COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 89 2001 NO. 2

# SUR LA SOMME DES QUOTIENTS PARTIELS DU DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

PAR

DOMINIQUE BARBOLOSI et CHRISTIAN FAIVRE (Marseille)

**Abstract.** Let $[0; a_1(x), a_2(x), \ldots]$ be the regular continued fraction expansion of an irrational $x \in [0,1]$. We prove mainly that, for $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ and for almost all $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \begin{cases} \alpha/\log 2 & \text{if } \alpha < 1 \text{ and } \beta \geq 0, \\ 1/\log 2 & \text{if } \alpha = 1 \text{ and } \beta < 1, \end{cases}$$

and, if $\alpha > 1$ or $\alpha = 1$ and $\beta > 1$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \frac{1}{\log 2}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \infty,$$

where $a_i^n(x) = a_i(x)$ if $a_i(x) \leq n^\alpha \log^\beta n$ and $a_i^n(x) = 0$ otherwise, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$.

**1. Introduction.** Si $x \in [0,1]$ est un nombre irrationnel, notons $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots$ la suite de ses quotients partiels dans le développement en fraction continue. Les premiers résultats sur la somme $S_n(x) = a_1(x) + \ldots + a_n(x)$ remontent à Khintchine et Lévy. En 1935 Khintchine [2] montre que la suite $S_n/(n\log n)$ converge vers $1/\log 2$ en probabilité. Un résultat plus précis est énoncé par P. Lévy [5] : la suite

$$\frac{S_n}{n} - \frac{\log n}{\log 2}$$

converge en distribution vers une loi stable d'exposant 1. L. Heinrich [1] a obtenu un résultat plus précis en donnant une estimation de la vitesse de convergence. D'autre part, P. Lévy dans [4] montre aussi que pour presque tout $x$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{n\log n} = \infty,$$

ce qui implique en particulier que la suite

$$S_n(x)/(n\log n)$$

diverge pour presque tout $x$. W. Philipp [6] montre d'ailleurs qu'il n'est pas possible de normaliser de manière "naturelle" la suite $S_n$ de façon à obtenir une limite constante non nulle pour presque tout $x$. Plus précisément, pour

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11K50.

toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres positifs tels que la suite $u_n/n$ soit croissante on a la dichotomie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{u_n} = 0 \quad \text{ou} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{u_n} = \infty,$$

pour presque tout $x$ selon que $\sum 1/u_n < \infty$ ou $\sum 1/u_n = \infty$. En prenant par exemple $u_n = n\log n$ on retrouve le résultat de P. Lévy.

Dans toute la suite nous poserons, pour tous réels $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ et pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_i^n(x) = a_i(x)$$

si $a_i(x) \leq n^\alpha \log^\beta n$ et $a_i^n(x) = 0$ sinon.

Dans ce papier, dans le but de compléter les résultats précédents, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Pour presque tout* $x \in [0, 1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \begin{cases} \alpha/\log 2 & si\ \alpha < 1\ et\ \beta \geq 0, \\ 1/\log 2 & si\ \alpha = 1\ et\ \beta < 1. \end{cases}$$

*Si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$, *alors pour presque tout* $x$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \frac{1}{\log 2}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \infty.$$

*Pour* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 1$, *on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n\log n} = \frac{1}{\log 2}.$$

Il est possible de déduire du résultat précédent le corollaire suivant qui complète le résultat de P. Lévy :

Corollaire 1.2. *Pour presque tout* $x \in [0, 1]$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_1(x) + \ldots + a_n(x)}{n\log n} = \frac{1}{\log 2}.$$

**2. Preuve de quelques lemmes.** Nous allons commencer par établir plusieurs lemmes utiles afin de démontrer le théorème principal (1.1).

Rappelons qu'un processus stationnaire $(X_n)_{n\geq 1}$ est dit $\psi$-*mixing* si on peut trouver une suite $(\alpha_n)_{\geq 1}$ de nombres positifs avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$, telle que pour tous $n \geq 1$ et $k \geq 1$, les inégalités

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha_n P(A)P(B)$$

soient satisfaites pour tout $A$ dans la $\sigma$-algèbre engendrée par $X_1, \dots, X_k$ et pour tout $B$ dans la $\sigma$-algèbre engendrée par $X_{k+n}, X_{k+n+1} \dots$

Ces processus sont importants dans la théorie métrique des fractions continues car il est bien connu ([7], p. 169) qu'il existe des constantes $C > 0$ et $0 < q < 1$ telles que la suite des quotients partiels $(a_n)_{n\geq 1}$ soit un processus $\psi$-mixing relativement à la mesure de Gauss $\mu$ sur $[0,1]$ définie par

$$d\mu(x) = \frac{1}{\log 2}\frac{dx}{1+x}$$

avec $\alpha_n = Cq^n$. Par la suite nous travaillerons exclusivement avec la mesure de Gauss sur $[0,1]$. Notons que $\mu$ et $m$ (la mesure de Lebesgue) possèdent les mêmes ensembles de mesure nulle.

