COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 121 2010 NO. 1

FEUILLETAGE CANONIQUE SUR LE FIBRÉ DE WEIL

PAR

BASILE GUY RICHARD BOSSOTO (Brazzaville)

Abstract. Let be M a smooth manifold, A a local algebra and M^A a manifold of infinitely near points on M of kind A. We build the canonical foliation on M^A and we show that the canonical foliation on the tangent bundle TM is the foliation defined by its canonical field.

1. Préliminaires

1.1. Dérivation d'une algèbre. Soit A une algèbre commutative et unitaire sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}$ un A-module. Une *dérivation* de A dans $\mathfrak{M}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $d : A \to \mathfrak{M}$ telle que

$$d(ab) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b) \quad \text{pour tous } a, b \in A.$$

Évidemment $d(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

On note $\mathrm{Der}(A, \mathfrak{M})$ le A-module des dérivations de A dans $\mathfrak{M}$. Lorsque $\mathfrak{M} = A$, une dérivation de A dans A est simplement appelée dérivation de A et on note $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A)$, ou simplement $\mathrm{Der}(A)$ s'il n y a pas de confusion, le A-module des dérivations de A.

Si A et B sont deux algèbres quelconques et si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'algèbres, alors B est un A-module.

Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres. Une application $\mathbb{R}$-linéaire $d : A \to B$ est une *φ-dérivation* si

$$d(ab) = d(a) \cdot \varphi(b) + \varphi(a) \cdot d(b) \quad \text{pour tous } a, b \in A.$$

1.2. Algèbre locale et variété des points proches. Une *algèbre locale au sens de Weil* est une algèbre réelle commutative unitaire A, de dimension finie sur $\mathbb{R}$, ayant un idéal maximal unique $\mathfrak{m}$ de codimension 1. On a ainsi

$$A = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}.$$

Dans ce cas, compte tenu du lemme de Nakayama, l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est nilpotent. Le plus petit entier positif k tel que $\mathfrak{m}^{k+1} = (0)$ est la *hauteur* de A et la dimension sur $\mathbb{R}$ de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est la *largeur* ou la *profondeur* de A.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 58A32, 58A20, 57R30, 13N15.

Key words and phrases: near point, local algebra, foliation, derivation.

DOI: 10.4064/cm121-1-2

Lorsque A est une algèbre locale (de dimension finie), l'ensemble $\mathrm{Der}(A)$ des dérivations de A est une algèbre de Lie de dimension finie : c'est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes de A.

Dans toute la suite, M est une variété différentielle paracompacte de classe C^∞ de dimension n et A une algèbre locale au sens de Weil. On note $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M, $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M et TM le fibré tangent à M.

Un *point proche* de $p \in M$ d'espèce A [5], [2] est un homomorphisme d'algèbres

$$\xi : C^\infty(M) \to A$$

tel que, pour tout $f \in C^\infty(M)$,

$$[\xi(f) - f(p)] \in \mathfrak{m}.$$

On note M_p^A l'ensemble des points proches de $p \in M$ d'espèce A et

$$M^A = \bigcup_{p\in M} M_p^A.$$

L'ensemble $M^A = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(C^\infty(M), A)$ est une variété différentielle de dimension $\dim(M) \cdot \dim(A)$ et est appelée *variété des points proches* de M d'espèce A [5] ou simplement *fibré de Weil d'espèce A*.

Exemple 1.1. 1. Lorsque $A = \mathbb{R}$, on identifie $M^{\mathbb{R}}$ à M par l'application

$$M \to M^{\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}_{A\,\mathrm{lg}}(C^\infty(M), \mathbb{R}), \quad p \mapsto \{f \mapsto f(p)\}.$$

2. Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie r dont une base est $(v_1, \ldots, v_r)$, si $(v_1^*, \ldots, v_r^*)$ désigne la base duale de $(v_1, \ldots, v_r)$, alors l'application

$$V^A \xrightarrow{\theta} V \otimes A, \quad \xi \mapsto \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \xi(v_i^*),$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Lorsque $A = \mathbb{D} = \{a + \varepsilon b : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$ est l'ensemble des nombres duaux, qui est isomorphe à l'algèbre des polynômes tronqués $\mathbb{R}[x]/(x^2)$, on note $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale de la base canonique $(1, \varepsilon)$ de $\mathbb{D}$. La variété $M^{\mathbb{D}}$ est identifiée au fibré tangent TM par l'application

$$M^{\mathbb{D}} \to TM, \quad \xi \mapsto \varepsilon^* \circ \xi,$$

l'application réciproque étant

$$TM \to M^{\mathbb{D}}, \quad v \mapsto \{\xi : f \mapsto f(p) + \varepsilon \cdot v(f)\}$$

si $v \in T_pM$.

4. Plus généralement, si $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_s]/(x_1, \ldots, x_s)^{k+1}$ est l'algèbre des polynômes tronquée, alors $M^A = J_0^k(\mathbb{R}^s, M)$ est l'ensemble des jets en $0 \in \mathbb{R}^s$ d'ordre k des applications de $\mathbb{R}^s$ dans M.

1.3. Champs de vecteurs sur M^A. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M^A à valeurs dans A, noté $C^\infty(M^A, A)$, est une A-algèbre commutative unitaire, d'unité l'application

$$1_{C^\infty(M^A,A)} : \xi \mapsto 1_A.$$

Pour $f \in C^\infty(M)$, l'application

$$f^A : M^A \to A, \quad \xi \mapsto \xi(f),$$

est de classe C^∞ et l'application

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A), \quad f \mapsto f^A,$$

est un homomorphisme d'algèbres.

Si $(a_i)_{i=1,\dots,s}$ est une base de A et $(a_i^*)_{i=1,\dots,s}$ la base duale, on identifie $C^\infty(M^A, A)$ à $A \otimes C^\infty(M^A)$ par l'application

$$\sigma : \varphi \mapsto \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes (a_i^* \circ \varphi).$$

Ainsi, $\sigma(f^A) = \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes (a_i^* \circ f^A)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

On note

$$\gamma : C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A), \quad f \mapsto \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes (a_i^* \circ f^A),$$

et $\mathrm{Der}_\gamma[C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)]$ le $A \otimes C^\infty(M^A)$-module des γ-dérivations de $C^\infty(M)$ dans $A \otimes C^\infty(M^A)$, c'est-à-dire l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires

$$D : C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$$

telles que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$D(fg) = D(f) \cdot \gamma(g) + \gamma(f) \cdot D(g).$$

Une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ [1] est une dérivation par rapport à l'homomorphisme

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A), \quad f \mapsto f^A,$$

c'est-à-dire, une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A)$$

telle que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$X(fg) = X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g).$$

L'ensemble $\mathrm{Der}[C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)]$, des dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, est un $C^\infty(M^A, A)$-module. D'après [3], [4], l'application

$$\mathrm{Der}[C^\infty(M^A)] \to \mathrm{Der}_\gamma[C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)], \quad X \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$-modules.

Il s'ensuit que l'application

$$\mathrm{Der}[C^\infty(M^A)] \to \mathrm{Der}[C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)], \qquad X \mapsto \sigma^{-1} \circ (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$-modules qui permet de transporter sur $\mathrm{Der}[C^\infty(M^A)]$ la structure de $C^\infty(M^A, A)$-module de $\mathrm{Der}[C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)]$. On peut donc regarder un champ de vecteurs sur M^A comme une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ [1].

Proposition 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *Un champ de vecteurs sur M^A est une section différentiable du fibré tangent (TM^A, π_{M^A}, M^A).*
2. *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M^A)$.*
3. *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$.*

Exemple 1.2. Soit C le champ de Liouville sur le fibré tangent TM. Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur la variété M, si $y_i = dx_i$ désigne la coordonnée sur la fibre,

$$C = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

c'est-à-dire $C(x_i) = 0$ et $C(y_i) = y_i$.

