COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 131 2013 NO. 2

$L^p(G, X^*)$ COMME SOUS-ESPACE COMPLÉMENTÉ DE $L^q(G, X)^*$

PAR

MOHAMMAD DAHER (Le Mée-sur-Seine)

Abstract. Let G be a compact metric infinite abelian group and let X be a Banach space. We study the following question: if the dual X^* of X does not have the Radon–Nikodym property, is $L^p(G, X^*)$ complemented in $L^q(G, X)^*$, $1 < p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, or, if $p = 1$, in the subspace of $C(G, X)^*$ consisting of the measures that are absolutely continuous with respect to the Haar measure?

We show that the answer is negative if X is separable and does not contain ℓ^1, and if $1 \leq p < \infty$. If $p = 1$, this answers a question of G. Emmanuele. We show that the answer is positive if X^* is a Banach lattice that does not contain a copy of c_0, $1 \leq p < \infty$. It is also positive, by a different method, if $p = \infty$ and $X^* = M(K)$, where K is a compact space with a perfect subset.

Moreover, we examine whether $C_\Lambda(G, X^*)$ may be complemented in $L^\infty_\Lambda(G, X^*)$, where Λ is a subset of Γ, the dual group of G, when the space X is separable and $L^1(G, X)/L^1_{\Lambda^c}(G, X)$ does not contain ℓ^1.

1. Introduction, notations, rappels. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et Y un espace de Banach, dont le dual est noté Y^*. Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\mu, Y)$ est l'espace des classes de fonctions $\Omega \to Y$ (pour l'égalité μ-presque partout), fortement mesurables et de puissance p-ième intégrable si $1 \leq p < \infty$, fortement mesurables bornées si $p = \infty$.

L'espace $M(\Omega, Y)$ est l'espace des mesures à variation bornée définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans l'espace de Banach Y. La notation $\mathrm{cabv}(\mu, Y)$ désigne le sous-espace de $M(\Omega, Y)$ formé des mesures ν qui sont absolument continues par rapport à μ, c'est-à-dire dont la variation $|\nu|$ est dans $L^1(\mu)$. L'espace $L^1(\mu, Y)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $\mathrm{cabv}(\mu, Y)$.

On considère ici les espaces de probabilité $(G, \mathcal{B}, m_G)$ où G est un groupe abélien compact métrisable infini, $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de G, et m_G la mesure de Haar. Les résultats (sauf les théorèmes 2.1 et 2.2) restent valables si on remplace les espaces $L^p(G, Y)$ et $\mathrm{cabv}(m_G, Y)$ par $L^p(\mu, Y)$ et $\mathrm{cabv}(\mu, Y)$, où μ est une mesure sans atomes et $L^1(\mu)$ est séparable. En effet, par le théorème de Carathéodory [Roy, Chap. 15, p. 399], $L^1(G)$ est isométrique à $L^1(\mu)$. Il en est donc de même pour $L^p(G)$ et par dualité pour

2010 *Mathematics Subject Classification*: 43A15, 46G10; Secondary 46B22.
Key words and phrases: $L^p(G, X^*)$, complemented subspace of $L^q(G, X)^*$, Radon–Nikodym property.

DOI: 10.4064/cm131-2-9

$L^\infty(G)$, puis pour $L^1(G,Y) = L^1(G) \widehat{\otimes} Y$, donc pour $L^p(G,Y)$, $1 < p < \infty$, enfin pour $L^\infty(G,Y)$, vu comme le sous-espace du dual de $L^1(G,Y^*)$ formé des éléments qui sont dans $L^1(G,Y)$.

Si $1 \le p \le \infty$, on introduit l'exposant conjugué q défini par $1/p+1/q = 1$. Étant donné un espace de Banach X, rappelons que $L^p(G,X^*)$, $1 < p \le \infty$, est isométriquement un sous-espace de $L^q(G,X)^*$ [Dieud, lemme 2], ou [DU, p. 98]. On considère les questions suivantes :

- L'espace $L^p(G,X^*)$, sous-espace fermé du dual de $L^q(G,X)$, est-il complémenté dans cet espace, pour $1 < p \le \infty$?
- L'espace $L^1(G,X^*)$ est-il complémenté dans $\mathrm{cabv}(m_G,X^*)$?

Ces questions n'ont un intérêt que si X^* ne possède pas la *propriété de Radon–Nikodym*. En effet, l'espace Y a la propriété de Radon–Nikodym si $\mathrm{cabv}(\mu,Y) = L^1(\mu,Y)$ pour tout espace de probabilité [DU, Definition III.1.3] ; il suffit que ce soit vrai pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ [DU, Theorem V.3.8]. L'espace dual X^* a la propriété de Radon–Nikodym si et seulement si

$$L^p(\mu,X^*) = L^q(\mu,X)^*$$

pour tout $1 < p \le \infty$, ou encore si cette égalité a lieu pour un tel p [DU, Theorem IV.1.1]. Lorsque X est séparable, X^* a cette propriété si et seulement s'il est séparable [DU, Corollary VII.2.8].

On montre dans la partie 2 que si X est un espace de Banach séparable ne contenant pas ℓ^1 et si X^* n'a pas la propriété de Radon–Nikodym, alors $L^p(G,X^*)$ n'est pas complémenté dans $L^q(G,X)^*$, $1 < p < \infty$, et $L^1(G,X^*)$ n'est pas complémenté dans $\mathrm{cabv}(m_G,X^*)$. Le cas $p=1$ répond négativement à une question de [Em].

Dans la partie 3 de cet article, on montre l'existence de projections continues $M(G,Y) \to L^1(G,Y)$ et $L^q(G,X)^* \to L^p(G,X^*)$, $1 < p < \infty$, lorsque Y (resp. X^*) est un treillis de Banach qui ne contient pas c_0. Un exemple est $M(K) = C(K)^*$ où K est un espace topologique compact. On montre aussi, par une méthode différente, que $L^\infty(G,M(K))$ est complémenté dans le dual de $L^1(G,C(K))$.