Nous commencerons par rappeler un lemme classique concernant la variance d'un processus stationnaire $\psi$-mixing.

LEMME 2.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus stationnaire, $\psi$-mixing, tel que la suite $\alpha_n$ vérifie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

*Posons $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Alors il existe une constante $C$ (ne dépendant que de la suite $\alpha_n$) telle que pour tout $n \geq 1$,*

$$\sigma^2(S_n) \leq Cn\sigma^2(X_1).$$

*Preuve.* Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $E(X_n) = 0$ pour tout $n$. Compte tenu de la stationnarité, pour $n \geq 2$ on a

$$\sigma^2(S_n) = E(S_n^2) = nE(X_1^2) + 2\sum_{p=2}^{n}(n-p+1)E(X_1X_p).$$

Donc

$$\sigma^2(S_n) \leq nE(X_1^2) + 2n\sum_{p=2}^{n}|E(X_1X_p)|.$$

Or la propriété de $\psi$-mixing donne, compte tenu du fait que les $X_n$ ont une espérance nulle,

$$|E(X_1X_p)| \leq \alpha_{p-1}E(|X_1|)E(|X_p|) = \alpha_{p-1}E(|X_1|)^2 \leq \alpha_{p-1}E(X_1^2).$$

En définitive, pour tout $n \geq 1$ on obtient donc

$$\sigma^2(S_n) \leq CnE(X_1^2) \quad \text{avec} \quad C = 1 + 2\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p. \ \blacksquare$$

Soit maintenant $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs (que l'on précisera par la suite) telle que $k_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ posons

$$a_i^n(x) := a_i(x)$$

si $a_i(x) \leq k_n$ et $a_i^n(x) := 0$ sinon. On posera également

$$S'_n := a_1^n + \ldots + a_n^n.$$

Comme la suite $a_1, a_2, \ldots$ est $\psi$-mixing, il en résulte immédiatement que la suite $(a_k^n)_{k\geq 1}$ est aussi $\psi$-mixing pour la même suite $\alpha_k = Cq^k$.

LEMME 2.2. *Quand $n \to \infty$ on a*

$$E(a_1^n) \sim \frac{\log k_n}{\log 2} \quad \textit{et} \quad E((a_1^n)^2) \sim \frac{k_n}{\log 2}.$$

*Preuve.* D'une manière générale, pour $X$ une variable aléatoire qui ne peut prendre que les valeurs entières $0, 1, \ldots$, et $k$ un entier naturel, si $\widetilde{X}$ est la variable aléatoire définie par

$$\widetilde{X} = \begin{cases} X & \text{si } X \leq k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

il est aisé d'établir la relation

$$E(\widetilde{X}) = -kP(X > k) + \sum_{p=1}^{k} P(X \geq p).$$

En appliquant ceci, il vient que

$$E(a_1^n) = -[k_n]P(a_1 > [k_n]) + \sum_{p=1}^{[k_n]} P(a_1 \geq p),$$

où [ ] désigne la partie entière. Or quand $p \to \infty$,

$$P(a_1 \geq p) = \frac{1}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{p}\right) \sim \frac{1}{\log 2}\frac{1}{p};$$

il s'ensuit que

$$E(a_1^n) \sim \frac{\log k_n}{\log 2}.$$

De même

$$E((a_1^n)^2) = -[k_n]^2 P(a_1^2 > [k_n]^2) + \sum_{p=1}^{[k_n]^2} P(a_1^2 \geq p). \tag{1}$$

