-1}[s]$, et $F_{\vec{d}}(t;a;u;s) \neq 0$, on a

$$\frac{\frac{d}{dt}[F_{\vec{d}}(t;a;u;s)]}{F_{\vec{d}}(t;a;u;s)} = \sum_{\zeta\in P^{-1}[s]} \frac{1}{t-\langle a,\zeta\rangle} = \frac{\frac{d}{dt}[\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s)]}{\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s)} \tag{11}$$

(toujours tenant compte de ce que $s \in \Omega_a$).

• Supposons maintenant que $a \notin \mathcal{V}$. On peut néanmoins approcher a par une suite $(a^{(\mu)})_{\mu\geq 0}$ de points de $\mathcal{V}$. Si $t \in \mathbb{C}$ est tel que $t \neq \langle a,\zeta\rangle$ pour tout $\zeta \in P^{-1}[s]$ et $F_{\vec{d}}(t;a;u;s) \neq 0$, alors, pour μ assez grand, on a aussi $t \neq \langle a^{(\mu)},\zeta\rangle$ pour tout $\zeta \in P^{-1}[s]$ et $F_{\vec{d}}(t;a^{(\mu)};u;s) \neq 0$. On a donc, d'après ce qui précède, pour tout μ assez grand,

$$\frac{\frac{d}{dt}[F_{\vec{d}}(t;a^{(\mu)};u;s)]}{F_{\vec{d}}(t;a^{(\mu)};u;s)} = \sum_{\zeta\in P^{-1}[s]} \frac{1}{t-\langle a^{(\mu)},\zeta\rangle}.$$

En faisant tendre μ vers ∞, on obtient donc, pour tout t tel que $t \neq \langle a,\zeta\rangle$ pour tout $\zeta \in P^{-1}[s]$ et tel que $F_{\vec{d}}(t;a;u;s) \neq 0$,

$$\frac{\frac{d}{dt}[F_{\vec{d}}(t;a;u;s)]}{F_{\vec{d}}(t;a;u;s)} = \sum_{\zeta\in P^{-1}[s]} \frac{1}{t-\langle a,\zeta\rangle}.$$

Comme $s \in \Omega_a$, on a bien encore (11) pour tout t tel que $t \neq \langle a,\zeta\rangle$ pour tout ζ dans $P^{-1}[s]$ et $F_{\vec{d}}(t;a;u;s) \neq 0$.

• Par densité de $\Omega_a \cap \{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ \|\zeta\| \leq R\}$ dans $\{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ \|\zeta\| = R\}$, on obtient la formule (11) pour tout $s \in \mathbb{C}^n$ de norme au plus R et tout t tel que $\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t,s) \neq 0$ et $F_{\vec{d}}(t;a;u;s) \neq 0$; comme R était arbitraire, le théorème 4 est bien démontré. ∎

La propreté d'une application polynomiale induisant une sous-variété algébrique discrète de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se teste grâce à la construction du système de résultants-test de propreté, ce qui justifie notre terminologie. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 5. *Soit $P = (P_1, \ldots, P_n)$ une application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, les polynômes étant de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$, soit*

$$P_j(X) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} u^{(j)}_{m_j} m_j(X_1, \ldots, X_n), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

On suppose que P induit une sous-variété discrète de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système de polynômes $(P_1, \ldots, P_n)$ induit une application propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.*

(ii) *Il existe $l \in \{1, \ldots, D\}$ avec :*

(a) *il existe $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que*

$$V^{(0)}_{\vec{d};l,\beta}(u) \neq 0\,;$$

(b) *pour tout $l' \in \{1, \ldots, D\}$ avec $l' > l$, et tout $\beta' \in \mathbb{N}^n$, on a*

$$V^{(0)}_{\vec{d};l',\beta'}(u) = 0\,;$$

(c) *pour tout $l'' \in \{1, \ldots, D\}$ avec $l'' \geq l$, et tous $\beta'', \gamma'' \in \mathbb{N}^n$, on a*

$$W^{(0)}_{\vec{d};l'',\beta'',\gamma''}(u) = 0.$$

Preuve. (ii)⇒(i). L'existence de l induite par la condition (ii) implique

$$F_{\vec{d};l,1}(A,u) \not\equiv 0.$$

D'autre part, l'identité (3) devient, sous cette même condition (ii),

$$F_{\vec{d};l,1}(A,u)\langle A,X\rangle^l + \sum_{\lambda=0}^{l-1} F_{\vec{d};\lambda}(A,U,P)\langle A,X\rangle^\lambda \equiv 0. \tag{12}$$

Si l'on choisit n vecteurs $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ indépendants de $\mathbb{C}^n$ tels que $F_{\vec{d};l,1}(a^{(j)},u) \neq 0$ pour $j = 1, \ldots, n$ (ce que le principe des tiroirs nous autorise à faire), on voit immédiatement (du fait des relations (12) écrites en spécifiant $A = a^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$) que $\mathbb{C}[\langle a^{(1)},X\rangle, \ldots, \langle a^{(n)},X\rangle]$, donc aussi $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, est une extension entière de $\mathbb{C}[P_1, \ldots, P_n]$; la propreté de P en résulte (voir la proposition 5).