La non complémentation de $L^p(G,X^*)$ dans la partie II est en fait un cas particulier de la non complémentation de certains espaces $L^p_\Lambda(G,X^*)$. Précisons les notations. Soit Γ le groupe dual de G. Pour $\Lambda \subset \Gamma$ et pour p tel que $1 \le p \le \infty$, on note

$$L^p_\Lambda(G,Y) = \Big\{ f \in L^p(G,Y) \,;\, \int_G f(t)\lambda(-t)\,dt = 0,\ \forall \lambda \notin \Lambda \Big\},$$

et $C_\Lambda(G,Y)$ est le sous-espace des fonctions continues $G \to Y$ qui sont dans $L^\infty_\Lambda(G,Y)$. L'espace $L^p_\Lambda(G,X^*)$, pour $1 < p \le \infty$, est un sous-espace fermé de E_q^* où E_q est le quotient de $L^q(G,X)$ défini par

$$E_q = L^q(G,X)/L^q_{\Lambda^c}(G,X).$$

Soit X un espace de Banach séparable qui ne contient pas ℓ^1. On montre dans la partie 2 que si $L^p_\Lambda(G,X^*)$ est un sous-espace strict de E_q^*, il n'est pas complémenté dans E_q^*, $1 < p < \infty$. Si de plus E_1 ne contient pas ℓ^1 et si $C_\Lambda(G,X^*)$ est un sous-espace strict de $L^\infty_\Lambda(G,X^*)$, alors $C_\Lambda(G,X^*)$ n'est pas complémenté dans $L^\infty_\Lambda(G,X^*)$.

On aura encore besoin des notations, précisions et rappels qui suivent.

La dualité. L'espace $M(G,X^*)$ est le dual de $C(G,X)$ [Din, Sect. III-19-3, Theorem 2]. La dualité entre $L^p(G,X^*)$, $1 \le p \le \infty$, et $L^q(G,X)$ est définie par

$$\langle f,h\rangle = \int_G \langle f(y), h(-y)\rangle\,dy, \qquad f\in L^p(G,X^*),\ h\in L^q(G,X). \tag{1.1}$$

Supposons X séparable. On note $\mathcal{L}^p(G,X^*)$, $1 \le p \le \infty$, l'espace des fonctions f préfaiblement mesurables $G \to X^*$ telles que la fonction $g \mapsto \|f(g)\|_{X^*}$ (qui est mesurable par la séparabilité de X) appartienne à $L^p(G)$. Alors, isométriquement, pour $1 < p \le \infty$,

$$\mathrm{cabv}(m_G, X^*) = \mathcal{L}^1(G,X^*), \qquad \mathcal{L}^p(G,X^*) = L^q(G,X)^*,$$

d'après le théorème de Dunford–Pettis si $p=\infty$, ou [Dieud, théorème 2] si $1 < p < \infty$, et (1.1) reste valable pour $f \in \mathcal{L}^p(G,X^*)$. On associe à chaque fonction $f \in L^q(G,X)^*$, $1 \le q < \infty$, l'opérateur borné $T_f : L^q(G) \to X^*$, défini pour $x \in X$ et $\psi \in L^q(G)$ par

$$\langle T_f(\psi), x\rangle = \langle f, \psi\otimes x\rangle.$$

Translation et convolution par $L^1(G)$ sur $L^q(G,X)^*$, $1 \le q < \infty$. Si $t \in G$, $h \in L^q(G,X)$ et $1 \le q \le \infty$, on note h_t la fonction définie par $h_t(y) = h(t+y)$ pour presque tout $y \in G$. Si $f \in L^q(G,X)^*$, alors f_t est définie par dualité : $\langle f_t, h\rangle = \langle f, h_t\rangle$, et les deux notions coïncident dans le cas où $f \in L^p(G,X^*)$. Comme la fonction $t \mapsto h_t$ est continue $G \to L^q(G,X)$, $1 \le q < \infty$, la fonction $t \mapsto \langle f_t, h\rangle$ est dans $C(G)$. En particulier si $h = \psi\otimes x$, où $\psi \in L^q(G)$ et $x \in X$, alors

$$\langle f_t, \psi\otimes x\rangle = \langle T_f(\psi_t), x\rangle = \langle \psi_t, T_f^*(x)\rangle = T_f^*(x) * \psi(t). \tag{1.2}$$

Soit $\varphi \in L^1(G)$. Si $h \in L^q(G,X)$, alors $1 \le q \le \infty$, alors $h * \varphi$ est définie par l'intégrale de Bochner :

$$h*\varphi(t) = \int_G h_t(y)\varphi(-y)\,dy.$$

L'endomorphisme $S_\varphi : h \mapsto h*\varphi$ sur $L^q(G,X)$ est de norme au plus égale à $\|\varphi\|_1$. Pour $f \in L^q(G,X)^*$ on note encore $f*\varphi$ l'élément $S_\varphi^*(f)$, $1 \le q < \infty$.

Pour $h \in L^q(G,X)$ on a

$$\langle f * \varphi, h\rangle = \int_G \langle f_t, h\rangle \varphi(-t)\,dt. \tag{1.3}$$

En effet, par densité, il suffit de le vérifier pour $h = \psi \otimes x$ où $\psi \in L^q(G)$, ce qui résulte de (1.2) et du cas scalaire. Lorsque $f \in L^p(G,X^*)$, on retrouve la définition usuelle de $f * \varphi$.

Vérifions que S_φ^* est à valeurs dans $L^p(G,X^*)$, $1 < p < \infty$ (resp. $C(G,X^*)$ si $p = \infty$). Si $\varphi_n \to \varphi$ dans $L^1(G)$ lorsque $n \to \infty$, alors $S_{\varphi_n}^* \to S_\varphi^*$ en norme. Il suffit donc de montrer que l'image de S_λ^* est dans $C(G,X^*)$ pour tout caractère λ. On a, pour $f \in L^q(G,X)^*$, $\psi \in L^q(G)$, $x \in X$,

$$\langle S_\lambda^*(f), \psi \otimes x\rangle = \langle f, \lambda\widehat{\psi}(\lambda) \otimes x\rangle = \langle \lambda \otimes T_f(\lambda), \psi \otimes x\rangle,$$

d'où, par densité, $S_\lambda^*(f) = \lambda \otimes T_f(\lambda)$ dans $L^q(G,X)^*$, et $\lambda \otimes T_f(\lambda) \in C(G,X^*)$.