D'autre part, quand $n \to \infty$, on a

$$[k_n]^2 P(a_1 > [k_n]) \sim \frac{k_n}{\log 2} \tag{2}$$

et, en utilisant le résultat classique

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{p}} \sim 2\sqrt{N} \qquad (N \to \infty),$$

il résulte alors de (1), (2) que quand $N \to \infty$,

$$E((a_1^n)^2) \sim \frac{k_n}{\log 2}. \ \blacksquare$$

Lemme 2.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on a*

$$P\left(\left|\frac{S'_n}{E(S'_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \cdot \frac{E((a_1^n)^2)}{nE(a_1^n)^2}. \tag{3}$$

*Preuve.* D'après l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev on a

$$P\left(\left|\frac{S'_n}{E(S'_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma(S'_n)}{\varepsilon^2 E(S'_n)^2}.$$

D'après le lemme 2.1 on a l'inégalité $\sigma^2(S'_n) \leq Cn\sigma^2(a_1^n)$. Comme $E(S'_n) = nE(a_1^n)$ et $\sigma^2(a_1^n) \leq E((a_1^n)^2)$ on en déduit le résultat. ∎

Enfin, nous aurons besoin d'un dernier lemme.

Lemme 2.4. *Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires vérifiant $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels vérifiant $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots$ avec $b_n \to \infty$. On suppose qu'il existe une application croissante $\varphi$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ et un nombre $\theta > 0$ tels que lorsque $n \to \infty$,*

$$\frac{b_{\varphi(n+1)}}{b_{\varphi(n)}} \to \theta, \tag{4}$$

$$\frac{X_{\varphi(n)}}{b_{\varphi(n)}} \to 1, \tag{5}$$

*presque sûrement. Alors on a*

$$\frac{1}{\theta} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} \leq \theta$$

*presque sûrement.*

*Preuve.* Pour tout entier $n \geq \varphi(1)$, il existe un entier $q_n \geq 1$ tel que $\varphi(q_n) \leq n < \varphi(q_n + 1)$. On a alors

$$\frac{X_{\varphi(q_n)}}{b_{\varphi(q_n+1)}} \leq \frac{X_n}{b_n} \leq \frac{X_{\varphi(q_n+1)}}{b_{\varphi(q_n)}}$$

et donc

$$\frac{b_{\varphi(q_n)}}{b_{\varphi(q_n+1)}} \cdot \frac{X_{\varphi(q_n)}}{b_{\varphi(q_n)}} \leq \frac{X_n}{b_n} \leq \frac{X_{\varphi(q_n+1)}}{b_{\varphi(q_n+1)}} \cdot \frac{b_{\varphi(q_n+1)}}{b_{\varphi(q_n)}}.$$

En utilisant alors (4) et (5), il s'ensuit que

$$\frac{1}{\theta} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{b_n} \leq \theta,$$

presque sûrement. ∎

**3. Preuve du théorème 1.1, partie 1.** a) Supposons dans un premier temps que $0 < \alpha < 1$ et $\beta \geq 0$. Posons $k_n = n^\alpha (\log n)^\beta$. On a

$$\frac{E((a_1^n)^2)}{nE(a_1^n)^2} \sim \frac{k_n \log 2}{n \log^2 k_n} \sim \frac{\log 2}{\alpha^2} \cdot \frac{(\log n)^{\beta-2}}{n^{1-\alpha}} \qquad (n \to \infty).$$

Choisissons un entier $r \geq 1$ tel que $r(1-\alpha) > 1$ et posons $\varphi(n) = n^r$. Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r \log n)^{\beta-2}}{n^{r(1-\alpha)}} < \infty,$$

on déduit du lemme 2.3 que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left( \left| \frac{S'_{n^r}}{E(S'_{n^r})} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) < \infty, \tag{6}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_{n^r}}{E(S'_{n^r})} = 1$$

presque sûrement en utilisant le lemme de Borel–Cantelli. Le lemme 2.2 donne aussi que

$$E(S'_n) = nE(a_1^n) \sim \frac{n \log k_n}{\log 2} \sim \frac{\alpha n \log n}{\log 2}.$$

En posant $b_n = \alpha n \log n / \log 2$, nous avons, quand $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{(n+1)^r}}{b_{n^r}} = 1$$

donc l'application du lemme 2.4 donne alors que

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{S'_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{S'_n}{b_n} \leq 1$$

presque sûrement, ce qui signifie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n \log n} = \frac{\alpha}{\log 2}$$

presque sûrement.

b) Supposons $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta < 1$. Posons $k_n = n(\log n)^\beta$. Cette fois

$$\frac{k_n}{n \log^2 k_n} \sim \frac{1}{(\log n)^{2-\beta}} \qquad (n \to \infty).$$