Puisque l'application

$$\gamma : C^\infty(M) \to \mathbb{D} \otimes C^\infty(TM), \qquad f \mapsto 1 \otimes 1^* \circ f^{\mathbb{D}} + \varepsilon \otimes \varepsilon^* \circ f^{\mathbb{D}},$$

où

$$f^{\mathbb{D}}(v) = f(p) + \varepsilon \cdot v(f), \qquad v \in T_pM,$$

est telle que

$$\begin{aligned}
\gamma(x_i)(1 \otimes v) &= [1 \otimes 1^* \circ x_i^{\mathbb{D}} + \varepsilon \otimes \varepsilon^* \circ x_i^{\mathbb{D}}](1 \otimes v) \\
&= 1 \otimes 1^*[x_i(p) + \varepsilon \cdot v(x_i)] + \varepsilon \otimes \varepsilon^*[x_i(p) + \varepsilon \cdot v(x_i)] \\
&= 1 \otimes x_i(p) + \varepsilon \otimes v(x_i) = [1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes dx_i](1 \otimes v) \\
&= [1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes y_i](1 \otimes v),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\gamma(x_i) = 1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes y_i,$$

la dérivation $X : C^\infty(M) \to C^\infty(TM, \mathbb{D})$ correspondant au champ de Liouville C est donnée par

$$\begin{aligned}
X(x_i) &= \sigma^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{D}} \otimes C) \circ \gamma(x_i) = \sigma^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{D}} \otimes C) \circ (1 \otimes x_i + \varepsilon \otimes y_i) \\
&= \sigma^{-1} \circ [1 \otimes C(x_i) + \varepsilon \otimes C(y_i)] = \varepsilon \cdot y_i.
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous regarderons un champ de vecteurs comme une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$.

1.3.1. *Champs de vecteurs sur M^A provenant des dérivations de A*

PROPOSITION 2. *Si d est une dérivation de A, alors l'application*

$$d^* : C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A), \qquad f \mapsto (-d) \circ f^A,$$

est un champ de vecteurs sur M^A.

Démonstration. L'application d^* est $\mathbb{R}$-linéaire et pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$ et pour $\xi \in M^A$, on a

$$\begin{aligned} d^*(fg)(\xi) &= (-d) \circ (fg)^A(\xi) = (-d) \circ (f^A \cdot g^A)(\xi) = (-d)[f^A(\xi) \cdot g^A(\xi)] \\ &= (-d)[f^A(\xi)] \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot (-d)[g^A(\xi)] \\ &= [(-d) \circ f^A](\xi) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot [(-d) \circ f^A](\xi) \\ &= ([(-d) \circ f^A] \cdot g^A + f^A \cdot [(-d) \circ f^A])(\xi) \\ &= [d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g)](\xi). \end{aligned}$$

Comme ξ est quelconque, on en déduit que

$$d^*(fg) = d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g).$$

Ainsi, d^* est un champ de vecteurs sur M^A.

Le champ de vecteurs d^* est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation d de A et pour trois dérivations d_1, d_2, d de A et pour $a \in A$, on a [1]

$$[d_1^*, d_2^*] = [d_1, d_2]^*, \qquad (a \cdot d)^* = a \cdot d^*.$$

2. Feuilletage induit par les dérivations de A

THÉORÈME 2.1. *Soit $d_1, \ldots, d_r$ une base de* $\mathrm{Der}(A)$*. Les champs de vecteurs $d_1^*, \ldots, d_r^*$ induits par $d_1, \ldots, d_r$ sur M^A sont linéairement indépendants et définissent un feuilletage $\mathcal{F}_r$ de dimension r sur M^A.*

Démonstration. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in C^\infty(M^A, A)$ telles que $\varphi_1 \cdot d_1^* + \cdots + \varphi_r \cdot d_r^* = 0$.