2. Nous traitons dans cette partie des cas où les sous-espaces considérés $C_\Lambda(G,X^*)$, $L_\Lambda^p(G,X^*)$ sont soit égaux à l'espace entier, soit non complémentés. Les preuves pour les différents cas sont parallèles. Rappelons que si l'espace X ne contient pas ℓ^1, alors X^* ne contient pas c_0 (isomorphiquement) [Dies, Theorem V.10]. Commençons par l'étude de la complémentation de $C_\Lambda(G,X^*)$ dans $L_\Lambda^\infty(G,X^*)$. Dans le cas scalaire on sait que :

- si $C_\Lambda(G)$ contient c_0, c'est un sous-espace strict non complémenté de $L_\Lambda^\infty(G)$ [LLQR, Theorem V.1] ;
- si $L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)$ ne contient pas ℓ^1 (alors son dual $L_\Lambda^\infty(G)$ ne contient pas c_0) et si $C_\Lambda(G)$ est un sous-espace strict de $L_\Lambda^\infty(G)$, il n'est pas complémenté dans $L_\Lambda^\infty(G)$ [LLQR, Theorem V.1, Remark 3 p. 152].

Le théorème 2.1 généralise ce deuxième résultat. Notons que, même si $C_\Lambda(G) = L_\Lambda^\infty(G)$ (on dit alors que Λ est un *ensemble de Rosenthal*), $C_\Lambda(G,X^*)$ peut être un sous-espace strict de $L_\Lambda^\infty(G,X^*)$.

Théorème 2.1. *Soient X un espace séparable et $\Lambda \subset \Gamma$. Supposons que $E = L^1(G,X)/L_{\Lambda^c}^1(G,X)$ ne contienne pas ℓ^1. Si $C_\Lambda(G,X^*)$ est un sous-espace strict de $L_\Lambda^\infty(G,X^*)$, il n'est pas complémenté dans $L_\Lambda^\infty(G,X^*)$.*

Comme $E = (L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)) \mathbin{\widehat{\otimes}} X$, la première hypothèse implique que ni X ni $L^1(G)/L_{\Lambda^c}^1(G)$ ne contiennent ℓ^1, mais c'est une propriété plus forte.

Démonstration du théorème 2.1. Supposons qu'il existe une projection linéaire continue $P : L_\Lambda^\infty(G,X^*) \to C_\Lambda(G,X^*)$. Si $f \in L_\Lambda^\infty(G,X^*) \subset E^*$, $h \in E$, posons

$$\psi_h(t) = \langle P(f_t), h\rangle.$$

Étape 1. Vérifions que ψ_h est mesurable sur G. On considère la transposée $P^*: E \to L^\infty_\Lambda(G,X^*)^*$, et ce dernier espace est quotient de E^{**}. Soit $\xi \in E^{**}$ dont la restriction à $L^\infty_\Lambda(G,X^*)$ est P^*h. Comme E ne contient pas ℓ^1, il existe, d'après le théorème de dichotomie de Rosenthal [R], une suite $(h_k)_{k\ge 0}$ bornée dans E telle que $h_k \to \xi$ préfaiblement dans E^{**} lorsque $k\to\infty$. Alors, pour tout $t\in G$,

$$\psi_h(t) = \langle P(f_t), h\rangle = \langle f_t, P^*h\rangle = \lim_k \langle f_t, h_k\rangle. \tag{2.1}$$

Comme la fonction $t\mapsto \langle f_t, h_k\rangle$ est continue sur G, ψ_h est de première classe de Baire, donc mesurable, et évidemment bornée.

Étape 2. Soit $\varphi \in L^1(G)$. Vérifions que

$$\int_G \langle P(f_t), h\rangle \varphi(-t)\,dt = \int_G \langle f_t, h\rangle\varphi(-t)\,dt. \tag{2.2}$$

En effet, par (2.1), (1.3) et le théorème de convergence dominée, puis parce que $f*\varphi \in C_\Lambda(G,X^*)$, on a

$$\begin{aligned}\int_G \langle P(f_t), h\rangle\varphi(-t)\,dt &= \lim_k \int_G \langle f_t, h_k\rangle \varphi(-t)\,dt\\ &= \lim_k \langle f*\varphi, h_k\rangle = \langle f*\varphi, P^*h\rangle\\ &= \langle P(f*\varphi), h\rangle = \langle f*\varphi, h\rangle = \int_G \langle f_t, h\rangle\varphi(-t)\,dt.\end{aligned}$$

Étape 3. D'après (2.2), $\langle P(f_t), h\rangle = \langle f_t, h\rangle$ dans $L^\infty(G)$, ou encore

$$\langle P(f_t), h\rangle = \langle f_t, h\rangle \quad dt\text{-p.s.} \tag{2.3}$$

Comme E est séparable, soit $(h_n)_{n\ge1}$ une suite dense dans E. L'égalité (2.3) reste vraie, dt-p.s., pour tout n. En particulier il existe t_0 tel que, pour tout n, $\langle f_{t_0}, h_n\rangle = \langle P(f_{t_0}), h_n\rangle$. Comme f_{t_0} et $P(f_{t_0})$ sont dans $L^\infty_\Lambda(G,X^*)\subset E^*$, on en déduit que $f_{t_0} = P(f_{t_0})$ dans $L^\infty_\Lambda(G,X^*)$, d'où f_{t_0} (donc f) est égale p.s. à une fonction dans $C^\infty_\Lambda(G,X^*)$. Finalement, on obtient l'égalité $C_\Lambda(G,X^*) = L^\infty_\Lambda(G,X^*)$. ∎

Nous remercions H. Queffélec pour la remarque suivante. Si X est séparable et si X^* a la propriété de Radon–Nikodym, le théorème 2.1 est un cas particulier de [GGMS, p. 94] : Soit E séparable ne contenant pas ℓ^1. Alors tout sous-espace complémenté séparable Y de E^* a la propriété de Radon–Nikodym.

