

## 1. Introduction

Dans ce mémoire, nous établissons un résultat de complétude asymptotique pour l'équation de Klein–Gordon dans la métrique de Kerr après restriction à certains sous-espaces de solutions d'énergie positive.

La métrique de Kerr, qui est une solution exacte de l'équation d'Einstein, modélise des trous noirs en rotation. Elle généralise la métrique de Schwarzschild, qui décrit des trous noirs à symétrie sphérique. Jusqu'à aujourd'hui, il y a bon nombre de résultats sur la théorie de la diffusion pour des équations de champ dans la métrique de Schwarzschild (voir [B1], [B2], [BM], [DHS], [D], [DK1], [DK2], [DK3], [J], [N1], [N2], [Me1], [Me2], [SZ]).

A notre connaissance, de tels résultats ne sont pas connus pour la métrique de Kerr. Cette métrique est un modèle plus réaliste de trou noir que la métrique de Schwarzschild : l'existence d'un corps céleste ayant une parfaite symétrie sphérique est en effet peu probable (voir [HE]).

La différence principale entre la métrique de Schwarzschild et la métrique de Kerr est l'existence d'une ergosphère dans la deuxième. Dans cette ergosphère, le champ  $\partial_t$  devient de type espace. Il se trouve que plus généralement, il n'existe pas de champ de Killing global de type temps, i.e. la métrique de Kerr n'est pas stationnaire (voir [HE]). La conséquence pour l'équation de Klein–Gordon est la suivante. Si on l'écrit sous la forme

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - 2ik\partial_t + h)u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

avec  $h, k$  autoadjoints sur un certain espace de Hilbert,  $h$  n'est pas un opérateur positif. Alors l'énergie  $E(u) = \|\partial_t u\|^2 + (hu, u)$  qui est conservée le long de l'évolution n'est pas positive. Dans le Chapitre 9 (Application à la métrique de Kerr), nous construisons des sous-espaces hilbertiens sur lesquels  $h$  est positif. Pour l'existence de ces sous-espaces, nous avons besoin que la masse de la particule soit strictement positive. Notre résultat de complétude asymptotique est valable après restriction à ces sous-espaces. C'est pourquoi nous supposons dès le début  $h \geq 0$ . La métrique de Kerr possède moins de symétrie que la métrique de Schwarzschild, mais la même décroissance à l'infini. Dans cette situation, on ne peut pas appliquer des techniques de perturbation à trace (voir [H]). Notre démonstration de la complétude asymptotique est alors basée sur une estimation de Mourre et un principe d'absorption limite.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante : le Chapitre 2 est consacré au cadre hilbertien. Nous rappelons d'abord un résultat de [H] selon lequel on peut écrire (1.1.1)

comme un système de premier ordre de la forme

$$(1.1.2) \quad i\partial_t f = Lf,$$

$$(1.1.3) \quad L = \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

et lui associer un groupe unitaire  $e^{itL}$ . Après quelques rappels sur la théorie de Mourre, nous en décrivons une extension abstraite. Nous déduisons d'une estimation de Mourre pour  $h$  une estimation de Mourre pour  $h^{1/2}$  et puis une estimation de Mourre pour un opérateur de type  $L$  avec  $k$  constant. Le passage d'une estimation de Mourre pour  $h$  à une estimation de Mourre pour  $h^{1/2}$  a déjà été étudié dans [DHS], en se basant sur la version de la théorie de Mourre exposée dans [CFKS]. Malheureusement, cette version n'est pas entièrement correcte (dans [GG] on trouve un contre-exemple au théorème du viriel sous les hypothèses de [CFKS]). C'est pourquoi nous avons préféré donner une autre version de l'estimation de Mourre pour la racine d'un opérateur, qui est basée sur la version de la théorie de Mourre qu'on trouve dans [ABG].

Dans le Chapitre 3, nous décrivons le cadre géométrique. La variété que nous considérons est de la forme  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times K$  avec  $K$  une variété compacte. Sur  $\mathcal{M}$  nous considérons un opérateur  $h_0$  séparable et un opérateur borné et séparable  $k_0$ . L'hamiltonien  $h_0$  et  $k_0$  servent comme opérateurs de référence. Nous décrivons ensuite l'hamiltonien perturbé  $h$  et la perturbation  $k$  de  $k_0$ . Pour choisir la dynamique de comparaison, il y a deux démarches possibles :

- 1) on compare la dynamique avec une dynamique qui vient d'une métrique plus simple sur la variété,
- 2) on cherche la dynamique de comparaison la plus simple, même si cela ne provient pas d'une équation de Klein–Gordon associée à une métrique lorentzienne ; ceci revient à chercher des profils.

Nous suivons ces deux démarches. La variété  $\mathcal{M}$  est une variété avec deux bouts. Nous comparons la dynamique dans les deux bouts avec deux hamiltoniens différents. Nous avons alors quatre hamiltoniens asymptotiques  $h_\nu$  et quatre opérateurs asymptotiques  $k_\nu$  que nous décrivons à la fin du Chapitre 3. Les opérateurs  $L, L_0, L_\nu$  sont construits comme décrit dans le Chapitre 2.

Le Chapitre 4 est consacré à une étude des différents hamiltoniens et de leurs espaces de Sobolev.

Dans le Chapitre 5, nous établissons des estimations de Mourre pour les hamiltoniens introduits dans le Chapitre 3. L'opérateur  $h$  est un opérateur du deuxième ordre qui agit sur une variété avec deux bouts. Un bout est exponentiellement grand, l'autre est polynomialement grand.  $h$  n'est alors pas elliptique et le générateur de dilatations ne peut pas servir comme opérateur conjugué. Un opérateur conjugué pour un opérateur du type  $h$  a été proposé dans [FH]. Nous suivons la même voie, mais pour des raisons déjà expliquées, nous utilisons une autre version de la théorie de Mourre que les auteurs de [FH]. Ceci demande un petit travail supplémentaire pour obtenir l'estimation de Mourre pour  $h$ . Ensuite on utilise les résultats du Chapitre 2 pour passer à une

estimation de Mourre pour  $L$ . La situation pour les hamiltoniens séparables est plus simple puisqu'ils sont elliptiques après restriction sur les espaces de moment angulaire fixé. L'estimation de Mourre pour  $L_0, L_\nu$  suit alors des arguments standards et des résultats du Chapitre 2.

Nous établissons le résultat de complétude asymptotique en deux étapes. Dans la première étape, nous nous ramenons à un problème séparable en comparant  $L$  avec  $L_0$ . Dans la deuxième étape, nous établissons une comparaison avec les dynamiques asymptotiques. Pour expliquer pourquoi la première étape semble être nécessaire, considérons comme un modèle plus simple l'équation des ondes dans la métrique de Schwarzschild. La perturbation à l'infini est une somme de deux perturbations. Une perturbation est en  $1/r^2$  (dans les coordonnées de Regge–Wheeler) et donc clairement à courte portée. L'autre est en  $r^{-3}\Delta_{S^2}$ . Elle est également à courte portée puisqu'elle devient une perturbation en  $1/r^3$  après diagonalisation selon les valeurs propres du Laplacien sur la sphère. Cet argument n'est bien entendu pas valable, si comme dans le cas de Kerr, une des deux dynamiques n'est pas à symétrie sphérique. En se ramenant d'abord à un problème à symétrie sphérique, nous évitons alors des perturbations à longue portée artificielles. La perturbation entière sera à longue portée puisqu'on considère l'équation de Klein–Gordon.

Le Chapitre 6 établit cette première étape dans la démonstration de la complétude asymptotique. La démonstration est basée sur l'estimation de Mourre et le principe d'absorption limite.

Dans le Chapitre 7, nous introduisons les projections asymptotiques. Ces projections servent à séparer les solutions qui se propagent dans les différents bouts de la variété.

Dans le Chapitre 8, nous démontrons la complétude asymptotique. La démonstration utilise l'estimation de Mourre, le principe d'absorption limite ainsi que les résultats des Chapitres 6 et 7.

Dans le Chapitre 9, nos résultats sont appliqués à la métrique de Kerr. On y trouve la construction des sous-espaces sur lesquels on a une énergie positive. On considère l'énergie qui est associée au champ de Killing (utilisant des coordonnées de Boyer–Lindquist et désignant par  $\Omega_H$  la vitesse angulaire de l'horizon relative à l'infini)  $\partial_t + \Omega_H \partial_\phi$ . Ce champ de Killing est de type temps près de l'horizon et de type espace à l'infini. La symétrie axiale de la métrique de Kerr donne la conservation d'un moment angulaire pour les solutions de l'équation de Klein–Gordon. Ceci permet d'imposer par la suite une restriction sur le moment angulaire de la donnée initiale. La masse positive de la particule rend l'opérateur positif. Pour des mésons neutres, nous pouvons permettre au moins  $10^{16}$  modes (selon le moment angulaire et la masse du trou noir, même plus).

## 2. Le cadre hilbertien

Dans ce chapitre, nous décrivons le cadre hilbertien du problème. Nous étudions d'abord une équation des ondes abstraite. Ensuite nous établissons à partir d'une estimation de Mourre pour un hamiltonien une estimation de Mourre pour sa racine et pour un problème matriciel.

**2.1. Une équation des ondes abstraite.** Nous rappelons ici quelques résultats de [H]. Considérons une équation des ondes abstraite sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de la forme suivante :

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - 2ik\partial_t u + hu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

Nous supposons pour la suite :

$$(2.1.2) \quad h, k \text{ autoadjoints,}$$

$$(2.1.3) \quad h \geq 0, \quad 0 \notin \sigma_{\text{pp}}(h),$$

$$(2.1.4) \quad D(k) \supset D(h^{1/2}) \text{ et } \forall u \in D(h^{1/2}), \quad \|ku\| \leq C(\|h^{1/2}u\| + \|u\|).$$

On introduit l'échelle d'espaces de Sobolev abstraits suivante :  $\mathcal{H}^2 := D(h)$ ,  $\mathcal{H}^1 := D(h^{1/2})$ ,  $\mathcal{H}^0 := \mathcal{H}$ . Sur  $\mathcal{H}^1$  nous introduisons la norme  $\|u\|_1^2 := (hu, u)$  (comme  $0 \notin \sigma_{\text{pp}}(h)$  il s'agit bien d'une norme). Soient  $\mathcal{H}_c^1$  le complété de  $\mathcal{H}^1$  pour cette norme et  $\mathcal{H}_c^2$  le complété de  $\mathcal{H}^2$  pour la norme  $\|u\|_2^2 := (hu, u) + \|hu\|^2$ . Pour  $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}$  nous posons

$$\|f\|_{\mathcal{R}}^2 = \|f_1\|^2 + (hf_0, f_0) \quad (\text{norme d'énergie})$$

et nous définissons l'espace d'énergie  $\mathcal{R} := \mathcal{H}_c^1 \oplus \mathcal{H}$  comme le complété de  $\mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}$  pour cette norme. Remarquons que la norme d'énergie est formellement conservée par l'évolution :

$$(2.1.5) \quad \partial_t(\|\partial_t u\|^2 + (hu, u)) = 2 \operatorname{Re}(\partial_t u, \partial_t^2 u) + 2 \operatorname{Re}(hu, \partial_t u) = 2 \operatorname{Re}(\partial_t u, 2ik\partial_t u) = 0.$$

Nous réécrivons l'équation des ondes comme un système de premier ordre :

$$(2.1.6) \quad \begin{cases} i\partial_t f = Rf, \\ f|_{t=0} = (u_0, u_1), \end{cases}$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -ih & -2k \end{pmatrix}.$$

On a (voir [H, Lemme 2.2] <sup>(1)</sup>) :

LEMME 2.1.1.  $R$  est autoadjoint sur  $\mathcal{R}$  avec domaine  $D(R) = \mathcal{H}_c^2 \oplus \mathcal{H}^1$ .

*Transformation unitaire.* Soit  $\mathcal{L} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Il est utile d'introduire la transformation unitaire suivante :

$$U : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h^{1/2} & i \\ h^{1/2} & -i \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h^{-1/2} & h^{-1/2} \\ -i & i \end{pmatrix},$$

$$L := URU^{-1} = \begin{pmatrix} h^{1/2} - k & k \\ k & -h^{1/2} - k \end{pmatrix}.$$

On a (voir [H, Proposition 2.1]) :

PROPOSITION 2.1.2.  $D(URU^{-1}) = UD(R) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ .

---

<sup>(1)</sup> Une erreur s'est glissée dans le texte de [H, Lemme 2.2] : lire  $\mathcal{H}_c^2$  au lieu de  $\mathcal{H}^2$ .

L'évolution est décrite par un groupe unitaire  $e^{-itL}$ .

Dans la suite pour expliciter la dépendance de  $U$  par rapport à  $h$ , nous utiliserons parfois la notation  $U(h)$ .

## 2.2. La théorie de Mourre

**2.2.1. Rappels.** L'ingrédient principal de l'estimation de Mourre est le commutateur  $[iH, A]$  entre l'hamiltonien  $H$  et un autre opérateur autoadjoint  $A$ , appelé *l'opérateur conjugué*. Comme tous les deux opérateurs sont en général non bornés, il faut être soigneux afin de définir correctement le commutateur. Nous rappelons dans ce contexte les conditions de Mourre (voir [M]). Soient  $H, A$  deux opérateurs autoadjoints. On dit que le couple  $(H, A)$  vérifie les *conditions de Mourre* si

(M1')  $D(A) \cap D(H)$  est dense dans  $D(H)$ ,

(M2')  $e^{isA}$  préserve  $D(H)$ ,  $\sup_{|s| \leq 1} \|He^{isA}u\| < \infty$ ,  $\forall u \in D(H)$ ,

(M3')  $[iH, A]$  définie comme forme quadratique sur  $D(H) \cap D(A)$  est bornée inférieurement, fermable et s'étend en un opérateur borné de  $D(H)$  dans  $\mathcal{H}$  :

$$|[iH, A](u, v)| \leq C\|Hu\| \|v\|, \quad \forall u, v \in D(H) \cap D(A).$$

Il a été remarqué dans [GG] que le théorème du viriel reste valable sous les conditions

(M1)  $e^{isA}$  préserve  $D(H)$ ,

(M2)  $[iH, A]$  défini comme forme quadratique sur  $D(H) \cap D(A)$  s'étend en un opérateur borné de  $D(H)$  dans  $\mathcal{H}$  :

$$|[iH, A](u, v)| \leq C\|Hu\| \|v\|, \quad \forall u, v \in D(H) \cap D(A).$$

(M1'), (M2') et (M1) sont en effet même équivalents.

Le cadre le plus agréable pour l'estimation de Mourre est peut-être le suivant (on peut le trouver dans [ABG]) :

Un opérateur borné  $C$  est de classe  $C^k(A; \mathcal{H})$  ssi

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto e^{isA}Ce^{-isA} \text{ est } C^k \text{ pour la topologie forte de } \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

$H \in C^k(A)$  s'il existe  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$  tel que  $(z - H)^{-1} \in C^k(A; \mathcal{H})$ . (M1)–(M2) impliquent  $H \in C^1(A)$  et le théorème du viriel est vrai sous la seule condition  $H \in C^1(A)$  (voir [ABG]).

La condition  $H \in C^1(A)$  a été caractérisée dans [ABG, Theorem 6.2.10] par le commutateur  $[H, iA]$  :

**PROPOSITION 2.2.1.** *L'opérateur  $H$  est de classe  $C^1(A)$  ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *il existe  $C < \infty$  tel que*

$$|(Au, Hu) - (Hu, Au)| \leq C\|(H + i)u\|^2, \quad \forall u \in D(H) \cap D(A),$$

(ii) *il existe  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$  tel que*

$$\{u \in D(A) \mid (z - H)^{-1}u \in D(A), (\bar{z} - H)^{-1}u \in D(A)\}$$

*est un cœur pour  $A$ .*

En général, il n'est pas facile de vérifier les conditions (i), (ii) si les domaines de  $H$  et de  $A$  ne sont pas connus explicitement. Une possibilité de vérifier dans un tel cas la condition  $H \in C^1(A)$  consiste à chercher d'abord un cœur commun pour les opérateurs  $H$  et  $A$ . Un tel cadre est décrit dans [GL]. On commence avec une petite extension du Théorème de Nelson (voir [GL, Lemma 1.2.5]) :

LEMME 2.2.2. *Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $N \geq 1$  un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{H}$ ,  $A$  un opérateur symétrique sur  $\mathcal{H}$  tel que  $D(N) \subset D(A)$  et*

- (i)  $\|Au\| \leq C\|Nu\|$ ,  $u \in D(N)$ ,
- (ii)  $|(Au, Nu) - (Nu, Au)| \leq C\|N^{1/2}u\|^2$ ,  $u \in D(N)$ .

*Alors l'opérateur  $A$  est essentiellement autoadjoint sur  $D(N)$ . De plus si  $u \in D(\bar{A})$ , alors  $(1 + i\varepsilon N)^{-1}u$  converge vers  $u$  dans la topologie du graphe de  $D(\bar{A})$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

L'opérateur  $N$  est appelé un *opérateur de comparaison*. Dans cette situation, il suffit de calculer le commutateur sur  $D(N)$ , plus précisément, on a le lemme suivant (voir [GL, Lemma 3.2.2]) :

LEMME 2.2.3. *Soient  $H, H_0, N$  des opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  tels que  $N \geq 1$ ,  $D(H) = D(H_0)$  comme espaces de Banach, et  $(z - H)^{-1}$  envoie  $D(N)$  dans lui-même. Soit  $A$  un opérateur symétrique sur  $D(N)$ . Supposons que  $H_0$  et  $A$  vérifient les hypothèses du Lemme 2.2.2 avec opérateur de comparaison  $N$  et continuons à désigner avec  $A$  l'unique extension autoadjointe de  $A$ . Supposons en plus*

$$|(Au, Hu) - (Hu, Au)| \leq C(\|Hu\|^2 + \|u\|^2), \quad \forall u \in D(N).$$

*Alors :*

- (i)  $D(N)$  est dense dans  $D(A) \cap D(H)$  équipé de la norme  $\|Hu\| + \|Au\| + \|u\|$ ,
- (ii) la forme quadratique  $[H, iA]$  sur  $D(A) \cap D(H)$  est l'unique extension de  $[H, iA]$  sur  $D(N)$ ,
- (iii)  $H$  est de classe  $C^1(A)$ .

## 2.2.2. Une extension abstraite de la théorie de Mourre

*Estimation de Mourre pour la racine d'un opérateur.* Soient  $h \geq 0$  et  $b$  deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  avec  $h \in C^1(b)$ . On suppose que le couple  $(h, b)$  vérifie une estimation de Mourre sur un intervalle  $I^2 = [\alpha^2, \beta^2]$  ( $\beta > \alpha > 0$ ) :

$$(2.2.1) \quad 1_{I^2}(h)[ih, b]1_{I^2}(h) \geq \nu 1_{I^2}(h) + k \quad \text{avec } \nu > 0 \text{ et } k \text{ compact.}$$

Nous allons construire un opérateur  $b_\chi$ , dépendant d'une fonction de troncature  $\chi$ , tel que  $h^{1/2} \in C^1(b_\chi)$  et tel que le couple  $(h^{1/2}, b_\chi)$  vérifie une estimation de Mourre sur tout intervalle  $\tilde{I} \subset I = [\alpha, \beta]$  avec  $\text{dist}(\tilde{I}, \mathbb{R} \setminus I) > 0$ . Pour ceci nous choisissons une fonction  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi|_{I^2} = 1$ . Comme  $h \in C^1(b)$ , on a  $\chi(h) : D(b) \rightarrow D(b)$  (voir [ABG]). L'opérateur  $\chi(h)b\chi(h)$  est alors bien défini sur  $D(b)$ . Comme opérateur symétrique défini de manière dense, il est fermable. On note  $b_\chi$  la fermeture. Comme  $h \in C^1(b)$ , on a  $\chi(h) \in C^1(b; \mathcal{H})$  par [ABG, Theorem 6.2.5] et donc  $b_\chi$  autoadjoint par [ABG, Lemma 7.2.15].

THÉORÈME 2.2.4. (i) Pour tout  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ , le couple  $(h^{1/2}, b_\chi)$  vérifie (M1), (M2) et  $[h^{1/2}, b_\chi]$  possède une extension à un opérateur borné.

(ii) Pour tout  $\tilde{I} \subset I$  avec  $\text{dist}(\tilde{I}, \mathbb{R} \setminus I) > 0$  et tout  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $\chi|_{I^2} = 1$ , on a

$$1_{\tilde{I}}(h^{1/2})[ih^{1/2}, b_\chi]1_{\tilde{I}}(h^{1/2}) \geq \mu 1_{\tilde{I}}(h^{1/2}) + \tilde{k} \quad \text{avec } \mu > 0 \text{ et } \tilde{k} \text{ compact.}$$

*Démonstration.* (i) La démonstration de (M1) est analogue à celle de [H, Lemme 3.3(i)]. Nous affirmons que  $[ih^{1/2}, b_\chi]$  possède une extension à un opérateur borné, ce qui montre en particulier (M2). Commençons par remarquer que grâce à [ABG, Proposition 7.2.16]  $h \in C^1(b_\chi)$  et que  $[ih, b_\chi]$  possède une extension à un opérateur borné que nous allons désigner par  $[ih, b_\chi]_0$ . En effet

$$[ih, b_\chi] = \chi(h)[ih, b]\chi(h)$$

au sens des formes quadratiques sur  $D(h) \cap D(b)$ , donc

$$|[ih, b_\chi](u, v)| \leq C\|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in D(h) \cap D(b)$$

et  $D(h) \cap D(b)$  est dense dans  $D(h)$  par [ABG, Theorem 6.2.10],  $D(h)$  dense dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\tilde{\chi}\chi = \chi$ . Comme  $h \in C^1(b_\chi)$ , on a  $\tilde{\chi}(h) : D(b_\chi) \rightarrow D(b_\chi)$  et  $\tilde{\chi}(h)b_\chi\tilde{\chi}(h)$  est bien défini sur  $D(b_\chi)$ . On a  $b_\chi = \tilde{\chi}(h)b_\chi\tilde{\chi}(h)$  sur  $D(b)$  et par densité sur  $D(b_\chi)$ . Rappelons maintenant que

$$\tilde{\chi}(h)h^{1/2}\tilde{\chi}(h) = \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2}\tilde{\chi}(h)^2 h(s+h)^{-1} ds,$$

où, comme  $\text{supp } \tilde{\chi} \subset ]0, \infty[$ , l'intégrale converge en norme. Pour  $u \in D(h^{1/2}) \cap D(b_\chi)$ , on a

$$\begin{aligned} & (b_\chi u, h^{1/2}u) - (h^{1/2}u, b_\chi u) \\ &= (b_\chi \tilde{\chi}(h)u, h^{1/2}\tilde{\chi}(h)u) - (h^{1/2}\tilde{\chi}(h)u, b_\chi \tilde{\chi}(h)u) \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2} \{ (b_\chi \tilde{\chi}(h)u, h(s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u) - (h(s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u, b_\chi \tilde{\chi}(h)u) \} ds \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} \{ -(b_\chi \tilde{\chi}(h)u, (s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u) + ((s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u, b_\chi \tilde{\chi}(h)u) \} ds \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} \{ (b_\chi (s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u, h(s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u) \\ &\quad - (h(s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u, b_\chi (s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u) \} ds \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} ([h, b_\chi]_0 (s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u, (s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)u) ds, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité  $h(s+h)^{-1} = 1 - s(h+s)^{-1}$  et le fait que  $\tilde{\chi}(h)(s+h)^{-1} : D(b_\chi) \rightarrow D(b_\chi)$ . En utilisant

$$(2.2.2) \quad \|(s+h)^{-1}\tilde{\chi}(h)\| \leq C(s+\delta)^{-1} \quad (\delta > 0)$$

nous pouvons alors estimer

$$|[h^{1/2}, b_\chi](u, u)| \leq C\|u\|^2, \quad \forall u \in D(h^{1/2}) \cap D(b_\chi),$$

i.e.  $[h^{1/2}, b_\chi]$  est borné.

(ii) Soit maintenant  $\widehat{\chi} \in C_0^\infty(I^2)$  avec  $\widehat{\chi}|_{\bar{I}^2} = 1$ ,  $\chi$  comme dans les conditions de (ii), en particulier  $\widehat{\chi}\chi = \widehat{\chi}$ . Par un calcul similaire à celui dans (i), on obtient au sens des opérateurs bornés :

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} \widehat{\chi}(h)[ih^{1/2}, b_\chi]\widehat{\chi}(h) &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2}(s+h)^{-1}\widehat{\chi}(h)[ih, b]\widehat{\chi}(h)(s+h)^{-1} ds \\ &\geq \nu\pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2}(s+h)^{-1}\widehat{\chi}^2(h)(s+h)^{-1} ds \\ &\quad + \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2}(s+h)^{-1}\widetilde{\chi}(h)k\widetilde{\chi}(h)(s+h)^{-1} ds \\ &\geq \mu\widehat{\chi}^2(h) + \widetilde{k} \end{aligned}$$

avec  $\mu > 0$ . L'opérateur  $(s+h)^{-1}\widetilde{\chi}(h)k\widetilde{\chi}(h)(s+h)^{-1}$  est compact. L'intégrale dans la troisième ligne de (2.2.3) est convergente en norme grâce à (2.2.2). L'opérateur  $\widetilde{k}$  est alors compact, ce qui termine la démonstration. ■

*Estimation de Mourre pour un problème matriciel.* Soient  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  et  $\mathcal{H}$ ,  $h \geq 0$ ,  $b, b_\chi$  comme ci-dessus, en particulier  $h \in C^1(b)$ . Nous considérons les opérateurs autoadjoints suivants sur  $\mathcal{L}$  :

$$B_\chi := \begin{pmatrix} b_\chi & 0 \\ 0 & b_\chi \end{pmatrix}, \quad D(B_\chi) = D(b_\chi) \oplus D(b_\chi), \quad L := \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

avec  $c \in \mathbb{R}^+$  et  $D(L) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$  ( $\mathcal{H}^1 = D(h^{1/2})$ , voir Section 2.1). Soit  $S_h \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble discret tel que  $0 \in S_h$  et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus S_h, \exists I \text{ voisinage de } \lambda \text{ avec } 1_I(h)[ih, b]1_I(h) \geq \nu 1_I(h) + k$$

avec  $\nu > 0$  et  $k$  compact. On appelle  $S_h$  l'ensemble des *seuils* de  $h$ . Nous posons  $S_L := \{-c \pm \sqrt{\lambda^2 + c^2} \mid \lambda \in S_h\}$ . On obtient :

THÉORÈME 2.2.5. (i)  $\forall \chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $(L, B_\chi)$  vérifie (M1), (M2).

(ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus S_L, \exists \chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $I$  voisinage de  $\lambda$  avec

$$\begin{aligned} 1_I(L)[iL, B_\chi]1_I(L) &\geq \mu 1_I(L) + K_1 & \text{si } \lambda > 0, \\ 1_I(L)[iL, -B_\chi]1_I(L) &\geq \mu 1_I(L) + K_2 & \text{si } \lambda < 0, \end{aligned}$$

avec  $\mu > 0$  et  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) compacts.

*Démonstration.* (i) (M1) est vérifié puisque  $e^{isb_\chi} : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^1$ . Vérifions (M2) :

$$[iL, B_\chi] = \begin{pmatrix} [ih^{1/2}, b_\chi] & 0 \\ 0 & -[ih^{1/2}, b_\chi] \end{pmatrix}.$$

Par le Théorème 2.2.4,  $[ih^{1/2}, b_\chi]$  possède une extension à un opérateur borné. (M2) est alors vérifié.



(ii) Soit  $h_c := h + c^2$ ,  $D(h_c) = D(h)$ . Les seuils de  $h_c$  sont donnés par  $S_{h_c} = S_h + c^2$ . Nous ne traitons que le cas  $\lambda > 0$ , i.e.  $\lambda = -c + \sqrt{\lambda_0 + c^2}$ ,  $0 < \lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus S_h$ , l'autre cas étant analogue. Soit  $\tilde{I} \subset ]c^2, \infty[$  un intervalle ouvert avec  $\lambda_0 + c^2 \in \tilde{I}$  et  $\tilde{I} \cap S_{h_c} = \emptyset$ . Soient  $\chi_1 \in C_0^\infty(\tilde{I})$  avec  $\chi_1 = 1$  dans un voisinage de  $\lambda_0 + c^2$  et  $\chi \in C_0^\infty(\tilde{I})$  avec  $\chi_1 \chi = \chi_1$ . Nous définissons  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  par  $\tilde{\chi}(-c + \sqrt{x}) = \chi_1(x)$ . On a  $\tilde{\chi} = 1$  dans un voisinage de  $\lambda$ . Dans ce qui suit,  $b_\chi$  désigne la fermeture de  $\chi(h + c^2)b\chi(h + c^2)$ . On introduit la transformation unitaire suivante :

$$V(h) := \begin{pmatrix} a_{11}(h) & a_{21}(h) \\ a_{12}(h) & a_{22}(h) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11}(\lambda) &:= \frac{c}{(c^2 + (\sqrt{\lambda} + c^2 - \lambda^{1/2})^2)^{1/2}}, & a_{12}(\lambda) &:= \frac{-\lambda^{1/2} + \sqrt{\lambda + c^2}}{(c^2 + (\sqrt{\lambda} + c^2 - \lambda^{1/2})^2)^{1/2}}, \\ a_{21}(\lambda) &:= \frac{c}{(c^2 + (\sqrt{\lambda} + c^2 + \lambda^{1/2})^2)^{1/2}}, & a_{22}(\lambda) &:= \frac{-\lambda^{1/2} - \sqrt{\lambda + c^2}}{(c^2 + (\sqrt{\lambda} + c^2 + \lambda^{1/2})^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

$a_{ij}$  sont clairement continues  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Afin de démontrer que  $a_{ij}(h)$  définissent bien des opérateurs bornés de  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , il faut vérifier que les  $a_{ij}$  sont bornés, ce qui suit du fait que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{11}(\lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{21}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{12}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{22}(\lambda) = -1.$$

$V(h)$  est unitaire puisque  $a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$ ,  $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$ . On obtient

$$V^*LV =: \hat{L} = \begin{pmatrix} -c + \sqrt{h + c^2} & 0 \\ 0 & -c - \sqrt{h + c^2} \end{pmatrix}.$$

On a

$$V^*\tilde{\chi}(L)[iL, B_\chi]\tilde{\chi}(L)V = \tilde{\chi}(\hat{L})[i\hat{L}, \hat{B}]\tilde{\chi}(\hat{L})$$

avec

$$\hat{B} = V^*B_\chi V = \begin{pmatrix} a_{11}b_\chi a_{11} + a_{12}b_\chi a_{12} & a_{11}b_\chi a_{21} + a_{12}b_\chi a_{22} \\ a_{21}b_\chi a_{11} + a_{22}b_\chi a_{12} & a_{21}b_\chi a_{21} + a_{22}b_\chi a_{22} \end{pmatrix}.$$

On pose  $\hat{h} := -c + \sqrt{h + c^2}$ ,  $\hat{b} := a_{11}b_\chi a_{11} + a_{12}b_\chi a_{12}$ . Alors, comme  $\text{supp } \tilde{\chi} \subset ]0, \infty[$ ,

$$\tilde{\chi}(\hat{L})[i\hat{L}, \hat{B}]\tilde{\chi}(\hat{L}) = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}(\hat{h})[i\hat{h}, \hat{b}]\tilde{\chi}(\hat{h}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient, en utilisant le Théorème 2.2.4,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\hat{h})[i\hat{h}, \hat{b}]\tilde{\chi}(\hat{h}) &= a_{11}\chi_1(h_c)[ih_c^{1/2}, b_\chi]\chi_1(h_c)a_{11} + a_{12}\chi_1(h_c)[ih_c^{1/2}, b_\chi]\chi_1(h_c)a_{12} \\ &\geq a_{11}(\nu\chi_1^2(h_c) + k)a_{11} + a_{12}(\nu\chi_1^2(h_c) + k)a_{12} = \nu\chi_1^2(h_c) + k, \end{aligned}$$

avec  $k$  compact si le support de  $\tilde{\chi}$  est suffisamment petit. Ici on a utilisé deux fois que  $[h, a_{ij}] = 0$ ,  $\forall i, j$ , ainsi que  $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$  ( $V$  unitaire). Donc, en rassemblant,

$$V^*\tilde{\chi}(L)[iL, B_\chi]\tilde{\chi}(L)V \geq \nu\tilde{\chi}^2(\hat{L}) + \tilde{K}, \quad \tilde{\chi}(L)[iL, B_\chi]\tilde{\chi}(L) \geq \nu\tilde{\chi}^2(L) + K,$$

avec  $\tilde{K}, K$  compacts et  $\nu > 0$ . ■

### 3. Le cadre géométrique

Dans ce chapitre, nous décrivons la variété lorentzienne que nous considérons ainsi que les différents hamiltoniens liés à cette géométrie. Nous commençons par décrire l'hamiltonien séparable  $h_0$ , qui sert d'hamiltonien de référence, et nous décrivons ensuite l'hamiltonien perturbé ainsi que les hamiltoniens asymptotiques. Nous considérons une variété de dimension  $n$  du type  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times K$  avec  $K$  une variété compacte. Nous munissons  $\mathcal{M}$  de la densité  $d\mu = drd\omega$  de classe  $C^\infty$ , où  $d\omega$  est une densité  $C^\infty$  sur  $K$ . Soit  $P$  un opérateur différentiel elliptique du deuxième ordre formellement autoadjoint sur  $L^2(K, d\omega)$ . Alors  $P$  est autoadjoint avec domaine l'espace de Sobolev  $H^2(K)$ . Nous supposons également  $P \geq 0$ . Pour une variété  $Y$ , nous notons  $C_b^\infty(Y)$  l'ensemble de fonctions  $C^\infty$  qui sont bornées avec toutes leurs dérivées sur  $Y$ .

**3.1. Classes de symboles.** Soit  $\sigma > 0$ . Nous définissons comme sous-ensembles de  $C^\infty(\mathcal{M})$  les classes de symboles suivantes ( $\langle x \rangle := \sqrt{x^2 + 1}$ ) :

$$\begin{aligned} f \in \mathbf{S}^{m,n} \quad & \text{ssi} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^{n-1}, \partial_r^\alpha \partial_\omega^\beta f \in \begin{cases} O(\langle r \rangle^{m-\alpha}), & r \rightarrow \infty, \\ O(e^{n\sigma|r|}), & r \rightarrow -\infty; \end{cases} \\ f \in \mathbf{S}^m \quad & \text{ssi} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^{n-1}, \partial_r^\alpha \partial_\omega^\beta f \in O(\langle r \rangle^{m-\alpha}). \end{aligned}$$

Rappelons que pour  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , on a

$$f \in S^m \quad \text{ssi} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \partial_r^\alpha f \in O(\langle r \rangle^{m-\alpha}).$$

Nous allons comprendre la classe de symboles  $S^m$  comme sous-ensemble de  $\mathbf{S}^m$ .

**3.2. Hamiltonien séparable.** Considérons sur  $C_0^\infty(\mathcal{M})$  l'opérateur

$$(3.2.1) \quad h_0 = D_r^2 + g(r)P + f(r) \quad \text{avec} \quad f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}), g, f > 0.$$

On exige  $g \in \mathbf{S}^{-2,-1}$ ,  $f' \in \mathbf{S}^{-2}$  et l'existence de  $R, C, c_0 \geq 0$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$  tels que :

$$(3.2.2) \quad \forall r \leq -R, \begin{cases} e^{\sigma r} \leq Cg^{(i)}(r), & i = 0, 1, \\ e^{\sigma r} \leq Cf(r), \end{cases}$$

$$(3.2.3) \quad f(r) \in O(\langle r \rangle^{-2}), \quad r \rightarrow -\infty,$$

$$(3.2.4) \quad \forall r \geq R, \quad \langle r \rangle^{-2} \leq C(-r)^i g^{(i)}(r), \quad i = 0, 1,$$

$$(3.2.5) \quad f(r) - c_0 - \frac{c_2}{r} \in O(\langle r \rangle^{-2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Soit ensuite  $k_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  avec  $k'_0 \in S^{-3}$  et

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} k_0 - c_1 \in O(\langle r \rangle^{-2}), & r \rightarrow \infty, \\ k_0 \in O(\langle r \rangle^{-2}), & r \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

avec  $c_1 \geq 0$ . Si  $c_0 = 0$ , alors on exige  $c_2 > 0$ .