Pour $f \in C^\infty(M)$, et pour tout $\xi \in M^A$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [\varphi_1 \cdot d_1^* + \cdots + \varphi_r \cdot d_r^*](f)(\xi) \\ &= [\varphi_1 \cdot ((-d_1) \circ f^A) + \cdots + \varphi_r \cdot ((-d_r) \circ f^A)](\xi) \\ &= -\varphi_1(\xi) \cdot d_1(\xi(f)) - \cdots - \varphi_r(\xi) \cdot d_r(\xi(f)) \\ &= -[\varphi_1(\xi) \cdot d_1(\xi(f)) + \cdots + \varphi_r(\xi) \cdot d_r(\xi(f))] \end{aligned}$$

Puisque les dérivations $d_1, \ldots, d_r$ sont linéairement indépendantes, on a alors

$$\varphi_1(\xi) = \cdots = \varphi_r(\xi) = 0.$$

Comme ξ est quelconque, on conclut que,

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_r = 0$$

c'est-à-dire que les champs de vecteurs $d_1^*, \ldots, d_r^*$ sont linéairement indépendants.

De plus, pour $i, j \in \{1, \ldots, r\}$,

$$[d_i^*, d_j^*] = [d_i, d_j]^*.$$

Le système différentiel engendré par d_1^*, $\ldots, d_r^*$ est complètement intégrable. Il définit donc un feuilletage $\mathcal{F}_r$ de dimension r que nous appelons *feuilletage canonique* sur M^A.

Ceci achève la démonstration.

2.1. Feuilletage canonique sur le fibré tangent TM

PROPOSITION 3. *Le feuilletage canonique sur le fibré tangent TM est le feuilletage défini par son champ de vecteurs canonique (champ de Liouville) C.*

Démonstration. Soit d une dérivation de $\mathbb{D}$. Alors

$$0 = d(\varepsilon^2) = d(\varepsilon \cdot \varepsilon) = 2\varepsilon \cdot d(\varepsilon).$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$. Toute dérivation de $\mathbb{D}$ est donc de la forme $d(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit d_0 la dérivation de $\mathbb{D}$ telle que $d_0(\varepsilon) = -\varepsilon$; alors $\mathrm{Der}(\mathbb{D}) = \mathbb{R}\cdot d_0$ est l'algèbre de Lie de dimension 1, engendrée par d_0.

Le champ de vecteurs provenant de la dérivation d_0 est l'application

$$d_0^* : C^\infty(M) \to C^\infty(TM, \mathbb{D}), \qquad f \mapsto (-d_0) \circ f^{\mathbb{D}},$$

c'est-à-dire, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales sur la variété M, et si $(y_1, \ldots, y_n)$ désignent les coordonnées sur la fibre,

$$d_0^*(x_i) = (-d_0) \circ (x_i)^{\mathbb{D}} = -d_0 \circ (x_i + \varepsilon y_i) = -d_0 \circ [\varepsilon \cdot y_i] = \varepsilon \cdot y_i.$$

Le champ de vecteurs d_0^* est donc le champ de Liouville sur le fibré tangent et le feuilletage induit par d_0^* sur TM est par conséquent le feuilletage canonique de TM.

RÉFÉRENCES

[1] B. Bossoto et E. Okassa, *Champs de vecteurs et formes différentielles sur une variété des points proches*, Arch. Math. (Brno) 44 (2008), 159–171.

[2] A. Morimoto, *Prolongations of connections to bundles of infinitely near points*, J. Differential Geom. 11 (1976), 479–498.

[3] E. Okassa, *Prolongements des champs de vecteurs à des variétés des points proches*, C. R. Acad. Sci. Paris 300 (1985), 173–176.

[4] E. Okassa, *Prolongement des champs de vecteurs à des variétés des points proches*, Ann. Fac. Sci. Toulouse 8 (1986–1987), 349–366.

[5] A. Weil, *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*, dans: Géométrie différentielle, Colloque, Strasbourg, 1953, 111–117.

Basile Guy Richard Bossoto
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Marien Ngouabi
BP. 69, Brazzaville, Congo
E-mail: bossotob@yahoo.fr

Received 6 October 2008;
revised 25 November 2009 (5109)