(i)⇒(ii). Soit $l = d(P)$. De l'identité (dans $\mathbb{C}[t, a, s]$)

$$\frac{\frac{d}{dt}[F_{\vec{d}}(t; a; u; s)]}{F_{\vec{d}}(t; a; u; s)} = \frac{\frac{d}{dt}[\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t, s)]}{\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(t, s)}$$

obtenue grâce au théorème 4, on tire que

$$\deg_T F_{\vec{d}}(T; A; u; Y) = l.$$

D'autre part, du fait que $\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}$ divise $F_{\vec{d}}(\cdot; a; u; \cdot)$ dans $\mathbb{C}[T, Y]$ lorsque $a \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, on a bien

$$F_{\vec{d}}(T; a; u; Y) = F_{\vec{d};l}(a, U, Y)\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(T, Y)$$

pour tout $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Nous allons montrer par l'absurde que nécessairement

$$F_{\vec{d};l,2}(A, u, Y) \equiv 0.$$

Si cela n'était pas le cas, on pourrait trouver $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$F_{\vec{d};l,2}(a, u, Y) \not\equiv 0$$

et que les polynômes homogènes $p_{1,d_1}, \ldots, p_{n,d_n}, \langle a, X\rangle$ n'aient aucun zéro commun dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (on utilise ici le fait que les polynômes $P_1, \ldots, P_n$ n'ont aucun zéro à l'infini). Soit $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ un point de l'hypersurface

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^n;\ F_{\vec{d};l}(a, u, \zeta) = 0\}.$$

On a

$$F_{\vec{d};l}(a, u, Y) = F_{\vec{d}:l,2}(a, u, Y - \delta)$$

et, par conséquent,

$$F_{\vec{d}}(T; a; u; Y + \delta) = F_{\vec{d};l,2}(a, U, Y)\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(T, Y + \delta).$$

On aurait ainsi, pour tout $l = 0, \ldots, D$,

$$F_{\vec{d};l,1}(a, u^{(\delta)}) = 0,$$

où $u^{(\delta)}$ désigne le système des coefficients de l'application polynomiale $P+\delta$. Ceci impliquerait (voir la preuve de (i)⇒(ii) du théorème 3) que $\mathcal{Z}(P + \delta)$ serait infini, ce qui est absurde, puisque P est propre. On a donc

$$F_{\vec{d}}(T; a; u; Y + \delta) = F_{\vec{d};l,1}(a, U)\mathcal{P}_{P,\langle a,X\rangle}(T, Y),$$

d'où les conditions (1). ■

Afin d'aller plus loin (et de décrire une liste de résultants-test de propreté sans la restriction de finitude à l'infini), nous allons introduire les résultants-test de propreté d'ordre supérieur.

Étant données n formes génériques de degrés $d_1, \ldots, d_n$,

$$f_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} U^{(j)}_{m_j} m_j(X_1, \ldots, X_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

on leur associe le système de formes génériques “perturbé”

$$f_j(X_1,\dots,X_n;\tau) := \sum_{m_j\in\mathcal{N}_{d_j}} U^{(j)}_{m_j} m_j(X_1,\dots,X_n) + \tau X_j^{d_j}$$

$$= \sum_{m_j\in\mathcal{N}_{d_j}} U^{(j),\tau}_{m_j} m_j(X_1,\dots,X_n) \ \in \mathbb{Z}[U^{(j)}_{m_j},\, m_j\in\mathcal{N}_{d_j};\, X;\, \tau], \qquad j=1,\dots,n.$$

On pose

$$F^{\tau}_{\vec{d}}(T;A;U;Y) := F_{\vec{d}}(T;A;U^{\tau};Y).$$

Comme au début de la section 3, on a

$$F^{\tau}_{\vec{d}}(T;A;U;Y) = \mathrm{Res}_{\vec{d}}(f^{\tau}_{1,d_1},\dots,f^{\tau}_{n,d_n})T^D + \sum_{l=1}^{D} F_{\vec{d},l}(A,U,Y)T^{D-l},$$

où

$$f^{\tau}_{j,d_j}(U^{(j)},X) = f_{j,d_j}(U^{(j)},X) + \tau X_j^{d_j}, \qquad j=1,\dots,n.$$

Écrivons, pour $l=0,\dots,D-1$,

$$F^{\tau}_{\vec{d};l}(A,U,Y) = F^{\tau}_{\vec{d};l,1}(A,U) + F^{\tau}_{\vec{d};l,2}(A,U,Y).$$

Chaque $F^{\tau}_{\vec{d};l,1}(A,U)$ se développe comme un polynôme en τ sous la forme

$$F^{\tau}_{\vec{d};l,1}(A,U) = \sum_{\nu=0}^{D}\Big(\sum_{\beta\in\mathbb{N}^n} V^{(\nu)}_{\vec{d};l,\beta}(U)A_1^{\beta_1}\dots A_n^{\beta_n}\Big)\tau^{\nu}.$$