**REMARQUE 3.2.1.** Les fonctions  $g, f, k_0$  dépendent uniquement de  $r$ . L'écriture (3.2.1) exprime le fait que l'opérateur  $h_0$  est séparable. Si  $h_0$  est le Laplacien associé à une métrique sur  $\mathcal{M}$ , alors (3.2.2) exprime que le bout  $\mathcal{M}^- = \mathbb{R}^- \times K$  est exponentiellement grand. De façon analogue, (3.2.4) exprime dans ce cas que  $\mathcal{M}^+ = \mathbb{R}^+ \times K$  est polynomialement grand.

Comme  $P$  est elliptique,  $P \geq 0$  et  $K$  compacte, il existe une base hilbertienne  $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(K, d\omega)$  constituée de vecteurs propres de  $P$ . Soit  $\lambda_l \geq 0$  la valeur propre associée au vecteur propre  $y_l$  et  $Y_l := \text{Vect}\{y_l\}$ . On écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= L^2(\mathcal{M}, d\mu) = L^2(\mathbb{R}, dr) \otimes L^2(K, d\omega) = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}, dr) \otimes Y_l, \\ \mathcal{H}_l &:= L^2(\mathbb{R}, dr) \otimes Y_l, \quad \mathcal{L}_l := \mathcal{H}_l \oplus \mathcal{H}_l. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(3.2.7) \quad h_0^l := D_r^2 + g(r)\lambda_l + f(r), \quad D(h_0^l) = H^2(\mathbb{R}),$$

alors on obtient que  $(h_0^l, D(h_0^l))$  est autoadjoint sur  $\mathcal{H}_l$  puisque  $g, f$  sont des fonctions bornées. Alors  $h_0$  est autoadjoint avec domaine

$$(3.2.8) \quad D(h_0) = \left\{ u = \sum_l u_l, u_l \in D(h_0^l), \sum_l \|h_0^l u\|^2 < \infty \right\}.$$

**3.3. Hamiltonien perturbé.** Dans un premier temps, nous allons considérer des perturbations de l'équation des ondes

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - 2ik_0 \partial_t u + h_0 u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1, \end{cases}$$

que nous allons écrire sous la forme

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - 2ik \partial_t u + hu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

Soient  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  un système de coordonnées locales sur  $K$  et  $D_i := D_{\theta_i}$ . Nous considérons sur  $C_0^\infty(\mathcal{M})$  un opérateur  $h \geq \varepsilon f$  ( $\varepsilon > 0$ ) et une fonction  $k \in C_b^\infty(\mathcal{M})$  avec

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} h|_{C_0^\infty(\mathcal{M})} &= h_0 + \sum_{i,j \in \{1, \dots, n-1\}} D_i^* g^{ij} D_j + \sum_{i \in \{1, \dots, n-1\}} (g^i D_i + D_i^* \bar{g}^i) \\ &\quad + D_r g^{rr} D_r + g^r D_r + D_r \bar{g}^r + f_1 \\ &=: h_0 + h_1, \end{aligned}$$

$$(3.3.4) \quad k := k_0 + k_1.$$

On exige :

$$(3.3.5) \quad (g^{ij}), g^{rr}, f_1 \geq 0,$$

$$(3.3.6) \quad \langle r \rangle^2 g^{ij} \in \mathbf{S}^{-2, -1}, \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(3.3.7) \quad g^i \in \mathbf{S}^{-3, -1}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(3.3.8) \quad g^{rr} \in \mathbf{S}^{-2},$$

$$(3.3.9) \quad g^r \in \mathbf{S}^{-2, -1/2},$$

$$(3.3.10) \quad f_1 \in \mathbf{S}^{-2, -1},$$

$$(3.3.11) \quad k_1 \in \mathbf{S}^{-2}.$$

Nous désignons par  $(h, D(h))$  l'extension de Friedrichs de  $h$ .

REMARQUE 3.3.1. (a) Si l'on pose  $\|v\| = \sum_i \|D_i v\|_{L^\infty(K)} + \|v\|_{L^\infty(K)}$ , alors on obtient :

$$(3.3.12) \quad \||g^{ij}\|| \leq C \langle r \rangle^{-2} g(r),$$

$$(3.3.13) \quad \||g^i\|| \leq C \min\{\langle r \rangle^{-2}, f^{1/2}(r)\} g^{1/2}(r),$$

$$(3.3.14) \quad \||g^{rr}\|| \leq C \langle r \rangle^{-2},$$

$$(3.3.15) \quad \||g^r\|| \leq C \min\{\langle r \rangle^{-2}, f^{1/2}(r)\},$$

$$(3.3.16) \quad \||f_1\|| \leq C \min\{\langle r \rangle^{-2}, f(r)\}.$$

(b) Si  $g^r$  est purement imaginaire, il suffit d'imposer  $(D_r g^r) \in \mathbf{S}^{-2,-1}$  au lieu de (3.3.9) puisque  $g^r D_r + D_r \bar{g}^r = (D_r \bar{g}^r)$  et  $(D_r \bar{g}^r)$  est un terme du même type que  $f_1$ . Une remarque analogue est valable pour  $g^i$ .

**3.4. Hamiltoniens asymptotiques.** Dans notre modèle, nous avons deux asymptotiques (qui correspondent à  $r \rightarrow \pm\infty$ ). Nous allons faire une comparaison à l'infini positif et à l'infini négatif avec deux hamiltoniens asymptotiques différents. Les hamiltoniens asymptotiques que nous introduisons maintenant portent deux indices. Le premier indice explique à quel infini nous allons comparer avec cet hamiltonien (+ pour l'infini positif, - pour l'infini négatif), le deuxième indice explique quelle approche nous suivons (1 correspond à la comparaison avec une équation des ondes plus simple, 2 correspond à une description de la dynamique en termes de profils).

Dans un deuxième temps, nous allons comparer (3.3.1) à l'infini positif à  $(i = 1, 2)$

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - 2ik_{(+,i)} \partial_t + h_{(+,i)})u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1, \end{cases}$$

et à l'infini négatif à  $(i = 1, 2)$

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - 2ik_{(-,i)} \partial_t + h_{(-,i)})u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

À l'infini positif, nous allons modifier dans l'application à la métrique de Kerr la dynamique pour (3.4.1),  $i = 2$ , par un modificateur de Dollard.

On va décrire maintenant les opérateurs  $h_{(\pm,i)}$  et  $k_{(\pm,i)}$ . Nous fixons trois fonctions  $g_\pm, f_{(-,1)} \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  avec

$$(3.4.3) \quad 0 < g_- \in \mathbf{S}^{-2,-1}, \quad 0 < g_+ \in \mathbf{S}^{-2}, \quad 0 < f_{(-,1)} \in \mathbf{S}^{-2,-1},$$

$$(3.4.4) \quad \forall r \leq -R, \quad e^{\sigma r} \leq C g_\pm(r), \quad e^{\sigma r} \leq C f_{(-,1)}(r),$$

$$(3.4.5) \quad \forall r \geq R, \quad \langle r \rangle^{-2} \leq C g_+(r).$$

Soient  $T > 0, \theta_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\text{supp } \theta_0 \subset ]-\infty, -T/2[ \cup ]T/2, \infty[$  et  $\theta_0 = 1$  sur  $]-\infty, -T[ \cup ]T, \infty[$ . Soit  $0 < \theta_+ \in \mathbf{S}^{0,-1}$  et  $\theta_+(r) = 1$  pour  $r \geq 1$ . On pose :

$$(3.4.6) \quad f_{(+,2)}(r) := \frac{c_2}{|r|} \theta_0(r) + c_0,$$

$$(3.4.7) \quad f_{(+,1)}(r) := \theta_+(r) \left( \frac{c_2}{|r|} \theta_0(r) + \frac{c_0}{2} \right) + \frac{c_0}{2}.$$

Nous choisissons  $T > 0$  suffisamment grand pour que  $f_{(+,2)} \geq c_0/2 \geq 0$ . Nous introduisons les hamiltoniens suivants :

$$\begin{aligned} h_{(-,1)} &:= D_r^2 + g_-(r)P + f_{(-,1)}(r), & h_{(+,1)} &:= D_r^2 + g_+(r)P + f_{(+,1)}(r), \\ h_{(-,2)} &:= D_r^2, & h_{(+,2)} &:= D_r^2 + f_{(+,2)}(r). \end{aligned}$$

On pose  $\mathcal{N} := \{0, (-, i), (+, i) \mid i = 1, 2\}$ . Pour  $\nu \in \mathcal{N}$ , les hamiltoniens  $h_\nu^l$  sont construits de façon analogue à  $h_0^l$  avec domaine  $H^2(\mathbb{R})$  et les  $h_\nu$  sont autoadjoints avec domaine

$$D(h_\nu) = \left\{ u = \sum_l u_l \mid u_l \in H^2(\mathbb{R}), \sum_l \|h_\nu^l u_l\|^2 < \infty \right\}.$$

On définit  $W_\nu^l$  par

$$h_\nu^l =: D_r^2 + W_\nu^l.$$

Nous posons

$$(3.4.8) \quad k_\nu := \begin{cases} c_1 & \text{si } \nu = (+, i), i = 1, 2, \\ 0 & \text{si } \nu = (-, i), i = 1, 2. \end{cases}$$

REMARQUE 3.4.1. (a) Les hamiltoniens  $h_\nu$ ,  $\nu \in \mathcal{N}$ , sont tous séparables.

(b) L'hamiltonien  $h_0$  est “proche” de  $D_r^2 + f(r)$  grâce à son caractère séparable, qui permet de voir  $g$  comme un potentiel. Avec ce point de vue, il suffit d'imposer une condition de courte portée aux potentiels  $g_\pm$  pour pouvoir les comparer avec  $g$ .

(c) Le terme à longue portée est dans  $f_{(+,i)}$ .  $f_{(+,2)}$  est choisi tel que la dynamique de Dollard dans l'application à la métrique de Kerr devienne la plus simple possible. D'autre part, l'hamiltonien  $h_{(+,2)}$  lui-même possède au moins une valeur propre si  $c_2 < 0$ .  $f_{(+,1)}$  diffère de  $f_{(+,2)}$  de façon que  $h_{(+,1)}$  ne possède pas de valeurs propres (voir Section 4.2) et tel que  $h_{(+,1)}$  est strictement positif si  $c_0 > 0$ .

## 4. Étude des hamiltoniens $h, h_\nu$ et de leurs espaces de Sobolev associés

Dans ce chapitre, nous étudions les hamiltoniens  $h$  et  $h_\nu$  ainsi que leurs espaces de Sobolev associés.

**4.1. Résultats techniques.** Soient  $V_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ ,  $V_1 \geq 0$  et  $V_2 \in S^{\varrho}(\mathbb{R})$  avec  $\langle r \rangle^{\varrho} \leq CV_2$  ( $C > 0$ ,  $\varrho \in \mathbb{N}$ ). On pose

$$\begin{aligned} H^l &:= D_r^2 + V_1(r)\lambda_l + V_2(r), & D_1(H^l) &= \{u \in \mathcal{H}_l \mid H^l u \in \mathcal{H}_l\}, \\ H &:= D_r^2 + V_1(r)P + V_2(r), & D_1(H) &= \{u \in \mathcal{H} \mid Hu \in \mathcal{H}\}, \end{aligned}$$

où  $H^l u$  et  $Hu$  sont à comprendre au sens des distributions.

Soit  $u \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ . Alors  $u \in \bigcap_k D(P^k)$ . L'écriture

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l, \quad u_l = \mathbf{1}_{\{\lambda_l\}}(P)u$$

a un sens et converge dans  $\bigcap_k D(P^k)$ . À cause des injections de Sobolev

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l \text{ est convergente dans } C_0^\infty(\mathcal{M}).$$

Par dualité, si  $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ , on peut écrire

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} u_l, \quad \langle u_l, \phi \rangle := \langle u, \phi_l \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathcal{M}),$$

et la série converge dans  $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ . On a aussi

$$\langle Hu, \phi \rangle := \langle u, H\phi \rangle = \sum_l \langle u, H^l \phi_l \rangle = \sum_l \langle H^l u_l, \phi \rangle.$$

Donc si  $u \in D(H)$ , on a

$$\forall l \in \mathbb{N}, u_l \in D(H^l), \quad \sum_l \|H^l u_l\|^2 < \infty.$$

LEMME 4.1.1. (i)  $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^m) \cap D(\langle x \rangle^e)$ ,  $\forall e, s \in \mathbb{N}$ ,

(ii)  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  est dense dans  $D_1(H^l)$  équipé de la norme de graphe,

(iii)  $C_0^\infty(\mathcal{M})$  est dense dans  $D_1(H)$  équipé de la norme de graphe.

*Démonstration.* Nous allons utiliser le calcul pseudodifférentiel et en particulier la quantification de Weyl (voir Appendice C). Soit  $\phi \in C_0^\infty(\{|x| < 1\})$ ,  $\phi \geq 0$ ,  $\int \phi = 1$ . Soit en plus  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ ,  $\|\partial_x^\alpha \chi\| \leq 1$ ,  $\forall |\alpha| \leq s$  et  $\chi = 1$  sur  $\{|x| < 1\}$ .

(i) On pose

$$F_n : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^m), \quad u \mapsto \chi(x/n) \widehat{\phi}(D/n)u,$$

où  $\widehat{\phi}$  est la transformée de Fourier de  $\phi$ . On a :

(1)  $F_n \rightarrow \mathbf{1}$  fortement dans  $H^s(\mathbb{R}^m)$ ,

(2)  $F_n \rightarrow \mathbf{1}$  fortement dans  $D(\langle x \rangle^e)$ .

(1) En effet  $F_n \rightarrow \mathbf{1}$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  et

$$[i\langle D \rangle^s, F_n] \langle D \rangle^{-s} = e_n^w + O(n^{-2}) \quad \text{avec} \quad e_n(x, \xi) = s \langle \xi \rangle^{-2} \xi \nabla_x \chi(x/n) n^{-1} \widehat{\phi}(\xi/n),$$

donc  $e_n^w \in O(n^{-1})$ .

(2) On a

$$[i\langle x \rangle^e, F_n] \langle x \rangle^{-e} = f_n^w + O(n^{-2}) \quad \text{avec} \quad f_n(x, \xi) = -\chi(x/n) n^{-1} x \nabla_\xi \widehat{\phi}(\xi/n) \varrho \langle x \rangle^{-2},$$

donc  $f_n^w \in O(n^{-1})$ , ce qui termine la démonstration de (i).

(ii) On prend le même  $F_n$  que dans la démonstration de (i) pour  $m = 1$ . Il suffit de démontrer

$$[(H^l + 1), F_n] (H^l + 1)^{-1} \in O(n^{-1}).$$

Utilisant l'ellipticité de  $H^l$  et le Théorème C.3, on obtient

$$\sigma_{\text{pr}}((H^l + 1)^{-1}) = (\xi^2 + V_1(r)\lambda_l + V_2(r) + 1)^{-1}.$$

Donc, on a

$$[i(H^l + 1), F_n](H^l + 1)^{-1} = e_n^w - f_n^w + O(n^{-2})$$

avec

$$e_n(r, \xi) = 2\xi\chi' \left( \frac{r}{n} \right) \frac{1}{n} \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{n} \right) (\xi^2 + V_1(r)\lambda_l + V_2(r) + 1)^{-1},$$

$$f_n(r, \xi) = (V_1'(r)\lambda_l + V_2'(r))\chi(r/n)n^{-1}\widehat{\phi}'(\xi/n)(\xi^2 + V_1(r)\lambda_l + V_2(r) + 1)^{-1},$$

ce qui entraîne

$$e_n^w \in O(n^{-1}), \quad f_n^w \in O(n^{-1})$$

et montre (ii).

(iii) On identifie  $L^2(\mathbb{R}, dr) \otimes Y_l \simeq L^2(\mathbb{R}, dr)$ . Soit  $u = \sum u_l \in D_1(H)$ . On a au sens des distributions  $Hu = \sum H^l u_l$  et donc  $u_l \in D_1(H^l)$  pour tout  $l$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , nous choisissons  $N > 0$  tel que

$$\sum_{l \geq N} \|(H^l + 1)u_l\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $u_l \in D_1(H^l)$ , il existe  $\phi_N^l \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$\|(H^l + 1)(u_l - \phi_N^l)\|^2 < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Nous posons  $\phi_N := \sum_{l \leq N} \phi_N^l \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ . On a

$$\|(H + 1)(u - \phi_N)\|^2 = \sum_{l \geq N} \|(H^l + 1)u_l\|^2 + \sum_{l < N} \|(H^l + 1)(u_l - \phi_N^l)\|^2 < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Soient maintenant  $D_2(H^l)$  le domaine de l'extension de Friedrichs de  $H^l$  à partir de  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $D_2(H)$  le domaine de l'extension de Friedrichs de  $H$  à partir de  $C_0^\infty(\mathcal{M})$  et

$$D_3(H) := \left\{ u = \sum_l u_l \mid u_l \in D_1(H^l), \sum_l \|H^l u_l\|^2 < \infty \right\}.$$

LEMME 4.1.2. (i)  $D_1(H^l) = D_2(H^l) =: D(H^l)$ ,

(ii)  $D_1(H) = D_2(H) = D_3(H) =: D(H)$ .

En particulier  $(H^l, D(H^l))$  et  $(H, D(H))$  sont autoadjoints.

*Démonstration.* (i) Notons  $\mathcal{H}_l^i$  l'échelle d'espaces de Sobolev associée à  $(H^l, D_2(H^l))$ . Montrons d'abord que  $(H^l, D_1(H^l))$  est autoadjoint. Pour  $u, v \in D_1(H^l)$  et  $v_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tels que  $v_n \rightarrow v$  dans  $D_1(H^l)$ , on calcule

$$(H^l u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H^l u, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, H^l v_n) = (u, H^l v)$$

et donc  $(H^l, D_1(H^l))$  est symétrique.

Montrons qu'il est fermé. Soient  $u_n \in D_1(H^l)$ ,  $v_n \in \mathcal{H}_l$  avec  $u_n \rightarrow u$  dans  $\mathcal{H}_l$ ,  $Hu_n = v_n$ ,  $v_n \rightarrow v$  dans  $\mathcal{H}_l$ . On a  $H^l u_n \rightarrow H^l u$  au sens des distributions, donc  $H^l u = v \in \mathcal{H}_l$  au sens des distributions, i.e.  $u \in D_1(H^l)$  et  $H^l u = v$ .

Il reste à montrer que  $\text{Im}(H^l + i) = \mathcal{H}_l$ . Pour  $v \in \mathcal{H}_l$  il existe par le théorème de Lax–Milgram  $u \in \mathcal{H}_l^1$  tel que  $(H^l + i)u = v$  et donc  $H^l u = v - iu \in \mathcal{H}_l$ , i.e.  $u \in D_1(H^l)$ .

$(H^l, D_1(H^l))$  est alors autoadjoint et il étend  $(H^l, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ . Pour démontrer qu'il s'agit de l'extension de Friedrichs, il suffit grâce à [RS, Theorem X.23] de démontrer  $D_1(H^l) \subset \mathcal{H}_l^1$ . Soit  $Q^l$  la fermeture de la forme quadratique associée à  $(H^l, C_0^\infty(\mathbb{R}))$ . Soient  $u \in D_1(H^l)$  et  $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  avec  $H^l u_n \rightarrow H^l u$ . Alors  $Q^l(u_n - u) \rightarrow 0$ , i.e.  $u \in \mathcal{H}_l^1$ .

(ii) On a clairement  $D_1(H) = D_3(H)$  puisque  $H(\sum_l u_l) = \sum_l H^l u_l$  au sens des distributions. La démonstration de  $D_1(H) = D_2(H)$  est analogue à la démonstration de (i) en utilisant que  $C_0^\infty(\mathcal{M})$  est dense dans  $D_1(H)$ . ■

**4.2. Absence de valeurs propres.** Nous commençons avec un lemme qui se trouve de façon implicite dans [B2] et [BM] :

LEMME 4.2.1. *Soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= L^2(\mathbb{R}, dr), & V &\in C_b^\infty(\mathbb{R}), & \mathbf{1}_{\mathbb{R}} - V &\in L^1(\mathbb{R}, dr), \\ H &:= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V, & D(H) &= H^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Alors :

(i)  $(H, D(H))$  est autoadjoint.

(ii) L'équation

$$(4.2.1) \quad Hu = \lambda u, \quad \lambda > 0,$$

n'admet pas de solution non triviale dans  $L^2(\mathbb{R}, dr)$ .

*Démonstration.* (i) suit de  $V \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

(ii) Nous considérons l'équation intégrale

$$(4.2.2) \quad u_\pm(r) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}r} + \int_{-\infty}^r \frac{\sin \sqrt{\lambda}(r-y)}{\sqrt{\lambda}} V(y) u_\pm(y) dy.$$

Remarquons que pour  $u_\pm \in L^\infty(\mathbb{R})$ , l'intégrale est convergente grâce à  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - V \in L^1(\mathbb{R}, dr)$ . L'équation intégrale (4.2.2) admet une unique solution  $u_\pm$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ . Cette solution est dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  et elle vérifie (4.2.1) :

$$(4.2.3) \quad |u_\pm(r) - e^{\pm i\sqrt{\lambda}r}| + |u'_\pm - (\pm i\sqrt{\lambda}e^{\pm i\sqrt{\lambda}r})| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow -\infty.$$

La théorie des équations différentielles implique que (4.2.1) possède exactement deux solutions linéairement indépendantes. Le Wronskien  $W(u_+, u_-) = u'_+ u_- - u'_- u_+$  est constant grâce à (4.2.1). La constante est égale à  $2i\sqrt{\lambda} \neq 0$  par (4.2.3). Toute solution de (4.2.1) est alors combinaison linéaire de  $u_+$ ,  $u_-$ . D'autre part toute solution  $L^2$  de (4.2.1) est dans  $H^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^\infty(\mathbb{R})$  et tend donc vers 0 avec toutes ses dérivées quand  $r \rightarrow -\infty$ . Elle doit alors être égale à zéro. ■

LEMME 4.2.2. *On a  $0 \notin \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \sigma_{\text{pp}}(h_\nu) \cup \sigma_{\text{pp}}(h)$ .*

*Démonstration.* Le lemme suit directement de  $h, h_\nu \geq D_r^2$  pour tout  $\nu \in \mathcal{N}$ . ■

Le Lemme 4.1.2 s'applique à tous les  $h_\nu, \nu \in \mathcal{N}$ . Nous notons  $\mathcal{H}^i$  resp.  $\mathcal{H}_\nu^i$  l'échelle d'espaces de Sobolev associée à  $h$  resp.  $h_\nu$ ,  $\mathcal{H}_c^1$ ,  $\mathcal{H}_{c,\nu}^1$  le complété de  $\mathcal{H}^1$ ,  $\mathcal{H}_\nu^1$  pour la norme  $(hu, u)$  resp.  $(h_\nu u, u)$ . Comme tous les  $k_\nu$  sont bornés, les couples  $(h, k)$  et  $(h_\nu, k_\nu)$  vérifient les conditions (2.1.2)–(2.1.4). On note  $L, L_\nu, R, R_\nu, \mathcal{R}, \mathcal{R}_\nu$  les opérateurs et



espaces d'énergie associés à  $(h, k)$  resp.  $(h_\nu, k_\nu)$  et  $L_\nu^l, R_\nu^l, \mathcal{R}_\nu^l$  les opérateurs et espaces d'énergie associés à  $(h_\nu^l, k_\nu^l)$  selon la Section 2.1.

REMARQUE 4.2.3.  $0 \notin \sigma_{\text{pp}}(R)$  puisque 0 est valeur propre de  $R$  ssi 0 est valeur propre de  $h$ . Une remarque analogue est valide pour les  $R_\nu, \nu \in \mathcal{N}$ .

THÉORÈME 4.2.4.  $h_\nu, R_\nu$  ne possèdent pas de valeurs propres pour  $\nu \in \mathcal{N} \setminus \{(+, 2)\}$ .

REMARQUE 4.2.5. Si  $c_2 < 0$ , alors le potentiel  $W_{(+,2)}^l$  possède des puits et  $h_{(+,2)}, R_{(+,2)}$  possèdent dans ce cas une valeur propre.

*Démonstration du Théorème 4.2.4.* Soit d'abord  $\nu \neq (+, 1)$ . Le résultat pour  $h_\nu$  suit directement du Lemme 4.2.1. Pour démontrer que  $R_\nu$  ne possède pas de valeurs propres, il suffit de démontrer que  $R_\nu^l$  ne possède pas de valeurs propres. Nous supprimons dans la suite l'indice  $l$ . Soit  $0 \neq f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_\nu^2 \oplus \mathcal{H}_\nu^1$  avec

$$R_\nu f = \lambda f \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = -i\lambda f_1, \\ -ih_\nu f_1 - 2k_\nu f_2 = \lambda f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = -i\lambda f_1, \\ h_\nu f_1 - 2k_\nu \lambda f_1 - \lambda^2 f_1 = 0, \end{cases}$$

i.e.  $\lambda^2$  est valeur propre de  $h_\nu - 2k_\nu \lambda$ . On a  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - W_\nu \in L^1(\mathbb{R}, dr)$  et  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - k_0 \in L^1(\mathbb{R}, dr)$ . Il suit  $\lambda = 0$  grâce au Lemme 4.2.1. Mais on a déjà vu dans le Lemme 4.2.2 que 0 n'est pas valeur propre de  $h_\nu$ . Le cas  $\nu = (+, 1)$  est analogue. Il faut considérer le potentiel  $W_{(+,1)} - c_0/2$  plutôt que  $W_{(+,1)}$ . ■

### 4.3. Estimations de résolvante

LEMME 4.3.1. On a pour tout  $u \in D(h_0)$  :

$$(4.3.1) \quad \|g(r)D_i^* D_j u\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|), \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(4.3.2) \quad \|D_r^2 u\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|),$$

$$(4.3.3) \quad \|g^{1/2} D_j u\| \leq C\|h_0^{1/2} u\|, \quad j \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(4.3.4) \quad \|D_r u\| \leq C\|h_0^{1/2} u\|.$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord

$$\exists C > 0, \forall r \in \mathbb{R}, \quad |g'(r)| \leq Cg(r).$$

Ceci suit de  $g \in \mathbf{S}^{-2, -1}$ . Le calcul suivant peut être justifié si l'on se restreint d'abord à un sous-espace du type  $\mathcal{H}_l$ . L'estimation qui en résulte est valable comme estimation entre formes quadratiques sur  $D(h_0)$ . On a

$$\begin{aligned} h_0^2 &= (D_r^2 + g(r)P + f(r))^2 \\ &= D_r^4 + D_r^2 g(r)P + D_r^2 f(r) + g(r)D_r^2 P + g^2(r)P^2 + 2g(r)f(r)P + f(r)D_r^2 + f^2(r) \\ &= D_r^4 + 2D_r g(r)P D_r + D_r [D_r, g(r)]P + [g(r), D_r]D_r P \\ &\quad + 2D_r f(r)D_r + D_r [D_r, f(r)] + [f(r), D_r]D_r + g^2(r)P^2 + 2g(r)f(r)P + f^2(r) \\ &\geq D_r^4 - \partial_r g'(r)P + g'(r)\partial_r P - \partial_r f'(r) + f'(r)\partial_r + g^2(r)P^2 \\ &\geq D_r^4 - \varepsilon g^2(r)P^2 - C_\varepsilon D_r^2 - \widehat{C}_\varepsilon + g^2(r)P^2 \\ &\geq D_r^4 - \varepsilon g^2(r)P^2 - \varepsilon D_r^4 - \widetilde{C}_\varepsilon + g^2(r)P^2 \\ &= \frac{1}{2}(D_r^4 + g^2(r)P^2) - C \quad (\varepsilon = 1/2). \end{aligned}$$

Il s'ensuit  $\|D_r^2 u\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|)$ ,  $\|g(r)Pu\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|)$  et donc (4.3.1), (4.3.2) sont vérifiés. (4.3.3) suit de

$$(g^{1/2}(r)D_j)^* g^{1/2}(r)D_j = g(r)D_j^* D_j \leq Cg(r)P \leq Ch_0.$$

(4.3.4) suit de  $D_r^2 \leq h_0$ . ■

On va noter  $h_{0,\nu} = h_0 - h_\nu$  et  $h_{0,\nu}^l = h_0^l - h_\nu^l = W_0^l - W_\nu^l$ . Soit  $j_\pm \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\text{supp } j_- \subset ]-\infty, 1[$ ,  $\text{supp } j_+ \subset ]-1, \infty[$  et  $j_+^2 + j_-^2 = 1$ . On pose  $j_{(\delta,i)} := j_\delta$  pour  $\delta \in \{+, -\}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  et  $j_0 = 1$ .

LEMME 4.3.2. (i) Pour  $u \in D(h_0)$ , on a :

$$(4.3.5) \quad \|\langle r \rangle^2 h_1 u\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|),$$

$$(4.3.6) \quad \|\langle r \rangle h_1 \langle r \rangle u\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|),$$

$$(4.3.7) \quad \|h_1 \langle r \rangle^2 u\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|).$$

(ii) Pour  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , on a pour tout  $\nu \in \mathcal{N}$  :

$$\|\langle r \rangle^2 j_\nu h_{0,\nu}^l u\| \leq C_l \|u\|.$$

*Démonstration.* (i) On ne démontre que (4.3.5), les démonstrations de (4.3.6) et (4.3.7) étant analogues. On a

$$\begin{aligned} \|\langle r \rangle^2 h_1 u\| &\leq \sum_{ij} \|\langle r \rangle^2 D_i^* g^{ij} D_j u\| + \sum_i \|\langle r \rangle^2 (g^i D_i u + D_i^* \bar{g}^i) u\| \\ &\quad + \|\langle r \rangle^2 D_r g^{rr} D_r u\| + \|\langle r \rangle^2 (g^r D_r + D_r \bar{g}^r) u\| + \|\langle r \rangle^2 f_1 u\|. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \|\langle r \rangle^2 D_i^* g^{ij} D_j u\| &\leq \|\langle r \rangle^2 (D_i g^{ij}) D_j u\| + \|\langle r \rangle^2 g^{ij} D_i^* D_j u\| \\ &\leq \|g(r) D_j u\| + \|g(r) D_i^* D_j u\| \\ &\leq C(\|h_0 u\| + \|u\|) \quad \text{grâce à (3.3.6), (4.3.1) et (4.3.3),} \\ \|\langle r \rangle^2 (g^i D_i u + D_i^* \bar{g}^i) u\| &\leq 2\|\langle r \rangle^2 g^i D_i u\| + \|\langle r \rangle^2 (D_i \bar{g}^i) u\| \\ &\leq C(\|g^{1/2} D_i u\| + \|u\|) \\ &\leq C(\|h_0 u\| + \|u\|) \quad \text{grâce à (3.3.7) et (4.3.3),} \\ \|\langle r \rangle^2 D_r g^{rr} D_r u\| &\leq \|\langle r \rangle^2 (D_r g^{rr}) D_r u\| + \|\langle r \rangle^2 g^{rr} D_r^2 u\| \\ &\leq C(\|D_r u\| + \|D_r^2 u\|) \\ &\leq C(\|h_0 u\| + \|u\|) \quad \text{grâce à (3.3.8), (4.3.2) et (4.3.4),} \\ \|\langle r \rangle^2 (g^r D_r + D_r \bar{g}^r) u\| &\leq 2\|\langle r \rangle^2 g^r D_r u\| + \|\langle r \rangle^2 (D_r \bar{g}^r) u\| \\ &\leq C(\|D_r u\| + \|u\|) \\ &\leq C(\|h_0 u\| + \|u\|) \quad \text{grâce à (3.3.9), (4.3.4),} \\ \|\langle r \rangle^2 f_1 u\| &\leq C\|u\| \quad \text{grâce à (3.3.10).} \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de (i).

(ii) suit directement des conditions sur  $g, g_\pm, f, f_{(-,1)}$ . ■

COROLLAIRE 4.3.3. Si  $u \in D(h_0)$ , alors  $hu \in \mathcal{H}$  et

$$(4.3.8) \quad \|hu\| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|).$$

**4.4. Description du domaine de  $h$ .** On désigne par  $q, q_0$  les formes quadratiques associées à  $h, h_0$ .

THÉORÈME 4.4.1. (i)  $D(q) = D(q_0)$ , i.e.  $D(h^{1/2}) = D(h_0^{1/2})$ .

(ii)  $D(h) = D(h_0)$ .

*Démonstration.* (i) Il suffit de démontrer qu'on a pour  $u \in C_0^\infty(\mathcal{M})$  :

$$C^{-1}q_0(u) \leq q(u) \leq Cq_0(u) \quad \text{avec } C > 0.$$

Pour  $u \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ , on a

$$\begin{aligned} q(u) &= (hu, u) = (h_0u, u) + \sum_{ij} (g^{ij} D_j u, D_i u) + (g^{rr} D_r u, D_r u) \\ &\quad + \sum_i ((g^i D_i + D_i^* \bar{g}^i) u, u) + ((g^r D_r + D_r \bar{g}^r) u, u) + (f_1 u, u) \\ &\geq (h_0u, u) - C \|g^{1/2} D_i u\| \|f^{1/2} u\| - C \|D_r u\| \|f^{1/2} u\| \\ &\geq \frac{1}{2} (h_0u, u) - C(fu, u), \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.3.5), (3.3.13), (3.3.15) ainsi que le Lemme 4.3.1. Il suit  $q_0(u) \leq Cq(u)$  grâce à  $h \geq \varepsilon f$ .

Dans l'autre sens,

$$\begin{aligned} q(u) &= q_0(u) + \sum_{ij} (g^{ij} D_j u, D_i u) + \sum_i ((g^i D_i + D_i^* \bar{g}^i) u, u) \\ &\quad + (g^{rr} D_r u, D_r u) + ((g^r D_r + D_r \bar{g}^r) u, u) + (f_1 u, u) \\ &\leq q_0(u) + \sum_{ij} \|\sqrt{|g^{ij}|} D_j u\| \|\sqrt{|g^{ij}|} D_i u\| \\ &\quad + \|\sqrt{g^{rr}} D_r u\|^2 + 2 \sum_i \left\| \frac{g^i}{f^{1/2}} D_i u \right\| \|f^{1/2} u\| \\ &\quad + 2 \left\| \frac{g^r}{f^{1/2}} D_r u \right\| \|f^{1/2} u\| + C(fu, u) \\ &\leq q_0(u) + C \left( \sum_{ij} \|g^{1/2} D_j u\| \|g^{1/2} D_i u\| \right. \\ &\quad \left. + \|D_r u\|^2 + 2 \sum_i \|g^{1/2} D_i u\| \|f^{1/2} u\| + (fu, u) \right) \\ &\leq Cq_0(u) \end{aligned}$$

grâce au Lemme 4.3.1 et (3.3.12)–(3.3.16).

(ii) Remarquons d'abord que  $D(h) \subset H_{\text{loc}}^2(\mathcal{M})$  : si  $u \in D(h)$ , alors  $hu$  défini au sens des distributions appartient à  $\mathcal{H}$ , ce qui entraîne  $u \in H_{\text{loc}}^2$  grâce à l'ellipticité locale de l'opérateur. On a déjà vu que

$$D(h_0) = \{u \in \mathcal{H} \mid h_0 u \in \mathcal{H}\}.$$

Montrons d'abord  $D(h) \subset D(h_0)$ . Soient  $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  ( $\varepsilon = +, -, 0$ ),  $\text{supp } \psi_- \subset ]-\infty, -1[$ ,  $\text{supp } \psi_0 \subset ]-2, 2[$ ,  $\text{supp } \psi_+ \subset ]1, \infty[$ ,  $1 = \sum_\varepsilon \psi_\varepsilon^2$ ,  $\psi_\varepsilon^T(\cdot) := \psi_\varepsilon(\cdot/T)$ . On pose

$$R(\lambda) := \sum_{\varepsilon \in \{+, -\}} \psi_\varepsilon^T (h_0 + i\lambda)^{-1} \psi_\varepsilon^T + \psi_0^T (h + i\lambda)^{-1} \psi_0^T.$$

On a  $R(\lambda) : \mathcal{H} \rightarrow D(h_0)$ , i.e.  $h_0 R(\lambda)u$  (déf. au sens  $\mathcal{D}'$ )  $\in \mathcal{H}$  pour tout  $u \in \mathcal{H}$ . En effet,

$$\begin{aligned} h_0 R(\lambda)u &= \sum_{\varepsilon \in \{+, -\}} \psi_\varepsilon^T h_0 (h_0 + i\lambda)^{-1} \psi_\varepsilon^T u + \psi_0^T h_0 (h + i\lambda)^{-1} \psi_0^T u \\ &+ \sum_{\varepsilon \in \{+, -\}} [h_0, \psi_\varepsilon^T] (h_0 + i\lambda)^{-1} \psi_\varepsilon^T u + [h_0, \psi_0^T] (h + i\lambda)^{-1} \psi_0^T u \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

car  $(h + i\lambda)^{-1} : L^2 \rightarrow H_{\text{loc}}^2$ .