En effet, si X est séparable et si X^* a la propriété de Radon–Nikodym, on a rappelé que X^* est séparable, donc $E_1^* = L^\infty_\Lambda(G,X^*)$. À toute fonction $f\in L^\infty_\Lambda(G,X^*)$ on associe l'opérateur

$$\varphi \mapsto f*\varphi = \int_G f_y\varphi(-y)\,dy, \qquad L^1(G)\to Y = C_\Lambda(G,X^*).$$

Si Y est complémenté dans E_1^*, il a la propriété de Radon–Nikodym d'après le théorème cité. Cet opérateur est donc représentable [DU, Theorem III.1.5], c'est-à-dire que la fonction $y \mapsto f_y$ est dans $L^\infty(G, Y)$; on a $f_y \in Y$ dy-p.s., donc $f \in C_\Lambda(G, X^*)$. Finalement $C_\Lambda(G, X^*) = L^\infty_\Lambda(G, X^*)$.

Théorème 2.2. *Soient X un espace de Banach séparable qui ne contient pas ℓ^1, $\Lambda \subset \Gamma$, et $1 < p < \infty$. Soit $E_q = L^q(G, X)/L^q_{\Lambda^c}(G, X)$. Si $L^p_\Lambda(G, X^*)$ est un sous-espace strict de E_q^*, il n'est pas complémenté dans E_q^*.*

Démonstration. Les hypothèses « X ne contient pas ℓ^1 » et « E_q ne contient pas ℓ^1 » sont équivalentes. En effet, la première équivaut à « $L^q(G, X)$ ne contient pas ℓ^1 » [P], impliquant que l'espace quotient E_q ne contient pas ℓ^1. Réciproquement, soit $\lambda \in \Lambda$ fixé. L'espace X est isométrique à $\lambda \otimes X$, vu comme sous-espace de $L^q(G, X)$, complémenté par l'application $f \mapsto \lambda \otimes (\int_G f(t)\lambda(-t)\, dt)$. Donc X est isomorphe au quotient F de $L^q(G, X)$ par $L^q_{\Gamma\setminus\{\lambda\}}(G, X)$, et F contient ℓ^1. Si X contient ℓ^1, F aussi, ainsi que E_q, puisque F est quotient de E_q.

La preuve est alors analogue à celle du théorème 2.1. Soit P une projection continue $E_q^* = \mathcal{L}^p_\Lambda(G, X^*) \to L^p_\Lambda(G, X^*)$. Pour $f \in E_q^*$, $h \in E_q$, $P^*h \in E_q^{**}$, ψ_h est de première classe de Baire sur G comme en (2.1), puisque la fonction $t \mapsto \langle f_t, h\rangle$ est continue. La relation (2.2) reste vraie pour $\varphi \in L^1(G)$, avec la même démonstration, puisque $f * \varphi \in L^p_\Lambda(G, X^*)$. Enfin E_q est séparable. Finalement, $E_q^* = L^p_\Lambda(G, X^*)$. ∎

Corollaire 2.3. *Soit X un espace de Banach séparable qui ne contient pas ℓ^1, tel que X^* n'ait pas la propriété de Radon–Nikodym. Alors $L^p(G, X^*)$ n'est pas complémenté dans $L^q(G, X)^*$, $1 < p < \infty$.*

Démonstration. D'après la dernière hypothèse, $L^p(G, X^*)$ est un sous-espace strict de $L^q(G, X)^*$ et on applique le théorème 2.2. ∎

Remarque. Lindenstrauss et Stegall [LS] donnent un exemple d'espace de Banach X vérifiant les hypothèses du corollaire 2.3.

Problème 2.4. *Sous les hypothèses du corollaire* 2.3, *$L^\infty(G, X^*)$, qui est un sous-espace strict de $L^1(G, X)^*$, peut-il y être complémenté?*

Nous traitons maintenant une question analogue lorsque $p = 1$. Si l'espace de Banach Y contient c_0, l'espace $L^1(\mu, Y)$ n'est pas complémenté dans $\mathrm{cabv}(\mu, Y)$ [Dr-Em]. Au contraire, dans le théorème suivant, l'espace X^* ne contient pas c_0, puisque X ne contient pas ℓ^1.

Théorème 2.5. *Soit X un espace de Banach séparable qui ne contient pas ℓ^1, tel que X^* n'a pas la propriété de Radon–Nikodym. Alors $L^1(G, X^*)$ n'est pas complémenté dans* $\mathrm{cabv}(m_G, X^*) = \mathcal{L}^1(G, X^*)$.

Démonstration. Supposons X séparable ne contenant pas ℓ^1. On va montrer que l'existence d'une projection continue $P : \mathcal{L}^1(G, X^*) \to L^1(G, X^*)$

implique $L^q(G,X)^* = L^p(G,X^*)$, $1 < p < \infty$, donc X^* a la propriété de Radon–Nikodym.

Pour montrer l'égalité $L^q(G,X)^* = L^p(G,X^*)$, il suffit de montrer que $L^q(G,X)^*$ est un sous-espace de $L^1(G,X^*)$. Comme X est séparable, on a $L^q(G,X)^* = \mathcal{L}^p(G,X^*)$, qui est donc un sous-espace de $\mathcal{L}^1(G,X^*)$. Soit P' la restriction de la projection P à ce sous-espace. Pour $f \in L^q(G,X)^*$ soit

$$\psi_h(t) = \langle P'(f_t), h\rangle, \qquad h \in C(G,X),\ t \in G.$$

Comme dans la preuve du théorème 2.1, $P'^*(h) \in L^q(G,X)^{**}$, ψ_h est mesurable bornée sur G et, pour $\varphi \in L^1(G)$, (2.2) est remplacée par

$$\int_G \langle P'(f_t), h\rangle \varphi(-t)\,dt = \int_G \langle f_t, h\rangle \varphi(-t)\,dt.$$

Donc

$$\psi_h(t) = \langle P'(f_t), h\rangle = \langle f_t, h\rangle \quad dt\text{-p.s.} \tag{2.4}$$