De même

$$\mathrm{Res}_{\vec{d}}(f^{\tau}_{1,d_1},\dots,f^{\tau}_{n,d_n}) = \sum_{\nu=0}^{D} V^{(\nu)}_{\vec{d};D}(U)\tau^{\nu}.$$

Enfin, chaque $F^{\tau}_{\vec{d};l,2}(A,U,Y)$ se développe sous la forme

$$F^{\tau}_{\vec{d};l,2}(A,U,Y) = \sum_{\nu=0}^{D}\Big(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \gamma\in\mathbb{N}^n,\,\gamma\neq 0}} W^{(\nu)}_{\vec{d};l,\beta,\gamma}(U)A_1^{\beta_1}\dots A_n^{\beta_n}\Big)\tau^{\nu}.$$

Définition 4. Pour tout entier ν entre 0 et D, les éléments non nuls (en tant qu'éléments de $\mathbb{Z}[U]$) de la liste $V^{(\nu)}_{\vec{d};D}$, $V^{(\nu)}_{\vec{d};l,\beta}$, $l=0,\dots,D-1$, $\beta\in\mathbb{N}^n$, sont appelés *résultants-tests de propreté principaux* d'ordre ν et de classe l associés au système de polynômes génériques $(f_1,\dots,f_n)$. Pour tout entier ν entre 0 et D, les éléments non nuls (en tant qu'éléments de $\mathbb{Z}[U]$) de la liste $W^{(\nu)}_{\vec{d};l,\beta,\gamma}$, $l=0,\dots,D-1$, $\beta\in\mathbb{N}^n, \gamma\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}$, sont appelés *résultants-tests de propreté conditionnels* d'ordre ν et de classe l associés à $(f_1,\dots,f_n)$.

Remarquons que lorsque $\nu = 0$, on retrouve bien les listes de résultants-test de propreté principaux et conditionnels associés au système de polynômes génériques $(f_1, \dots, f_n)$ et introduits dans la définition 3.

Nous terminerons cette section en proposant la conjecture suivante :

CONJECTURE 1. *Soit $P = (P_1, \dots, P_n)$ une application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, les polynômes étant de degrés respectifs $d_1, \dots, d_n$, soit*

$$P_j(X) = \sum_{m_j \in \mathcal{N}_{d_j}} u^{(j)}_{m_j} m_j(X_1, \dots, X_n), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Le système de polynômes $(P_1, \dots, P_n)$ induit une application propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.*

(ii) *Il existe $\nu \in \{0, \dots, D\}$ et $l \in \{1, \dots, D\}$ avec :*

(a) *Pour tout entier ν' entre 0 et $\nu - 1$, tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, et tout $\gamma \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$, on a*

$$V^{(\nu')}_{\vec{d};l',\beta}(u) = 0, \qquad l' = 0, \dots, D,$$
$$W^{(\nu')}_{\vec{d};l',\beta,\gamma}(u) = 0, \qquad l' = 0, \dots, D-1.$$

(b) *Il existe $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $V^{(\nu)}_{\vec{d};l,\beta}(u) \neq 0$.*

(c) *Pour tout $l' \in \{1, \dots, D\}$ avec $l' > l$ et tout $\beta' \in \mathbb{N}^n$, on a $V^{(\nu)}_{\vec{d};l',\beta'}(u) = 0$.*

(d) *Pour tout $l'' \in \{1, \dots, D\}$ avec $l'' \geq l$, et tous β'', γ'' dans $\mathbb{N}^n$ $(\gamma'' \neq 0)$, on a $W^{(\nu)}_{\vec{d};l'',\beta'',\gamma''}(u) = 0$.*

L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) est, comme dans la preuve du théorème 5, une implication facile. La difficulté réside dans l'implication réciproque.

RÉFÉRENCES

[1] H. Bass, E. H. Connell and D. Wright, *The Jacobian conjecture; resolution of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), 287–330.

[2] J. Y. Boyer et M. Hickel, *Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus*, Bull. Soc. Math. France 125 (1997), 315–335.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[4] J. P. Jouanolou, *Le formalisme du résultant*, Adv. Math. 90 (1991), 117–263.

[5] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Springer, 2002.

[6] P. Philippon, *Critères pour l'indépendance polynomiale*, Publ. I.H.E.S. 64 (1986), 5–52.

[7] A. Płoski, *On the growth of proper polynomial mappings*, Ann. Polon. Math. 45 (1985), 297–309.

[8] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Vols. 1 & 2, Springer, 1994.

[9] A. Yger, *Courants résidus et applications*, École Doctorale de Mathématiques, Bordeaux, 1994.

Central University of Nationalities
Unit 33 of Teachers' Department
Room 8
Beijing 100081, China
E-mail: zhanghaii@hotmail.com

Received 23 August 2002;
revised 18 August 2003 (4257)