Pour  $T, \lambda$  suffisamment grands, il existe un opérateur borné  $C(\lambda)$ ,  $\|C(\lambda)\| \leq 1/2$ , tel que

$$(h + i\lambda)^{-1} = R(\lambda)(1 + C(\lambda))^{-1},$$

ce qui entraîne  $D(h) \subset D(h_0)$ .

En effet,

$$\begin{aligned} (h + i\lambda)R(\lambda) &= 1 + \sum_{\varepsilon \in \{+, -\}} \psi_\varepsilon^T (h - h_0)(h_0 + i\lambda)^{-1} \psi_\varepsilon^T + \sum_{\varepsilon \in \{+, -\}} [h, \psi_\varepsilon^T] (h_0 + i\lambda)^{-1} \psi_\varepsilon^T \\ &+ [h, \psi_0^T] (h + i\lambda)^{-1} \psi_0^T. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 4.3.2, on a

$$\forall \delta > 0, \exists T_0 > 0, \forall T \geq T_0, \forall \lambda > 0, \forall \varepsilon \in \{+, -\}, \quad \|\psi_\varepsilon^T (h - h_0)(h_0 + i\lambda)^{-1}\| \leq \delta.$$

$[h, \psi_\varepsilon^T]$  sont des opérateurs d'ordre 1 à support compact. Ceci entraîne

$$\|[h, \psi_\varepsilon^T] (h_0 + i\lambda)^{-1}\|, \|[h, \psi_0^T] (h + i\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C(T)}{\sqrt{\lambda}}.$$

On obtient donc, en choisissant d'abord  $T$  et puis  $\lambda$  suffisamment grands,

$$(h + i\lambda)R(\lambda) = 1 + C(\lambda), \quad \|C(\lambda)\| \leq 1/2.$$

Montrons maintenant  $D(h_0) \subset D(h)$ . Par la première partie du théorème, on a  $D(q) = D(q_0)$  et

$$\exists C > 0, \forall u \in D(q) = D(q_0), \quad C^{-1}q(u) \leq q_0(u) \leq Cq(u).$$

De plus, on a

$$D(h) = \{u \in D(q) \mid |q(u, v)| \leq \|v\|, \forall v \in D(q)\}.$$

Soit maintenant  $u \in D(h_0)$ ; alors  $h_0 u \in \mathcal{H}$ , ce qui entraîne  $hu \in \mathcal{H}$  par le Corollaire 4.3.3. Par le même corollaire, on obtient

$$|q(u, v)| = |(hu, v)| \leq C(\|h_0 u\| + \|u\|)\|v\| \leq C\|v\|, \quad \forall v \in D(q_0) = D(q),$$

donc  $u \in D(h)$ . ■

**LEMME 4.4.2.** *Soient  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Alors  $g(r)f(h)$  et  $g(r)f(h_\nu)$  sont compacts pour tout  $\nu \in \mathcal{N}$ .*

*Démonstration.* On ne démontre le lemme que pour  $h$ , la démonstration pour  $h_\nu$  étant analogue. Il suffit de supposer  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $\Omega$  un domaine borné qui contient

supp  $g$ . Alors  $g(r)f(h)$  envoie  $L^2(\mathcal{M})$  dans  $H^2(\Omega)$ . Mais  $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M})$  et la première injection est compacte par le théorème de Rellich (voir [T]). ■

**4.5. Espaces d'énergie.** Par la discussion dans la section précédente, on a  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_0^2$ ,  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_0^1$ ,  $\mathcal{H}_c^1 = \mathcal{H}_{c,0}^1$ , ce qui entraîne  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$  au sens des espaces topologiques. Les relations entre les autres espaces d'énergie sont décrites par le lemme suivant :

LEMME 4.5.1. (i) *Pour tout  $\nu, \mu \in \mathcal{N}$ ,  $j_\nu$  est continue de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{R}_\mu$  dans  $\mathcal{R}_\mu$ .*

(ii) *On a  $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{R}_{(-,1)}$ ,  $\mathcal{R}_{(+,1)} \hookrightarrow \mathcal{R}$  avec injection continue.*

(iii)  *$j_-$  est continue de  $\mathcal{R}_{(-,1)}$  dans  $\mathcal{R}$ ;  $j_+$  est continue de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}_{(+,1)}$ .*

*Démonstration.* (i) est clair ; montrons (ii). Comme  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$  au sens des espaces topologiques, il suffit de démontrer qu'il y a des injections continues  $\mathcal{R}_0 \hookrightarrow \mathcal{R}_{(-,1)}$  et  $\mathcal{R}_{(+,1)} \hookrightarrow \mathcal{R}_0$ . La première affirmation suit de  $g_-(r) \leq Cg(r)$ ,  $f_{(-,1)}(r) \leq Cf(r)$ , la deuxième affirmation suit de  $g(r) \leq Cg_+(r)$  et  $f(r) \leq Cf_{(+,1)}(r)$ .

(iii) Par le même raisonnement que dans (i), on peut remplacer  $\mathcal{R}$  par  $\mathcal{R}_0$ . L'affirmation pour  $j_-$  suit alors de  $g(r)j_-(r) \leq Cg_-(r)$ ,  $f(r)j_-(r) \leq Cf_{(-,1)}(r)$ . L'affirmation pour  $j_+$  suit de  $g_+(r)j_+(r) \leq Cg(r)$ ,  $f_{(+,1)}(r)j_+(r) \leq Cf(r)$ . ■

## 5. Estimation de Mourre

Dans ce chapitre, nous établissons l'estimation de Mourre pour les opérateurs définis dans le Chapitre 3. L'estimation de Mourre est l'ingrédient principal pour la démonstration de la complétude asymptotique.

**5.1. Résultats techniques.** Nous définissons un opérateur de comparaison par

$$N := h_0 + r^2 + 1 \quad (\text{agissant sur } \mathcal{H}), \quad N^l := h_0^l + r^2 + 1 \quad (\text{agissant sur } \mathcal{H}_l).$$

Par le Lemme 4.1.2,  $D(N^l)$  et  $D(N)$  sont autoadjoints avec domaine

$$(5.1.1) \quad D(N^l) = \{u \in \mathcal{H}_l \mid N^l u \in \mathcal{H}_l\}$$

resp.

$$(5.1.2) \quad D(N) = \{u \in \mathcal{H} \mid Nu \in \mathcal{H}\} = \left\{ u = \sum u_l \mid u_l \in D(N^l), \sum \|N^l u\|^2 < \infty \right\}.$$

Les estimations suivantes vont être utiles dans la suite :

LEMME 5.1.1. *Pour tout  $u \in D(N)$  :*

$$(5.1.3) \quad \|r^2 u\|^2 \leq \|Nu\|^2 + \|u\|^2,$$

$$(5.1.4) \quad \|h_0 u\|^2 \leq \|Nu\|^2 + \|u\|^2.$$

REMARQUE 5.1.2. Utilisant le Lemme 4.3.1, on peut aussi contrôler  $\|D_r^2 u\|$ ,  $\|g(r)P\|, \dots$  par  $\|Nu\|$ .

*Démonstration.* Pour justifier les calculs suivants on peut utiliser le Lemme 4.1.1 ; les estimations sont valables au sens des formes quadratiques sur  $D(N)$  :

$$\begin{aligned}
N^2 &= (r^2 + h_0)^2 + 1 + 2(r^2 + h_0) \\
&\geq r^4 + r^2 h_0 + h_0 r^2 + h_0^2 + 1 = r^4 + 2r h_0 r + r[r, h_0] + [h_0, r]r + h_0^2 + 1 \\
&= r^4 + 2r h_0 r + r[r, D_r^2] + [D_r^2, r]r + h_0^2 + 1 = r^4 + 2r h_0 r - 1 + h_0^2 \\
&\geq r^4 + h_0^2 - 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

On peut alors caractériser les domaines de  $N^l$ ,  $N$  de la façon suivante :

$$(5.1.5) \quad D(N^l) = D(h_0^l) \cap D(\langle r \rangle^2),$$

$$(5.1.6) \quad D(N) = D(h_0) \cap D(\langle r \rangle^2),$$

$$(5.1.7) \quad D(N) = \left\{ u = \sum u_l \mid u_l \in D(N^l), \sum_l \|h_0^l u_l\|^2 + \|r^2 u_l\|^2 < \infty \right\}.$$

LEMME 5.1.3. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(h)$ .

$$(i) \quad (z - h)^{-1} : D(\langle r \rangle^n) \rightarrow D(\langle r \rangle^n).$$

$$(ii) \quad (z - h)^{-1} : D(N) \rightarrow D(N).$$

*Démonstration.* On a clairement  $(z - h)^{-1} : D(h) \rightarrow D(h)$  et (ii) suit alors de (i) puisque  $D(N) = D(h) \cap D(\langle r \rangle^2)$ .

Montrons d'abord

$$(5.1.8) \quad (z - h)^{-1} : D(r) \rightarrow D(r).$$

Ceci est équivalent à

$$(5.1.9) \quad \sup_{|s| \leq 1} \left\| \frac{e^{isr} - 1}{s} (z - h)^{-1} u \right\| < \infty, \quad \forall u \in D(r).$$

On a

$$\frac{e^{isr} - 1}{s} (z - h)^{-1} = \frac{e^{isr}(z - h)^{-1}e^{-isr} - (z - h)^{-1}}{s} + \frac{e^{isr}(z - h)^{-1}(1 - e^{-isr})}{s}.$$

Clairement,

$$\sup_{|s| \leq 1} \left\| e^{isr}(z - h)^{-1} \frac{1 - e^{-isr}}{s} u \right\| < \infty, \quad \forall u \in D(r).$$

On a

$$\frac{e^{isr}(z - h)^{-1}e^{-isr} - (z - h)^{-1}}{s} = (z - h_s)^{-1} \frac{h_s - h}{s} (z - h)^{-1}$$

avec

$$h_s = e^{isr} h e^{-isr}, \quad h_s - h = s^2(g^{rr} + 1) + is((g^{rr} + 1)\partial_r + \partial_r(g^{rr} + 1)) - s(g^r + \bar{g}^r).$$

En utilisant  $(z - h_s)^{-1} = e^{isr}(z - h)^{-1}e^{-isr}$  et  $D(h) \subset D(D_r^2)$ , (5.1.9) en résulte.

Supposons alors maintenant

$$(z - h)^{-1} : D(\langle r \rangle^n) \rightarrow D(\langle r \rangle^n)$$

et montrons

$$(5.1.10) \quad (z - h)^{-1} : D(\langle r \rangle^{n+1}) \rightarrow D(\langle r \rangle^{n+1}).$$

Si  $u \in D(\langle r \rangle^{n+1})$ , alors  $\langle r \rangle u \in D(\langle r \rangle^n)$ , donc

$$\langle r \rangle^{n+1} (z - h)^{-1} = \langle r \rangle^n (\langle r \rangle (z - h)^{-1} \langle r \rangle^{-1}) \langle r \rangle u.$$

Il suffit alors de démontrer

$$(5.1.11) \quad \langle r \rangle (z - h)^{-1} \langle r \rangle^{-1} : D(\langle r \rangle^n) \rightarrow D(\langle r \rangle^n).$$

On a  $\langle r \rangle (z - h)^{-1} \langle r \rangle^{-1} = (z - \langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1})^{-1}$  et  $\langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1}$  est un opérateur du même type que  $h$ , ce qui entraîne que

$$(z - \langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1})^{-1} : D(\langle r \rangle^n) \rightarrow D(\langle r \rangle^n). \blacksquare$$

REMARQUE 5.1.4. On démontre de la même façon que  $(z - h_0^l)^{-1}$  envoie  $D(N^l)$  dans  $D(N^l)$ .

LEMME 5.1.5. *On a  $h \in C^1(\langle r \rangle)$ .*

*Démonstration.* Nous utilisons la Proposition 2.2.1. Par le Lemme 5.1.3, on a  $(z - h)^{-1} : D(\langle r \rangle) \rightarrow D(\langle r \rangle)$  pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Ensuite,  $[\langle r \rangle, h_1]$  est borné de  $\mathcal{H}^2$  dans  $\mathcal{H}$  par le Lemme 4.3.2. Finalement, on a

$$|[h_0^l, \langle r \rangle](u, u)| \leq C \|D_r u\| \|u\| \leq C \|(h_0^l)^{1/2} u\| \|u\|, \quad \forall u \in D(h_0^l) \cap D(\langle r \rangle)$$

avec  $C$  indépendante de  $l$ . Pour voir ceci, il suffit grâce au Lemme 4.1.1 de calculer le commutateur sur  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  et d'utiliser (4.3.4).  $\blacksquare$

**5.2. Opérateur conjugué pour  $h$ .** Nous suivons [FH]. Soit  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $F(x) = 0$  pour  $x \geq 1$  et  $F(x) = 1$  pour  $x \leq 1/2$ . Soit  $\sigma > 0$  la constante de la Section 3.1. Nous définissons

$$F_S := F\left(\frac{\sigma r + \ln(P+1)}{S}\right).$$

Soient  $f_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f_\pm \geq 0$  avec  $f_-(x) = 1$  pour  $x \leq 0$ ,  $f_-(x) = 0$  pour  $x \geq 1$ ,  $f_+(x) = 1$  pour  $x \geq 1$ ,  $f_+(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $f_-^2 + f_+^2 = 1$ . Soit  $f_{\pm, R}(\cdot) = f_\pm(\cdot/R)$ . Nous posons

$$K_S := (\sigma r + \ln(P+1) - 2S)F_S^2, \quad D(K_S) = \{u \in \mathcal{H}, K_S u \in \mathcal{H}\}$$

et

$$X_-(r, P) := f_{-, R}^2(r)K_S, \quad X_+(r) := r f_{+, R}^2(r).$$

LEMME 5.2.1. *Soient  $q \geq 0$ ,  $f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $|\partial_r^\alpha f_i| \leq C_\alpha \langle r \rangle^{i-|\alpha|}$ ,  $\text{supp } f_i \subset ]-\infty, 1[$ . Alors*

$$|\partial_r^\alpha (f_0(r)f_1(r+q))| \leq \begin{cases} C \langle r \rangle & \alpha = 0, \\ C_\alpha & \alpha \neq 0 \end{cases} \quad \text{unif. en } q.$$

*Démonstration.* On a

$$|\partial_r^{\alpha_1} f_0 \partial_r^{\alpha_2} f_1(r+q)| \leq C_{\alpha_1} C_{\alpha_2} \langle r \rangle^{-|\alpha_1|} \langle r+q \rangle^{1-|\alpha_2|}.$$

Sur  $\text{supp } f_1$  on a que  $r \leq r+q \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \langle r+q \rangle \leq \sqrt{2} \langle r \rangle$ .  $\blacksquare$

Nous posons  $q = q(l) = \lambda_l + 1$ . On obtient  $X_-(r, q)$  à partir de  $X_-(r, P)$  en remplaçant  $P+1$  par  $q$ . Soient  $e(r, q) := \sigma r + \ln q - 2S$ ,  $F_S^l := F_S(\sigma r + \ln q)/S$ .

COROLLAIRE 5.2.2. (i)  $|X_-(r, q)| \leq C \langle r \rangle$  uniformément en  $q, R$  pour tout  $S$ , et  $|X_-^{(i)}(r, q)| \leq C$  uniformément en  $q, R$  pour tout  $S$  et tout  $i \geq 1$ ,

(ii)  $f_{-, R}^2 K_S$  est borné de  $D(N)$  dans  $D(D_r)$ ,  $f_{-, R}^2 D_r$  est borné de  $D(N)$  dans  $D(K_S)$ .

*Démonstration.* (i) suit du Lemme 5.2.1.

(ii) On a  $D(N) \subset D(h_0) \subset D(D_r)$  par (4.3.4). Une conséquence de la partie (i) du corollaire est

$$|[D_r, X_-(r, q)](u, u)| \leq C\|u\|^2$$

unif. en  $q$ , ce qui donne  $X_-(r, P) : D(D_r) \rightarrow D(D_r)$  et donc la première affirmation. La deuxième suit de

$$\begin{aligned} \|X_-(r, q)D_r u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|\langle r \rangle D_r u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}(\|\langle r \rangle^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|D_r^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2) \\ &\leq C(\|N^l u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2) \end{aligned}$$

unif. en  $q$  en utilisant la première partie du corollaire ainsi que les Lemmes 4.3.1 et 5.1.1. ■

On pose :

$$b_- := \frac{1}{2}(D_r X_-(r, P + 1) + hc), \quad b_+ := \frac{1}{2}(D_r X_+(r) + hc), \quad b := b_- + b_+.$$

Grâce au Corollaire 5.2.2,  $b_i$  ( $i = -, +$ ) et  $b$  sont bien définis sur  $D(N)$ .

REMARQUE 5.2.3. À partir de maintenant, nous allons systématiquement considérer tous les commutateurs entre deux des opérateurs  $h_0, b_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $b, N$  comme des formes quadratiques sur  $D(N)$ . Nous notons  $h_0^l, b_i^l, b^l, N^l$  leurs restrictions à  $\mathcal{H}_l$ . Afin d'obtenir une estimation d'un commutateur sur  $D(N)$ , il suffit de démontrer une estimation uniforme en  $l$  sur  $D(N^l)$  et par le Lemme 4.1.1 de démontrer cette estimation sur  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Ceci justifie en particulier l'application de la règle de Leibniz pour calculer des commutateurs avec  $b$ , qui est une somme de produits de plusieurs opérateurs.

LEMME 5.2.4. *Les couples  $(h_0, N)$  et  $(b, N)$  vérifient les hypothèses du Lemme 2.2.2.*

*Démonstration.* Commençons avec  $(h_0, N)$  :

$$D(N) \subset D(h_0), \quad \|h_0 u\| \leq C\|Nu\|, \quad \forall u \in D(N),$$

en vertu de (5.1.4). Pour  $u \in D(N)$ , on a

$$|[h_0, N](u, u)| = |((-2 - 4r\partial_r)u, u)| \leq ((2 + 2r^2 + 2D_r^2)u, u) \leq C(Nu, u).$$

Considérons maintenant  $(b, N)$  :  $b$  est bien défini et symétrique sur  $D(N)$  et

$$\|bu\| \leq C\|Nu\|, \quad \forall u \in D(N),$$

en vertu du Corollaire 5.2.2 et de (4.3.2), (5.1.3), (5.1.4). On a

$$[iN^l, b_-^l] = \frac{1}{2}X_-''' + 2D_r X_-' D_r - (g'(r)\lambda_l + f'(r) + 2r)X_-,$$

donc

$$\begin{aligned} |[iN^l, b_-^l](u_l, u_l)| &\leq \frac{1}{2}|(X_-''' u_l, u_l)| + 2|(D_r X_-' D_r u_l, u_l)| \\ &\quad + |((g'(r)\lambda_l + f'(r) + 2r)X_- u_l, u_l)|, \quad \forall u_l \in D(N^l). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes peuvent être majorés par  $C(N^l u_l, u_l)$  utilisant le Corollaire 5.2.2. Sur  $\text{supp } X_-$ , on a  $\sigma r + \ln q \leq S$  et donc

$$(5.2.1) \quad |g'(r)\lambda_l X_-| \leq C e^{\sigma r + \ln q} |\sigma r + \ln q - 2S| F^2 \left( \frac{\sigma r + \ln q}{S} \right) \leq C.$$



Le dernier terme est alors majoré par  $C(N^l u_l, u_l)$  utilisant le Corollaire 5.2.2 et le fait que  $f'(r)$  est borné. De façon analogue, on a

$$[iN^l, b_+^l] = \left(\frac{1}{2}X_+''' + 2D_r X_+ D_r\right) - (g'(r)\lambda_l + f'(r) + 2r)X_+.$$

Alors

$$\forall u_l \in D(N^l), \quad |(g'(r)\lambda_l X_+ u_l, u_l)| \leq C(g(r)\lambda_l u_l, u_l) \leq (h_0^l u_l, u_l) \leq C(N^l u_l, u_l).$$

Les autres termes peuvent être estimés de la même façon que pour  $[b_-^l, N^l]$ . ■

LEMME 5.2.5. *On a  $h \in C^1(b)$ .*

*Démonstration.* On utilise le Lemme 2.2.3. Il reste à démontrer

$$|(bu, hu) - (hu, bu)| \leq C(\|hu\|^2 + \|u\|^2), \quad \forall u \in D(N).$$

1<sup>er</sup> PAS : Nous allons estimer  $|[ih_0, b](u, u)|$ . Estimons d'abord  $|[ih_0, b_-](u, u)|$ . On a comme forme quadratique sur  $D(N^l)$  :

$$[ih_0^l, b_-^l] = \frac{1}{2}X_-''' + 2D_r X_- D_r - (g'(r)\lambda_l + f'(r))X_-,$$

donc

$$|[ih_0^l, b_-^l](u_l, u_l)| \leq \frac{1}{2}|(X_-''' u_l, u_l)| + 2|(D_r X_- D_r u_l, u_l)| + |((g'(r)\lambda_l + f'(r))X_- u_l, u_l)|$$

pour tout  $u_l \in D(N^l)$ . Le premier terme est borné par le Corollaire 5.2.2. Le deuxième terme est majoré par  $C(h_0^l u_l, u_l)$  en utilisant (4.3.4) et le Corollaire 5.2.2. Pour estimer le troisième terme, on utilise (5.2.1) et  $|f'(r)X_-| \leq C$ . Donc

$$|[ih_0^l, b_-^l](u_l, u_l)| \leq C((h_0^l + 1)u_l, u_l) \quad \text{pour tout } u_l \in D(N^l).$$

Estimons maintenant  $|[ih_0, b_+](u, u)|$ . On a comme forme quadratique sur  $D(N^l)$  :

$$[ih_0^l, b_+^l] = \frac{1}{2}X_+''' + 2D_r X_+ D_r - (g'(r)\lambda_l + f'(r))X_+.$$

Les deux premiers termes peuvent être estimés de la même façon que les deux premiers termes dans l'estimation pour  $[ih_0^l, b_-^l]$ . Pour estimer le dernier terme, on utilise

$$|g'(r)\lambda_l X_+| \leq Cg(r)\lambda_l, \quad |f'(r)X_+| \leq C.$$

Ceci donne

$$|[ih_0^l, b_+^l](u_l, u_l)| \leq C((h_0^l + 1)u_l, u_l) \quad \text{pour tout } u_l \in D(N^l).$$

2<sup>ème</sup> PAS : Nous terminons par l'estimation de  $|[ih_1, b](u, u)|$ . Par le Lemme 4.3.2,  $\langle r \rangle^2 h_1$ ,  $\langle r \rangle h_1 \langle r \rangle$  et  $h_1 \langle r \rangle^2$  sont bornés de  $\mathcal{H}^2$  dans  $\mathcal{H}$ . D'autre part,  $\langle r \rangle^{-1} b$  et  $b \langle r \rangle^{-1}$  sont bornés de  $\mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}$ , donc  $[ih_1, b]$  est borné de  $\mathcal{H}^2$  dans  $\mathcal{H}^{-1}$ . ■

**5.3. Estimation de Mourre pour  $h$ .** Si l'énergie est inférieure à  $c_0$ , alors la particule ne peut pas s'en aller vers l'infini positif :

LEMME 5.3.1. *Soit  $\chi \in C_0^\infty(]0, c_0[)$ . Alors les opérateurs  $\chi(h_0)f_{+,R}$  et  $\chi(h)f_{+,R}$  sont compacts.*

*Démonstration.* Grâce au Lemme A.4.2,  $\chi(h) - \chi(h_0)$  est compact. Il suffit alors de démontrer le lemme pour  $\chi(h_0)f_{+,R}$ . Nous définissons l'opérateur  $(h_{c_0}, D(h))$  par

$$h_{c_0} = c_0 - f(r) + h_0.$$

$h_{c_0}$  est autoadjoint puisque  $f(r)$  est borné. Comme  $h_{c_0} \geq c_0$ , on a  $\chi(h_{c_0}) = 0$ . Alors

$$\chi(h_0)f_{+,R} = (\chi(h_0) - \chi(h_{c_0}))f_{+,R}.$$

En utilisant la formule de Helffer–Sjöstrand, il suffit de démontrer :

$$(5.3.1) \quad \|(z - h_0)^{-1}(h_0 - h_{c_0})(z - h_{c_0})^{-1}f_{+,R}\| \leq C|\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \mathbb{C},$$

$$(5.3.2) \quad (z - h_0)^{-1}(h_0 - h_{c_0})(z - h_{c_0})^{-1}f_{+,R} \text{ est compact} \\ \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(h_0) \cup \sigma(h_{c_0})).$$

(5.3.1) est clair, vérifions (5.3.2). On a

$$\begin{aligned} (z - h_0)^{-1}(h_0 - h_{c_0})(z - h_{c_0})^{-1}f_{+,R} \\ = (z - h_0)^{-1}(h_0 - h_{c_0})f_{+,R}(z - h_{c_0})^{-1} \\ + (z - h_0)^{-1}(h_0 - h_{c_0})(z - h_{c_0})^{-1}[h_{c_0}, f_{+,R}](z - h_{c_0})^{-1}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est compact grâce au Lemme 4.4.2 puisque  $f_{+,R}^{(i)}$  ( $i \geq 1$ ) est à support compact.  $(h_0 - h_{c_0})f_{+,R} = (f(r) - c_0)f_{+,R} \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \pm\infty$ ) et le premier terme est compact par le même lemme. ■

LEMME 5.3.2. *Pour  $R, S$  suffisamment grands et tout  $0 < \lambda_0 \neq c_0$ , il existe un intervalle  $I$  voisinage de  $\lambda_0$  et  $\nu > 0$  tels que*

$$1_I(h)[ih, b]1_I(h) \geq \nu 1_I(h) + k,$$

avec un opérateur  $k$  compact.

*Démonstration.* 1<sup>er</sup> PAS : Nous estimons d'abord le commutateur  $[ih_0, b]$ . Commençons avec l'estimation de  $[ih_0, b_-]$ .

Rappelons que  $e(r, q) = \sigma r + \ln q - 2S$ ,  $F_S^l = F((\sigma r + \ln q)/S)$  et  $q = q(l) = \lambda_l + 1$ . D'après la démonstration du Lemme 5.2.5, on a

$$[ih_0^l, b_-^l] = 2D_r X_-^l D_r + 1/2X_-^{l\prime\prime\prime} - (g'(r)\lambda_l + f'(r))X_-.$$

Ensuite

$$X_-^{l\prime\prime\prime} = (f_{-,R})^{l\prime\prime\prime} K_S + Q^l =: Q_1^l + Q^l$$

avec  $Q^l \in O(R^{-1}, S^{-1})$  unif. en  $l$ . On a également  $f'(r)X_- \in O(R^{-1})$  unif. en  $q$  puisque  $f' \in S^{-2}$ . On estime

$$\begin{aligned} X_-^l &= e'(r, q)f_{-,R}^l(F_S^l)^2 + e(r, q)(f_{-,R}^l)'(F_S^l)^2 + e(r, q)f_{-,R}^l((F_S^l)^2)' \\ &\geq e'(r, q)f_{-,R}^l(F_S^l)^2 = \sigma f_{-,R}^l(F_S^l)^2. \end{aligned}$$

De plus

$$-X_-g'(r)\lambda_l \geq -CX_-g(r)\lambda_l \geq CSf_{-,R}^l(F_S^l)^2g(r)\lambda_l.$$

Donc pour  $CS > 2\sigma$ ,

$$(5.3.3) \quad [ih_0^l, b_-^l] \geq 2\sigma(f_{-,R}F_S^lh_0^lF_S^lf_{-,R}) + 2\sigma(f_{-,R}F_S^l)''(f_{-,R}F_S^l) + Q_1^l + O(R^{-1}, S^{-1}) \\ = 2\sigma f_{-,R}F_S^lh_0^lF_S^lf_{-,R} + Q_1^l + O(R^{-1}, S^{-1})$$

unif. en  $q$ . Ici on a utilisé que  $f(r)f_{-,R} \in O(R^{-2})$ . Nous allons faire quelques remarques intermédiaires qui nous permettront de supprimer l'indice  $l$  dans (5.3.3) et ainsi de

comprendre l'inégalité comme inégalité entre formes quadratiques sur  $D(h_0)$ . Elles vont également servir pour terminer l'estimation.

$f_{\pm,R}$  préserve  $D(h_0)$  et on a

$$(5.3.4) \quad [(z - h_0)^{-1}, f_{\pm,R}] = \frac{i}{2} (z - h_0)^{-1} (D_r \nabla f_{\pm,R} + hc) (z - h_0)^{-1},$$

ce qui entraîne

$$(5.3.5) \quad [(z - h_0)^{-1}, f_{\pm,R}] \in O(R^{-1}) |\operatorname{Im} z|^{-2} \quad \text{pour } z \in K \subset\subset \mathbb{C} \text{ compact.}$$

Par la formule de Helffer–Sjöstrand, ceci donne pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  :

$$(5.3.6) \quad [\chi(h_0), f_{\pm,R}](h_0 + i) \in O(R^{-1}).$$

De même on calcule

$$(5.3.7) \quad [(z - h_0)^{-1}, F_S] = (z - h_0)^{-1} [h_0, F_S] (z - h_0)^{-1},$$

donc

$$(5.3.8) \quad [(z - h_0)^{-1}, F_S] \in O(S^{-1}) |\operatorname{Im} z|^{-2}$$

et  $F_S$  préserve  $D(h_0)$ . Par la formule de Helffer–Sjöstrand, ceci donne pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  :

$$(5.3.9) \quad [\chi(h_0), F_S](h_0 + i) \in O(S^{-1}).$$

Nous posons  $T := f_{-,R}(1 - F_S)$ . Alors

$$(5.3.10) \quad T \text{ préserve } D(h_0) \text{ avec norme } O(1) \text{ unif. en } R, S$$

par (5.3.5) et (5.3.8). Sur  $\operatorname{supp} T$  on a

$$(5.3.11) \quad \ln e^{\sigma r} (P + 1) = \sigma r + \ln(P + 1) \geq S/2 \quad \text{donc} \quad g(r)P \geq C e^{S/2}.$$

Il s'ensuit

$$\forall M > 1, \exists S_0, \forall S \geq S_0, \quad Tg(r)PT \geq MT^2$$

et donc

$$(5.3.12) \quad Th_0T \geq MT^2,$$

au sens des formes quadratiques sur  $D(N)$  ou  $D(h_0)$ .

Nous allons estimer  $\|(z - h_0)^{-1}T\|$ . Utilisant (5.3.12), on a

$$\begin{aligned} (z - h_0)^{-1}T^2(\bar{z} - h_0)^{-1} &\leq \frac{1}{M} (z - h_0)^{-1}Th_0T(\bar{z} - h_0)^{-1} \\ &= \frac{1}{M} T(z - h_0)^{-1}h_0(\bar{z} - h_0)^{-1}T + \frac{1}{M} O(R^{-1}, S^{-1}) |\operatorname{Im} z|^{-3} \end{aligned}$$

pour  $z \in K \subset\subset \mathbb{C}$  compact. Ceci suit de (5.3.5) et (5.3.8). Puis on a

$$(z - h_0)^{-1}h_0(\bar{z} - h_0)^{-1} \leq C |\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset\subset \mathbb{C}.$$

Il s'ensuit

$$(z - h_0)^{-1}T^2(\bar{z} - h_0)^{-1} \leq \frac{C}{M} |\operatorname{Im} z|^{-3}$$

et donc

$$\|(z - h_0)^{-1}T\| \leq \frac{C}{M^{1/2}} |\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K.$$

Utilisant la formule de Helffer-Sjöstrand, on obtient pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  :

$$(5.3.13) \quad \|\chi(h_0)T\| \leq \frac{C}{M^{1/2}}.$$

Avec ces remarques intermédiaires et après multiplication avec  $\chi(h_0)$ , (5.3.3) devient

$$(5.3.14) \quad \begin{aligned} \chi(h_0)[ih_0, b_-]\chi(h_0) &\geq 2\sigma\chi(h_0)f_{-,R}F_S h_0 F_S f_{-,R}\chi(h_0) + O(R^{-1}, S^{-1}) + \chi(h_0)Q_1\chi(h_0) \\ &= \chi(h_0)f_{-,R}h_0f_{-,R}\chi(h_0) + \chi(h_0)f_{-,R}h_0f_{-,R}(F_S - 1)\chi(h_0) \\ &\quad + \chi(h_0)f_{-,R}(F_S - 1)h_0f_{-,R}F_S\chi(h_0) + O(R^{-1}, S^{-1}) + \chi(h_0)Q_1\chi(h_0), \end{aligned}$$

où  $Q_1 = \bigoplus_l Q_1^l$ .  $K_1 := \chi(h_0)Q_1\chi(h_0)$  est clairement compact. Par (5.3.6) on a  $\|\chi(h_0)f_{-,R}h_0\| \in O(1)$  unif. en  $R, S$ . Par (5.3.6), (5.3.9) on a  $\|h_0f_{-,R}F_S\chi(h_0)\| \in O(1)$  unif. en  $R, S$ . Finalement par (5.3.13) on a  $\|f_{-,R}(F_S - 1)\chi(h_0)\| \rightarrow 0 (S \rightarrow \infty)$  unif. en  $R$ .

En rassemblant, on obtient pour  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  :

$$(5.3.15) \quad \begin{aligned} \chi(h_0)f_{-,R}F_S h_0 F_S f_{-,R}\chi(h_0) &\geq \chi(h_0)f_{-,R}h_0f_{-,R}\chi(h_0) + O(R^{-1}, S^{-1}) + K_1 \\ &= f_{-,R}\chi(h_0)h_0\chi(h_0)f_{-,R} + O(R^{-1}, S^{-1}) + K_1 \\ &\geq \mu_1 f_{-,R}\chi^2(h_0)f_{-,R} + O(R^{-1}, S^{-1}) + K_1 \\ &= \mu_1 \chi(h_0)f_{-,R}^2\chi(h_0) + O(R^{-1}, S^{-1}) + K_1 \end{aligned}$$

avec  $\mu_1 > 0$ . Ici on a utilisé deux fois (5.3.6).

Estimons maintenant  $[ih_0, b_+]$ . On a

$$[ih_0^l, b_+^l] = \frac{1}{2}X_+''' + 2D_r X_+' D_r - (g'(r)\lambda_l + f'(r))X_+.$$

Comme

$$\begin{aligned} -g'(r)\lambda_l X_+ &= -g'(r)\lambda_l r f_{+,R}^2 \geq cg(r)\lambda_l f_{+,R}^2, \\ X_+''', f' X_+ &\in O(R^{-1}) \quad \text{et} \quad X_+' = f_{+,R}^2 + r(f_{+,R}^2)' \geq f_{+,R}^2 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} [ih_0^l, b_+^l] &\geq 2D_r f_{+,R}^2 D_r + cg(r)\lambda_l f_{+,R}^2 + O(R^{-1}) \\ &\geq \min\{2, c\}f_{+,R}(h_0^l - f(r))f_{+,R} + O(R^{-1}). \end{aligned}$$

Donc

$$[ih_0, b_+] \geq \min\{2, c\}f_{+,R}(h_0 - f)f_{+,R} + O(R^{-1})$$

au sens des formes quadratiques sur  $D(h_0)$ . Nous distinguons deux cas :

(a) Si  $0 < \lambda_0 < c_0$ , on choisit  $\chi \in C_0^\infty(]0, c_0[)$  supportée dans un voisinage de  $\lambda_0$ . On a vu dans le Lemme 5.3.1 que  $\chi(h_0)f_{+,R}f f_{+,R}\chi(h_0)$  est compact. Donc on a

$$(5.3.16) \quad \begin{aligned} \chi(h_0)[ih_0, b_+]\chi(h_0) &\geq \min\{2, c\}\chi(h_0)f_{+,R}h_0f_{+,R}\chi(h_0) + k_1 + O(R^{-1}) \\ &\geq \mu_2\chi(h_0)f_{+,R}^2\chi(h_0) + k_1 + O(R^{-1}) \end{aligned}$$

avec  $k_1$  compact et  $\mu_2 > 0$ . Ici on a de nouveau utilisé (5.3.6).