Soit $c$ un réel quelconque, $c > 1$ et posons $\varphi(n) = [c^n]$. Comme $2 - \beta > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log([c^n]))^{2-\beta}} < \infty,$$

de sorte qu'en suivant la même démarche que précédemment,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_{[c^n]}}{E(S'_{[c^n]})} = 1$$

presque sûrement quand $n \to \infty$. Le lemme 2.2 donne cette fois que

$$E(S'_n) \sim \frac{n \log n}{\log 2}.$$

Posons $b_n = n \log n / \log 2$. Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{[c^{n+1}]}}{b_{[c^n]}} = c,$$

l'application du lemme 2.4 donne alors que

$$\frac{1}{c} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{S'_n}{b_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{S'_n}{b_n} \le c \tag{7}$$

presque sûrement. L'inégalité (7) étant valable pour tout réel $c > 1$, quand $c \to 1$ on obtient que lorsque $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n \log n} = \frac{1}{\log 2}$$

presque sûrement.

**4. Preuve du corollaire 1.2.** Considérons $k_n = n$. L'inégalité

$$\frac{a_1^n(x) + \ldots + a_n^n(x)}{n \log n} \le \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \tag{8}$$

et le théorème 1.1 dans le cas $\alpha = 1$, $\beta = 0$, démontré précédemment, donnent

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \ge \frac{1}{\log 2}.$$

D'autre part, le résultat de Khintchine donne l'existence d'une sous-suite de $(1/(n \log n)) \sum_{i=1}^{n} a_i(x)$ qui converge pour presque tout $x$ vers $1/\log 2$. Il en résulte que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \le \frac{1}{\log 2}$$

pour presque tout $x$. En définitive, pour presque tout $x$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) = \frac{1}{\log 2},$$

ce qui termine la preuve du corollaire.

**5. Preuve du théorème 1.1, partie 2.** c) Soient $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. D'après le théorème de Bernstein ([3], p. 60), comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} < \infty,$$

pour presque tout $x$, il existe un nombre fini d'entiers $i$ tels que

$$a_i(x) > i^\alpha (\log i)^\beta.$$

Ainsi d'après le résultat de Lévy et le corollaire 1.2, on en déduit que pour presque tout $x$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} \sum_{i=1}^{n} a_i^n(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) = \infty,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} \sum_{i=1}^{n} a_i^n(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) = \frac{1}{\log 2}.$$

d) Il ne reste plus qu'à étudier le cas $\alpha = \beta = 1$ pour clore la démonstration du théorème 1.1. Posons, pour tout $\alpha, \beta$,

$$E_{n,\alpha,\beta} := \{i \le n : a_i(x) \le n^\alpha \log^\beta n\}.$$

L'inégalité

$$\sum_{i\in E_{n,1,0}} a_i(x) \le \sum_{i\in E_{n,1,1}} a_i(x) \le \sum_{i=1}^{n} a_i(x),$$

le résultat c) précédent (appliqué pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$) et le corollaire 1.2 donnent immédiatement que pour presque tout $x$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\log n} \sum_{i\in E_{n,1,1}} a_i(x) = \frac{1}{\log 2}. \blacksquare$$

## *RÉFÉRENCES*


[1] L. Heinrich, *Rates of convergence in stable limit theorems for sums of exponentially $\psi$-mixing random variables with an application to metric theory of continued fractions*, Math. Nachr. 131 (1987), 149–165.

[2] A. Ya. Khintchine, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Math. 1 (1935), 361–382.

[3] —, *Continued Fractions*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1964.

[4] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[5] —, *Fractions continues aléatoires,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1 (1952), 170–208.

[6] W. Philipp, *Some metrical theorems in Number Theory*, Pacific J. Math. 20 (1967), 109–126.

[7] —, *Some metrical theorems in Number Theory II*, Duke Math. J. 38 (1970), 447–488; Errata, p. 788.

Faculté des Sciences
et Techniques de St. Jerôme
Service de Mathématiques
Case 322
Avenue Escadrille Normandie-Niemen
13397 Marseille Cedex 20, France
E-mail: dominique.barbolosi@MECA.u-3mrs.fr

Centre de Mathématiques et Informatique
de l'Université de Provence
39, rue Joliot Curie
13453 Marseille Cedex 13, France
E-mail: faivre@cmi.univ-mrs.fr

*Received 4 October 2000* (3980)