L'espace $C(G,X)$ étant séparable, on en déduit l'existence d'un t_0 tel que $f_{t_0} = P'(f_{t_0})$ dans $C(G,X)^*$, donc $f_{t_0} \in L^1(G,X^*)$. Alors f est aussi dans $L^1(G,X^*)$, ce qui achève la preuve. ∎

COROLLAIRE 2.6. *Il existe un espace X séparable qui ne contient pas ℓ^1, tel que $L^1(G,X^*)$ n'est pas complémenté dans* $\mathrm{cabv}(m_G,X^*)$. *En particulier X^* ne contient pas c_0, X^* est* 1*-complémenté dans son bidual et $L^1(G,X^*)$ n'est pas complémenté dans son bidual.*

Ce corollaire répond négativement aux questions posées à la fin de [Em] : Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré fini, et Y un espace de Banach ne contenant pas c_0. L'espace $L^1(\mu,Y)$ est-il complémenté dans $\mathrm{cabv}(\mu,Y)$? Si de plus Y est complémenté dans son bidual, $L^1(\mu,Y)$ est-il complémenté dans son bidual?

Démonstration du corollaire 2.6. Comme on l'a signalé, [LS] fournit un exemple d'espace X qui satisfait les hypothèses du théorème 2.5, d'où la première assertion. Pour tout espace de Banach X, le dual X^* est 1-complémenté dans son bidual. On a déjà rappelé que, si X ne contient pas ℓ^1, X^* ne contient pas c_0. Enfin, pour tout espace de Banach Y, $L^1(G,Y)$ est complémenté dans son bidual si et seulement si Y est complémenté dans son bidual et $L^1(G,Y)$ est complémenté dans $\mathrm{cabv}(G,Y)$ ([Rao] ou [Em, Theorem 4]). ∎

3. Nous traitons dans cette partie des cas où les sous-espaces considérés sont soit égaux à l'espace entier, soit complémentés. L'introduction des espaces $VB^p(G,Y)$ permet dans le théorème 3.1 de généraliser et d'unifier la preuve des cas particuliers annoncés dans l'introduction.

Soit Y un espace de Banach. La notation $VB^p(G,Y)$, $1 < p \le \infty$, désigne l'espace des opérateurs $T : L^q(G) \to Y$ tels qu'il existe $g^T \ge 0$ dans $L^p(G)$

vérifiant
$$\|T\psi\|_Y \le \int_G |\psi(y)| g^T(y)\, dy, \qquad \psi \in L^q(G)\,;$$
il est muni de la norme
$$\|T\|_{VB^p(G,Y)} = \inf\{\|g^T\|_{L^p}\}.$$
L'espace $VB^\infty(G,Y)$ coïncide avec l'espace des opérateurs bornés de $L^1(G)$ dans Y. Quand $p=1$, la notation $VB^1(G,Y)$ désigne l'espace des opérateurs $T : C(G) \to Y$ tels qu'il existe $\nu \ge 0$ dans $M(G)$ vérifiant
$$\|T\psi\|_Y \le \int_G |\psi(y)|\, d\nu(y), \qquad \psi \in C(G).$$
Cet espace s'identifie à $M(G,Y)$ [Din, Sect. III-19-3, Theorem 4]. L'espace $L^1(G,Y)$ en est donc isométriquement un sous-espace.

On a $VB^p(G,X^*) = L^q(G,X)^*$ quand $1 < p \le \infty$, pour tout espace de Banach X, d'après l'identification entre $VB^p(G,Y)$ et les mesures à p-variation bornée à valeurs dans Y ([Bl, p. 349], [Din, Sect. II-13-3, Corollary 1]). L'espace $L^p(G,Y)$ s'identifie isométriquement à un sous-espace de $L^q(G,Y^*)^* = VB^p(G,Y^{**})$, donc à un sous-espace de $VB^p(G,Y)$, $1<p\le\infty$.

Convolution par $L^1(G)$ sur $VB^p(G,Y)$, $1 \le p < \infty$. On étend la convolution par $\varphi \in L^1(G)$ définie sur $L^p(G,Y)$. Pour $T \in VB^p(G,Y)$, on définit $T * \varphi \in VB^p(G,Y)$ par $T * \varphi(\psi) = T(\psi * \varphi)$, $\psi \in L^q(G)$ (resp. $\psi \in C(G)$ si $p=1$). Alors $T*\varphi \in L^p(G,Y)$ et

$$\|T * \varphi\|_{L^p(G,Y)} \le \|T\|_{VB^p(G,Y)} \|\varphi\|_{L^1(G)}. \tag{3.1}$$

En effet, pour tout caractère λ sur G, $T * \lambda = \lambda \otimes T(\lambda)$ est dans $L^p(G,Y)$. Lorsque $Y = X^*$, cette convolution coïncide avec celle définie sur $L^q(G,X)^*$ dans l'introduction.

Si le treillis Y ne contient pas c_0, l'espace $L^1(\mu,Y)$ est complémenté dans $\mathrm{cabv}(\mu,Y)$ pour toute probabilité μ ([F-Rod]). Le résultat de [Dr-Em] cité avant le théorème 2.5 implique alors : lorsque Y est un treillis, $L^1(\mu,Y)$ est complémenté dans $\mathrm{cabv}(\mu,Y)$ si et seulement si Y ne contient pas c_0. Le théorème suivant dans le cas $p=1$ redonne [F-Rod]. Dans le cas $1<p<\infty$, on a $VB^p(G,Y) = L^p(G,Y)$ si et seulement si l'espace de Banach Y a la propriété de Radon–Nikodym, comme on le verra dans les rappels un peu plus loin.