(b) Si  $\lambda_0 > c_0$ , on choisit  $\chi \in C_0^\infty(]c_0, \infty[)$  supportée dans un voisinage de  $\lambda_0$ . Par (5.3.6) on a pour un  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} \chi(h_0)f_{+,R}h_0f_{+,R}\chi(h_0) &= f_{+,R}\chi(h_0)h_0\chi(h_0)f_{+,R} + O(R^{-1}) \\ &\geq (c_0 + \varepsilon)f_{+,R}\chi^2(h_0)f_{+,R} + O(R^{-1}) \\ &= (c_0 + \varepsilon)\chi(h_0)f_{+,R}^2\chi(h_0) + O(R^{-1}). \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = c_0$ , on a

$$\chi(h_0)f_{+,R}f(r)f_{+,R}\chi(h_0) = c_0\chi(h_0)f_{+,R}^2\chi(h_0) + o(R^0).$$

En rassemblant,

$$(5.3.17) \quad \chi(h_0)[ih_0, b_+]\chi(h_0) \geq \mu_3\chi(h_0)f_{+,R}^2\chi(h_0) + o(R^0)$$

avec  $\mu_3 > 0$ .

Rassemblant (5.3.16), (5.3.17) on obtient

$$\chi(h_0)[ih_0, b_+]\chi(h_0) \geq \mu_4\chi(h_0)f_{+,R}^2\chi(h_0) + o(R^0) + k$$

avec  $\mu_4 > 0$  et  $k$  compact.

Ajoutant (5.3.15), on obtient

$$\chi(h_0)[ih_0, b]\chi(h_0) \geq \mu\chi^2(h_0) + K + o(R^0, S^0)$$

avec  $\mu > 0$  et  $K$  compact.

2<sup>ème</sup> PAS : Nous estimons maintenant  $[ih_1, b]$ . En fait  $\chi(h)[ih_1, b]\chi(h)$  est compact. La preuve se fait en défaisant le commutateur :

$$\begin{aligned} \chi(h)h_1b\chi(h) &= \chi(h)(h_0 + i)\langle r \rangle^{-1} \times (h_0 + i)^{-1}\langle r \rangle h_1\langle r \rangle \times \langle r \rangle^{-1}b\chi(h) \\ &\quad + \chi(h)(h_0 + i)\langle r \rangle^{-1} \times (h_0 + i)^{-1}[D_r^2, \langle r \rangle] \times (h_0 + i)^{-1}h_1\langle r \rangle \times \langle r \rangle^{-1}b\chi(h). \end{aligned}$$

Le premier facteur de chaque terme est compact grâce au Lemme 4.4.2 et les autres sont bornés grâce au Lemme 4.3.2 et le Corollaire 5.2.2. Il suit l'affirmation et alors le lemme. ■

**5.4. Opérateur conjugué pour  $L$ .** Nous rappelons que

$$L = \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}.$$

Pour une fonction  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  nous posons

$$B_\chi := \begin{pmatrix} b_\chi & 0 \\ 0 & b_\chi \end{pmatrix}, \quad D(B_\chi) = D(b_\chi) \oplus D(b_\chi),$$

où  $b_\chi$  est défini comme la fermeture de  $\chi(h)b\chi(h)$ , et  $b$  l'opérateur conjugué pour  $h$  (voir la Section 2.2).

Nous allons souvent utiliser les mêmes notations pour des opérateurs qui agissent sur  $\mathcal{H}$  et ceux qui agissent sur  $\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Plus précisément, un opérateur  $A$ , qui agit sur  $\mathcal{H}$ , agit sur  $\mathcal{L}$  par

$$A(u_1, u_2) = (Au_1, Au_2).$$

Le commutateur  $[ih^{1/2}, b_\chi]$  possède une extension à un opérateur borné par le Théorème 2.2.4. Il en est de même pour le double commutateur :

LEMME 5.4.1.  $[b_\chi, [ih^{1/2}, b_\chi]]$  définie comme forme quadratique sur  $D(N)$  possède une extension à un opérateur borné.

Nous allons utiliser également le lemme suivant :

LEMME 5.4.2.  $L$ 'opérateur  $[k, b_\chi]$  est compact et  $\langle r \rangle [k, b_\chi]$  est borné, en particulier le double commutateur  $[b_\chi, [k, b_\chi]]$  possède une extension à un opérateur borné.

Les démonstrations des Lemmes 5.4.1 et 5.4.2 se trouvent dans l'Appendice A.2.

PROPOSITION 5.4.3. Le couple  $(L, B_\chi)$  vérifie les conditions de Mourre et le double commutateur  $[B_\chi, [iL, B_\chi]]$  est borné. En particulier on a  $L \in C^2(B_\chi)$ .

*Démonstration.* On montre d'abord que le couple  $(L, B_\chi)$  vérifie les conditions de Mourre.

(M1) est vérifié puisque  $e^{isb_\chi} : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^1$  (voir le Théorème 2.2.4).

Vérifions (M2) :

$$[iL, B_\chi] = \begin{pmatrix} [ih^{1/2}, b_\chi] & 0 \\ 0 & -[ih^{1/2}, b_\chi] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -[ik, b_\chi] & [ik, b_\chi] \\ [ik, b_\chi] & -[ik, b_\chi] \end{pmatrix}.$$

Par le Théorème 2.2.4,  $[ih^{1/2}, b_\chi]$  possède une extension à un opérateur borné.  $[ik, b_\chi]$  est borné en vertu du Lemme 5.4.2. Alors  $[iL, B_\chi]$  est borné et (M2) est vérifié, en particulier on a  $L \in C^1(B_\chi)$ .

La dérivée de  $s \mapsto e^{isB_\chi}(z-L)^{-1}e^{-isB_\chi}$  au point  $s=0$  est  $(z-L)^{-1}[iL, B_\chi](z-L)^{-1}$ . Pour démontrer  $L \in C^2(B_\chi)$ , il faut démontrer que cette dérivée est dans  $C^1(B_\chi; \mathcal{L})$ . Par la règle de Leibniz (voir [ABG, Proposition 5.1.5]), il suffit de démontrer  $[iL, B_\chi] \in C^1(B_\chi; \mathcal{L})$ , ce qui par [ABG, Lemma 6.2.9] revient à estimer le commutateur  $ad_{B_\chi}^2(L)$ . On a

$$[B_\chi, [iL, B_\chi]] = \begin{pmatrix} [b_\chi, [ih^{1/2}, b_\chi]] & 0 \\ 0 & -[b_\chi, [ih^{1/2}, b_\chi]] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -[b_\chi, [ik, b_\chi]] & [b_\chi, [ik, b_\chi]] \\ [b_\chi, [ik, b_\chi]] & -[b_\chi, [ik, b_\chi]] \end{pmatrix}.$$

Le premier terme est borné par le Lemme 5.4.1, le deuxième est borné par le Lemme 5.4.2. Ceci termine la démonstration. ■

**5.5. Estimation de Mourre pour  $L$ .** Soit  $S_L := \{-c_1 \pm \sqrt{c_0 + c_1^2}, \pm\sqrt{c_0}, 0\}$ , où  $c_0, c_1$  sont définis dans la Section 3.2.

THÉORÈME 5.5.1. Pour  $R, S$  suffisamment grands et tout  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus S_L$ , il existe  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $I$  voisinage de  $\lambda$  et  $\mu > 0$  tels que

$$\begin{aligned} 1_I(L)[iL, B_\chi]1_I(L) &\geq \mu 1_I(L) + K_i & \text{si } \lambda > 0, \\ 1_I(L)[iL, -B_\chi]1_I(L) &\geq \mu 1_I(L) + K_i & \text{si } \lambda < 0, \end{aligned}$$

où  $K_i$  sont des opérateurs compacts.

REMARQUE 5.5.2. On peut en fait montrer que l'ensemble des seuils est égal à  $\tilde{S}_L := \{-c_1 \pm \sqrt{c_0 + c_1^2}, 0\}$ . La démonstration étant plus longue et le résultat pas plus avantageux

pour la démonstration de la complétude asymptotique, nous renonçons à ce résultat un peu plus précis.

*Démonstration.* Nous ne traitons que le cas  $\lambda > 0$ , l'autre étant analogue. Choisissons un voisinage  $I_1 \subset ]0, \infty[$  de  $\lambda$ . Soit  $I_2 \subset ]0, \infty[$  suffisamment grand pour que pour  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $\chi|_{I_2} = 1$  on ait pour tout  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(I_1)$  :

$$\tilde{\chi}(-c_1 + \sqrt{x + c_1^2})\chi(x) = \tilde{\chi}(-c_1 + \sqrt{x + c_1^2}), \quad \tilde{\chi}(\sqrt{x})\chi(x) = \tilde{\chi}(\sqrt{x}).$$

À partir de maintenant, nous fixons un tel  $\chi$ . Soient  $\psi_-, \psi_+ \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\text{supp } \psi_- \subset ]-\infty, 1[$ ,  $\text{supp } \psi_+ \subset ]-1, \infty[$  et  $\psi_-^2 + \psi_+^2 = 1$ . Grâce au Lemme A.3.3(ii), on a pour  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(I_1)$  :

$$\tilde{\chi}(L)[iL, B_\chi]\tilde{\chi}(L) = \tilde{\chi}(L)\psi_-[iL, B_\chi]\psi_- \tilde{\chi}(L) + \tilde{\chi}(L)\psi_+[iL, B_\chi]\psi_+ \tilde{\chi}(L) + K$$

avec  $K$  un opérateur compact. Soit

$$L_D := \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix}, \quad L_M := \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 \\ c_1 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que grâce au Lemme 5.4.2,

$$[iL_D, B_\chi] = [iL_M, B_\chi] = [iL, B_\chi] + K$$

avec  $K$  compact. D'après les Lemmes A.3.3 et A.4.4, on a

$$\tilde{\chi}(L)\psi_-[iL, B_\chi]\psi_- \tilde{\chi}(L) = \psi_- \tilde{\chi}(L_D)[iL_D, B_\chi]\tilde{\chi}(L_D)\psi_- + K$$

avec un opérateur  $K$  compact. D'après le Théorème 2.2.5, on a

$$\psi_- \tilde{\chi}(L_D)[iL_D, B_\chi]\tilde{\chi}(L_D)\psi_- \geq \nu_1 \psi_- \tilde{\chi}^2(L_D)\psi_- + K$$

avec  $\nu_1 > 0$ ,  $K$  compact, si le support de  $\tilde{\chi}$  est assez petit. Par les Lemmes A.3.3 et A.4.4, on obtient

$$\tilde{\chi}(L)\psi_+[iL, B_\chi]\psi_+ \tilde{\chi}(L) = \psi_+ \tilde{\chi}(L_M)[iL_M, B_\chi]\tilde{\chi}(L_M)\psi_+ + K$$

avec  $K$  compact. De nouveau par le Théorème 2.2.5,

$$\psi_+ \tilde{\chi}(L_M)[iL_M, B_\chi]\tilde{\chi}(L_M)\psi_+ \geq \nu_2 \psi_+ \tilde{\chi}^2(L_M)\psi_+ + K$$

avec  $\nu_2 > 0$  et  $K$  compact si le support de  $\tilde{\chi}$  est assez petit. De nouveau par les Lemmes A.3.3 et A.4.4, on obtient

$$\tilde{\chi}(L)[iL, B_\chi]\tilde{\chi}(L) \geq \nu \tilde{\chi}^2(L) + K$$

avec  $\nu > 0$  et  $K$  compact. ■

On obtient en utilisant [M] une conséquence du principe d'absorption limite :

THÉORÈME 5.5.3.  $\forall \tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_L \cup \sigma_{\text{pp}}(L)))$ ,  $\exists \chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $\forall \mu > 1/2$ ,  $\forall \psi \in \mathcal{L}$ ,

$$\int_0^\infty \|\langle B_\chi \rangle^{-\mu} e^{-itL} \tilde{\chi}(L)\psi\|^2 dt \leq C\|\psi\|^2.$$

L'opérateur  $L$  ne possède pas de spectre singulier continu et le spectre purement ponctuel est localement fini dans  $\mathbb{R} \setminus S_L$ .

Rappelons que

$$L_0 = \begin{pmatrix} h_0^{1/2} & 0 \\ 0 & -h_0^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_0 & k_0 \\ k_0 & -k_0 \end{pmatrix}, \quad D(L_0) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1.$$

L'opérateur  $b_{0,\chi}$  est défini de la même façon que  $b_\chi$  en prenant des troncatures en  $h_0$  au lieu de prendre des troncatures en  $h$ . L'opérateur  $B_{0,\chi}$  est défini comme  $B_\chi$ , mais à partir de  $b_{0,\chi}$ .  $L_0$  n'étant qu'un cas particulier de  $L$ , les Théorèmes 5.5.1 et 5.5.3 sont alors également vérifiés pour le couple  $(B_{0,\chi}, L_0)$ .

**5.6. Estimation de Mourre pour  $h_\nu$ .** Dans cette section, nous allons considérer les opérateurs  $h_\nu^l$  et espaces  $\mathcal{H}_l$  et supprimer l'exposant resp. l'indice  $l$  pour alléger les notations. Les opérateurs  $h_\nu$  sont tous elliptiques et nous pouvons alors prendre le générateur de dilatations comme opérateur conjugué. Nous allons utiliser le calcul pseudodifférentiel et en particulier la quantification de Weyl, voir l'Appendice C. On a clairement  $\sigma(h_\nu)(r, \xi) = \xi^2 + W_\nu(r)$ . Soit  $b := \frac{1}{2}(rD_r + D_r r)$ ,  $D(b) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid b\phi \in \mathcal{H}\}$ .  $(b, D(b))$  est autoadjoint. Notons que grâce à [H, Lemme 3.1],  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  est dense dans  $D(b) \cap H^2(\mathbb{R})$ .

LEMME 5.6.1. *Les couples  $(h_\nu, b), (h_\nu, \langle r \rangle), \nu \in \mathcal{N}$ , vérifient les conditions (M1), (M2).*

*Démonstration.*  $e^{isb}$  préserve  $H^2(\mathbb{R})$ ,  $e^{is\langle r \rangle}$  préserve  $H^2(\mathbb{R})$  également, (M1) est alors vérifiée. On a

$$[ih_\nu, b] \in \Psi^{2,0}, \quad [ih_\nu, \langle r \rangle] \in \Psi^{1,0}$$

par le calcul pseudodifférentiel, ce qui montre (M2). ■

Nous posons

$$c_0^\nu := \begin{cases} c_0, & \nu = 0, (+, i), i = 1, 2, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad c_1^\nu := \begin{cases} c_1, & \nu = 0, (+, i), i = 1, 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $j_\pm \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  comme dans le Chapitre 4.

LEMME 5.6.2. *Soient  $H := D_r^2 + V(r)$ ,  $V \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ ,  $V \geq 0$ ,  $D(H) = H^2(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = c > 0$ ,  $\chi \in C_0^\infty(]0, c[)$ . Alors  $j_+\chi(H)$  est compact.*

La démonstration est la même que pour le Lemme 5.3.1.

LEMME 5.6.3. *Soit  $\nu \in \mathcal{N}$ . Pour tout  $0 < \lambda_\nu \neq c_0^\nu$  il existe un voisinage  $I$  de  $\lambda_\nu$  et  $\mu > 0$  tels que*

$$\mathbf{1}_I(h_\nu)[ih_\nu, b]\mathbf{1}_I(h_\nu) \geq \mu\mathbf{1}_I(h_\nu) + k$$

avec  $k$  compact.

*Démonstration.* Nous ne traitons que le cas  $\nu \in \{0, (+, i)\}$ ,  $i = 1, 2$ , l'autre étant plus facile. Soit  $\chi \in C_0^\infty(]c_0, \infty[)$  ou  $\chi \in C_0^\infty(]0, c_0[)$  supportée dans un voisinage de  $\lambda_\nu$ . On a

$$\begin{aligned} \chi(h_\nu)[ih_\nu, b]\chi(h_\nu) &= 2\chi(h_\nu)h_\nu\chi(h_\nu) - 2\chi(h_\nu)(W_\nu(r) + rW_\nu'(r))\chi(h_\nu) \\ &= 2\chi(h_\nu)h_\nu\chi(h_\nu) - 2\chi(h_\nu)W_\nu(r)\chi(h_\nu) + k, \end{aligned}$$

avec  $k$  compact puisque  $\lim_{|r| \rightarrow \infty} rW_\nu'(r) = 0$ .



1<sup>er</sup> CAS :  $\text{supp } \chi \subset ]0, c_0[$ . On a

$$\chi(h_\nu)W_\nu(r)\chi(h_\nu) = \chi(h_\nu)W_\nu(r)j_-(r)\chi(h_\nu) + \chi(h_\nu)W_\nu(r)j_+(r)\chi(h_\nu).$$

Le premier terme est compact grâce au Lemme 4.4.2, le deuxième terme est compact grâce au Lemme 5.6.2. Donc

$$\chi(h_\nu)[ih_\nu, b]\chi(h_\nu) \geq \mu\chi^2(h_\nu) + k,$$

avec  $\mu > 0$  et  $k$  compact.

2<sup>ème</sup> CAS :  $\text{supp } \chi \subset ]c_0, \infty[$ . On a pour  $\varepsilon > 0$  :

$$\chi(h_\nu)[ih_\nu, b]\chi(h_\nu) \geq 2\chi(h_\nu)(c_0 + \varepsilon - W_\nu(r))\chi(h_\nu) \geq \mu\chi^2(h_\nu) + k$$

avec  $\mu > 0$  et  $k$  compact.

**5.7. Estimation de Mourre pour  $L_\nu$ .** Nous supprimons de nouveau l'indice  $l$ . Soient  $b_{\chi, \nu}$  et  $B_{\chi, \nu}$  comme dans le Chapitre 2 (construits à partir de  $h_\nu$ ). On a  $b_{\chi, \nu} \in \Psi^{-\infty, 1}$ ,  $h_\nu \in \Psi^{2, 0}$ , ce qui donne (voir [H])

$$[ih_\nu^{1/2}, b_{\chi, \nu}] \in \Psi^{-\infty, 0}, \quad ad_{b_{\chi, \nu}}^2 h_\nu^{1/2} \in \Psi^{-\infty, 0},$$

en particulier les deux opérateurs sont bornés. Utilisant  $k_\nu \in S^0$ ,  $k'_\nu \in S^{-3}$ , on obtient que

$$[k_\nu, b_{\chi, \nu}] \text{ et } ad_{b_{\chi, \nu}}^2 k_\nu \text{ sont compacts.}$$

Il s'ensuit de la même façon que dans la Section 5.4 :

**PROPOSITION 5.7.1.** *Le couple  $(L_\nu, B_{\chi, \nu})$  vérifie les conditions de Mourre pour tout  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $\nu \in \mathcal{N}$ , et le double commutateur  $[B_{\chi, \nu}, [iL_\nu, B_{\chi, \nu}]]$  est borné. En particulier  $L_\nu \in C^2(B_{\chi, \nu})$ .*

Soit  $S_\nu := \{-c'_1 \pm \sqrt{c_0^2 + (c'_1)^2}, \pm \sqrt{c_0^2}, 0\}$ . On a :

**THÉORÈME 5.7.2.** *Pour tout  $\nu \in \mathcal{N}$ ,  $\lambda_\nu \in \mathbb{R} \setminus S_\nu$ , il existe  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $I$  voisinage de  $\lambda_\nu$  et  $\mu > 0$  tels que*

$$(5.7.1) \quad \mathbf{1}_I(L_\nu)[iL_\nu, B_{\chi, \nu}]\mathbf{1}_I(L_\nu) \geq \mu\mathbf{1}_I(L_\nu) + K_1 \quad \text{si } \lambda_\nu > 0,$$

$$(5.7.2) \quad \mathbf{1}_I(L_\nu)[iL_\nu, -B_{\chi, \nu}]\mathbf{1}_I(L_\nu) \geq \mu\mathbf{1}_\nu(L_\nu) + K_2 \quad \text{si } \lambda_\nu < 0,$$

avec  $K_i$  compacts et  $\mu > 0$ .

**REMARQUE 5.7.3.** La démonstration est analogue à celle du Théorème 5.5.1. La démonstration du Théorème 5.5.1 repose sur les Lemmes A.3.3 et A.4.4 qui restent valables pour  $L_0^l$  par restriction sur  $\mathcal{L}_l$ . Pour  $L_\nu^l$ ,  $\nu \neq 0$ , on n'a pas besoin de lemmes équivalents puisque le comportement asymptotique pour  $r \rightarrow \pm\infty$  est le même et les  $k_\nu$  sont constants.

Le théorème suivant est valable pour  $L_\nu$  sans et avec l'exposant  $l$ .

**THÉORÈME 5.7.4.** *Soit  $\nu \in \mathcal{N}$ . Alors*

$$\forall \tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu))), \exists \chi \in C_0^\infty(]0, \infty[), \forall \mu > \frac{1}{2}, \forall \psi \in \mathcal{L},$$

$$\int_0^\infty \|\langle B_{\chi, \nu} \rangle^{-\mu} e^{-itL_\nu} \tilde{\chi}(L_\nu) \psi\|^2 dt \leq C \|\psi\|^2.$$

Les opérateurs  $L_\nu$  ne possèdent pas de spectre singulier continu et le spectre purement ponctuel de  $L_\nu$  est localement fini dans  $\mathbb{R} \setminus S_\nu$ .

## 6. Comparaison avec la dynamique séparable

Dans ce chapitre, nous allons nous ramener à un problème séparable en démontrant un résultat de complétude asymptotique qui compare  $L$  avec  $L_0$ . On va démontrer la complétude asymptotique à l'aide du principe d'absorption limite.

**6.1. Résultats techniques.** Pour  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  nous choisissons  $\chi_1 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi\chi_1 = \chi$ . Par le Lemme 5.1.5,  $h \in C^1(\langle r \rangle)$ . L'opérateur  $\chi_1(h)\langle r \rangle\chi_1(h)$  est alors bien défini sur  $D(\langle r \rangle)$  et symétrique, donc fermable. Sa fermeture, que nous appelons  $d$ , est autoadjointe par le même raisonnement que pour  $b_\chi$ . Soit  $d_0$  l'opérateur qui est construit de la même façon que  $d$ , mais en prenant des troncatures en  $h_0$  au lieu de prendre des troncatures en  $h$ . Pour  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  donnée, le choix d'un  $d$  est équivalent au choix d'un  $\chi_1 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi_1\chi = \chi$ .

LEMME 6.1.1. *Pour tout  $\chi, \chi_1 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi\chi_1 = \chi$ , les opérateurs suivants sont bornés :*

- (i)  $\langle b_\chi \rangle \langle r \rangle^{-1}, \langle r \rangle^{-1} \langle b_{0,\chi} \rangle,$
- (ii)  $\langle b_\chi \rangle (1+d)^{-1}, (1+d_0)^{-1} \langle b_{0,\chi} \rangle.$

*Démonstration.* (i) Nous démontrons que  $b_\chi \langle r \rangle^{-1}$  est borné. En effet,

$$b_\chi \langle r \rangle^{-1} = \chi(h) b \langle r \rangle^{-1} \langle r \rangle \chi(h) \langle r \rangle^{-1}.$$

$\chi(h) b \langle r \rangle^{-1}$  est borné grâce au Corollaire 5.2.2.  $\langle r \rangle \chi(h) \langle r \rangle^{-1}$  est également borné car  $h \in C^1(\langle r \rangle)$ .

(ii) Nous démontrons que  $\langle b_\chi \rangle (1+d)^{-1}$  est borné. Pour  $u \in D(N)$ , on a

$$\|b_\chi u\| \leq C \|\langle r \rangle u\|$$

par la partie (i) du lemme. Comme  $\chi_1(h) : D(N) \rightarrow D(N)$ , on a pour  $u \in D(N)$  :

$$\|b_\chi u\| = \|b_\chi \chi_1^2(h) u\| \leq C \|\langle r \rangle \chi_1^2(h) u\| \leq C (\|\chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) u\| + \|u\|)$$

puisque le commutateur  $[\chi_1(h), \langle r \rangle]$  possède une extension à un opérateur borné. ■

LEMME 6.1.2. *Soient  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  et  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\langle B_\chi \rangle \tilde{\chi}(L) (L - L_0) \tilde{\chi}(L_0) \langle B_{0,\chi} \rangle$$

*définie comme forme quadratique sur  $D(N) \oplus D(N)$  possède une extension à un opérateur borné.*

*Démonstration.* Nous affirmons d'abord que les opérateurs  $[\langle B_\chi \rangle, \tilde{\chi}(L)]$  et  $[\langle B_{0,\chi} \rangle, \tilde{\chi}(L_0)]$  sont bornés de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ . Soit  $\check{\chi}$  une extension presque analytique de  $\tilde{\chi}$  avec

$$\check{\chi}|_{\mathbb{R}} = \tilde{\chi}, \quad |\bar{\partial} \check{\chi}(z)| \leq C_N |\operatorname{Im} z|^N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle [B_\chi], \tilde{\chi}(L) \rangle &= \frac{i}{2\pi} \int \bar{\partial} \tilde{\chi}(z) (z - L)^{-1} \begin{pmatrix} \langle [b_\chi], h^{1/2} \rangle & 0 \\ 0 & -\langle [b_\chi], h^{1/2} \rangle \end{pmatrix} (z - L)^{-1} dz \wedge d\bar{z} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int \bar{\partial} \tilde{\chi}(z) (z - L)^{-1} \begin{pmatrix} -\langle [b_\chi], k \rangle & \langle [b_\chi], k \rangle \\ \langle [b_\chi], k \rangle & -\langle [b_\chi], k \rangle \end{pmatrix} (z - L)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Notre affirmation est alors démontrée si  $\langle [b_\chi], h^{1/2} \rangle$  et  $\langle [b_\chi], k \rangle$  possèdent des extensions à des opérateurs bornés (ce qui entraîne en particulier la convergence en norme des deux intégrales). Par [DG, Lemma C.3.2] il suffit de démontrer que  $[b_\chi, h^{1/2}]$  et  $[b_\chi, [b_\chi, h^{1/2}]]$  resp.  $[b_\chi, k]$  et  $[b_\chi, [b_\chi, k]]$  sont bornés. Ceci suit du Théorème 2.2.4 et des Lemmes 5.4.1 et 5.4.2.

Il suffit alors de démontrer que les opérateurs suivants sont bornés :

$$\begin{aligned} R_1 &= (L - L_0) \langle B_{0,\chi} \rangle \tilde{\chi}(L_0), \\ R_2 &= \tilde{\chi}(L) \langle B_\chi \rangle (L - L_0), \\ R_3 &= \tilde{\chi}(L) \langle B_\chi \rangle (L - L_0) \langle B_{0,\chi} \rangle \tilde{\chi}(L_0). \end{aligned}$$

On a

$$L - L_0 = \begin{pmatrix} h^{1/2} - h_0^{1/2} & 0 \\ 0 & h_0^{1/2} - h^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 \\ k_1 & -k_1 \end{pmatrix} = T_1 + T_2.$$

Si dans  $R_1, R_2, R_3$  on remplace  $L - L_0$  par  $T_2$ , alors les trois opérateurs qui résultent sont bornés grâce à (3.3.11) et grâce au fait que  $\langle r \rangle^{-1} \langle b_{0,\chi} \rangle, \langle b_\chi \rangle \langle r \rangle^{-1}$  sont bornés. Il reste à considérer

$$R'_1 = T_1 \langle B_{0,\chi} \rangle \tilde{\chi}(L_0), \quad R'_2 = \tilde{\chi}(L) \langle B_\chi \rangle T_1, \quad R'_3 = \tilde{\chi}(L) \langle B_\chi \rangle T_1 \langle B_{0,\chi} \rangle \tilde{\chi}(L_0).$$

Les commutateurs  $[h, b_\chi]$  et  $[[h, b_\chi], b_\chi]$  sont bornés grâce au Lemme A.2.5. On en déduit grâce à [DG, Lemma C.3.2] que les commutateurs  $[(i + h_0)^{-1}, \langle b_{0,\chi} \rangle]$  et  $[(i + h)^{-1}, \langle b_\chi \rangle]$  sont bornés de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}^1$ .

Il suffit alors de démontrer que les opérateurs

$$\begin{aligned} r_1 &= (h^{1/2} - h_0^{1/2})(i + h_0)^{-1} \langle b_{0,\chi} \rangle, \\ r_2 &= \langle b_\chi \rangle (i + h)^{-1} (h^{1/2} - h_0^{1/2}), \\ r_3 &= \langle b_\chi \rangle (i + h)^{-1} (h^{1/2} - h_0^{1/2})(i + h_0)^{-1} \langle b_{0,\chi} \rangle \end{aligned}$$

sont bornés. Utilisant le Lemme 6.1.1, on se ramène à démontrer que

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= (h^{1/2} - h_0^{1/2})(i + h_0)^{-1} (1 + d_0), \\ \tilde{r}_2 &= (1 + d)(i + h)^{-1} (h^{1/2} - h_0^{1/2}), \\ \tilde{r}_3 &= (1 + d)(i + h)^{-1} (h^{1/2} - h_0^{1/2})(i + h_0)^{-1} (1 + d_0) \end{aligned}$$

sont bornés. Les commutateurs  $[d, (i + h)^{-1}]$  et  $[(i + h_0)^{-1}, d_0]$  étant bornés de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}^2$ , il suffit de considérer

$$\begin{aligned} r'_1 &= (h^{1/2} - h_0^{1/2}) d_0 (i + h_0)^{-1}, \\ r'_2 &= (i + h)^{-1} d (h^{1/2} - h_0^{1/2}), \end{aligned}$$

$$r'_3 = (i + h)^{-1} d(h^{1/2} - h_0^{1/2}) d_0 (i + h_0)^{-1}.$$

Considérons d'abord  $r'_3$ . Soit  $\chi_2 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi_2 \chi_1 = \chi_1$  et  $\widehat{\chi}(\lambda) := \chi_2(\lambda) \sqrt{\lambda}$ . On a comme forme quadratique sur  $D(\langle r \rangle)$  :

$$\begin{aligned} d(h^{1/2} - h_0^{1/2}) d_0 &= \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) (h^{1/2} - h_0^{1/2}) \chi_1(h_0) \langle r \rangle \chi_1(h_0) \\ &= \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) (\widehat{\chi}(h) - \widehat{\chi}(h_0)) \chi_1(h_0) \langle r \rangle \chi_1(h_0) \\ &= (\chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle (\widehat{\chi}(h) - \widehat{\chi}(h_0)) \langle r \rangle) \\ &\quad \times (\langle r \rangle^{-1} \chi_1(h_0) \langle r \rangle \chi_1(h_0)). \end{aligned}$$

Les premier et troisième facteurs sont bornés par le Lemme A.4.1, le deuxième facteur est borné par le Lemme A.4.3.

Considérons maintenant  $r'_2$ . On a comme forme quadratique sur  $D(\langle r \rangle)$  :

$$\begin{aligned} d(h^{1/2} - h_0^{1/2}) &= \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) (h^{1/2} - h_0^{1/2}) \\ &= \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) h^{1/2} \chi_2(h) - \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) h_0^{1/2} \\ &= \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) \widehat{\chi}(h) - \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) \widehat{\chi}(h_0) \\ &\quad + \chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) (\chi_2(h_0) - \chi_2(h)) h_0^{1/2} \\ &= (\chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle (\widehat{\chi}(h) - \widehat{\chi}(h_0))) \\ &\quad + (\chi_1(h) \langle r \rangle \chi_1(h) \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle (\chi_2(h_0) - \chi_2(h)) h_0^{1/2}). \end{aligned}$$

Les premiers facteurs dans les deux termes sont bornés par le Lemme A.4.1, les deuxième facteurs sont bornés par le Lemme A.4.3. La démonstration pour  $r'_1$  est analogue. ■

Soit  $U(h)$  comme dans la Section 2.1.

LEMME 6.1.3. *Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Alors  $(\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h))\chi(L)$  est compact.*

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ . Soit

$$L_D = \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix}, \quad L_M = L_D + \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 \\ c_1 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

Soient  $\psi_\pm \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\psi_\pm \geq 0$  avec  $\text{supp } \psi_- \subset ]-\infty, 1[$ ,  $\text{supp } \psi_+ \subset ]-1, \infty[$  et  $\psi_-^2 + \psi_+^2 = 1$ . On a

$$\chi(L) = \chi(L_D) \psi_-^2 + \chi(L_M) \psi_+^2 + K$$

avec  $K$  compact par le Lemme A.4.4. Il suffit alors de démontrer :

$$(6.1.1) \quad (\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h))\chi(L_D) \text{ est compact,}$$

$$(6.1.2) \quad (\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h))\chi(L_M) \text{ est compact.}$$

(6.1.1) étant un cas particulier de (6.1.2), on ne démontre que (6.1.2). Rappelons que

$$U(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_0^{1/2} & i \\ h_0^{1/2} & -i \end{pmatrix}, \quad U^*(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h^{-1/2} & h^{-1/2} \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Ceci donne

$$(\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h)) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - h_0^{1/2} h^{-1/2}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h))\chi(L_M) &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - h_0^{1/2}h^{-1/2})\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\chi(L_M) \\ &= \frac{1}{2}(h^{1/2} - h_0^{1/2})(i+h)^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}h^{-1/2}(i+h)\chi(L_M) \end{aligned}$$

et il s'agit de démontrer que :

$$(6.1.3) \quad (h^{1/2} - h_0^{1/2})(i+h)^{-1} \text{ est compact,}$$

$$(6.1.4) \quad h^{-1/2}(i+h)\chi(L_M) \text{ est borné.}$$

(6.1.4) est vérifiée grâce au Lemme A.4.5. Montrons maintenant (6.1.3). On a

$$(h^{1/2} - h_0^{1/2})(i+h)^{-1} = \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2}(h(s+h)^{-1} - h_0(s+h_0)^{-1})(i+h)^{-1} ds.$$

Notons que l'intégrale converge en norme. En effet, on a en utilisant  $D(h) = D(h_0)$  :

$$\begin{aligned} \|s^{-1/2}(s+h_0)^{-1}h_0(i+h)^{-1}\| &\leq C\langle s \rangle^{-3/2}, \quad s > 1, \\ \|s^{-1/2}h_0(s+h_0)^{-1}(i+h)^{-1}\| &\leq Cs^{-1/2}, \quad s \leq 1, \end{aligned}$$

et les mêmes estimations sont valables pour les termes avec  $h$  au lieu de  $h_0$ . Puisque  $h(s+h)^{-1} = 1 - s(h+s)^{-1}$ , on a

$$\begin{aligned} s^{-1/2}(h(s+h)^{-1} - h_0(s+h_0)^{-1})(i+h)^{-1} \\ = (s^{1/2}(h_0+s)^{-1}\langle r \rangle^{-1})(\langle r \rangle(h-h_0)(h+s)^{-1}(i+h)^{-1}). \end{aligned}$$

Le premier facteur est compact par le Lemme 4.4.2, le deuxième est borné par le Lemme 4.3.2. Ceci donne un opérateur compact. L'intégrale étant convergente en norme, (6.1.3) en découle. ■

## 6.2. Opérateurs d'onde

THÉORÈME 6.2.1. *Les limites fortes*

$$(6.2.1) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL} e^{-itL_0},$$

$$(6.2.2) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_0} e^{-itL} \mathbf{1}^c(L)$$

existent. Si l'on désigne (6.2.1) par  $\tilde{\Omega}^+$ , alors (6.2.2) est égale à  $(\tilde{\Omega}^+)^*$  et  $(\tilde{\Omega}^+)^* \tilde{\Omega}^+ = \mathbf{1}$ ,  $\tilde{\Omega}^+(\tilde{\Omega}^+)^* = \mathbf{1}^c(L)$ .