Théorème 3.1. *Soit Y un treillis de Banach qui ne contient pas c_0. Alors $L^p(G,Y)$ est soit égal à $VB^p(G,Y)$, soit complémenté dans cet espace, $1 \le p < \infty$. En particulier, $L^1(G,Y)$ est complémenté dans $M(G,Y)$. Si X est un treillis tel que X^* ne contienne pas c_0 et ne possède pas la propriété de Radon–Nikodym, alors $L^p(G,X^*)$ est complémenté dans $L^q(G,X)^*$ pour tout p tel que $1<p<\infty$.*

Démonstration. Puisque l'espace de Banach Y ne contient pas c_0, $L^p(G, Y)$ ne contient pas c_0 ([Dow]). Comme Y est un treillis, $L^p(G, Y)$ en est un aussi. Il existe donc une projection Q de norme 1 (égale ou non à l'identité) $L^p(G, Y)^{**} \to L^p(G, Y)$ [LT, Theorem 1.c.4]. On va montrer qu'il existe un opérateur borné $S : VB^p(G, Y) \to L^p(G, Y)^{**}$ tel que $S(f) = f$ pour $f \in L^p(G, Y)$. La projection cherchée sera

$$P = Q \circ S : VB^p(G, X) \to L^p(G, Y).$$

Rappelons qu'il existe une suite $(K_n)_{n \geq 1}$, de norme 1 dans $L^1(G)$, telle que, pour $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(G)$, $f * K_n$ converge vers f dans $L^p(G)$. Alors, si $f \in L^p(G, Y)$, $f * K_n$ converge en norme vers f. D'après (3.1), pour $T \in VB^p(G, Y)$, la suite $(T * K_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $L^p(G, Y)$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. L'opérateur $S : VB^p(G, Y) \to (L^p(G, Y))^{**}$ défini par

$$S(T) = \lim_{\mathcal{U}} (T * K_n)$$

(limite pour la topologie préfaible sur $L^p(G, Y)^{**}$) a bien les propriétés annoncées. La dernière assertion est immédiate puisque X^* est encore un treillis et $L^q(G, X)^* = VB^p(G, X^*)$. ∎

Comme il est rappelé dans [GS], si un espace de Banach X contient ℓ^1, son dual X^* contient $L^1([0, 1])$, donc X^* n'a pas la propriété de Radon–Nikodym.

Lorsque X est un treillis, la réciproque est vraie : si le treillis X ne contient pas ℓ^1, son dual X^* a la propriété de Radon–Nikodym. C'est un résultat de H. P. Lotz [GS, Theorem 7], dont [GS] redonne une preuve. En voici encore une autre si X est séparable.

COROLLAIRE 3.2 (Lotz). *Soit X un treillis séparable ne contenant pas ℓ^1. Alors X^* a la propriété de Radon–Nikodym.*

Démonstration. Comme X^* ne contient pas c_0, ou bien il a la propriété de Radon–Nikodym, ou bien $L^p(G, X^*)$ est complémenté dans $L^q(G, X)^*$, $1 < p < \infty$, d'après le théorème 3.1. Le deuxième cas est impossible d'après le corollaire 2.3. (On pourrait aussi bien, avec $p = 1$, appliquer [F-Rod] et le théorème 2.5). ∎

Rappelons que, pour un compact K, l'espace $M(K)$ a la propriété de Radon–Nikodym si et seulement si K ne contient aucun sous-ensemble parfait. Le corollaire suivant (à comparer au corollaire 2.3) est une conséquence immédiate du théorème 3.1 ; il donne un exemple où le treillis $X = C(K)$ contient ℓ^1, $X^* = M(K)$ n'a pas la propriété de Radon–Nikodym, ne contient pas c_0 (puisque $M(K)$ est faiblement complet) et $L^p(G, X^*)$ est complémenté dans $L^q(G, X)^*$. Bien entendu, $C(K)$ est séparable si K est métrique séparable ; cette hypothèse est inutile ici.

Corollaire 3.3. *Soit K un espace compact contenant un sous-ensemble parfait. Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(G, M(K))$ est un sous-espace strict et complémenté de $L^q(G, C(K))^*$.*

Par une méthode différente, on va étendre le corollaire 3.3 au cas $p = \infty$. En fait la preuve vaut aussi pour $1 < p < \infty$ (donc redonne le corollaire 3.3) : il suffit de modifier (3.4) en utilisant l'inégalité de Hardy–Littlewood dans $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, M(K))$. La preuve du théorème 3.4 nécessite les rappels qui suivent.

Identification entre $VB^p(\mathbb{T}, Y)$ et $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$, $1 < p \leq \infty$. Soient $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert, $\mathbb{T}$ le tore, $P_r = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ik\theta}$ le noyau de Poisson et Y un espace de Banach. La notation $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$ désigne l'espace des fonctions harmoniques $f : \mathbb{D} \to Y$ telles que, si $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = \infty$), alors

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} \|f(re^{i\theta})\|_Y^p \, d\theta < \infty \qquad \text{(resp. } \sup_{z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}} \|f(re^{i\theta})\|_Y < \infty).$$

L'intégrale de Poisson

$$f = I(F) : re^{i\theta} \mapsto F * P_r(\theta)$$

identifie isométriquement $L^p(\mathbb{T}, Y)$ à un sous-espace de $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$, $1 \leq p \leq \infty$ [Ru, Theorem 11.16] (la preuve dans le cas scalaire se généralise aisément au cas vectoriel). Elle identifie isométriquement $h^p(\mathbb{D}, Y)$ à $VB^p(\mathbb{T}, Y)$, $1 < p \leq \infty$ [Bl, Theorem 2.1, Remark 2.1]. En particulier

$$\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X^*) = VB^p(\mathbb{T}, X^*) = L^q(\mathbb{T}, X)^*.$$

L'espace Y a la propriété de Radon–Nikodym si et seulement si l'image de $L^p(\mathbb{T}, Y)$ par l'intégrale de Poisson est $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, Y)$, $1 < p \leq \infty$ ([BD, Theorem 2], [Bl, Theorem 2.2]), donc si et seulement si $L^p(\mathbb{T}, Y) = VB^p(\mathbb{T}, Y)$. Comme on l'a rappelé dans l'introduction, $L^p(\mathbb{T}, Y)$ et $L^p(G, Y)$ sont isométriques ; il est facile de voir qu'il en est de même pour $VB^p(\mathbb{T}, Y)$ et $VB^p(G, Y)$.