*Démonstration.* Par un argument de densité, en utilisant que  $\sigma_{\text{pp}}(L)$  ne peut s'accumuler que sur  $S_L$  ainsi que le fait que  $L_0$  ne possède pas de valeurs propres, il suffit de démontrer l'existence de

$$(6.2.3) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL} e^{-itL_0} \tilde{\chi}^2(L_0),$$

$$(6.2.4) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_0} e^{-itL} \chi^2(L)$$

avec  $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $\text{supp } \chi \subset \mathbb{R} \setminus (S_L \cup \sigma_{\text{pp}}(L))$ ,  $\text{supp } \tilde{\chi} \subset \mathbb{R} \setminus S_0$ . On a

$$(6.2.5) \quad e^{itL_0} e^{-itL} \chi^2(L) = e^{itL_0} (\chi(L_0) - \chi(L)) e^{-itL} \chi(L) + e^{itL_0} \chi(L_0) e^{-itL} \chi(L).$$

D'après le Lemme A.4.4,  $\chi(L_0) - \chi(L)$  est compact. Comme  $\text{supp } \chi \cap \sigma_{\text{pp}}(L) = \emptyset$  et  $\sigma_{\text{sc}}(L) = \emptyset$ ,  $e^{-itL}\chi(L) \rightarrow 0$  faiblement, alors  $(\chi(L_0) - \chi(L))e^{-itL}\chi(L) \rightarrow 0$  fortement, le premier terme dans (6.2.5) tend alors fortement vers zéro. On a

$$(6.2.6) \quad \frac{d}{dt}\chi(L_0)e^{itL_0}e^{-itL}\chi(L) = \chi(L_0)e^{itL_0}i(L_0 - L)e^{-itL}\chi(L).$$

Soit  $\widehat{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_L \cup \sigma_{\text{pp}}(L)))$  avec  $\chi\widehat{\chi} = \chi$ . Donc

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\chi(L_0)e^{itL_0}e^{-itL}\chi(L) \\ &= (e^{itL_0}\chi(L_0)\langle B_{0,\check{\chi}} \rangle^{-1}) \times (\langle B_{0,\check{\chi}} \rangle \widehat{\chi}(L_0)(L_0 - L)\widehat{\chi}(L)\langle B_{\check{\chi}} \rangle) \times (\langle B_{\check{\chi}} \rangle^{-1}\chi(L)e^{-itL}) \end{aligned}$$

avec  $\check{\chi}$  convenable. Les premier et troisième facteurs sont intégrables grâce au Théorème 5.5.3, le deuxième facteur est borné grâce au Lemme 6.1.2. Ceci montre l'existence de (6.2.2). La démonstration de l'existence de (6.2.1) est analogue. ■

**THÉORÈME 6.2.2.** *Les limites fortes*

$$(6.2.7) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR}e^{-itR_0},$$

$$(6.2.8) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0}e^{-itR}\mathbf{1}^c(R)$$

existent. Si l'on désigne (6.2.7) par  $\Omega^+$ , alors (6.2.8) est égale à  $(\Omega^+)^*$  et on a

$$(6.2.9) \quad (\Omega^+)^*\Omega^+ = \mathbf{1}, \quad \Omega^+(\Omega^+)^* = \mathbf{1}^c(R).$$

*Démonstration.* À partir du Théorème 6.2.1, on obtient l'existence des limites

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR}U^*(h)U(h_0)e^{-itR_0}, \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0}U^*(h_0)U(h)e^{-itR}\mathbf{1}^c(R).$$

Il s'agit alors de démontrer que

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR}(\mathbf{1} - U^*(h)U(h_0))e^{-itR_0} = 0, \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0}(\mathbf{1} - U^*(h_0)U(h))e^{-itR}\mathbf{1}^c(R) = 0.$$

Il suffit de démontrer :

$$(6.2.10) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} (U(h)U^*(h_0) - \mathbf{1})e^{-itL_0} = 0,$$

$$(6.2.11) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} (U(h_0)U^*(h) - \mathbf{1})e^{-itL}\mathbf{1}^c(L) = 0.$$

Nous allons démontrer (6.2.11), la démonstration de (6.2.10) est analogue. Par densité, il suffit de démontrer que

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h))\chi(L)e^{-itL} = 0$$

si  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_L \cup \sigma_{\text{pp}}(L)))$ . Comme  $\sigma_{\text{sc}}(L) = \emptyset$ , l'affirmation va suivre du fait que  $(\mathbf{1} - U(h_0)U^*(h))\chi(L)$  est compact pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , ce qui est l'affirmation du Lemme 6.1.3. ■

## 7. Projections asymptotiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les projections asymptotiques. Ces projections séparent les solutions qui vont à l'infini positif et celles qui vont à l'infini négatif.

**7.1. Résultats techniques.** Dans toute cette section, nous considérons des restrictions à  $\mathcal{L}_l = \mathcal{H}_l \oplus \mathcal{H}_l$  et nous supprimons l'indice  $l$ . Comme dans la Section 6.1, pour  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  nous choisissons  $\chi_1 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi\chi_1 = \chi$  et nous notons  $d_\nu$  la fermeture de  $(\chi_1(h_\nu)\langle r \rangle\chi_1(h_\nu), D(\langle r \rangle))$ . On a comme dans le Lemme 6.1.1 :

LEMME 7.1.1. *Soit  $\nu \in \mathcal{N}$ . Pour tout  $\chi, \chi_1 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi\chi_1 = \chi$  les opérateurs  $\langle b_{\chi, \nu} \rangle \langle r \rangle^{-1}, \langle b_{\chi, \nu} \rangle (1 + d_\nu)^{-1}$  sont bornés.*

Le lemme suivant est l'analogie du Lemme 6.1.2 :

LEMME 7.1.2. *Soit  $\nu \in \mathcal{N}$ . Soient  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  et  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .*

(i)  $\langle B_{\chi, 0} \rangle \tilde{\chi}(L_0)(L_0 j_\nu - j_\nu L_0) \tilde{\chi}(L_\nu) \langle B_{\chi, \nu} \rangle$  définie comme forme quadratique sur  $D(b) \oplus D(b)$  possède une extension à un opérateur borné,

(ii)  $\langle B_{\chi, \nu} \rangle \tilde{\chi}(L_\nu)[L_\nu, j_\pm] \tilde{\chi}(L_\nu) \langle B_{\chi, \nu} \rangle$  définie comme forme quadratique sur  $D(b) \oplus D(b)$  possède une extension à un opérateur borné.

*Démonstration.* On ne démontre que (i), la démonstration de (ii) étant analogue. La démonstration est analogue à la démonstration du Lemme 6.1.2. Nous pouvons nous ramener à considérer

$$\begin{aligned} r_1 &= (h_0^{1/2} j_\nu - j_\nu h_0^{1/2}) d_\nu (i + h_\nu)^{-1}, \\ r_2 &= (i + h_0)^{-1} d_0 (h_0^{1/2} j_\nu - j_\nu h_0^{1/2}), \\ r_3 &= (i + h_0)^{-1} d_0 (h_0^{1/2} j_\nu - j_\nu h_0^{1/2}) d_\nu (i + h_\nu)^{-1} \end{aligned}$$

si nous pouvons démontrer que les opérateurs suivants sont bornés ( $\nu \in \mathcal{N}$ ) :

$$\begin{aligned} T_1 &:= [\langle B_{\chi, \nu} \rangle, \tilde{\chi}(L_\nu)] : \mathcal{L} \rightarrow H^1 \oplus H^1, \\ T_2 &:= \langle r \rangle (k_0 j_\nu - j_\nu k_\nu) \langle r \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \\ T_3 &:= \langle r \rangle^{-1} \langle b_{\chi, \nu} \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \\ T_4 &:= [(i + h_\nu)^{-1}, \langle b_{\chi, \nu} \rangle] : \mathcal{H} \rightarrow H^1, \\ T_5 &:= [d_\nu, (i + h_\nu)^{-1}] : \mathcal{H} \rightarrow H^2. \end{aligned}$$

Le fait que  $T_1$  est borné suit de la même façon que dans la démonstration du Lemme 6.1.2 en utilisant que  $ad_{b_{\chi, \nu}}^j h_\nu^{1/2}, ad_{b_{\chi, \nu}}^j k_\nu (j = 1, 2)$  sont bornés, ce qu'on a déjà vu dans la Section 5.7.  $T_2$  est borné grâce à (3.2.6),  $T_3$  est borné grâce au Lemme 7.1.1. On a en utilisant  $(z - h_\nu)^{-1} : D(\langle r \rangle) \rightarrow D(\langle r \rangle), D(b_{\chi, \nu}) \rightarrow D(b_{\chi, \nu})$  :

$$T_4 = (i + h_\nu)^{-1} [h_\nu, \langle b_{\chi, \nu} \rangle] (i + h_\nu)^{-1}, \quad T_5 = (i + h_\nu)^{-1} [d_\nu, h_\nu] (i + h_\nu)^{-1}.$$

Les commutateurs  $ad_{b_{\chi, \nu}} h_\nu \in \Psi^{-\infty, 0}, ad_{b_{\chi, \nu}}^2 h_\nu \in \Psi^{-\infty, 0}$  et  $ad_{h_\nu} d_\nu \in \Psi^{-\infty, 0}$  étant bornés, ceci donne l'affirmation pour  $T_4, T_5$ .

Considérons d'abord  $r_3$ . Soit  $\chi_2 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $\chi_1 \chi_2 = \chi_1$  et  $\hat{\chi}(\lambda) = \chi_2(\lambda) \sqrt{\lambda}$ . On a comme forme quadratique sur  $D(\langle r \rangle)$  :

$$\begin{aligned} d_0 (h_0^{1/2} j_\nu - j_\nu h_0^{1/2}) d_\nu &= \chi_1(h_0) \langle r \rangle \chi_1(h_0) \chi_2(h_0) h_0^{1/2} j_\nu \chi_1(h_0) \langle r \rangle \chi_1(h_0) \\ &\quad - \chi_1(h_0) \langle r \rangle \chi_1(h_0) j_\nu h_\nu^{1/2} \chi_2(h_\nu) \chi_1(h_\nu) \langle r \rangle \chi_1(h_\nu) \\ &= d_0 (\hat{\chi}(h_0) j_\nu - j_\nu \hat{\chi}(h_\nu)) d_\nu \\ &= d_0 \langle r \rangle^{-1} (\langle r \rangle (\hat{\chi}(h_0) j_\nu - j_\nu \hat{\chi}(h_0)) \langle r \rangle) (\langle r \rangle^{-1} d_\nu), \end{aligned}$$

ce qui est borné grâce au Lemme B.1 et le calcul pseudodifférentiel. Traitons maintenant  $r_2$ . Comme forme quadratique sur  $D(\langle r \rangle)$ , on a

$$\begin{aligned} d_0(h_0^{1/2}j_\nu - j_\nu h_\nu^{1/2}) &= \chi_1(h_0)\langle r \rangle \chi_1(h_0)\widehat{\chi}(h_0)j_\nu - \chi_1(h_0)\langle r \rangle \chi_1(h_0)j_\nu \chi_2(h_0)h_\nu^{1/2} \\ &\quad - \chi_1(h_0)\langle r \rangle \chi_1(h_0)[\chi_2(h_0), j_\nu]h_\nu^{1/2} \\ &= (\chi_1(h_0)\langle r \rangle \chi_1(h_0)\langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle(\widehat{\chi}(h_0)j_\nu - j_\nu \widehat{\chi}(h_\nu))) \\ &\quad + (\chi_1(h_0)\langle r \rangle \chi_1(h_0)\langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle j_\nu(\chi_2(h_\nu) - \chi_2(h_0))h_\nu^{1/2}) \\ &\quad - (\chi_1(h_0)\langle r \rangle \chi_1(h_0)\langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle[\chi_2(h_0), j_\nu]h_\nu^{1/2}). \end{aligned}$$

Le premier facteur dans chacun des trois termes est borné par le calcul pseudodifférentiel, le deuxième facteur de chacun des termes est borné par le Lemme B.1. La démonstration du fait que  $r_1$  est borné est analogue. ■

Soit  $U(h)$  la transformation unitaire de la Section 2.1.

LEMME 7.1.3. *Soient  $\nu \in \mathcal{N}$  et  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .*

- (i) *L'opérateur  $(U(h_\nu)j_\nu U^*(h_0) - j_\nu)\chi(L_0)$  est compact.*
- (ii) *L'opérateur  $(U(h_\nu)j_\pm U^*(h_\nu) - j_\pm)\chi(L_\nu)$  est compact.*

*Démonstration.* On ne démontre que (i), la démonstration de (ii) étant analogue. On peut supposer  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ . Soient

$$L_D^0 = \begin{pmatrix} h_0^{1/2} & 0 \\ 0 & -h_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad L_M^0 = L_D^0 + \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 \\ c_1 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

Soient  $\psi_\pm \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \psi_- \subset ]-\infty, 1[$ ,  $\text{supp } \psi_+ \subset ]-1, \infty[$  avec  $\psi_-^2 + \psi_+^2 = 1$ . Alors on a grâce au Lemme A.4.4 :

$$\chi(L_0) = \chi(L_D^0)\psi_-^2 + \chi(L_M^0)\psi_+^2 + K$$

avec  $K$  compact. Il suffit alors de démontrer que

$$(7.1.1) \quad (U(h_\nu)j_\nu U^*(h_0) - j_\nu)\chi(L_D^0) \text{ est compact,}$$

$$(7.1.2) \quad (U(h_\nu)j_\nu U^*(h_0) - j_\nu)\chi(L_M^0) \text{ est compact.}$$

(7.1.1) étant un cas particulier de (7.1.2), on ne démontre que (7.1.2).

On rappelle que

$$U(h_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_\nu^{1/2} & i \\ h_\nu^{1/2} & -i \end{pmatrix}, \quad U^*(h_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_0^{-1/2} & h_0^{-1/2} \\ -i & i \end{pmatrix},$$

donc

$$U(h_\nu)j_\nu U^*(h_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_\nu^{1/2}j_\nu h_0^{-1/2} + j_\nu & h_\nu^{1/2}j_\nu h_0^{-1/2} - j_\nu \\ h_\nu^{1/2}j_\nu h_0^{-1/2} - j_\nu & h_\nu^{1/2}j_\nu h_0^{-1/2} + j_\nu \end{pmatrix}.$$

Ceci donne

$$(U(h_\nu)j_\nu U^*(h_0) - j_\nu)\chi(L_M^0) = \frac{1}{2}(h_\nu^{1/2}j_\nu h_0^{-1/2} - j_\nu) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \chi(L_M^0).$$



(7.1.2) va alors suivre de

$$(7.1.3) \quad (h_\nu^{1/2} j_\nu - j_\nu h_0^{1/2})(i + h_0)^{-1} \text{ compact,}$$

$$(7.1.4) \quad h_0^{-1/2}(i + h_0)\chi(L_M^0) \text{ borné.}$$

(7.1.4) est vérifiée grâce au Lemme A.4.5, montrons alors (7.1.3). On a

$$\begin{aligned} & (h_\nu^{1/2} j_\nu - j_\nu h_0^{1/2})(i + h_0)^{-1} \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2} (h_\nu(s + h_\nu)^{-1} j_\nu - j_\nu h_0(s + h_0)^{-1})(i + h_0)^{-1} ds \end{aligned}$$

et l'intégrale converge en norme :

$$\|s^{-1/2} h_\nu(s + h_\nu)^{-1} j_\nu (i + h_0)^{-1}\| \leq \begin{cases} s^{-1/2}, & s \leq 1, \\ C\langle s \rangle^{-3/2}, & s > 1, \end{cases}$$

puisque  $j_\nu : H^2 \rightarrow H^2$ . On a

$$\begin{aligned} & s^{-1/2} (h_\nu(s + h_\nu)^{-1} j_\nu - j_\nu h_0(s + h_0)^{-1})(i + h_0)^{-1} \\ &= s^{1/2} (s + h_\nu)^{-1} ((h_\nu - h_0) j_\nu \langle r \rangle) (\langle r \rangle^{-1} (s + h_0)^{-1} (i + h_0)^{-1}) \\ &\quad - (s^{1/2} (s + h_\nu)^{-1} [j_\nu, h_0] \langle r \rangle) (\langle r \rangle^{-1} (s + h_0)^{-1} (i + h_0)^{-1}). \end{aligned}$$

Ceci est un opérateur compact grâce aux Lemmes 4.3.2 et 4.4.2. L'intégrale étant convergente en norme, l'affirmation en découle. ■

## 7.2. Projections asymptotiques pour $L, L_0, L_\nu$

THÉORÈME 7.2.1. *Soit  $\nu \in \mathcal{N}$ . Les limites fortes*

$$(7.2.1) \quad \text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itL} j_\pm e^{-itL} \mathbf{1}^c(L) =: \tilde{P}_\pm^+,$$

$$(7.2.2) \quad \text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} j_\pm e^{-itL_\nu} \mathbf{1}^c(L_\nu) =: \tilde{P}_{\pm, \nu}^+$$

*existent et elles sont indépendantes du choix de  $j_\pm$ . De plus, on a :*

$$(7.2.3) \quad \tilde{P}_\pm^+ = \tilde{\Omega}^+ \tilde{P}_{\pm, 0}^+ (\tilde{\Omega}^+)^*,$$

$$(7.2.4) \quad (\tilde{P}_\pm^+)^2 = \tilde{P}_\pm^+, \quad (\tilde{P}_{\pm, \nu}^+)^2 = \tilde{P}_{\pm, \nu}^+,$$

$$(7.2.5) \quad \tilde{P}_+^+ + \tilde{P}_-^+ = \mathbf{1}^c(L), \quad \tilde{P}_{+, \nu}^+ + \tilde{P}_{-, \nu}^+ = \mathbf{1}^c(L_\nu),$$

$$(7.2.6) \quad [L, \tilde{P}_\pm^+] = [L_\nu, \tilde{P}_{\pm, \nu}^+] = 0.$$

REMARQUE 7.2.2. Si  $\nu \neq (+, 2)$ , alors  $\mathbf{1}^c(L_\nu) = \mathbf{1}$ .

*Démonstration du Théorème 7.2.1.* L'existence de (7.2.1) suit de l'existence de (7.2.2) avec  $\nu = 0$  grâce au Théorème 6.2.1; on obtient en même temps la propriété d'entrelacement (7.2.3). Il suffit de démontrer l'existence de

$$\text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu^l} j_\pm e^{-itL_\nu^l} \mathbf{1}^c(L_\nu^l)$$

pour tout  $l$  et nous allons supprimer l'indice  $l$ . Par un argument de densité, il suffit, en utilisant le fait que les valeurs propres de  $L_\nu$  ne peuvent s'accumuler que sur  $S_\nu$ , de démontrer l'existence de

$$\text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} j_\pm e^{-itL_\nu} \chi^2(L_\nu)$$

pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu)))$ . On a

$$(7.2.7) \quad e^{itL_0} j_\pm e^{-itL_\nu} \chi^2(L_\nu) = e^{itL_\nu} [j_\pm, \chi(L_\nu)] e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) + e^{itL_\nu} \chi(L_\nu) j_\pm e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu).$$

D'après le Lemme B.2,  $[j_\pm, \chi(L_\nu)]$  est compact. Comme  $\sigma_{\text{sc}}(L_\nu) = \emptyset$ ,  $\text{supp } \chi \cap \sigma_{\text{pp}}(L_\nu) = \emptyset$  on obtient que  $e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \rightarrow 0$  faiblement, alors

$$[j_\pm, \chi(L_\nu)] e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \rightarrow 0$$

fortement, le premier terme dans (7.2.7) tend alors fortement vers zéro.

Soit  $\widehat{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu)))$  avec  $\chi \widehat{\chi} = \chi$ . On a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \chi(L_\nu) e^{itL_\nu} j_\nu e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \\ &= e^{itL_\nu} \chi(L_\nu) [L_\nu, j_\pm] e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \\ &= (e^{itL_\nu} \chi(L_\nu) \langle B_{\widehat{\chi}, \nu} \rangle^{-1}) \times (\langle B_{\widehat{\chi}, \nu} \rangle \widehat{\chi}(L_\nu) [L_\nu, j_\pm] \widehat{\chi}(L_\nu) \langle B_{\widehat{\chi}, \nu} \rangle) \times (\langle B_{\widehat{\chi}, \nu} \rangle^{-1} \chi(L_\nu) e^{-itL_\nu}) \end{aligned}$$

avec  $\widehat{\chi}$  convenable. Les premier et troisième facteurs sont intégrables par le Théorème 5.7.4, le deuxième est borné grâce au Lemme 7.1.2(ii). Ceci montre l'existence de  $\widetilde{P}_{\pm, \nu}^-$ .

Pour montrer que  $\widetilde{P}_{\pm, \nu}^+$  est indépendant du choix de  $j_\pm$ , il suffit de démontrer

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} \psi e^{-itL_\nu} \mathbf{1}^c(L_\nu) = 0$$

pour tout  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . De nouveau, ceci va suivre de

$$(7.2.8) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} \psi \chi(L_\nu) e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) = 0$$

pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu)))$ . (7.2.8) suit du fait que  $\psi \chi(L_\nu)$  est compact, ce qui suit de  $D(L_\nu) = H^1 \oplus H^1$  et du Lemme 4.4.2. (7.2.4) suit du fait que  $j_\pm^2 - j_\pm$  est à support compact. (7.2.6) suit avec le même raisonnement des Lemmes A.3.3, A.4.4 et B.2. ■

### 7.3. Projections asymptotiques pour $R, R_0, R_\nu$

THÉORÈME 7.3.1. *Soit  $\nu \in \mathcal{N}$ . Les limites fortes*

$$(7.3.1) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR} j_\pm e^{-itR} \mathbf{1}^c(R) =: P_\pm^+,$$

$$(7.3.2) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} j_\pm e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) =: P_{\pm, \nu}^+,$$

existent et elles sont indépendantes du choix de  $j_\pm$ . De plus, on a :

$$(7.3.3) \quad P_\pm^+ = \Omega^+ P_{\pm, 0}^+(\Omega^+)^*,$$

$$(7.3.4) \quad (P_\pm^+)^2 = P_\pm^+, (P_{\pm, \nu}^+)^2 = P_{\pm, \nu}^+,$$

$$(7.3.5) \quad P_+^+ + P_-^+ = \mathbf{1}^c(R), P_{+, \nu}^+ + P_{-, \nu}^+ = \mathbf{1}^c(R_\nu),$$

$$(7.3.6) \quad [R, P_\pm^+] = [R_\nu, P_{\pm, \nu}^+] = 0.$$

*Démonstration.* L'existence de (7.3.1) suit de l'existence de (7.3.2) avec  $\nu = 0$  par le Théorème 6.2.2 et on obtient en même temps la relation d'entrelacement (7.3.3). À partir du Théorème 7.2.1, on obtient immédiatement l'existence des limites fortes

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} U^*(h_\nu) j_\pm U(h_\nu) e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu).$$

Il reste à vérifier que

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} (j_\pm - U^*(h_\nu)j_\pm U(h_\nu)) e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) = 0.$$

Par densité, il suffit de démontrer

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} (U(h_\nu)j_\pm U^*(h_\nu) - j_\nu)\chi(L_\nu) e^{-itL_\nu} = 0$$

pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu)))$ . Il suffit alors de démontrer

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} (U(h_\nu^l)j_\pm U^*(h_\nu^l) - j_\pm)\chi(L_\nu^l) e^{-itL_\nu^l} = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

et nous supprimons l'indice  $l$  à partir de maintenant. Utilisant  $\sigma_{\text{sc}}(L_\nu) = \emptyset$ , ceci va suivre de

$$(U(h_\nu)j_\pm U^*(h_\nu) - j_\pm)\chi(L_\nu) \quad \text{compact pour } \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

ce qui est inclus dans le Lemme 7.1.3. ■

## 8. Complétude asymptotique

Dans ce chapitre, nous allons démontrer la complétude asymptotique en comparant à l'infini positif avec  $L_{(+,i)}$  resp.  $R_{(+,i)}$  et à l'infini négatif avec  $L_{(-,i)}$  resp.  $R_{(-,i)}$ . Soit  $\pi : \{+, -\} \times \{1, 2\} \rightarrow \{+, -\}$  la projection sur la première variable. On pose  $\tilde{P}_{\kappa, \nu}^+ := \tilde{P}_{\pi(\kappa), \nu}^+$  et  $\tilde{P}_\kappa^+ := \tilde{P}_{\pi(\kappa)}^+$  pour  $\kappa \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ ,  $\nu \in \mathcal{N}$ ; les projections  $P_{\kappa, \nu}^+$  etc. sont définies de la même façon.

### 8.1. Dynamiques asymptotiques pour $L_0$

THÉORÈME 8.1.1. *Soit  $\nu \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ . Alors les limites fortes*

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_0} e^{-itL_\nu} \tilde{P}_{\nu, \nu}^+ =: \tilde{\Omega}_{\nu, 0}^+, \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} e^{-itL_0} \tilde{P}_{\nu, 0}^+ =: \tilde{W}_{\nu, 0}^+$$

*existent. De plus, on a :*

$$(8.1.1) \quad \text{Im } \tilde{W}_{\nu, 0}^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(L_\nu),$$

$$(8.1.2) \quad \tilde{W}_{\nu, 0}^+ \tilde{\Omega}_{\nu, 0}^+ = \tilde{P}_{\nu, \nu}^+,$$

$$(8.1.3) \quad \tilde{\Omega}_{\nu, 0}^+ \tilde{W}_{\nu, 0}^+ = \tilde{P}_{\nu, 0}^+,$$

$$(8.1.4) \quad \tilde{P}_{\nu, 0}^+ = \tilde{\Omega}_{\nu, 0}^+ \tilde{P}_{\nu, \nu}^+ \tilde{W}_{\nu, 0}^+,$$

$$(8.1.5) \quad \tilde{\Omega}_{(-,i), 0}^+ \tilde{W}_{(-,i), 0}^+ + \tilde{\Omega}_{(+,i), 0}^+ \tilde{W}_{(+,i), 0}^+ = \mathbf{1} \quad (i = 1, 2).$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue à celle du Théorème 7.2.1, par suite nous serons brefs. Nous commençons par démontrer l'existence de  $\tilde{\Omega}_{\nu, 0}^+$ . Il suffit de démontrer pour tout  $l$  l'existence de

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_0^l} j_\nu e^{-itL_\nu^l} \chi^2(L_\nu^l)$$

pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu^l)))$ . On supprime l'indice  $l$  dans la suite. On a

$$(8.1.6) \quad \begin{aligned} e^{itL_0} j_\nu e^{-itL_\nu} \chi^2(L_\nu) &= e^{itL_0} j_\nu (\chi(L_\nu) - \chi(L_0)) e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \\ &\quad + e^{itL_0} [j_\nu, \chi(L_0)] e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \\ &\quad + e^{itL_0} \chi(L_0) j_\nu e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu). \end{aligned}$$

Utilisant le fait que  $[j_\nu, \chi(L_0)]$  est compact par le Lemme B.2 et que  $j_\nu(\chi(L_0) - \chi(L_\nu))$  est compact par le Lemme B.3, il suffit par le même argument que dans la démonstration du Théorème 7.2.1 de démontrer que le troisième terme dans (8.1.6) possède une limite. Soit  $\widehat{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus (S_\nu \cup \sigma_{\text{pp}}(L_\nu)))$  avec  $\chi \widehat{\chi} = \chi$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \chi(L_0) e^{itL_0} j_\nu e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) &= e^{itL_0} \chi(L_0) (L_0 j_\nu - j_\nu L_\nu) e^{-itL_\nu} \chi(L_\nu) \\ &= (e^{itL_0} \chi(L_0) \langle B_{\widehat{\chi}, 0} \rangle^{-1}) (\langle B_{\widehat{\chi}, 0} \rangle \widehat{\chi}(L_0) (L_0 j_\nu - j_\nu L_\nu) \widehat{\chi}(L_\nu) \langle B_{\widehat{\chi}, \nu} \rangle) \\ &\quad \times (\langle B_{\widehat{\chi}, \nu} \rangle^{-1} \chi(L_\nu) e^{-itL_\nu}) \end{aligned}$$

avec  $\widehat{\chi}$  convenable. Les premier et troisième facteurs sont intégrables par le Théorème 5.7.4, le deuxième est borné grâce au Lemme 7.1.2(i). Ceci montre l'existence de  $\widetilde{\Omega}_{\nu, 0}^+$ . La démonstration de l'existence de  $\widetilde{W}_{\nu, 0}^+$  est analogue.

Montrons maintenant (8.1.1). On a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ &= \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} j_\nu e^{-itL_0} = e^{isL_\nu} \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} j_\nu e^{-itL_0} e^{-isL_0} \\ &= e^{isL_\nu} \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ e^{-isL_0}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\chi(L_\nu) \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ = \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ \chi(L_0), \quad \forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi \geq 0$ ,  $\chi(0) = 1$ ,  $\chi_\varepsilon := \chi((\cdot - \lambda)/\varepsilon)$ . On a

$$\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(L_\nu) \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ = \text{s-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_\varepsilon(L_\nu) \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ = \text{s-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ \chi_\varepsilon(L_0) = \widetilde{W}_{\nu, 0}^+ \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(L_0) = 0,$$

i.e.  $\text{Im } \widetilde{W}_{\nu, 0} \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(L_\nu)$ .

(8.1.2)–(8.1.5) suivent des définitions et de (8.1.1). ■

**8.2. Dynamiques asymptotiques pour  $R_0$ .** Dans cette section, nous allons reformuler le résultat du Théorème 8.1.1 pour les dynamiques  $R_\nu$ . La différence principale avec la situation pour  $L_0$  consiste dans le fait que les  $R_\nu$  agissent sur des espaces d'énergie différents. Rappelons de la Section 4.5 que  $j_\nu$  envoie  $\mathcal{R}_\nu$  dans  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_0$  dans  $\mathcal{R}_\nu$  pour  $\nu \in \{(\pm, 1), 0\}$ . Un tel résultat est beaucoup moins évident pour les projections  $P_{\nu, \nu}^+$  et nécessiterait une analyse détaillée du groupe  $e^{itR_\nu}$ . C'est pourquoi nous avons préféré formuler les résultats de complétude asymptotique à l'aide des troncatures  $j_\nu$  plutôt qu'à l'aide des projections asymptotiques.

**THÉORÈME 8.2.1.** *Soit  $\nu \in \{(\pm, 1), 0\}$ . On a :*

$$(8.2.1) \quad \forall u \in \mathcal{R}_\nu, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0} j_\nu e^{-itR_\nu} u =: \Omega_{\nu, 0}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_0,$$

$$(8.2.2) \quad \forall u \in \mathcal{R}_0, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} j_\nu e^{-itR_0} u =: W_{\nu, 0}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_\nu.$$

$\Omega_{\nu,0}^+$  et  $W_{\nu,0}^+$  sont indépendants du choix de  $j_{\pm}$  et on a :

$$(8.2.3) \quad W_{\nu,0}^+ \Omega_{\nu,0}^+ = P_{\nu,\nu}^+,$$

$$(8.2.4) \quad \Omega_{\nu,0}^+ W_{\nu,0}^+ = P_{\nu,0}^+,$$

$$(8.2.5) \quad P_{\nu,0}^+ = \Omega_{\nu,0}^+ P_{\nu,\nu}^+ W_{\nu,0}^+,$$

$$(8.2.6) \quad \Omega_{(-,1),0}^+ W_{(-,1),0}^+ + \Omega_{(+,1),0}^+ W_{(+,1),0}^+ = \mathbf{1}.$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue à celle du Théorème 7.3.1. Nous avons à démontrer que pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , on a

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad (U(h_\nu^l) j_\nu U^*(h_0^l) - j_\nu) \chi(L_0^l) \text{ est compact,}$$

ce qui suit du Lemme 7.1.3. ■

Pour  $\nu \in \{(-, 2), (+, 2)\}$ , on n'a pas tous les résultats du Théorème 8.2.1 puisque  $j_\nu$  n'envoie pas  $\mathcal{R}_\nu$  dans  $\mathcal{R}_0$ . C'est pourquoi nous introduisons les espaces suivants :

$$\mathcal{R}_\nu^f = \left\{ u \in \mathcal{R}_\nu \mid u = \sum_{f \text{ fini}} u_l, u_l \in \mathcal{L}_l \right\}, \quad \nu \in \mathcal{N}.$$

Alors on a le théorème suivant :

THÉORÈME 8.2.2. *Soit  $\nu \in \{(-, 2), (+, 2)\}$ . Alors, on a :*

$$(8.2.7) \quad \forall u \in \mathcal{R}_\nu^f, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0} j_\nu e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) u =: \Omega_{\nu,0}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_0,$$

$$(8.2.8) \quad \forall u \in \mathcal{R}_0, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} j_\nu e^{-itR_0} u =: W_{\nu,0}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_\nu.$$

On a

$$(8.2.9) \quad \|\Omega_{\nu,0}^+ u\|_{\mathcal{R}_0} \leq \|u\|_{\mathcal{R}_\nu} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{R}_\nu^f$$

et l'opérateur  $\Omega_{\nu,0}^+$  s'étend à un opérateur borné de  $\mathcal{R}_\nu$  dans  $\mathcal{R}_0$ , qu'on appelle de nouveau  $\Omega_{\nu,0}^+$ . Les opérateurs  $\Omega_{\nu,0}^+$ ,  $W_{\nu,0}^+$  sont indépendants du choix de  $j_{\pm}$  et on a :

$$(8.2.10) \quad \text{Im } W_{\nu,0}^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(R_\nu),$$

$$(8.2.11) \quad W_{\nu,0}^+ \Omega_{\nu,0}^+ = P_{\nu,\nu}^+,$$

$$(8.2.12) \quad \Omega_{\nu,0}^+ W_{\nu,0}^+ = P_{\nu,0}^+,$$

$$(8.2.13) \quad P_{\nu,0}^+ = \Omega_{\nu,0}^+ P_{\nu,\nu}^+ W_{\nu,0}^+,$$

$$(8.2.14) \quad \Omega_{(-,2),0}^+ W_{(-,2),0}^+ + \Omega_{(+,2),0}^+ W_{(+,2),0}^+ = \mathbf{1}.$$

*Démonstration.* La démonstration de (8.2.8) est analogue à celle du Théorème 8.2.1. Afin de démontrer (8.2.7), il suffit de démontrer l'existence de

$$(8.2.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0^l} j_\nu e^{-itR_\nu^l} \mathbf{1}^c(R_\nu^l) u_l$$

dans  $\mathcal{R}_0^l$  pour tout  $u_l \in \mathcal{R}_\nu^l$  et la démonstration de (8.2.15) est également analogue à celle du Théorème 8.2.1. Afin de démontrer (8.2.9), on utilise que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0} j_\nu e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) u = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_0} U^*(h_0) j_\nu U(h_\nu) e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) u$$

pour tout  $u \in \mathcal{R}_\nu^f$  et qu'on a clairement

$$\|e^{itR_0} U^*(h_0) j_\nu U(h_\nu) e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) u\|_{\mathcal{R}_0} \leq \|u\|_{\mathcal{R}_\nu}, \quad \forall u \in \mathcal{R}_\nu. \quad \blacksquare$$

**8.3. Dynamiques asymptotiques pour  $L$ .** On obtient les dynamiques asymptotiques pour  $L$  à partir des dynamiques asymptotiques pour  $L_0$  en utilisant le Théorème 6.2.1, la règle de la chaîne et la propriété d'entrelacement entre  $\tilde{P}_\pm^+$  et  $\tilde{P}_{\pm,0}^+$ .

THÉORÈME 8.3.1. *Soit  $\nu \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ . Alors les limites fortes*

$$\text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itL} e^{-itL_\nu} \tilde{P}_{\nu,\nu}^+ =: \tilde{\Omega}_\nu^+, \quad \text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itL_\nu} e^{-itL} \tilde{P}_\nu^+ =: \tilde{W}_\nu^+$$

*existent. De plus, on a :*

$$(8.3.1) \quad \text{Im } \tilde{W}_\nu^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(L_\nu), \quad \text{Im } \tilde{\Omega}_\nu^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(L),$$

$$(8.3.2) \quad \tilde{W}_\nu^+ \tilde{\Omega}_\nu^+ = \tilde{P}_{\nu,\nu}^+,$$

$$(8.3.3) \quad \tilde{\Omega}_\nu^+ \tilde{W}_\nu^+ = \tilde{P}_\nu^+,$$

$$(8.3.4) \quad \tilde{P}_\nu^+ = \tilde{\Omega}_\nu^+ \tilde{P}_{\nu,\nu}^+ \tilde{W}_\nu^+,$$

$$(8.3.5) \quad \tilde{\Omega}_{(-,i)}^+ \tilde{W}_{(-,i)}^+ + \tilde{\Omega}_{(+,i)}^+ \tilde{W}_{(+,i)}^+ = \mathbf{1}^c(L) \quad (i = 1, 2).$$

**8.4. Dynamiques asymptotiques pour  $R$ .** On obtient les dynamiques asymptotiques pour  $R$  à partir des dynamiques asymptotiques pour  $R_0$  en utilisant le Théorème 6.2.2 et la règle de la chaîne.