Théorème 3.4. *Soit K un espace compact contenant un parfait. Alors $L^\infty(G, M(K))$ est un sous-espace strict et complémenté de $L^1(G, C(K))^*$.*

Rappelons que $L^\infty(G, M(K)) = L^1(G, C(K))^*$ lorsque $M(K)$ a la propriété de Radon–Nikodym.

Démonstration du théorème 3.4. Comme on a vu dans l'introduction, il suffit de démontrer le théorème lorsque $G = \mathbb{T}$. En identifiant $\mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, M(K))$ à $L^1(\mathbb{T}, C(K))^*$, il suffit de montrer l'existence d'une projection continue de $\mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, M(K))$ sur E^∞, où E^∞ est l'image de $L^\infty(\mathbb{T}, M(K))$ par l'intégrale de Poisson.

Étape 1. Soit $f \in \mathbf{h}^1(\mathbb{D}, M(K))$. Comme f est harmonique,

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

où, pour tout $0 < \rho < 1$, la série converge en norme dans $M(K)$, uniformément sur tout disque $\{r = |z| \leq \rho\}$. Pour tout k, $\|\mu_k\|_{M(K)} \leq \|f\|_{\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, M(K))}$ donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mu_k\|_{M(K)} \rho^{|k|} < \infty. \tag{3.2}$$

Les μ_k engendrent un sous-espace séparable de $M(K)$, qui s'identifie à un sous-espace d'un $L^1(\nu)$ où $\nu \in M(K)$. On pose $\mu_k = c_k \, d\nu$, $c_k \in L^1(\nu)$. Alors, pour tout $\rho < 1$, (3.2) se réécrit, par le théorème de convergence monotone,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho^{|k|} \int_K |c_k(x)| \, d\nu(x) = \int_K \Big[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho^{|k|} |c_k(x)| \Big] \, d\nu(x) < \infty.$$

Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on note $f^{(\nu)}(z, \cdot)$ ou $f^{(\nu)}(z)(\cdot)$ la densité de la mesure $f(z)$ par rapport à ν, c'est-à-dire, $d\nu$-p.s.,

$$f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(x) r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

La fonction $(\theta, x) \mapsto f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)$ est dans $C(\mathbb{T}, L^1(\nu))$, en particulier elle est $d\theta \otimes d\nu$-p.s. mesurable.

On va montrer que pour ν-presque tout $x \in K$, la fonction $z \mapsto f^{(\nu)}(z)(x)$ est dans $\mathbf{h}^1(\mathbb{D})$. Comme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho^{|k|} |c_k(x)| < \infty$ pour ν-presque tout x, elle est harmonique sur $\mathbb{D}$. Cela justifie la première égalité qui suit ; l'inégalité vient du lemme de Fatou appliqué dans $L^1(\nu)$:

$$\begin{aligned}
\int_K \Big[\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)| \, d\theta \Big] \, d\nu(x) &= \int_K \Big[\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)| \, d\theta \Big] \, d\nu(x) \\
&\leq \sup_{0 < r < 1} \int_K \Big[\int_{\mathbb{T}} |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)| \, d\theta \Big] \, d\nu(x) \\
&= \sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \Big[\int_K |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)| \, d\nu(x) \Big] \, d\theta = \|f\|_{\mathbf{h}^1(\mathbb{D}, M(K))} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc, pour ν-presque tout $x \in K$, $\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)| \, d\theta < \infty$, ce qui prouve l'assertion.

Lorsque $f^{(\nu)}(\cdot, x) \in h^1(\mathbb{D})$, il existe [Ru, Theorem 11.30] une mesure $\mu_x^{(\nu)} \in M(\mathbb{T})$ telle que

$$f^{(\nu)}(\cdot, x) = \mu_x^{(\nu)} * P_r.$$

Alors, $d\theta$-p.s., $f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)$ admet une limite $\psi_f^{(\nu)}(\theta, x)$ lorsque $r \to 1^-$, et $\psi_f^{(\nu)}(\cdot, x)$ est la partie absolument continue de $\mu_x^{(\nu)}$ [Ru, Theorem 11.24]. Il en résulte que

$$f^{(\nu)}(r.)(.) \xrightarrow{r \to 1^-} \psi_f^{(\nu)} \qquad d\theta \, d\nu\text{-p.s.}$$

Comme $f^{(\nu)}(r\,\cdot)(\cdot)$ est $d\theta\, d\nu$-p.s. mesurable, $\psi_f^{(\nu)}$ l'est aussi. En particulier, $d\theta$-ps, $\psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)$ est ν-p.s. égale à une fonction mesurable. Par le lemme de Fatou appliqué à nouveau dans $L^1(\nu)$,

$$\begin{aligned}\int_K |\psi_f^{(\nu)}(\theta,x)|\, d\nu(x) &= \int_K \lim_{r\to 1^-} |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)|\, d\nu(x)\\ &\le \sup_{0<r<1} \int_K |f^{(\nu)}(re^{i\theta})(x)|\, d\nu(x).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Étape 2. Supposons de plus que $f \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, M(K))$. D'après (3.3), on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \Big[\int_K |\psi_f^{(\nu)}(\theta,x)|\, d\nu(x)\Big]\, d\theta &\le \Big\| \int_K |\psi_f^{(\nu)}(\theta,x)|\, d\nu(x)\Big\|_{L^\infty(T)}\\ &\le \sup_{z\in D} \int_K |f^{(\nu)}(z)(x)|\, d\nu(x) < \infty.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Il en résulte que $\psi_f^{(\nu)}$ est dans $L^1(\mathbb{T}, L^1(\nu))$, en particulier elle est $d\theta$-p.s. fortement mesurable $\mathbb{T} \to L^1(\nu)$, puis que $\psi_f^{(\nu)}$ est dans $L^\infty(\mathbb{T}, L^1(\nu))$, donc $\psi_f^{(\nu)}\nu$ est dans $L^\infty(\mathbb{T}, M(K))$. Par définition, l'intégrale de Poisson $I(\psi_f^{(\nu)}\nu)$ est dans E^∞.

Étape 3. Vérifions que, $d\theta$-p.s., la mesure $\psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)\nu$ ne dépend pas du choix de ν. Soit $\alpha \in M(K)$ telle que $L^1(\nu) \subset L^1(\alpha)$, en particulier $\nu = h\alpha$, $h \in L^\infty(\alpha)$. Pour $z \in \mathbb{D}$, α-p.s., $f^{(\alpha)}(z)(\cdot) = f^{(\nu)}(z)(\cdot)h(\cdot)$. Alors, $d\theta$-p.s. et α-p.s., $\psi_f^{(\alpha)}(\theta,\cdot) = \psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)h(\cdot)$, d'où

$$\psi_f^{(\alpha)}(\theta,\cdot)\alpha = \psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)h(\cdot)\alpha = \psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)\nu \quad d\theta\text{-p.s.}$$

Soit maintenant $\widetilde{\nu} \in M(K)$ telle que les μ_k soient dans $L^1(\widetilde{\nu})$. En considérant $\alpha = \nu + \widetilde{\nu}$, on conclut que $\psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)\nu = \psi_f^{(\widetilde{\nu})}(\theta,\cdot)\widetilde{\nu}$ $d\theta$-p.s. L'application $\mu_f : \mathbb{T} \to M(K)$ est donc bien définie par

$$\mu_f(\theta) = \psi_f^{(\nu)}(\theta,\cdot)\nu \quad d\theta\text{-p.s.};$$

elle est dans $L^\infty(\mathbb{T}, M(K))$ d'après l'étape 2. Vérifions que l'application $f \mapsto \mu_f$ est linéaire : si $f, g \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, M(K))$, on peut toujours les supposer dans un même $\mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, L^1(\nu))$ et l'application $f \mapsto \psi_f^{(\nu)}$ est évidemment linéaire.

Étape 4. L'application $P : \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, M(K)) \to E^\infty$ définie par

$$Pf = I(\mu_f)$$

est linéaire d'après l'étape 3 et $\|P\| = 1$ d'après (3.4). Vérifions que P est une projection, c'est-à-dire que $P\varphi = \varphi$ lorsque $\varphi = I(\mu_f) = I(\psi_f^{(\nu)})\nu$ où

$f \in \mathbf{h}^\infty(\mathbb{D}, M(K))$. Comme $\psi_f^{(\nu)} \in L^1(\mathbb{T}, L^1(\nu))$, on a, d'après les rappels,

$$\|\psi_f^{(\nu)} * P_r(\theta, \cdot) - \psi_f^{(\nu)}(\theta, \cdot)\|_{L^1(\nu)} \xrightarrow{r \to 1^-} 0 \quad d\theta\text{-p.s.}$$

Alors, $d\theta$-p.s., il existe une suite $r_n \to 1^-$ telle que, $d\nu$-p.s.,

$$\psi_f^{(\nu)}(\cdot, x) * P_{r_n}(\theta) \xrightarrow{r_n \to 1} \psi_f^{(\nu)}(\theta, x). \tag{3.5}$$

Par les étapes 1 et 2, lorsque $r \to 1^-$, la famille $\psi_f^{(\nu)} * P_r$ a $d\theta\, d\nu$-p.s. une limite $F \in L^\infty(\mathbb{T}, L^1(\nu))$, et $I(F)\nu = P(\varphi)$ par définition. D'après (3.5), $F = \psi_f^{(\nu)}$ $d\theta\, d\nu$-p.s. Finalement $I(F)\nu = I(\psi_f^{(\nu)})\nu = \varphi$, ce qui achève la preuve. ■

Remerciements. Je remercie chaleureusement F. Lust-Piquard pour le temps qu'elle m'a consacré lors de la préparation de ce travail.

RÉFÉRENCES

[Bl] O. Blasco, *Boundary values of functions in vector-valued Hardy spaces and geometry of Banach spaces*, J. Funct. Anal. 78 (1988), 346–364.

[BD] A. V. Bukhvalov and A. A. Danilevich, *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach space*, Math. Notes 31 (1982), 104–110.

[Dies] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Grad. Texts in Math. 92, Springer, New York, 1984.

[DU] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[Dieud] J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue–Nikodym V*, Canad. J. Math. 3 (1951), 129–139.

[Din] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Int. Ser. Monogr. Pure Appl. Math. 95, Pergamon Press, Oxford, 1967.

[Dow] P. N. Dowling, *A stability property of a class of Banach spaces not containing* c_0, Canad. Math. Bull. 35 (1992), 56–60.

[Dr-Em] L. Drewnowski and G. Emmanuele, *The problem of complementability for some spaces of vector measures of bounded variation with values in Banach spaces containing copies of* c_0, Stud. Math. 104 (1993), 111–123.

[Em] G. Emmanuele, *Remarks on the complementability of spaces of Bochner integrable functions in spaces of vector measures*, Comment. Math. Univ. Carolin. 37 (1996), 217–228.

[F-Rod] F. Freniche and L. Rodríguez-Piazza, *Linear projections from a space of measures onto its Bochner integrable functions subspace*, preprint, 1993.

[GGMS] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey and W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 70 (1987), no. 378, 116 pp.

[GS] N. Ghoussoub and E. Saab, *On the weak Radon–Nikodym property*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 81–84.

[LLQR] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec and L. Rodríguez-Piazza, *Some translation-invariant Banach function spaces which contain* c_0, Studia Math. 163 (2004), 137–155.

[LS] J. Lindenstrauss and C. Stegall, *Examples of separable spaces which do not contain* ℓ_1 *and whose duals are non-separable*, Studia Math. 54 (1975), 81–105.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 97, Springer, Berlin, 1979.

[P] G. Pisier, *Une propriété de stabilité de la classe des espaces ne contenant pas* ℓ^1, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 286 (1978), 747–749.

[Rao] T. S. S. R. K. Rao, $L^1(\mu, X)$ *as a complemented subspace of its bidual*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 104 (1994), 421–424.

[R] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* ℓ^1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.

[Roy] H. L. Royden, *Real Analysis*, 3rd ed., Macmillan, New York, 1988.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

Mohammad Daher
32 rue Jacques Monod
77350 Le Mée-sur-Seine, France
E-mail: m.daher@orange.fr

Received 12 August 2012;
revised 17 June 2013 (5734)