THÉORÈME 8.4.1. *Soit  $\nu \in \{(\pm, 1), 0\}$ . On a :*

$$(8.4.1) \quad \forall u \in \mathcal{R}_\nu, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR} j_\nu e^{-itR_\nu} u =: \Omega_\nu^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R},$$

$$(8.4.2) \quad \forall u \in \mathcal{R}, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} j_\nu e^{-itR} \mathbf{1}^c(R) u =: W_\nu^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_\nu.$$

$\Omega_\nu^+, W_\nu^+$  sont indépendants du choix de  $j_\pm$  et on a :

$$(8.4.3) \quad \text{Im } \Omega_\nu^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(R),$$

$$(8.4.4) \quad W_\nu^+ \Omega_\nu^+ = P_{\nu,\nu}^+,$$

$$(8.4.5) \quad \Omega_\nu^+ W_\nu^+ = P_\nu^+,$$

$$(8.4.6) \quad P_\nu^+ = \Omega_\nu^+ P_{\nu,\nu}^+ W_\nu^+,$$

$$(8.4.7) \quad \Omega_{(-,1)}^+ W_{(-,1)}^+ + \Omega_{(+,1)}^+ W_{(+,1)}^+ = \mathbf{1}^c(R).$$

THÉORÈME 8.4.2. *Soit  $\nu \in \{(\pm, 2)\}$ . Alors on a :*

$$(8.4.8) \quad \forall u \in \mathcal{R}_\nu^f, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR} j_\nu e^{-itR_\nu} \mathbf{1}^c(R_\nu) u =: \Omega_\nu^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R},$$

$$(8.4.9) \quad \forall u \in \mathcal{R}, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_\nu} j_\nu e^{-itR} \mathbf{1}^c(R) u =: W_\nu^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_\nu.$$

On a

$$(8.4.10) \quad \|\Omega_\nu^+ u\|_{\mathcal{R}} \leq \|u\|_{\mathcal{R}_\nu} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{R}_\nu^f$$

et l'opérateur  $\Omega_\nu^+$  s'étend à un opérateur borné de  $\mathcal{R}_\nu$  dans  $\mathcal{R}$ , qu'on appelle de nouveau  $\Omega_\nu^+$ . Les opérateurs  $\Omega_\nu^+, W_\nu^+$  sont indépendants du choix de  $j_\pm$  et on a :

$$(8.4.11) \quad \text{Im } W_\nu^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(R_\nu), \quad \text{Im } \Omega_\nu^+ \subset \text{Im } \mathbf{1}^c(R),$$

$$(8.4.12) \quad W_\nu^+ \Omega_\nu^+ = P_{\nu,\nu}^+,$$

$$(8.4.13) \quad \Omega_\nu^+ W_\nu^+ = P_\nu^+,$$

$$(8.4.14) \quad P_\nu^+ = \Omega_\nu^+ P_{\nu,\nu}^+ W_\nu^+,$$

$$(8.4.15) \quad \Omega_{(-,2)}^+ W_{(-,2)}^+ + \Omega_{(+,2)}^+ W_{(+,2)}^+ = \mathbf{1}^c(R).$$

**8.5. Dynamique de Dollard.** Dans cette section, nous établissons un résultat de complétude asymptotique pour un problème à longue portée qui va servir dans le Chapitre 9. Soient  $\theta_0$  comme dans la Section 3.4 et  $c > 0$  tels que

$$c + \frac{c_2}{|s|} \theta_0(s) \geq \frac{c}{2} > 0.$$

On considère les hamiltoniens

$$H^l := D_s^2 + c + \frac{c_2}{|s|} \theta_0(s), \quad D(H^l) = H^2(\mathbb{R}),$$

$$H_0^l := D_s^2 + c, \quad D(H_0^l) = H^2(\mathbb{R}).$$

Les hamiltoniens  $H, H_0$  sont définis à partir de  $H^l, H_0^l$  comme nous l'avons expliqué dans la Section 4.1. On pose

$$V(s) := \frac{c_2}{|s|} \theta_0(s).$$

Soit  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g(\xi) d\xi.$$

On pose

$$\mathcal{L}_{l,\infty} = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{L}_l \mid \mathcal{F}f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})\}.$$

On définit

$$X(t) := it\sqrt{D_s^2 + c} + \frac{i}{2} \ln t \frac{c_2}{|D_s|}, \quad U_D^l(t) := \exp \begin{pmatrix} -X(t) & 0 \\ 0 & X(t) \end{pmatrix}.$$

$U_D^l(t)$  est bien défini sur  $\mathcal{L}_{l,\infty}$  et on a

$$(8.5.1) \quad \forall f \in \mathcal{L}_{l,\infty}, \quad \|U_D^l(t)\|_{\mathcal{L}_l} = \|f\|_{\mathcal{L}_l}.$$

$\mathcal{L}_{l,\infty}$  étant dense dans  $\mathcal{L}_l$ ,  $U_D^l(t)$  s'étend à une application unitaire sur  $\mathcal{L}_l$  que nous notons de nouveau  $U_D^l(t)$ . En utilisant de nouveau (8.5.1), on obtient que  $U_D(t) = \bigoplus_l U_D^l(t)$  définit une application unitaire sur  $\mathcal{L}$ . On pose

$$L_H := \begin{pmatrix} H^{1/2} & 0 \\ 0 & -H^{1/2} \end{pmatrix}, \quad D(L_H) = D(H^{1/2}) \oplus D(H^{1/2}).$$

$L_{H^l}$  est défini de façon analogue. On obtient :

**THÉORÈME 8.5.1.** *Les limites fortes*

$$(8.5.2) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itL_H} U_D(t),$$

$$(8.5.3) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U_D(-t) e^{-itL_H} \mathbf{1}^c(L_H)$$

existent. Si (8.5.2) est égale à  $\Omega_{\text{lr}}^+$ , alors (8.5.3) est égale à  $(\Omega_{\text{lr}}^+)^*$  et on a

$$\Omega_{\text{lr}}^+ (\Omega_{\text{lr}}^+)^* = \mathbf{1}^c(L_H), \quad (\Omega_{\text{lr}}^+)^* \Omega_{\text{lr}}^+ = \mathbf{1}.$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer le théorème pour les restrictions à  $\mathcal{L}_l$  et nous allons supprimer l'indice  $l$ . Nous allons utiliser [Ki2, Theorem 1.5], [Ki2, Theorem 1.6] et [Ki1, Lemma 2.6] avec  $\phi(\tau) = (\tau + c)^{1/2}$ . On obtient l'existence des limites fortes

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\phi(\widehat{H})} e^{-it\phi(\widehat{H}_0) - iS_\phi(t, D_s)}, \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\phi(\widehat{H}_0) + iS_\phi(t, D_s)} e^{-it\phi(\widehat{H})} \mathbf{1}^c(\widehat{H}),$$

où  $\widehat{H} = H - c$ ,  $\widehat{H}_0 = H_0 - c$  et

$$S_\phi(t, \xi) = \int_0^{t\phi'(|\xi|^2)} V(2s\xi) ds.$$

On calcule

$$S_\phi(t, \xi) = \int_0^{t(\xi^2 + c)^{-1/2}/2} c_2 \theta_0(2s\xi) \frac{ds}{|2s\xi|} = \frac{c_2}{2|\xi|} \ln t + r(t, \xi), \quad \text{où } r(t, \xi) = r(\xi), t > T(\xi),$$

et  $r(\xi)$  est une fonction réelle. Ceci donne le théorème. ■

## 9. Application à la métrique de Kerr

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les résultats des chapitres précédents à l'équation de Klein–Gordon dans la métrique de Kerr.

**9.1. La métrique de Kerr.** La métrique de Kerr décrit des trous noirs en rotation. Sa forme explicite est donnée sur  $\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r^+ \times S^2$  par

$$(9.1.1) \quad ds^2 = \varrho^2 \frac{\Lambda}{\Sigma^2} dt^2 - \frac{\Sigma^2}{\varrho^2} \left( d\phi - \frac{2aMr}{\Sigma^2} dt \right)^2 \sin^2 \theta - \frac{\varrho^2}{\Lambda} dr^2 - \varrho^2 d\theta^2,$$

où

$$(9.1.2) \quad \varrho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$(9.1.3) \quad \Lambda = r^2 + a^2 - 2Mr,$$

$$(9.1.4) \quad \Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Lambda \sin^2 \theta.$$

On peut interpréter  $M$  comme la masse du trou noir et  $J = aM$  comme son moment angulaire. Nous considérons ici le cas de l'espace-temps de Kerr à rotation lente, i.e.  $a^2 < M^2$ . Dans ce cas, la métrique de Kerr possède deux horizons qui sont donnés par

$$\Lambda = 0, \quad \text{i.e. } r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}, \quad r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}.$$

Pour la suite on va considérer uniquement la métrique de Kerr extérieure, i.e. la région  $r > r_+$ . Un aspect particulier de la métrique de Kerr est l'existence d'une ergosphère qui est donnée par

$$r_+ < r < r_e(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}.$$

À l'intérieur de l'ergosphère, le champ  $\partial/\partial t$  devient de type espace. Nous insistons ici sur le fait que la métrique de Kerr extérieure n'est pas stationnaire, i.e. il n'y a pas de champ de Killing global de type temps (voir [HE]). On trouvera une discussion détaillée de la métrique de Kerr par exemple dans [HE], [ON] ou [W].



**9.2. L'équation de Klein–Gordon associée.** Pour une métrique générale le d'Alembertien associé à la métrique peut être calculé dans une base de coordonnées locales par la formule

$$\square_g = |g|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( |g|^{1/2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right), \quad |g| = \det(g_{\alpha\beta}).$$

Pour la métrique de Kerr, on obtient

$$|g| = \varrho^4 \sin^2 \theta.$$

L'équation de Klein–Gordon, qui décrit un champ scalaire de masse  $m$ , est alors donnée par

$$\begin{aligned} (\square + m^2)f &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\Sigma^2}{\varrho^2 \Lambda} \partial_t^2 f + \frac{4aMr}{\varrho^2 \Lambda} \partial_\phi \partial_t f - \frac{\Lambda - a^2 \sin^2 \theta}{\varrho^2 \Lambda \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 f - \frac{1}{\varrho^2} \partial_r (\Lambda \partial_r f) \\ &\quad - \frac{1}{\varrho^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + m^2 f = 0 \\ \Leftrightarrow \partial_t^2 f - \frac{\Lambda}{\Sigma^2} (\partial_r (\Lambda \partial_r f) + \Delta_{S^2} f) + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} f + \frac{4aMr}{\Sigma^2} \partial_\phi \partial_t f + \frac{a^2}{\Sigma^2} \partial_\phi^2 f &= 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé que le Laplacien sur la sphère est donné en coordonnées sphériques par

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2.$$

Dans toute la suite nous supposons  $m > 0$ . Soient

$$c_+ := \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-}, \quad c_- := \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-}.$$

Nous introduisons maintenant une coordonnée de type Regge–Wheeler qui est donnée par

$$s = r + c_+ \ln |r - r_+| - c_- \ln |r - r_-|,$$

ce qui entraîne

$$\partial_s = \frac{\Lambda}{r^2 + a^2} \partial_r \quad (\text{voir [Ch]}).$$

$r$  est alors une fonction implicite de  $s$ . Dans toute la suite, un prime va désigner une dérivée par rapport à  $s$ . L'équation de Klein–Gordon devient

$$(9.2.1) \quad \left( \partial_t^2 + \frac{4aMr}{\Sigma^2} \partial_\phi \partial_t - \frac{r^2 + a^2}{\Sigma^2} \partial_s (r^2 + a^2) \partial_s - \frac{\Lambda}{\Sigma^2} \Delta_{S^2} + \frac{a^2}{\Sigma^2} \partial_\phi^2 + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \right) f = 0.$$

On pose ensuite

$$\tilde{\mathcal{H}} := L^2 \left( \mathbb{R} \times S_\omega^2, \frac{\Sigma^2}{r^2 + a^2} ds d\omega \right), \quad \mathcal{H} := L^2(\mathbb{R} \times S_\omega^2 ds d\omega),$$

où  $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ,

$$\mathcal{U} : \tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}, \quad f \mapsto \frac{\Sigma}{\sqrt{r^2 + a^2}} f.$$

Si  $f$  vérifie (9.2.1), alors  $u := \mathcal{U}f$  vérifie

$$(KG) \quad \left( \partial_t^2 + \frac{4aMr}{\Sigma^2} \partial_\phi \partial_t - \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s (r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \Delta_{S^2} \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} + \frac{a^2}{\Sigma^2} \partial_\phi^2 + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \right) u = 0.$$

On peut écrire l'équation de Klein–Gordon sous la forme

$$(9.2.2) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - 2ik \partial_t u + hu = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1, \end{cases}$$

où  $h$  et  $k$  sont des opérateurs symétriques sur  $\mathcal{H}$ . Comme on l'a déjà indiqué dans l'introduction, l'opérateur  $h$  n'est pas positif. Par conséquent, l'énergie conservée de l'équation de Klein–Gordon dans la métrique de Kerr n'est pas positive, et le flot associé ne peut pas être considéré comme un groupe unitaire sur un espace de Hilbert. Ce phénomène est directement lié à l'existence d'une ergosphère. Il est d'ailleurs intéressant de noter qu'un “Gedankenexperiment” imaginé par Penrose (voir par exemple [W, Section 12.4]) reposant sur l'existence de l'ergosphère montre qu'il est possible d'extraire de l'énergie (dans le cadre de la mécanique classique) d'un trou noir de Kerr.

**9.3. Dynamiques asymptotiques.** Dans cette section, nous allons décrire les équations qui décrivent les dynamiques asymptotiques. On pose  $\sigma := 1/c_+$ . Notons que

$$\Lambda = (r(s) - r_-)^{c_-/c_+ + 1} e^{\sigma(s-r(s))}.$$

On pose

$$g_-(s) := \frac{(r_+ - r_-)^{c_-/c_+ + 1} e^{-\sigma(\theta_0(s)|s|+r_+)}}{(r_+^2 + a^2)^2},$$

$$f_{(-,1)}(s) := \frac{(r_+ - r_-)^{c_-/c_+ + 1} e^{-\sigma(|s|\theta_0(s)+r_+)} m^2 r_+^2}{4M^2 r_+^2}.$$

Soient  $\theta_0, \theta_+$  comme dans la Section 3.4. Nous allons considérer les équations suivantes :

$$(KG(-,1)) \quad \begin{cases} \left( \partial_t^2 + \frac{2a}{r_+^2 + a^2} \partial_\phi \partial_t - \partial_s^2 - g_-(s) \Delta_{S^2} + f_{(-,1)}(s) + \frac{a^2}{(r_+^2 + a^2)^2} \partial_\phi^2 \right) u_- = 0, \\ u_-|_{t=0} = u_{-,0}, \\ \partial_t u_-|_{t=0} = u_{-,1}, \end{cases}$$

$$(KG(-,2)) \quad \begin{cases} \left( \partial_t^2 + \frac{2a}{r_+^2 + a^2} \partial_\phi \partial_t - \partial_s^2 + \frac{a^2}{(r_+^2 + a^2)^2} \partial_\phi^2 \right) u_- = 0, \\ u_-|_{t=0} = u_{-,0}, \\ \partial_t u_-|_{t=0} = u_{-,1}, \end{cases}$$

$$(\text{KG}_{(+,1)}) \quad \begin{cases} \left( \partial_t^2 - \partial_s^2 - \theta_0(s) \frac{1}{|s|^2} \Delta_{S^2} + \theta_+(s) \left( \frac{m^2}{2} - \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s) \right) + \frac{m^2}{2} \right. \\ \quad \left. + (\theta_+(s) - 1) \frac{a^2}{2(r_+^2 + a^2)^2} \partial_\phi^2 \right) u_+ = 0, \\ u_+|_{t=0} = u_{+,0}, \\ \partial_t u_+|_{t=0} = u_{+,1}, \end{cases}$$

$$(\text{KG}_{(+,2)}) \quad \begin{cases} \left( \partial_t^2 - \partial_s^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s) \right) u_+ = 0, \\ u_+|_{t=0} = u_{+,0}, \\ \partial_t u_+|_{t=0} = u_{+,1}, \end{cases}$$

$$(\text{KG}_0) \quad \begin{cases} \left( \partial_t^2 + \frac{4aMr}{(r^2 + a^2)^2} \partial_\phi \partial_t - \partial_s^2 - \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \Delta_{S^2} + \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \partial_\phi^2 \right. \\ \quad \left. + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \right) v = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \\ \partial_t v|_{t=0} = v_1. \end{cases}$$

$$(\text{KG}) \quad \begin{cases} \left( \partial_t^2 + \frac{4aMr}{\Sigma^2} \partial_\phi \partial_t - \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s (r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \right. \\ \quad \left. - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \Delta_{S^2} \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} + \frac{a^2}{\Sigma^2} \partial_\phi^2 + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \right) u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

Les équations  $(\text{KG}_{(-,1)})$  et  $(\text{KG}_{(-,2)})$  décrivent la dynamique près de l'horizon, les équations  $(\text{KG}_{(+,1)})$  et  $(\text{KG}_{(+,2)})$  décrivent la dynamique à l'infini.  $(\text{KG}_0)$  décrit une dynamique intermédiaire à symétrie sphérique.  $(\text{KG})$  est l'équation de Klein–Gordon. Rappelons à cet endroit que la troncature  $\theta_+$  dans  $(\text{KG}_{(+,1)})$  sert uniquement à éviter la création d'états liés. Près de l'infini, cette équation devient

$$\left( \partial_t^2 - \partial_s^2 - \theta_0(s) \frac{1}{|s|^2} \Delta_{S^2} + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s) \right) u_+ = 0.$$

**9.4. Résultats d'existence et d'unicité.** Dans cette section, nous allons démontrer des résultats d'existence et d'unicité pour les équations de la Section 9.3. On va décrire un cadre général dans lequel toutes ces équations vont entrer.

Soient  $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathbb{R}_s \times S_w^2$  et  $\tilde{h}$  et  $\tilde{k}$  deux opérateurs différentiels symétriques d'ordre 2 et 1 respectivement sur  $C_0^\infty(\widetilde{\mathcal{M}})$ . On considère l'équation suivante :

$$(9.4.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - 2i\tilde{k}\partial_t + \tilde{h})u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

Nous allons faire les hypothèses suivantes sur  $\tilde{h}, \tilde{k}$  :

$$(9.4.2) \quad \tilde{h} + \tilde{k}^2 \geq 0 \text{ au sens des formes quadratiques sur } C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}}),$$

on note l'extension de Friedrichs  $(\tilde{h} + \tilde{k}^2, D(\tilde{h} + \tilde{k}^2))$ ,

$$(9.4.3) \quad \pm[\tilde{h}, i\tilde{k}] \leq C(\tilde{h} + \tilde{k}^2) \text{ au sens des formes quadratiques sur } C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}}),$$

$$(9.4.4) \quad 0 \notin \sigma_{\text{pp}}(\tilde{h} + \tilde{k}^2).$$

(9.4.2) est la condition que l'équation (9.4.1) est hyperbolique. (9.4.3) va assurer des estimations a priori. Ces deux conditions sont de nature géométrique. (9.4.4) est nécessaire pour définir une norme d'énergie, qui est égale à la norme d'énergie de la Section 2.1 dans le cas  $\tilde{k} = 0$ . Néanmoins, on peut établir un résultat d'existence et d'unicité aussi sans la condition (9.4.4) (quitte à changer la norme d'énergie). Nous définissons l'échelle d'espaces d'énergie de la façon suivante. On pose

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{h} & 2i\tilde{k} \end{pmatrix}.$$

Pour  $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}}) \times C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}})$ , on pose

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}}^2 = \|u_1 - i\tilde{k}u_0\|^2 + ((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_0).$$

L'espace  $\mathcal{E}^k$  est défini comme le complété de  $C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}}) \times C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}})$  pour la norme

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}^k}^2 = \sum_{i=0}^k \|E^i(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}}^2.$$

La condition (9.4.4) assure que  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^k}$  définit bien une norme. On écrit souvent  $\mathcal{E}$  au lieu de  $\mathcal{E}^0$  et on désigne le dual de  $\mathcal{E}^k$  par  $\mathcal{E}^{-k}$ .

Avant de démontrer des estimations d'énergie, nous voulons expliquer comment l'énergie  $\mathcal{E}$  intervient de façon naturelle dans le problème. Pour ceci, nous allons transformer (9.4.1) en une équation de type

$$(9.4.5) \quad (\partial_t^2 + h(t))v = 0$$

avec  $h(t) \geq 0$ . Considérons une transformation unitaire  $v = e^{ict}u$ ,  $u$  solution de (9.4.1). Alors, on a

$$\partial_t v = ice^{ict}u + e^{ict}\partial_t u,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} e^{ict}\partial_t u &= \partial_t v - icv, \\ \partial_t^2 v &= -c^2 v + 2ic(\partial_t v - icv) + e^{ict}(2i\tilde{k}\partial_t u - \tilde{h}u) \\ &= c^2 v + 2i(c\partial_t v + e^{ict}\tilde{k}e^{-ict}(\partial_t v - icv)) - e^{ict}\tilde{h}e^{-ict}v \\ &= e^{ict}(c^2 + 2\tilde{k}c - \tilde{h})e^{-ict}v + 2ie^{ict}(c + \tilde{k})e^{-ict}\partial_t v. \end{aligned}$$

Si l'on pose  $c = -\tilde{k}$ , alors  $v$  vérifie (9.4.5) avec

$$h(t) = e^{-i\tilde{k}t}(\tilde{h} + \tilde{k}^2)e^{i\tilde{k}t}.$$

L'énergie naturelle associée à l'équation (9.4.5) est égale à

$$\|v\|_{\mathcal{I}}^2 = \|\partial_t v\|^2 + (h(t)v, v).$$

On obtient l'énergie  $\mathcal{E}$  en réécrivant l'énergie  $\mathcal{T}$  pour  $u$ . On pose

$$P := \partial_t - E.$$

On a l'estimation d'énergie a priori suivante :

LEMME 9.4.1. *Soit  $u \in C([0, T]; \mathcal{E}^{i+1}) \cap C^1([0, T]; \mathcal{E}^i)$ . Alors,*

$$(9.4.6) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{\mathcal{E}^i}^2 \leq C \left( \|u(0)\|_{\mathcal{E}^i}^2 + \int_0^T \|Pu\|_{\mathcal{E}^i}^2 dt \right).$$

*Démonstration.* Nous affirmons d'abord que pour  $(u_0, u_1) \in \mathcal{E}^1$ , on a

$$(9.4.7) \quad 2 \operatorname{Re}(-\tilde{h}u_0 + i\tilde{k}u_1, u_1 - i\tilde{k}u_0) + 2 \operatorname{Re}((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_1) \leq C((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_0).$$

En effet, les deux côtés sont continus pour la norme  $\mathcal{E}^1$  et il suffit alors de démontrer

(9.4.7) pour  $(u_0, u_1) \in C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}}) \times C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}})$  :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(-\tilde{h}u_0 + i\tilde{k}u_1, u_1 - i\tilde{k}u_0) + 2 \operatorname{Re}((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_1) &= -2 \operatorname{Im}(\tilde{h}u_0, \tilde{k}u_0) = [\tilde{h}, i\tilde{k}](u_0, u_0) \\ &\leq C((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_0), \end{aligned}$$

où on a utilisé (9.4.3).

Soit  $u(t) = (u_0(t), u_1(t))$ . On traite d'abord le cas  $i = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathcal{E}}^2 &= 2 \operatorname{Re}(\partial_t u_1 - i\tilde{k}\partial_t u_0, u_1 - i\tilde{k}u_0) + 2 \operatorname{Re}((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, \partial_t u_0) \\ &= 2 \operatorname{Re}(-\tilde{h}u_0 + i\tilde{k}u_1 + (Pu)_1 - i\tilde{k}(Pu)_0, u_1 - i\tilde{k}u_0) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_1 + (Pu)_0) \\ &\leq C((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, u_0) + 2 \operatorname{Re}((Pu)_1 - i\tilde{k}(Pu)_0, u_1 - i\tilde{k}u_0) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}((\tilde{h} + \tilde{k}^2)u_0, (Pu)_0) \\ &\leq C(\|u\|_{\mathcal{E}}^2 + \|Pu\|_{\mathcal{E}}^2), \end{aligned}$$

où on a utilisé (9.4.7). Ceci donne l'estimation pour  $i = 0$  grâce au lemme de Gronwall. Les autres estimations suivent par récurrence en utilisant que  $P$  commute avec  $E$ . ■

Nous pouvons alors démontrer un résultat d'existence et d'unicité :

THÉORÈME 9.4.2. *Soient  $f \in L^2([0, T]; \mathcal{E}^i)$  et  $g \in \mathcal{E}^i$ . Alors il existe une solution unique  $u \in C([0, T]; \mathcal{E}^i)$  de*

$$(9.4.8) \quad \begin{cases} (\partial_t - E)u = f, \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$$

et  $u(t)$  vérifie (9.4.6).

*Démonstration.* Montrons d'abord l'unicité. Soient  $f = 0$  et  $g = 0$ . On a

$$\partial_t u = Eu \in C([0, T]; \mathcal{E}^{i-1}), \quad \text{i.e.} \quad u \in C^1([0, t]; \mathcal{E}^{i-1}) \cap C([0, T]; \mathcal{E}^i)$$

et  $u$  vérifie alors (9.4.6) avec  $i$  remplacé par  $i - 1$ , ce qui donne l'unicité.

Montrons maintenant l'existence. Si  $u$  est solution de (9.4.8) et

$$v \in \mathcal{A} = C_0^\infty(\{t, (s, \phi, \theta)\}, t < T) \times C_0^\infty(\{t, (s, \phi, \theta)\}, t < T),$$

alors

$$(9.4.9) \quad \int_0^T (u, -\partial_t v + E^* v)_\mathcal{E} dt = \int_0^T (f, v)_\mathcal{E} dt + (g, v(0))_\mathcal{E}.$$

Si l'on remplace  $t$  par  $T - t$  et  $P$  par  $P^*$ , alors on obtient grâce au Lemme 9.4.1 :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_{\mathcal{E}^{-i}}^2 \leq C \int_0^T \|P^* v\|_{\mathcal{E}^{-i}}^2 dt.$$

Il suit

$$(9.4.10) \quad \left| \int_0^T (f, v)_\mathcal{E} dt + (g, v(0))_\mathcal{E} \right| \leq C \left( \int_0^T \|P^* v\|_{\mathcal{E}^{-i}}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Sur  $P^* \mathcal{A}$  on considère la forme linéaire

$$P^* v \mapsto \int_0^T (f, v)_\mathcal{E} dt + (g, v(0))_\mathcal{E}.$$

Grâce à (9.4.10) cette forme est bien définie sur  $P^* \mathcal{A}$  et elle est continue pour la norme  $L^2([0, T]; \mathcal{E}^{-i})$ . Nous pouvons l'étendre par le Théorème de Hahn–Banach et nous obtenons  $u \in L^2([0, T]; \mathcal{E}^i)$  tel que

$$\int_0^T (u, P^* v)_\mathcal{E} dt = \int_0^T (f, v)_\mathcal{E} dt + (g, v(0))_\mathcal{E}$$

si  $v \in \mathcal{A}$ . Donc

$$\partial_t u - Eu = f$$

au sens des distributions sur  $]0, T[ \times \widetilde{\mathcal{M}}$ . On a

$$\partial_t u \in L^2([0, T]; \mathcal{E}^{i-1})$$

et donc

$$u \in H^1([0, T]; \mathcal{E}^{i-1}) \hookrightarrow C([0, T]; \mathcal{E}^{i-1}).$$

Nous allons vérifier que  $u(0) = g$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T (f, v)_\mathcal{E} dt + (g, v(0))_\mathcal{E} &= \int_0^T (u, P^* v)_\mathcal{E} dt \\ &= \int_0^T (Pu, v)_\mathcal{E} dt - (u(T), v(T))_\mathcal{E} + (u(0), v(0))_\mathcal{E} \\ &= \int_0^T (Pu, v)_\mathcal{E} dt + (u(0), v(0))_\mathcal{E} \end{aligned}$$

pour tout  $v \in \mathcal{A}$ . On a déjà vu que  $Pu = f$  au sens des distributions si  $0 < t < T$ . Il suit que

$$(u(0), v(0))_\mathcal{E} = (g, v(0))_\mathcal{E}$$

pour tout  $v \in \mathcal{A}$  et alors  $u(0) = g$ .

Soit  $\mathcal{E}^\infty = \bigcap_k \mathcal{E}^k$  et supposons pour un moment

$$f \in C^\infty([0, T]; \mathcal{E}^\infty), \quad g \in \mathcal{E}^\infty.$$

Alors on obtient  $u \in C^\infty([0, T]; \mathcal{E}^\infty)$ . Soient maintenant  $f_j \in C^\infty([0, T]; \mathcal{E}^\infty)$ ,  $g_j \in \mathcal{E}^\infty$  avec

$$f_j \rightarrow f \quad \text{dans } L^2([0, T]; \mathcal{E}^i), \quad g_j \rightarrow g \quad \text{dans } \mathcal{E}^i$$

et  $u_j$  la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u_j - E u_j = f_j, \\ u_j|_{t=0} = g_j, \end{cases}$$

qu'on vient de construire. Grâce à (9.4.6),  $u_j$  est une suite de Cauchy dans  $C([0, T]; \mathcal{E}^i)$ ; soit  $\tilde{u} \in C([0, T]; \mathcal{E}^i)$  tel que

$$u_j \rightarrow \tilde{u} \quad \text{dans } C([0, T]; \mathcal{E}^i).$$

De nouveau par (9.4.6) :

$$u_j \rightarrow u \quad \text{dans } C([0, T]; \mathcal{E}^{i-1}),$$

i.e.  $\tilde{u} = u$ . ■

Nous allons maintenant vérifier les hypothèses pour les équations de la Section 9.3. Soit  $\mathcal{N}$  comme dans la Section 3.4. Nous écrivons l'équation (KG) sous la forme

$$(\partial_t^2 - 2i\tilde{k} + \tilde{h})u = 0$$

et les équations (KG $_\nu$ ),  $\nu \in \mathcal{N}$ , sous la forme

$$(\partial_t^2 - 2i\tilde{k}_\nu + \tilde{h}_\nu)u = 0,$$

ce qui définit les opérateurs  $\tilde{h}, \tilde{k}, \tilde{h}_\nu, \tilde{k}_\nu$ .

LEMME 9.4.3. *Les couples  $(\tilde{h}, \tilde{k})$  et  $(\tilde{h}_\nu, \tilde{k}_\nu)$ ,  $\nu \in \mathcal{N}$ , vérifient les hypothèses (9.4.2)–(9.4.4).*

*Démonstration.* Commençons avec  $(\tilde{h}, \tilde{k})$ . On a au sens des opérateurs sur  $C_0^\infty(\tilde{\mathcal{M}})$  :

$$\begin{aligned} \tilde{h} + \tilde{k}^2 &= -\frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s (r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \\ &\quad - \left( \frac{\Lambda}{\Sigma^2 \sin^2 \theta} + \frac{4a^2 M^2 r^2}{\Sigma^4} - \frac{a^2}{\Sigma^2} \right) \partial_\phi^2 + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2}. \end{aligned}$$

Pour démontrer que  $(\tilde{h}, \tilde{k})$  vérifie (9.4.2), il suffit alors de démontrer que

$$(9.4.11) \quad \tilde{f}(r, \theta) = \frac{\Lambda}{\Sigma^2 \sin^2 \theta} + \frac{4a^2 M^2 r^2}{\Sigma^4} - \frac{a^2}{\Sigma^2} \geq 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} (9.4.12) \quad \tilde{f}(r, \theta) &= \frac{1}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} (\Lambda \Sigma^2 + 4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta - a^2 \Sigma^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} (\Lambda \Sigma^2 + 4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta \\ &\quad - a^2 ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Lambda \sin^2 \theta) \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} (\Lambda \Sigma^2 - a^2 \sin^2 \theta \Lambda (r^2 + a^2 + 2Mr) + a^4 \Lambda \sin^4 \theta) \\
&= \frac{\Lambda}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Lambda \sin^2 \theta \\
&\quad - a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2 + 2Mr) + a^4 \sin^4 \theta) \\
&= \frac{\Lambda}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} ((r^2 + a^2)^2 - 2a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2) + a^4 \sin^4 \theta) \\
&= \frac{\Lambda}{\Sigma^4 \sin^2 \theta} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne en particulier (9.4.11). (9.4.4) est clairement vérifiée, vérifions alors (9.4.3). Nous utilisons les mêmes symboles que dans le Chapitre 3 ( $\sigma = 1/c_+$ ) :

$$f \in \mathbf{S}^{m,n} \quad \text{ssi} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \partial_s^\alpha \partial_\theta^\beta f \in \begin{cases} O(\langle s \rangle^{m-\alpha}), & s \rightarrow \infty, \\ O(e^{n\sigma|s|}), & s \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Soit  $p(s) = 2aMr/\Sigma^2$ . On a au sens des formes quadratiques sur  $C_0^\infty(\widetilde{\mathcal{M}})$  :

$$[i\widetilde{k}, \widetilde{h}] = \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s \sqrt{r^2 + a^2} \widetilde{p} \partial_\phi + \text{h.c.}, \quad \text{où} \quad \widetilde{p} = \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} p'.$$

Donc

$$\pm [i\widetilde{k}, \widetilde{h}] \leq -\frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s (r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} - |\widetilde{p}|^2 \partial_\phi^2.$$

On a  $p' \in \mathbf{S}^{-4,-1}$  et donc  $\widetilde{p} \in \mathbf{S}^{-4,-1}$ . D'autre part, on a  $\widetilde{f}(r, \theta) > 0$  et

$$\widetilde{f}(r, \theta) \geq \begin{cases} C e^{\sigma s}, & s \rightarrow -\infty, \\ C \langle r \rangle^{-2}, & s \rightarrow \infty. \end{cases}$$

(9.4.3) est alors vérifiée.

Vérifions alors maintenant les hypothèses pour  $(\widetilde{h}_0, \widetilde{k}_0)$ . Le raisonnement est le même que pour  $(\widetilde{h}, \widetilde{k})$ . (9.4.2) est vérifiée puisque

$$\begin{aligned}
(9.4.13) \quad \widetilde{f}_1(r, \theta) &= \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta} + \frac{4a^2 M^2 r^2}{(r^2 + a^2)^4} - \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)^4 \sin^2 \theta} (\Lambda (r^2 + a^2)^2 + 4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta - a^2 (r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta) \\
&= \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^4 \sin^2 \theta} ((r^2 + a^2)^2 - ((r^2 + a^2) + 2Mr) a^2 \sin^2 \theta) \\
&= \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^4 \sin^2 \theta} ((r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) - 2Ma^2 r \sin^2 \theta) \\
&\geq \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^4 \sin^2 \theta} ((r^2 + a^2)r^2 - 2Mr a^2) \geq 0
\end{aligned}$$

parce que  $r > M > a$ . On a au sens des formes quadratiques sur  $C_0^\infty(\widetilde{\mathcal{M}})$  :

$$[\widetilde{k}_0, \widetilde{h}_0] = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \partial_s \sqrt{r^2 + a^2} p'_0 \partial_\phi$$

avec  $p_0(s) = 2aMr/(r^2 + a^2)^2$ , donc  $p'_0 \in \mathbf{S}^{-4,-1}$  et (9.4.3) est vérifiée par le même raisonnement que pour  $(\widetilde{h}, \widetilde{k})$  utilisant (9.4.13).



Pour  $\nu \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ , on a  $[\tilde{k}_\nu, \tilde{h}_\nu] = 0$  et il reste alors à vérifier (9.4.2), (9.4.4). Nous donnons les formes explicites des opérateurs  $\tilde{h}_\nu + \tilde{k}_\nu^2$ ; on s'aperçoit facilement que ces opérateurs vérifient les conditions (9.4.2), (9.4.4) :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{(-,1)} + \tilde{k}_{(-,1)}^2 &= -\partial_s^2 - g_-(s)\Delta_{S^2} + f_{(-,1)}, \\ \tilde{h}_{(-,2)} + \tilde{k}_{(-,2)}^2 &= -\partial_s^2, \\ \tilde{h}_{(+,1)} + \tilde{k}_{(+,1)}^2 &= -\partial_s^2 - \theta_0(s)\frac{1}{|s|^2}\Delta_{S^2} + \theta_+(s)\left(\frac{m^2}{2} - \frac{2Mm^2}{|s|}\theta_0(s)\right) + \frac{m^2}{2} \\ &\quad + (\theta_+(s) - 1)\frac{a^2}{2(r_+^2 + a^2)^2}\partial_\phi^2, \\ \tilde{h}_{(+,2)} + \tilde{k}_{(+,2)}^2 &= -\partial_s^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|}\theta_0(s). \blacksquare\end{aligned}$$

**9.5. Restriction sur l'espace de solutions.** Nous allons voir dans la suite qu'il y a une classe de données initiales pour laquelle on peut trouver une énergie positive conservée. Dans un premier temps, on va faire le changement de coordonnées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi} = \phi - \frac{a}{r_+^2 + a^2}t, \\ \tilde{t} = t, \\ \tilde{\theta} = \theta, \\ \tilde{s} = s \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_{\tilde{\phi}} = \partial_\phi, \\ \partial_{\tilde{t}} = \partial_t + \frac{a}{r_+^2 + a^2}\partial_\phi, \\ \partial_{\tilde{\theta}} = \partial_\theta, \\ \partial_{\tilde{s}} = \partial_s \end{array} \right\}.$$

Dans ces coordonnées, l'équation de Klein–Gordon s'écrit sous la forme (où on note encore les nouvelles coordonnées  $t, s, \phi, \theta$ ) :

$$(9.5.1) \quad \left( \partial_t^2 + \left( \frac{4aMr}{\Sigma^2} - \frac{2a}{r_+^2 + a^2} \right) \partial_\phi \partial_t + \left( \frac{a^2}{(r_+^2 + a^2)^2} - \frac{4a^2Mr}{\Sigma^2(r_+^2 + a^2)} + \frac{a^2}{\Sigma^2} \right) \partial_\phi^2 \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s(r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \Delta_{S^2} \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \right) v = 0.$$

Remarquons maintenant que les coefficients de l'équation de Klein–Gordon sont indépendants de  $\phi$ , ce qui nous donne la conservation du moment angulaire correspondant. Autrement dit : si  $v(t, s, \theta, \phi) = e^{in\phi}u(t, s, \theta)$  vérifie

$$(9.5.2) \quad \left( \partial_t^2 + i \left( \frac{4aMr}{\Sigma^2} - \frac{2a}{r_+^2 + a^2} \right) n \partial_t - \left( \frac{a^2}{(r_+^2 + a^2)^2} - \frac{4a^2Mr}{\Sigma^2(r_+^2 + a^2)} + \frac{a^2}{\Sigma^2} \right) n^2 \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s(r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \Delta_{S^2} \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \right) v = 0,$$

alors  $v(t, s, \theta, \phi)$  vérifie également (9.5.1). Avec cette restriction, l'opérateur  $h$  dans l'écriture (9.2.2) est maintenant positif si le moment angulaire fixé n'est pas trop grand par rapport à la masse de la particule. Pour voir ceci, posons

$$(9.5.3) \quad \begin{aligned} f_n(r, \theta) &= -\frac{a^2 n^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \frac{4a^2 n^2 M r}{\Sigma^2 (r_+^2 + a^2)} - \frac{a^2 n^2}{\Sigma^2} + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \\ &= \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma^2} f_n(r) + \widehat{f}_n(r, \theta) \end{aligned}$$

avec

$$(9.5.4) \quad f_n(r) = -\frac{a^2 n^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \frac{4a^2 n^2 M r}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)} - \frac{a^2 n^2}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2},$$

$$(9.5.5) \quad \widehat{f}_n(r, \theta) = \frac{a^4 n^2 \Lambda \sin^2 \theta}{\Sigma^2 (r_+^2 + a^2)^2} + \frac{m^2 a^2 \cos^2 \theta \Lambda}{\Sigma^2},$$

en particulier  $\widehat{f}_n(r, \theta) \geq 0$  et  $f_n(r, \theta) \geq c f_n(r)$ . On a donc  $f_n(r, \theta) \geq 0$  si  $f_n(r) \geq 0$ .

LEMME 9.5.1. *Soit*

$$(9.5.6) \quad m^2 \geq \frac{n^2 a^2}{r_+^3} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{r_+} \right).$$

Alors

$$f_n(r) = \frac{r - r_+}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)^2} q_n(r), \quad q_n \in C([r_+, \infty[), \quad q_n(r(s)) \in O(s^3) \quad (s \rightarrow \infty),$$

et

$$\exists \delta > 0, \forall r > r_+, \theta \in [0, \pi] \quad q_n(r) \geq \delta \langle r \rangle^3.$$

Nous allons supposer (9.5.6) dans toute la suite.

*Démonstration.* Soient

$$\begin{aligned} f_{1,n}(r) &:= -a^2 n^2 (r^2 + a^2)^2 + 4M^2 a^2 n^2 r^2, \\ f_{2,n}(r) &:= -4M^2 a^2 n^2 r^2 + 4M a^2 n^2 r (r_+^2 + a^2) - a^2 n^2 (r_+^2 + a^2)^2, \\ f_{3,n}(r) &:= m^2 r^2 \Lambda (r_+^2 + a^2)^2. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \frac{f_{1,n}(r) + f_{2,n}(r) + f_{3,n}(r)}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)^2}, \\ f_{1,n}(r) &= -a^2 n^2 \Lambda (r^2 + a^2 + 2Mr), \\ f_{2,n}(r) &= -4M^2 a^2 n^2 (r - r_+)^2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \frac{(r - r_+)}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)^2} (-a^2 n^2 (r - r_-) (r^2 + a^2 + 2Mr) \\ &\quad - 4M^2 a^2 n^2 (r - r_+) + 4M^2 m^2 r^2 r_+^2 (r - r_-)) \\ &= \frac{(r - r_+)}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)^2} q_n(r). \end{aligned}$$

Alors

$$q_n(r) > 0 \Leftrightarrow m^2 > \frac{a^2 n^2 (r - r_-) (r^2 + a^2 + 2Mr) + 4M^2 a^2 n^2 (r - r_+)}{4M^2 r^2 r_+^2 (r - r_-)} = p(r).$$

On a

$$p(r) < \frac{n^2 a^2}{r_+^3} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{r_+} \right)$$

et donc  $q_n(r) \geq \delta \langle r \rangle^3$  avec  $\delta > 0$  si

$$m^2 \geq \frac{n^2 a^2}{r_+^3} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{r_+} \right). \blacksquare$$

On pose

$$\begin{aligned} h_n &:= -\frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \partial_s (r^2 + a^2) \partial_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} - \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \Delta_{S^2} \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} + f_n(r, \theta), \\ k_n &:= \left( -\frac{2Mar}{\Sigma^2} + \frac{a}{r_+^2 + a^2} \right) n. \end{aligned}$$

Dans l'écriture pour  $h_n$ , nous avons gardé le Laplacien sur la sphère pour éviter des singularités de coordonnées. Nous définissons l'opérateur  $\widehat{h}_n$  à partir de  $h_n$  en remplaçant  $\partial_\phi$  dans l'expression pour le Laplacien sur la sphère par  $in$ . Alors  $h_n$  est bien défini, symétrique et positif sur  $C_0^\infty(\widehat{\mathcal{M}})$ , soit  $(h_n, D(h_n))$  l'extension de Friedrichs. Remarquons que  $h_n \geq \varepsilon f$  ( $\varepsilon > 0$ ) comme exigé dans la Section 3.3. On note  $\mathcal{H}_n^i, L_n, \mathcal{R}_n, R_n$  les espaces et opérateurs construits à partir de  $(h_n, k_n)$  comme décrit dans la Section 2.1.

Nous décrivons également les dynamiques de comparaison avec cette restriction. On suit la démarche du Chapitre 3. Ici l'opérateur  $P$  du Chapitre 3 est égal à  $-\Delta_{S^2}$ . Nous décomposons  $\mathcal{H}$  en harmoniques sphériques :

$$L^2(\mathbb{R} \times S_\omega^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^{m=l} L^2(\mathbb{R}) \otimes Y_{m,l}.$$

On pose

$$\mathcal{H}_{m,l} := L^2(\mathbb{R}) \otimes Y_{m,l}, \quad \mathcal{L}_{m,l} := \mathcal{H}_{m,l} \oplus \mathcal{H}_{m,l}.$$

Soient  $\theta_0, \theta_+$  comme dans la Section 3.4. On pose

$$\begin{aligned} c_{0,n} &:= m^2 - \frac{a^2 n^2}{(r_+^2 + a^2)^2}, \\ c_{1,n} &:= \frac{an}{r_+^2 + a^2}, \\ c_{2,n} &:= -2Mm^2, \\ g_-(s) &:= \frac{(r_+ - r_-)^{c_- / c_+ + 1} e^{-\sigma(\theta_0(s)|s| + r_+)}}{(r_+^2 + a^2)^2}, \\ g_+(s) &:= \theta_0(s) \frac{1}{|s|^2}, \\ g(s) &:= \frac{\Lambda}{(r^2(s) + a^2)^2}, \\ f_{(-,1),n}(s) &:= \frac{(r_+ - r_-)^{c_- / c_+ + 1} e^{-\sigma(|s|\theta_0(s) + r_+)} m^2 r_+^2}{4M^2 r_+^2}, \\ f_{(+,2),n}(s) &:= \frac{c_{2,n}}{s} \theta_0(s) + c_{0,n}, \end{aligned}$$

$$f_{(+,1),n}(s) := \theta_+(s) \left( \frac{c_{2,n}}{|s|} \theta_0(s) + \frac{c_{0,n}}{2} \right) + \frac{c_{0,n}}{2},$$

$$k_{0,n}(s) := \left( \frac{-2aMr(s)}{(r^2(s) + a^2)^2} + \frac{a}{r_+^2 + a^2} \right) n.$$

Rappelons que

$$k_{\nu,n} = \begin{cases} c_{1,n} & \text{si } \nu = (+, i), i = 1, 2, \\ 0 & \text{si } \nu = (-, i), i = 1, 2. \end{cases}$$

$h_{\nu,n}$ ,  $\nu \in \mathcal{N}$  sont construits comme décrit dans le Chapitre 3, alors par exemple

$$h_{0,n} = -\partial_s^2 - g(s)\Delta_{S^2} + f(s)$$

et

$$h_{0,n}^{m,l} = -\partial_s^2 + g(s)l(l+1) + f(s), \quad D(h_{0,n}^{m,l}) = H^2(\mathbb{R}).$$

$(h_{0,n}^{m,l}, D(h_{0,n}^{m,l}))$  est autoadjoint,  $h_{0,n}$  est autoadjoint avec domaine

$$(9.5.7) \quad D(h_{0,n}) = \left\{ u = \sum_{ml} u_{m,l} \mid u_{m,l} \in D(h_{0,n}^{m,l}), \sum_{m,l} \|h_{0,n}^{m,l} u_{m,l}\|^2 < \infty \right\}.$$

$\mathcal{H}_{\nu,n}^i$ ,  $\mathcal{H}_{\nu,n}^{i,(m,l)}$ ,  $\mathcal{R}_{\nu,n}$ ,  $\mathcal{R}_{\nu,n}^{m,l}$ ,  $R_{\nu,n}$ ,  $R_{\nu,n}^{m,l}$ ,  $L_{\nu,n}$  et  $L_{\nu,n}^{m,l}$  sont construits à partir de  $h_{\nu,n}$ ,  $k_{\nu,n}$  et  $h_{\nu,n}^{m,l}$  ( $\nu \in \mathcal{N}$ ) comme décrit dans la Section 2.1. Les opérateurs  $\widehat{h}_{\nu,n}$  sont construits de façon analogue à  $\widehat{h}_n$ .

Nous allons maintenant introduire les espaces sur lesquels les dynamiques  $R_n$  etc. correspondent à la vraie dynamique du système. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^\phi &:= \{u(r, \theta, \phi) = e^{in\phi}v \mid v \in L^2(\mathbb{R} \times [0, \pi], \sin\theta ds d\theta)\} \subset \mathcal{H}, \\ \mathcal{H}_n^{1,\phi} &:= \mathcal{H}_n^1 \cap \mathcal{H}_n^\phi, \\ \mathcal{H}_{c,n}^{1,\phi} &:= \text{complété de } \mathcal{H}_n^{1,\phi} \text{ pour la norme } (h_n u, u), \\ \mathcal{R}_n^\phi &:= \mathcal{H}_{c,n}^{1,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^\phi. \end{aligned}$$

Les espaces  $\mathcal{R}_{\nu,n}^\phi$  sont définis de la même façon. Notons que  $e^{\pm itR_n}$  envoie  $\mathcal{R}_n^\phi$  dans lui-même et que  $e^{\pm itR_{\nu,n}}$  envoie  $\mathcal{R}_{\nu,n}^\phi$  dans lui-même. On pose

$$\widetilde{\mathcal{G}}_n^\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathcal{R}_n^\phi \quad \text{et} \quad \|(u_0, u_1)\|_{\widetilde{\mathcal{G}}_n^\phi} = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{R}_n^\phi}.$$

Les espaces  $\widetilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^\phi$  sont construits de la même façon. On définit l'espace  $\widetilde{\mathcal{G}}_n$  de façon analogue :

$$\widetilde{\mathcal{G}}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathcal{R}_n \quad \text{et} \quad \|(u_0, u_1)\|_{\widetilde{\mathcal{G}}_n} = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{R}_n}.$$

Les espaces  $\widetilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}$  sont construits de la même façon.

**9.6. Discussion physique.** Pour voir combien de modes on peut permettre dans une situation physiquement réaliste, il faut écrire notre condition en unités non géométriques. Jusqu'à maintenant, on a utilisé des unités géométriques. À toute quantité qui dans les unités non géométriques a une dimension qu'on peut exprimer en termes de longueur  $L$ ,

temps  $T$  et masse  $M$  est associée une dimension d'une puissance de longueur dans des unités géométriques. Le passage d'une unité à l'autre peut être établi par les facteurs de conversion (voir [W]).

Dans les unités non géométriques, l'équation de Klein–Gordon devient

$$\hbar^2 \square f + m^2 c^4 f = 0 \Leftrightarrow \square f + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} f = 0.$$

Nous posons  $m_0^2 = m^2 c^4 / \hbar^2$ . Faisons un bilan des unités et donc des facteurs de conversion.

Quantité	Dimension non géométrique	Facteur de conversion
$a$	$L^2 T^{-1}$	$c^{-1}$
$M$	$M$	$G/c^2$
$n$	1	1

La formule de restriction en unités géométriques était

$$\begin{aligned} m_0^2 &\geq \frac{n^2 a^2}{M^3 (1 + (1 - a^2/M^2)^{1/2})^3} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{M + (1 - a^2/M^2)^{1/2} M} \right) \\ &= \frac{n^2 a^2}{M^4 (1 + b)^3} \left( 1 + \frac{1}{1 + b} \right), \quad b = \left( 1 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dans des unités non géométriques, ceci donne

$$m_0^2 c^{-2} \geq \frac{n^2 a^2 c^6}{G^4 M^4} \left( 1 + \left( 1 - \frac{a^2 c^2}{M^2 G^2} \right)^{1/2} \right)^{-3} \left( 1 + \left( 1 + \left( 1 - \frac{a^2 c^2}{M^2 G^2} \right)^{1/2} \right)^{-1} \right)$$

i.e.

$$m^2 \geq \frac{n^2 a^2 c^4 \hbar^2}{G^4 M^4} \left( 1 + \left( 1 - \frac{a^2 c^2}{M^2 G^2} \right)^{1/2} \right)^{-3} \left( 1 + \left( 1 + \left( 1 - \frac{a^2 c^2}{M^2 G^2} \right)^{1/2} \right)^{-1} \right).$$

Nous considérons ici le cas de l'espace-temps de Kerr à rotation lente, i.e.  $a^2 < M^2$ , ou en unités non géométriques,  $a^2 < M^2 G^2 / c^2$ . Le cas qui permet le moins de modes est le cas  $a = \frac{MG}{c}$ . On obtient dans ce cas

$$m^2 \geq \frac{n^2 c^2 \hbar^2}{2M^2 G^2}, \quad \text{i.e.} \quad m \geq \frac{n c \hbar}{\sqrt{2} M G}.$$

Pour un trou noir qui résulte d'un effondrement d'une étoile, nous pouvons supposer une masse  $100M_S \geq M \geq 2M_S$ , où  $M_S$  est la masse du soleil (voir [W]). Nous choisissons de nouveau le cas le plus "défavorable"  $M = 2M_S$ . L'équation de Klein–Gordon décrivant des bosons neutres de spin 0, nous calculons le nombre de modes permis pour des mésons neutres ( $m = 260 \times m_e$ ,  $m_e = 9.1 \times 10^{-28}$  g,  $M_S = 2 \times 10^{33}$  g,  $G = 6.667 \times 10^{-8}$  cm<sup>3</sup> × g<sup>-1</sup> × s<sup>-2</sup>,  $c = 2.998 \times 10^{10}$  cm × s<sup>-1</sup>,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$  g × cm<sup>2</sup> × s<sup>-1</sup>) :

$$(9.6.1) \quad n \leq 2.82 \times 10^{16}.$$

**9.7. Vérification des hypothèses.** Dans cette section, nous allons vérifier les différentes hypothèses du Chapitre 3 pour les opérateurs qu'on a introduits dans la Section 9.5.

On va supprimer l'indice  $n$ . Nous utilisons les mêmes symboles que dans le Chapitre 3 ( $\sigma = 1/c_+$ ) :

$$\begin{aligned} f \in \mathbf{S}^{m,n} & \text{ ssi } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \partial_s^\alpha \partial_\theta^\beta f \in \begin{cases} O(\langle s \rangle^{m-\alpha}), & s \rightarrow \infty, \\ O(e^{n\sigma|s|}), & s \rightarrow -\infty. \end{cases} \\ f \in \mathbf{S}^m & \text{ ssi } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \partial_s^\alpha \partial_\theta^\beta f \in O(\langle r \rangle^{m-\alpha}), \quad |s| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On vérifie

$$\begin{cases} \mathbf{S}^{m,n} \times \mathbf{S}^{m',n'} \subset \mathbf{S}^{m+m',n+n'}, \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \partial_s^\alpha : \mathbf{S}^{m,n} \rightarrow \mathbf{S}^{m-\alpha,n}, \\ \forall \beta \in \mathbb{N}, \quad \partial_\theta^\beta : \mathbf{S}^{m,n} \rightarrow \mathbf{S}^{m,n}. \end{cases}$$

*Rapport entre les variables  $r$  et  $s$ .* Pour une fonction qui dépend de  $r$  et de  $\theta$ , nous définissons

$$f(r, \theta) \in \mathbf{T}^m \text{ ssi } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \partial_r^\alpha \partial_\theta^\beta f \in \begin{cases} O(\langle r \rangle^{m-\alpha}), & r \rightarrow \infty, \\ O(1), & r \rightarrow r_+. \end{cases}$$

LEMME 9.7.1. (i) Si  $f(r) \in \mathbf{T}^m$ , alors  $D_s^\alpha f(r(s)) \in \mathbf{S}^{m-\alpha,-1}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ .

(ii) Si  $f(s) \in \mathbf{S}^{m,n}$  et  $g(r) \in \mathbf{T}^k$ , alors  $f(s)g(r(s)) \in \mathbf{S}^{m+k,n}$ .

*Démonstration.* (ii) suit de  $g(r(s)) \in \mathbf{S}^{k,0}$  et de  $\mathbf{S}^{m,n} \times \mathbf{S}^{k,0} \subset \mathbf{S}^{m+k,n}$ . Montrons (i).

On a

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2 + a^2},$$

donc

$$\forall \alpha \geq 1, \quad \frac{\partial^\alpha r}{\partial s^\alpha} \in \begin{cases} O(r^{1-|\alpha|}), & r \rightarrow \infty, \\ O(|r - r_+|), & r \rightarrow r_+, \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial^\alpha r}{\partial s^\alpha} \in \begin{cases} O(s^{1-|\alpha|}), & s \rightarrow \infty, \\ O(e^{-\sigma|s|}), & s \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

(i) suit alors de la formule de Faa di Bruno :

$$\partial_s^\alpha f(r(s)) = \sum_{q \geq 1} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_q = \alpha} \partial_r^q f(r(s)) \partial_s^{\alpha_1} r \dots \partial_s^{\alpha_q} r. \blacksquare$$

EXEMPLES. (1)  $e_1(r, \theta) = \Lambda \in \mathbf{S}^{2,-1}$ ,

(2)  $e_2(r, \theta) = \sqrt{\Lambda} \in \mathbf{S}^{1,-1/2}$ ,

(3)  $e_3(r, \theta) = 1/\Sigma^p \in \mathbf{S}^{-2p,0}$ ,

(4)  $e_4(r, \theta) = \partial_\theta \frac{1}{\Sigma^p} = \partial_\theta \frac{1}{(\Sigma^2)^{p/2}} = -\frac{p}{2} \Sigma^{-(p+2)} \partial_\theta \Sigma^2$   
 $= \frac{a^2 p \Lambda \sin \theta \cos \theta}{\Sigma^{p+2}} \in \mathbf{S}^{-2(p+1),-1}$ .

En appliquant les règles décrites, on obtient :

(5)  $e_5(r, \theta) = \sqrt{r^2 + a^2}/\Sigma \in \mathbf{T}^{-1}$ , d'où  $\partial_s e_5(r, \theta) \in \mathbf{S}^{-2,-1}$ ,

(6)  $e_6(r, \theta) = \left( \partial_\theta \frac{1}{\Sigma} \right) \frac{\Lambda}{\Sigma} \in \mathbf{S}^{-4,-2}$ .

Rappelons que

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{a^2 n^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \frac{4a^2 n^2 M r}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)} - \frac{a^2 n^2}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2}, \\ g(r) &= \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2}, \\ k_0(r) &= \left( -\frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{a}{r_+^2 + a^2} \right) n. \end{aligned}$$

LEMME 9.7.2.  $f, g, k_0, f_{(-,1)}, g_{\pm}$  vérifient les conditions (3.2.2)–(3.2.6) et (3.4.3)–(3.4.5) avec  $r$  remplacé par  $s$ .

*Démonstration.* On vérifie d'abord les conditions sur  $g$ . On a

$$\Lambda = (r(s) - r_-)^{c_-/c_+ + 1} e^{\sigma(s-r(s))},$$

donc pour  $s \leq 0$  :

$$C^{-1} e^{\sigma s} \leq g(r) \leq C e^{\sigma s} \quad \text{avec } C > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} g'(r) &= \partial_r \left( \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \right) \frac{\Lambda}{r^2 + a^2} = \left( \frac{2(r-M)}{(r^2 + a^2)^2} - \frac{4r\Lambda}{(r^2 + a^2)^3} \right) \frac{\Lambda}{r^2 + a^2} \\ &= \frac{2\Lambda}{(r^2 + a^2)^4} ((r-M)(r^2 + a^2) - 2r(r^2 + a^2 - 2Mr)) \\ &= \frac{2}{(r^2 + a^2)^2} (-r(r^2 + a^2) + 3Mr^2 - Ma^2) g(r) = p(r)g(r). \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} p(r(s)) = \frac{2}{(r_+^2 + a^2)^2} (-r_+(r_+^2 + a^2) + 3Mr_+^2 - Ma^2) = \frac{2M(r_+^2 - a^2)}{(r_+^2 + a^2)^2} > 0,$$

alors

$$\exists R_1, C_1 > 0, \forall s \leq -R_1, \quad C_1^{-1} g(r) \leq g'(r) \leq C_1 g(r).$$

On a

$$-sp(r(s)) \rightarrow 2 \quad (s \rightarrow \infty),$$

donc

$$\exists R_2, C_2 > 0, \forall s \geq R_2, \quad C_2^{-1} g(r(s)) \leq -sg'(r(s)) \leq C_2 g(r(s)).$$

Finalement  $g \in \mathbf{S}^{-2,-1}$ . Les conditions sur  $g$  sont alors vérifiées.

Vérifions maintenant les conditions sur  $f$ . D'après la démonstration du Lemme 9.5.1, on a

$$f(s) = \frac{r - r_+}{(r^2 + a^2)^2 (r_+^2 + a^2)^2} q(r) \in O(e^{-\sigma|s|}), \quad s \rightarrow -\infty,$$

puisque  $|r - r_+| \in O(e^{-\sigma|s|})$ ,  $s \rightarrow -\infty$ , et  $q(r) \in C([r_+, \infty[)$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} f(s) &= -\frac{a^2 n^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2} + O(s^{-3}) = c_0 + m^2 \frac{-2Mr^3 - a^2(r^2 + a^2)}{(r^2 + a^2)^2} + O(s^{-3}) \\ &= c_0 - \frac{2Mm^2}{s} + O(s^{-2}), \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On a

$$f(r) = c_0 + f_2(r) \quad \text{avec } f_2(r) \in \mathbf{T}^{-1},$$

alors

$$D_s f = D_s f_2(r(s)) \in \mathbf{S}^{-2,-1}.$$

De plus on a  $Cf(s) \geq e^{-\sigma|s|}$  pour  $s$  suffisamment petit par le Lemme 9.5.1. Les conditions sur  $f$  sont alors vérifiées.

Vérifions maintenant (3.2.6). On a

$$\begin{aligned} k_0(r(s)) - c_1 &= -\frac{2Mr an}{(r^2 + a^2)^2} \in O(\langle s \rangle^{-3}), \quad s \rightarrow +\infty, \\ k_0(r(s)) &= \left( \frac{\Lambda - (r^2 + a^2)}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{1}{r_+^2 + a^2} \right) an \\ &= \frac{\Lambda an}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{(r - r_+)(r + r_+)an}{(r_+^2 + a^2)(r^2 + a^2)} \in O(e^{-\sigma|s|}), \quad s \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

En plus

$$k_0 = c_1 + k_2 \quad \text{avec } k_2 \in \mathbf{T}^{-3},$$

donc

$$D_s k_0 = D_s k_2 \in \mathbf{S}^{-4,-1}.$$

(3.2.6) s'ensuit.

Les conditions sur  $f_{(-,1)}, g_{\pm}$  sont clairement vérifiées. ■

*Calcul des coefficients.* Nous allons vérifier les conditions (3.3.5)–(3.3.11). Pour ceci, il faut écrire l'hamiltonien  $h$  sous la forme (3.3.3). Soient  $i \in \{\theta, \phi, s\}$ ,  $g_\theta = g_\phi = g$ ,  $g_s = 1$  et  $p_i, \widehat{p}_i$  des fonctions lisses. Alors

$$\begin{aligned} p_i D_i^* \widehat{p}_i D_i p_i &= D_i^* p_i \widehat{p}_i D_i p_i + [p_i, D_i] \widehat{p}_i D_i p_i \\ &= D_i^* p_i \widehat{p}_i D_i p_i + D_i^* p_i \widehat{p}_i [D_i, p_i] + [p_i, D_i] \widehat{p}_i [D_i, p_i] + [p_i, D_i] \widehat{p}_i p_i D_i \\ &= g_i D_i^* D_i + D_i^* (p_i^2 \widehat{p}_i - g_i) D_i + D_i^* p_i \widehat{p}_i [D_i, p_i] \\ &\quad + [p_i, D_i] \widehat{p}_i [D_i, p_i] + [p_i, D_i] \widehat{p}_i p_i D_i. \end{aligned}$$

Il suit, en utilisant les Exemples (1)–(6), que

$$(9.7.1) \quad g^{\phi, \phi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} g^{\theta, \theta} = \Lambda \left( \frac{1}{\Sigma^2} - \frac{1}{(r^2 + a^2)^2} \right) = \frac{\Lambda^2 a^2}{(r^2 + a^2)^2 \Sigma^2} \in \mathbf{S}^{-4,-2},$$

$$(9.7.2) \quad g^\theta = -D_\theta \left( \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \right) \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \in \mathbf{S}^{-4,-2},$$

$$(9.7.3) \quad g^\phi = 0,$$

$$(9.7.4) \quad g^{ss} = \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma^2} - 1 = \frac{a^2 \Lambda \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \in \mathbf{S}^{-2,-1},$$

$$(9.7.5) \quad g^s = - \left( D_s \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \right) \frac{(r^2 + a^2)^{3/2}}{\Sigma} \in \mathbf{S}^{-1,-1},$$

$$(9.7.6) \quad f_1 = \left( \partial_s \left( \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} \right) \right)^2 (r^2 + a^2) + \left( \partial_\theta \left( \frac{\sqrt{\Lambda}}{\Sigma} \right) \right)^2 + \frac{a^2 \Lambda \sin^2 \theta}{\Sigma^2} f(r) + \widehat{f}(r, \theta).$$



On a  $f(r(s)) \in \mathbf{S}^{0,-1}$ ,  $\Lambda/\Sigma^2 \in \mathbf{S}^{-2,-1}$ ,  $\hat{f} \in \mathbf{S}^{-2,-1}$ , ce qui donne  $f_1 \in \mathbf{S}^{-2,-1}$ . On a  $f_1 \geq 0$  également. Finalement,

$$(9.7.7) \quad k_1 = -2aMr \left( \frac{1}{\Sigma^2} - \frac{1}{(r^2 + a^2)^2} \right) = -\frac{2a^3 Mr \Lambda \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)^2 \Sigma^2} \in \mathbf{S}^{-5,-1}.$$

(9.7.1)–(9.7.7) impliquent que les coefficients pour la métrique de Kerr vérifient (3.3.5)–(3.3.11) à l'exception de (3.3.9). Comme  $g^s$  est purement imaginaire, il suffit que  $g^s \in \mathbf{S}^{-1,-1}$  (voir Remarque 3.3.1(b)).

**9.8. Remarque sur les notations.** On a utilisé jusqu'à présent différents systèmes de coordonnées. Le passage d'un système de coordonnées à un autre se fait par une rotation.

Nous entendons par un *observateur* une courbe paramétrée dont le vecteur tangent en chaque point est de type temps. Pour un système de coordonnées  $(t, x)$ , on appelle l'ensemble de toutes les courbes de type temps de la forme  $(t = \tau, x = x_0)$  la *famille d'observateurs* associée au système de coordonnées  $(t, x)$ .

Les observateurs associés aux coordonnées introduites dans la Section 9.4 (voir (9.4.5)) sont appelés les *observateurs localement non tournants* (voir [W]) on va appeler les observateurs définis par les coordonnées de la Section 9.5 les *observateurs tournants*. Les observateurs associés aux coordonnées de départ sont appelés les *observateurs de départ*.

On dit qu'une famille d'observateurs attribue à l'équation de Klein–Gordon les opérateurs et espaces qu'on obtient en écrivant l'équation de Klein–Gordon dans les coordonnées correspondantes. Le schéma 1 rassemble ces opérateurs et espaces. Certains espaces et opérateurs pourraient être définis mais ne le sont pas dans le texte, on les a mis entre parenthèses; d'autres ne peuvent pas être définis naturellement (c'est le cas pour les espaces de Sobolev quand l'hamiltonien n'est pas positif), on a mis un tiret à la place. Chaque bloc est composé de la façon suivante :

Opérateurs décrivant l'équation de K–G	Dynamique
Espaces de Sobolev	Espace d'énergie

Notons que les espaces d'énergie ne sont pas toujours les espaces d'énergie naturels mais parfois des espaces d'énergie "hérités" d'un autre observateur.

On a un schéma analogue pour les dynamiques asymptotiques.

**9.9. Espaces d'énergie.** Nous avons jusqu'à présent adopté deux points de vue différents.

Le premier point de vue est celui de l'observateur localement non tournant. Cet observateur attribue à l'équation de Klein–Gordon une énergie que nous avons réexprimée pour l'observateur de départ. Ceci donne les énergies  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_\nu$ . Ce point de vue nous a permis d'établir le résultat d'existence et d'unicité de la Section 9.4.

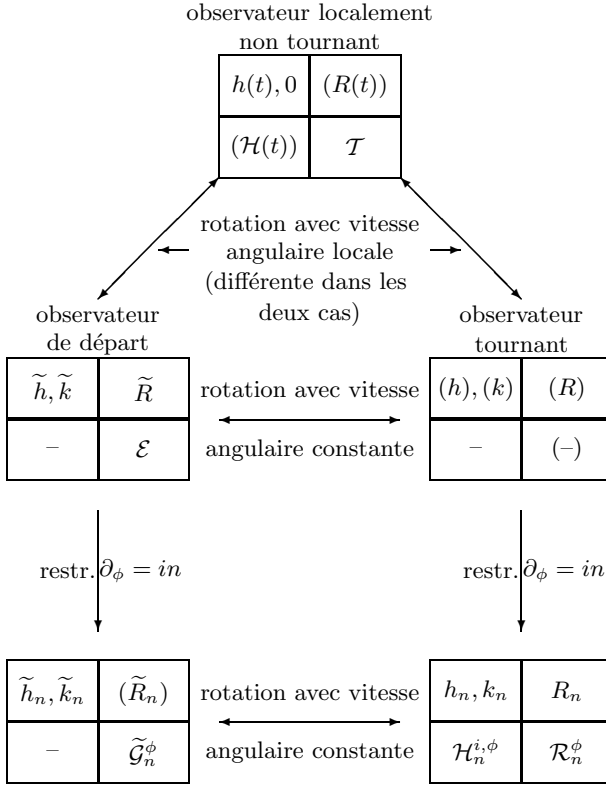


Schéma 1

Le deuxième point de vue est celui de l'observateur tournant. Ceci nous a permis dans la Section 9.5 de construire des sous-espaces conservés par l'évolution sur lesquels l'évolution est unitaire. Nous avons ensuite également réexprimé cette énergie pour l'observateur de départ, ce qui donne les énergies  $\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi, \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^\phi$ .

Dans cette section, nous allons faire le lien entre les espaces d'énergie  $\mathcal{E}, \mathcal{E}_\nu$  et  $\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi, \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^\phi$ . On pose

$$\mathcal{H}_n^{2,\phi} := \mathcal{H}_n^2 \cap \mathcal{H}_n^\phi, \quad \mathcal{H}_{\nu,n}^{2,\phi} = \mathcal{H}_{\nu,n}^2 \cap \mathcal{H}_n^\phi.$$

Nous supposons que  $n, p$  vérifient (9.5.6).

LEMME 9.9.1. *Soient  $p \neq n$  et  $\nu \in \mathcal{N}$ . Alors*

$$\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}_\nu$$

avec injection continue et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_n^\phi &\perp \tilde{\mathcal{G}}_p^\phi \text{ pour le produit scalaire dans } \mathcal{E}, \\ \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^\phi &\perp \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,p}^\phi \text{ pour le produit scalaire dans } \mathcal{E}_\nu. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous commençons avec l'injection  $\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}$ . Il suffit de démontrer

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}} \leq C \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi} \quad \text{pour } (u_0, u_1) \in \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}$$

et l'injection s'étend par continuité. Comme  $u_0 \in \mathcal{H}_n^{1,\phi}$ , on a

$$\tilde{k}u_0 = \tilde{k}_n u_0, \quad \tilde{h}u_0 = \tilde{h}_n u_0,$$

où on obtient  $\tilde{h}_n, \tilde{k}_n$  à partir de  $\tilde{h}, \tilde{k}$  en remplaçant  $\partial_\phi$  par  $in$ . On a ensuite

$$\|u_1 - i\tilde{k}_n u_0\|^2 + ((\tilde{h}_n + \tilde{k}_n^2)u_0, u_0) \leq \|u_1 + ic_{1,n}u_0\|^2 + (((\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 + \tilde{h}_n + \tilde{k}_n^2)u_0, u_0).$$

Il suffit alors de démontrer

$$(9.9.1) \quad (\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 + \tilde{h}_n + \tilde{k}_n^2 \leq C\hat{h}_n,$$

où  $\hat{h}_n$  est défini dans la Section 9.5. Soit  $\tilde{f}(r, \theta)$  la fonction définie dans la démonstration du Lemme 9.4.3. L'inégalité (9.9.1) va suivre de

$$(9.9.2) \quad (\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 + \tilde{f}(r, \theta)n^2 + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \leq C \left( f_n(r, \theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Lambda}{\Sigma^2} n^2 \right),$$

où  $f_n(r, \theta)$  est définie dans la Section 9.5. On a

$$(9.9.3) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_n + c_{1,n} &= \left( \frac{-2aMr}{\Sigma^2} + \frac{a}{r_+^2 + a^2} \right) n \\ &= (-2Mr(r_+^2 + a^2) + \Sigma^2) \frac{an}{\Sigma^2(r_+^2 + a^2)} \\ &= (-2Mr(r_+^2 + a^2) + (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Lambda \sin^2 \theta) \frac{an}{\Sigma^2(r_+^2 + a^2)} \\ &= ((r^2 + a^2)\Lambda + 2Mr(r - r_+)(r + r_+) - a^2 \Lambda \sin^2 \theta) \frac{an}{\Sigma^2(r_+^2 + a^2)} \\ &= ((r^2 + a^2 \cos^2 \theta)\Lambda + 2Mr(r - r_+)(r + r_+)) \frac{an}{\Sigma^2(r_+^2 + a^2)} \\ &\leq \begin{cases} Ce^{\sigma s} n, & s \rightarrow -\infty, \\ Cn, & s \rightarrow \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

donc  $(\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 \leq C f_n(r, \theta)$  grâce au Lemme 9.5.1. Grâce à la formule explicite (9.4.12) de  $\tilde{f}(r, \theta)$ , on a

$$\tilde{f}(r, \theta)n^2 \leq C \frac{\Lambda}{\sin^2 \theta \Sigma^2} n^2.$$

Utilisant de nouveau le Lemme 9.5.1, on voit que

$$\frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \leq C f_n(r, \theta).$$

Ceci montre (9.9.2).

Soit maintenant  $\nu \in \mathcal{N}$ . On construit  $\tilde{k}_{\nu,n}, \tilde{h}_{\nu,n}$  à partir de  $\tilde{k}_\nu, \tilde{h}_\nu$  en remplaçant  $\partial_\phi$  par  $in$ . Montrons l'existence de l'injection  $\tilde{\mathcal{G}}_{0,n}^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}_0$ . Par le même argument que pour l'inclusion  $\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}$ , il suffit de démontrer

$$(9.9.4) \quad (\tilde{k}_{0,n} + c_{1,n})^2 + \tilde{f}_1(r, \theta)n^2 + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \leq C \left( f_n(r) + \frac{\Lambda}{\sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2} n^2 \right),$$

où  $\tilde{f}_1$  est définie dans la démonstration du Lemme 9.4.3 et  $f_n(r)$  est définie dans la Section 9.5. On a

$$\tilde{k}_{0,n} + c_{1,n} = ((r^2 + a^2)A + 2Mr(r - r_+)(r + r_+)) \frac{an}{(r^2 + a^2)^2(r_+^2 + a^2)}$$

et donc

$$(9.9.5) \quad |\tilde{k}_{0,n} + c_{1,n}| \leq \begin{cases} Ce^{\sigma s} n, & s \rightarrow -\infty, \\ Cn & s \rightarrow \infty. \end{cases}$$

(9.9.4) est vérifiée par les mêmes arguments que pour (9.9.2).

Traisons maintenant le cas  $\nu \in \{(-, 1), (-, 2)\}$ . Dans ce cas, on a  $\tilde{k}_{\nu,n} = -c_{1,n}$  et

$$\tilde{k}_{\nu,n}^2 + \tilde{h}_{\nu,n} = c_{1,n}^2 + \tilde{h}_{\nu,n} = \hat{h}_{\nu,n},$$

ce qui donne l'injection.

Il reste le cas  $\nu \in \{(+, 1), (+, 2)\}$ . On a  $\tilde{k}_{\nu,n} = 0$  et

$$c_{1,n}^2 + \tilde{h}_{\nu,n} = \hat{h}_{\nu,n} + 2c_{1,n}^2 \leq C\hat{h}_{\nu,n},$$

où on a utilisé que  $\hat{h}_{\nu,n} \geq \delta > 0$ . ■

Pour les espaces indicés par  $(+, 2)$ , on aura besoin du lemme suivant :

LEMME 9.9.2. *On a*

$$\mathcal{E}_{(+,2)} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}$$

avec injection continue.

*Démonstration.* On a

$$\|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}}^2 = \|u_1 + ic_{1,n}u_0\|^2 + (h_{(+,2),n}u_0, u_0) \leq \|u_1\|^2 + ((c_{1,n}^2 + h_{(+,2),n})u_0, u_0).$$

Puis

$$c_{1,n}^2 + h_{(+,2),n} = -\partial_s^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s) = \tilde{h}_{(+,2)} = \tilde{h}_{(+,2)} + \tilde{k}_{(+,2)}^2,$$

ce qui donne l'affirmation. ■

PROPOSITION 9.9.3. (i) *Sur  $\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi$  les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  et  $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi}$  sont équivalentes.*

(ii) *Pour tout  $\nu \in \mathcal{N}$ , les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_\nu}$  et  $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{G}}_\nu^\phi}$  sont équivalentes sur  $\tilde{\mathcal{G}}_\nu^\phi$ .*

*Démonstration.* Rappelons d'abord qu'on obtient  $\tilde{h}_n, \tilde{k}_n$  à partir de  $\tilde{h}, \tilde{k}$  en remplaçant  $\partial_\phi$  par  $in$ ;  $\tilde{h}_{\nu,n}$  et  $\tilde{k}_{\nu,n}$  sont construits de façon analogue.

(i) Grâce au Lemme 9.9.1, il suffit de démontrer

$$\forall (u_0, u_1) \in \mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}, \quad \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi}^2 \leq C\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{E}}^2.$$

Soit alors  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}$ . On a

$$\begin{aligned} \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_n^\phi}^2 &= \|u_1 + ic_{1,n}u_0\|^2 + (\hat{h}_n u_0, u_0) \\ &\leq \|u_1 - i\tilde{k}_n u_0\|^2 + ((\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 + \hat{h}_n) u_0, u_0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer

$$(\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 + f_n(r, \theta) + \frac{\Lambda}{\Sigma^2 \sin^2 \theta} n^2 \leq C \left( \tilde{f}(r, \theta) n^2 + \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2} \right).$$

Utilisant (9.9.3), on obtient

$$(\tilde{k}_n + c_{1,n})^2 \leq C \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2}.$$

On a

$$f_n(r, \theta) = \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma^2} f_n(r) + \hat{f}_n(r, \theta) \quad \text{avec } \hat{f}_n \in \mathbf{S}^{-2, -1}.$$

Utilisant le Lemme 9.5.1, on obtient

$$f_n(r, \theta) \leq C \frac{m^2 \varrho^2 \Lambda}{\Sigma^2}.$$

Par (9.4.12), on a

$$\frac{\Lambda}{\Sigma^2 \sin^2 \theta} n^2 \leq C \tilde{f}(r, \theta) n^2,$$

ce qui termine la démonstration de (i).

(ii) Comme dans (i), il suffit de démontrer

$$\forall (u_0, u_1) \in \mathcal{H}_{\nu, n}^{2, \phi} \oplus \mathcal{H}_{\nu, n}^{1, \phi}, \quad \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_{\nu, n}^{\phi}}^2 \leq C \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{E}}_{\nu}}^2.$$

Nous commençons avec  $\tilde{\mathcal{G}}_{0, n}^{\phi}$ . Par le même raisonnement que pour  $\tilde{\mathcal{G}}_n^{\phi}$ , il suffit de démontrer

$$(\tilde{k}_{0, n} + c_{1, n})^2 + f_n(r) + \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta} n^2 \leq C \left( \tilde{f}_1(r, \theta) n^2 + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \right).$$

Par le Lemme 9.5.1, on a

$$f_n(r) \leq C \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2}.$$

Utilisant (9.9.5), on obtient

$$(\tilde{k}_{0, n} + c_{1, n})^2 \leq C \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2}.$$

Par (9.4.13), on a

$$\frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta} n^2 \leq C \tilde{f}_1(r, \theta) n^2,$$

ce qui termine la démonstration pour  $\tilde{\mathcal{G}}_{0, n}^{\phi}$ .

Traitons maintenant le cas  $\nu \in \{(-, i) \mid i = 1, 2\}$ . On a déjà vu dans la démonstration du Lemme 9.9.1 qu'on a dans ce cas  $\tilde{k}_{\nu, n} = -c_{1, n}$  et

$$\hat{h}_{\nu, n} = \tilde{h}_{\nu, n} + \tilde{k}_{\nu, n}^2$$

et donc

$$\forall (u_0, u_1) \in \tilde{\mathcal{G}}_{\nu, n}^{\phi}, \quad \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_{\nu, n}^{\phi}}^2 = \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{E}}_{\nu}}^2.$$

L'affirmation pour  $\nu = (+, 2)$  suit des Lemmes 9.9.1 et 9.9.2, il reste le cas  $\nu = (+, 1)$ .

Soit  $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_{\nu, n}^{2, \phi} \oplus \mathcal{H}_{\nu, n}^{1, \phi}$ . On a

$$\begin{aligned} \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{G}}_{(+, 1), n}^{\phi}}^2 &= \|u_1 + ic_{1, n} u_0\|^2 + (\hat{h}_{(+, 1), n} u_0, u_0) \\ &\leq \|u_1\|^2 + ((c_{1, n}^2 + \hat{h}_{(+, 1), n}) u_0, u_0) = \|(u_0, u_1)\|_{\tilde{\mathcal{E}}_{(+, 1)}}^2 \end{aligned}$$

puisque

$$c_{1,n}^2 + \widehat{h}_{(+,1),n} = \widetilde{h}_{(+,1),n} = \widetilde{h}_{(+,1),n} + \widetilde{k}_{(+,1),n}^2.$$

Ceci termine la démonstration. ■

On définit également les espaces

$$\mathcal{R}_n^{\phi,f} = \left\{ u \in \mathcal{R}_n^\phi \mid u = \sum_{f \text{ fini}} u_{ml}, u_{ml} \in \mathcal{L}_{m,l} \right\}, \quad \widetilde{\mathcal{G}}_n^{\phi,f} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -i c_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathcal{R}_n^{\phi,f}.$$

Les espaces  $\mathcal{R}_{\nu,n}^{\phi,f}$ ,  $\widetilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^{\phi,f}$  sont définis de la même façon. On a le lemme suivant :

LEMME 9.9.4. *On a  $\widetilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^{\phi,f} \subset \widetilde{\mathcal{G}}_n^\phi$ .*

*Démonstration.* On pose

$$\mathcal{L}_M := \left\{ u = \sum_{|m|,|l| \leq M} u_{ml} \mid u_{ml} \in \mathcal{L}_{m,l} \right\}.$$

Si  $u \in \widetilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^{\phi,f}$ , alors il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $u \in \widetilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^\phi \cap \mathcal{L}_M$  et il suffit de démontrer

$$(9.9.6) \quad \forall M > 0, \exists C_M > 0, \forall u \in \widetilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^\phi \cap \mathcal{L}_M, \quad \|u\|_{\widetilde{\mathcal{G}}_n} \leq C_M \|u\|_{\widetilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}}.$$

Ceci va suivre de

$$(9.9.7) \quad \forall M > 0, \exists C_M > 0, \forall u \in \mathcal{R}_{(+,2),n} \cap \mathcal{L}_M, \quad \|u\|_{\mathcal{R}_n} \leq C_M \|u\|_{\mathcal{R}_{(+,2),n}}.$$

Soit alors  $u \in \mathcal{R}_{(+,2),n} \cap \mathcal{L}_M$ . On a

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{R}_n}^2 &\leq C \|u\|_{\mathcal{R}_{0,n}}^2 \leq \|u_1\|^2 + \left( \left( -\partial_s^2 + \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2} M(M+1) + f_n(r) \right) u_0, u_0 \right) \\ &\leq \|u_1\|^2 + ((-\partial_s^2 + C_{M,n})u_0, u_0) \leq C_M (\|u_1\|^2 + (h_{(+,2),n} u_0, u_0)) \\ &\leq C_M \|u\|_{\mathcal{R}_{(+,2),n}}^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé le Théorème 4.4.1. Ceci termine la démonstration. ■

Nous fixons maintenant  $N > 0$  tel que

$$m^2 \geq \frac{N^2 a^2}{r_+^3} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{r_+} \right).$$

On définit

$$\mathcal{G}_N^\phi := \bigoplus_{|n| \leq N} \widetilde{\mathcal{G}}_n^\phi, \quad \mathcal{G}_N^{\phi,f} := \bigoplus_{|n| \leq N} \widetilde{\mathcal{G}}_n^{\phi,f}.$$

Les espaces  $\mathcal{G}_{\nu,N}^\phi$  et  $\mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi,f}$  sont définis de la même façon. Notons qu'on a grâce au Lemme 9.9.1,  $\mathcal{G}_N^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi,f} \hookrightarrow \mathcal{E}_\nu$  avec injection continue.

**9.10. Opérateurs et dynamiques associées.** Après avoir fait le lien entre les espaces d'énergie, nous allons faire le lien entre les opérateurs et entre les dynamiques. On a au sens des opérateurs avec domaine  $\mathcal{H}_n^{2,\phi}$  :

$$(9.10.1) \quad \widetilde{h} = h_n - c_{1,n}^2 + 2k_n c_{1,n} \quad \text{resp.} \quad h_n = \widetilde{h} - 2\widetilde{k} c_{1,n} - c_{1,n}^2,$$

en particulier : si  $u \in \mathcal{H}_n^{2,\phi}$ , alors  $\tilde{h}u \in \mathcal{H}$ , où  $\tilde{h}u$  est à comprendre au sens des distributions. De façon analogue, on a au sens des opérateurs avec domaine  $\mathcal{H}_n^\phi$  :

$$(9.10.2) \quad \tilde{k} = k_n - c_{1,n} \quad \text{resp.} \quad k_n = \tilde{k} + c_{1,n}.$$

On a des propriétés analogues pour les opérateurs  $\tilde{k}_\nu, \tilde{h}_\nu$  et  $h_{\nu,n}, k_{\nu,n}$ .

On pose

$$\mathcal{D}_n^\phi := \mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}, \quad \mathcal{D}_{\nu,n}^\phi := \mathcal{H}_{\nu,n}^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_{\nu,n}^{1,\phi}.$$

Notons que  $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{D}_n^\phi$  dans lui-même et de  $\mathcal{D}_{\nu,n}^\phi$  dans lui-même. On pose

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i\tilde{h} & -2\tilde{k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i\tilde{h}_\nu & -2\tilde{k}_\nu \end{pmatrix}.$$

$\tilde{R}u$  et  $\tilde{R}_\nu u_\nu$  sont bien définis pour  $u \in \mathcal{D}_n^\phi$  et  $u_\nu \in \mathcal{D}_{\nu,n}^\phi$ .

LEMME 9.10.1. *Soient  $\nu \in \mathcal{N}$ ,  $u \in \mathcal{D}_n^\phi$  et  $u_\nu \in \mathcal{D}_{\nu,n}^\phi$ . Alors*

$$(9.10.3) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} (R_n + c_{1,n}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} u = \tilde{R}u,$$

$$(9.10.4) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} (R_{\nu,n} + c_{1,n}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} u_\nu = \tilde{R}_\nu u_\nu,$$

en particulier  $\tilde{R}u \in \mathcal{E}$  et  $\tilde{R}_\nu u_\nu \in \mathcal{E}_\nu$ .

*Démonstration.* Nous démontrons (9.10.3), la démonstration de (9.10.4) étant analogue.

Pour  $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}_n^\phi$ , on a

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} (R_n + c_{1,n}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,n} & i \\ -ih_n & -2k_n + c_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{1,n} & i \\ -i(h_n + c_{1,n}^2) & -2k_n + 2c_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i(h_n + 2k_n c_{1,n} - c_{1,n}^2) & -2(k_n - c_{1,n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \tilde{R} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où on a utilisé (9.10.1) et (9.10.2). ■

Nous posons pour  $\nu \in \mathcal{N}$  :

$$\tilde{\mathcal{U}}_n(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} e^{-i(R_n + c_{1,n})t} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{U}}_{\nu,n}(t) &:= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} e^{-i(R_{\nu,n}+c_{1,n})t} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_N(t) &:= \bigoplus_{|n| \leq N} \tilde{\mathcal{U}}_n(t), \quad \mathcal{U}_{\nu,N}(t) := \bigoplus_{|n| \leq N} \tilde{\mathcal{U}}_{\nu,n}(t).\end{aligned}$$

Une *solution* de (KG) resp. (KG $_{\nu}$ ) est un couple  $(u, \partial_t u)$  tel que  $u$  vérifie (KG) resp. (KG $_{\nu}$ ).

LEMME 9.10.2. *Pour tout  $(u_0^N, u_1^N) \in \mathcal{G}_N^{\phi} \subset \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{U}_N(t)(u_0^N, u_1^N)$  est la solution de (KG) avec donnée initiale  $(u_0^N, u_1^N)$  et membre de droite égal à zéro. On a une propriété analogue pour  $\mathcal{U}_{\nu,N}(t)$ .*

*Démonstration.* On ne démontre le lemme que pour  $\mathcal{U}_N(t)$ , la démonstration pour  $\mathcal{U}_{\nu,N}(t)$  étant analogue. Il suffit de démontrer le lemme pour  $\tilde{\mathcal{U}}_n(t)$ . Soient alors  $(u_0^n, u_1^n) \in \tilde{\mathcal{G}}_n^{\phi}$  et  $v_n(t) = \tilde{\mathcal{U}}_n(t)(u_0^n, u_1^n)$ . On a

$$v_n \in C([0, \infty[; \tilde{\mathcal{G}}_n^{\phi}) \subset C([0, \infty[; \mathcal{E}).$$

Soit  $\mathcal{U}_K(t)$  l'évolution qui associe à  $(v_0, v_1) \in \mathcal{E}$  la solution de l'équation de Klein–Gordon avec donnée initiale  $(v_0, v_1)$  et membre de droite égal à zéro. Nous avons à démontrer

$$(9.10.5) \quad \mathcal{U}_K(t)(v_0, v_1) = \tilde{\mathcal{U}}_n(t)(v_0, v_1), \quad \forall t \geq 0, \forall (v_0, v_1) \in \tilde{\mathcal{G}}_n^{\phi}.$$

Grâce à l'estimation d'énergie (9.4.6), on a  $\mathcal{U}_K(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$  pour tout  $t \geq 0$ . On a clairement  $\tilde{\mathcal{U}}_n(t) \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{G}}_n^{\phi}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$  pour tout  $t \geq 0$  et il suffit de démontrer (9.10.5) pour  $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}$ . Soit alors  $(v_0, v_1) \in \mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}$ . On a clairement  $\tilde{\mathcal{U}}_n(0)(v_0, v_1) = (v_0, v_1)$ . On calcule

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{U}}_n(t)(v_0, v_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} (R_n + c_{1,n}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_n(t)(v_0, v_1) = \tilde{R} \tilde{\mathcal{U}}_n(t)(v_0, v_1),$$

où on a utilisé que  $\tilde{\mathcal{U}}_n(t)$  envoie  $\mathcal{H}_n^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_n^{1,\phi}$  dans lui-même ainsi que le Lemme 9.10.1. ■

Nous posons

$$\tilde{\mathcal{G}}_{c,\nu,n}^{\phi} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{Im } \mathbf{1}^c(R_{\nu,n}) \cap \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^{\phi}, \quad \mathcal{G}_{c,\nu,N}^{\phi} := \bigoplus_{|n| \leq N} \tilde{\mathcal{G}}_{c,\nu,n}^{\phi}.$$

Notons que grâce au Théorème 4.2.4 on a  $\tilde{\mathcal{G}}_{c,\nu,n}^{\phi} = \tilde{\mathcal{G}}_{\nu,n}^{\phi}$  pour  $\nu \neq (+, 2)$ . Considérons alors la situation pour  $\nu = (+, 2)$ . On a  $\tilde{k}_{(+,2)} = 0$  et  $\mathcal{E}_{(+,2)}$  est égal à l'espace d'énergie associé à  $(\tilde{h}_{(+,2)}, 0)$  construit dans la Section 2.1. Soit  $\tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^i$  l'échelle d'espaces de Sobolev associée à  $\tilde{h}_{(+,2)}$ . L'opérateur  $\tilde{R}_{(+,2)}$  est autoadjoint avec domaine  $\tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^2 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^1$ . On a le lemme suivant :

LEMME 9.10.3. *On a*

$$(9.10.6) \quad \text{Im } \mathbf{1}^c(\tilde{R}_{(+,2)}) \cap \tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^{\phi} = \tilde{\mathcal{G}}_{c,(+,2),n}^{\phi}.$$

*Démonstration.* (9.10.6) est équivalent à

$$(9.10.7) \quad \text{Im } \mathbf{1}^{\text{PP}}(\tilde{R}_{(+,2)}) \cap \tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^{\phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{Im } \mathbf{1}^{\text{PP}}(R_{(+,2),n}) \cap \tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^{\phi}.$$



Comme  $\tilde{h}_{(+,2)} = h_{(+,2),n} + c_{1,n}^2$ ,  $h_{(+,2),n} \geq \delta > 0$ , on a

$$\tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^2 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathcal{H}_{(+,2),n}^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_{(+,2),n}^{1,\phi} = \mathcal{H}_{(+,2),n}^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_{(+,2),n}^{1,\phi}.$$

Par la formule (9.10.4), on voit que  $v \in \mathcal{H}_{(+,2),n}^{2,\phi} \oplus \mathcal{H}_{(+,2),n}^{1,\phi}$  est vecteur propre de  $R_{(+,2),n}$  avec valeur propre  $\lambda$  ssi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} v \in \tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^{2,\phi} \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{(+,2)}^{1,\phi}$$

est vecteur propre de  $\tilde{R}_{(+,2)}$  avec valeur propre  $\lambda + c_{1,n}$ , ce qui termine la démonstration. ■

**9.11. Absence de valeurs propres.** Dans cette section, nous allons supprimer l'indice  $n$ . Si l'on cherche des solutions de l'équation de Klein–Gordon sous la forme  $e^{i\lambda t} u(s, \theta, \phi)$ , alors on peut séparer les variables. Ceci a été observé par Carter (voir [C]). Pour l'étude des valeurs propres, on peut ainsi se ramener à un problème unidimensionnel.

LEMME 9.11.1. *Soit  $\tau := \sqrt{r^2 + a^2}$ . On a*

$$(9.11.1) \quad -\frac{1}{\tau} \partial_s \tau^2 \partial_s \frac{1}{\tau} = \frac{\tau''}{\tau^2} - \partial_s^2 \quad \text{et} \quad \tau'' \geq 0.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} \partial_s \tau^2 \partial_s \frac{1}{\tau} &= -\left[ \frac{1}{\tau}, \partial_s \right] \tau^2 \partial_s \frac{1}{\tau} - \partial_s \tau \partial_s \frac{1}{\tau} \\ &= \left[ \partial_s, \frac{1}{\tau} \right]^2 \tau^2 - \left[ \frac{1}{\tau}, \partial_s \right] \tau \partial_s + \partial_s \tau \left[ \frac{1}{\tau}, \partial_s \right] - \partial_s^2 = \frac{\tau''}{\tau} - \partial_s^2. \end{aligned}$$

On calcule

$$\tau' = \frac{rA}{(r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \tau'' = \frac{A^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{2r(r - M)A}{(r^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3r^2 A^2}{(r^2 + a^2)^{7/2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \tau'' \geq 0 &\Leftrightarrow A(r^2 + a^2) - 3r^2 A + 2r(r - M)(r^2 + a^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -2r^2 A + \Lambda a^2 + 2r(r^3 + a^2 r - Mr^2 - Ma^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -2r^2(r^2 + a^2 - 2Mr) + \Lambda a^2 + 2r(r^3 + a^2 r - Mr^2 - Ma^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4Mr^3 + \Lambda a^2 - 2Mr^3 - 2Ma^2 r \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2Mr(r^2 - a^2) + \Lambda a^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est vérifié puisque  $r \geq M \geq a$  et  $\Lambda a^2 \geq 0$ . ■

THÉORÈME 9.11.2. (i)  $h$  ne possède pas de valeurs propres.

(ii)  $R$  ne possède pas de valeurs propres.

*Démonstration.* (ii) Soit  $f_0 = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}^2 \oplus \mathcal{H}^1$  avec

$$\begin{aligned} Rf_0 = \lambda f_0 &\Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = -i\lambda f_1, \\ -ihf_1 - 2kf_2 = \lambda f_2, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f_2 = -i\lambda f_1, \\ hf_1 - 2k\lambda f_1 - \lambda^2 f_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$f := \mathcal{U}^{-1} f_1 = \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{\Sigma} f_1,$$

alors

$$f \in L^2\left(\mathbb{R} \times S^2, \frac{\Sigma^2}{r^2 + a^2} dsd\omega\right) \cap \mathcal{U}^{-1}\mathcal{H}^2$$

et  $f$  vérifie

$$(9.11.2) \quad h_2 f = 0,$$

$$(9.11.3) \quad \begin{aligned} h_2 &:= -\lambda^2 \frac{\Sigma^2}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{\Sigma^2}{(r^2 + a^2)^2} \tilde{h} - 2k\lambda \frac{\Sigma^2}{(r^2 + a^2)^2} \\ &= -\lambda^2 + \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2} A_\lambda + p_\lambda(r) - \frac{1}{r^2 + a^2} \partial_s(r^2 + a^2) \partial_s \end{aligned}$$

avec

$$(9.11.4) \quad A_\lambda = \left( \frac{a^2 n}{r_+^2 + a^2} + \lambda a \right)^2 \sin^2 \theta + m^2 a^2 \cos^2 \theta - \Delta_{S^2},$$

$$(9.11.5) \quad \begin{aligned} p_\lambda(r) &= \frac{4anMr\lambda}{(r^2 + a^2)^2} - \frac{2a\lambda n}{r_+^2 + a^2} - \frac{a^2 n^2}{(r_+^2 + a^2)^2} + \frac{4a^2 n^2 Mr}{(r_+^2 + a^2)(r^2 + a^2)^2} \\ &\quad - \frac{a^2 n^2}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{m^2 r^2 \Lambda}{(r^2 + a^2)^2}. \end{aligned}$$

Notons que

$$L^2\left(\mathbb{R} \times S^2, \frac{\Sigma^2}{r^2 + a^2} dsd\omega\right) = L^2(\mathbb{R} \times S^2, (r^2 + a^2) dsd\omega)$$

au sens des espaces topologiques. En effet,

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &\leq (r^2 + a^2)^2, \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)^2 - a^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + 2Mra^2 \sin^2 \theta \\ &\geq (r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2}(r^2 + a^2)^2 + (r^2 + a^2)\left(\frac{1}{2}(r^2 - a^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}a^2(1 - \sin^2 \theta)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}(r^2 + a^2)^2 \end{aligned}$$

puisque  $r \geq r_+ \geq M \geq a$ .

On voit que  $A_\lambda$  est un opérateur elliptique sur la variété compacte  $S^2$ . Soit  $(z_l^\lambda)_{l \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $L^2(S^2, d\omega)$  constituée de vecteurs propres de  $A_\lambda$  et  $Z_l^\lambda = \text{Vect}\{z_l^\lambda\}$ . Soient  $(\mu_l^\lambda)_{l \in \mathbb{N}}$  les valeurs propres correspondantes. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R} \times S^2, (r^2 + a^2) dsd\omega) &= L^2(\mathbb{R}, (r^2 + a^2) ds) \otimes L^2(S^2, d\omega) \\ &= \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} L^2(\mathbb{R}, (r^2 + a^2) ds) \otimes Z_l^\lambda. \end{aligned}$$

Comme  $f \in L^2(\mathbb{R} \times S^2, (r^2 + a^2) dsd\omega)$ , nous pouvons écrire ensuite

$$f = \sum_l \alpha_l(s) z_l^\lambda$$

avec  $\alpha_l \in L^2(\mathbb{R}, (r^2 + a^2)ds)$ . (9.11.2) est alors équivalente à

$$(9.11.6) \quad \lambda^2 \alpha_l = \left( \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \mu_l^\lambda + p_\lambda(r) - \frac{1}{\tau^2} \partial_s \tau^2 \partial_s \right) \alpha_l, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Considérons maintenant la transformation unitaire

$$\mathcal{V} : L^2(\mathbb{R}, (r^2 + a^2)ds) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, ds), \quad v \mapsto \sqrt{r^2 + a^2} v,$$

et posons  $\beta_l := \mathcal{V} \alpha_l \in L^2(\mathbb{R}, ds)$ . Soit aussi

$$W_l^\lambda(r) := \frac{\Lambda}{(r^2 + a^2)^2} \mu_l^\lambda + p_\lambda(r) + \frac{\tau''}{\tau}.$$

On obtient

$$(9.11.7) \quad \lambda^2 \beta_l = (-\partial_s^2 + W_l^\lambda) \beta_l.$$

Rappelons que

$$p_\lambda(r) = \frac{(r - r_+)}{(r_+^2 + a^2)^2 (r^2 + a^2)^2} q(r) \\ + \frac{2an\lambda}{(r^2 + a^2)(r_+^2 + a^2)} (-\Lambda(r_+^2 + a^2) + (r^2 + a^2)(r_+ - r)(r_+ + r))$$

avec le  $q$  du Lemme 9.5.1, et que

$$\tau'' = \frac{\Lambda^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} + \frac{2r(r - M)\Lambda}{(r^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3r^2 \Lambda^2}{(r^2 + a^2)^{7/2}}.$$

Ceci implique  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} - W_l^\lambda \in L^1(\mathbb{R}, ds)$  et  $W_l^\lambda \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ . Si  $\lambda \neq 0$ , on peut alors appliquer le Lemme 4.2.1 pour conclure que  $\beta_l = 0$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et donc  $f_0 = 0$ . Soit maintenant  $\lambda = 0$ . Comme  $W_l^0(r) \geq 0$ , ceci implique  $\partial_s \beta_l = 0$  et donc  $\beta_l = 0$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ . Il suit que  $f_0 = 0$ .

(i) Toute valeur propre de  $h$  est non négative et

$$hu = \lambda^2 u \text{ donne } h_3 v = 0 \text{ avec } v := \mathcal{U}^{-1} u,$$

où  $h_3$  est obtenu à partir de  $h_2$  en posant tous les coefficients linéaires en  $\lambda$  égaux à zéro. À partir de là, la démonstration est la même que pour la partie (ii). ■

**9.12. Opérateurs d'onde.** Dans cette section, nous allons appliquer les résultats des Chapitres 7 et 8. Soient  $j_\pm \in C_b^\infty(\mathbb{R})$  comme dans le Chapitre 3, i.e.  $j_\pm \geq 0$ ,  $j_-^2 + j_+^2 = 1$  et  $j_{(-,i)} := j_-$ ,  $j_{(+,i)} := j_+$  ( $i = 1, 2$ ),  $j_0 = 1$ . Notons que  $j_\pm$  envoie les espaces  $\mathcal{R}_n^\phi$ ,  $\mathcal{R}_{\nu,n}^\phi$ ,  $\mathcal{R}_n^{\phi,f}$  et  $\mathcal{R}_{\nu,n}^{\phi,f}$  dans eux-mêmes.

**COROLLAIRE 9.12.1.** *Soient  $|n| \leq N$  et  $\nu \in \{(\pm, 1)\}$ . On a*

$$\begin{aligned} \exists \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_{\nu,n}} j_\nu e^{-itR_{\nu,n}} &=: P_{\nu,n}^+, \\ \forall u \in \mathcal{R}_{\nu,n}^\phi, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_n} j_\nu e^{-itR_{\nu,n}} u &=: \Omega_{\nu,n}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_n^\phi, \\ \forall u \in \mathcal{R}_n^\phi, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_{\nu,n}} j_\nu e^{-itR_n} u &=: W_{\nu,n}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_{\nu,n}^\phi. \end{aligned}$$

$P_{\nu,n}^+$ ,  $\Omega_{\nu,n}^+$  et  $W_{\nu,n}^+$  sont indépendants du choix de  $j_{\pm}$  et on a

$$(P_{\nu,n}^+)^2 = P_{\nu,n}^+, \quad [P_{\nu,n}^+, R_{\nu,n}] = 0, \quad \Omega_{(-,1),n}^+ W_{(-,1),n}^+ + \Omega_{(+,1),n}^+ W_{(+,1),n}^+ = \mathbf{1}.$$

Le corollaire suit des Théorèmes 7.3.1 et 8.4.1 en utilisant les résultats sur l'absence de valeurs propres. De la même façon, on obtient à l'aide des Théorèmes 7.3.1 et 8.4.2 :

**COROLLAIRE 9.12.2.** *Soit  $\nu \in \{(\pm, 2)\}$ . On a*

$$\begin{aligned} & \exists \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itR_{\nu,n}} j_{\nu} e^{-itR_{\nu,n}} =: P_{\nu,n}^+, \\ & \forall u \in \mathcal{R}_{\nu,n}^{\phi,f}, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_{\nu,n}} j_{\nu} e^{-itR_{\nu,n}} \mathbf{1}^c(R_{\nu,n}) u =: \Omega_{\nu,n}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_n^{\phi}, \\ & \forall u \in \mathcal{R}_n^{\phi}, \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itR_{\nu,n}} j_{\nu} e^{-itR_{\nu,n}} u =: W_{\nu,n}^+ u \quad \text{dans } \mathcal{R}_{\nu,n}^{\phi}. \end{aligned}$$

$P_{\nu,n}^+$ ,  $\Omega_{\nu,n}^+$  et  $W_{\nu,n}^+$  sont indépendants du choix de  $j_{\pm}$  et on a

$$(P_{\nu,n}^+)^2 = P_{\nu,n}^+, \quad [P_{\nu,n}^+, R_{\nu,n}] = 0, \quad \Omega_{(-,2),n}^+ W_{(-,2),n}^+ + \Omega_{(+,2),n}^+ W_{(+,2),n}^+ = \mathbf{1}.$$

**9.13. Complétude asymptotique.** Dans cette section, nous allons comparer la solution de l'équation de Klein-Gordon dans la métrique de Kerr avec les solutions des autres équations de la Section 9.3. On rappelle qu'une solution de (KG) resp.  $(\text{KG}_{\nu})$  est un couple  $(f(t), \partial_t f(t))$  tel que  $f(t)$  vérifie (KG) resp.  $(\text{KG}_{\nu})$ .

**THÉORÈME 9.13.1.** *Soit  $\nu \in \{0, (\pm, 1)\}$ .*

(i) *Soient  $(v_{(\nu,0)}, v_{(\nu,1)}) \in \mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi}$  et  $v_{\nu}(t)$  la solution de  $(\text{KG}_{\nu})$  avec donnée initiale  $(v_{(\nu,0)}, v_{(\nu,1)})$ . Alors il existe une solution  $u_{\nu}^+ \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_N^{\phi})$  de (KG) telle que*

$$(9.13.1) \quad \|u_{\nu}^+(t) - j_{\nu} v_{\nu}(t)\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

(ii) *Soient  $(u_0, u_1) \in \mathcal{G}_N^{\phi}$  et  $u(t)$  la solution de (KG) avec donnée initiale  $(u_0, u_1)$ . Alors il existe une solution  $v_{\nu}^+ \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi})$  de  $(\text{KG}_{\nu})$  telle que*

$$(9.13.2) \quad \|v_{\nu}^+(t) - j_{\nu} u(t)\|_{\mathcal{E}_{\nu}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

*Démonstration.* Soient

$$(v_{(\nu,0)}, v_{(\nu,1)}) = \sum_{|n| \leq N} (v_{(\nu,0)}^n, v_{(\nu,1)}^n) \in \mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi}, \quad (u_0, u_1) = \sum_{|n| \leq N} (u_0^n, u_1^n) \in \mathcal{G}_N^{\phi}.$$

On pose

$$\begin{aligned} (u_{(\nu,0)}^+, u_{(\nu,1)}^+) &:= \sum_{|n| \leq N} \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} e^{itR_{\nu,n}} j_{\nu} e^{-itR_{\nu,n}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} (v_{(\nu,0)}^n, v_{(\nu,1)}^n), \\ (v_{(\nu,0)}^+, v_{(\nu,1)}^+) &:= \sum_{|n| \leq N} \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} e^{itR_{\nu,n}} j_{\nu} e^{-itR_{\nu,n}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ ic_{1,n} & \mathbf{1} \end{pmatrix} (u_0^n, u_1^n). \end{aligned}$$

Soit  $u_{\nu}^+(t)$  la solution de (KG) avec donnée initiale  $(u_{(\nu,0)}^+, u_{(\nu,1)}^+)$  et  $v_{\nu}^+(t)$  la solution de  $(\text{KG}_{\nu})$  avec donnée initiale  $(v_{(\nu,0)}^+, v_{(\nu,1)}^+)$ . Alors  $u_{\nu}^+(t)$  vérifie (9.13.1) et  $v_{\nu}^+(t)$  vérifie (9.13.2) grâce au Corollaire 9.12.1 et le Lemme 9.9.1. ■

Le théorème suivant se démontre de la même façon :

THÉORÈME 9.13.2. Soit  $\nu \in \{(\pm, 2)\}$ .

(i) Soient  $(v_{(\nu,0)}, v_{(\nu,1)}) \in \mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi,f} \cap \mathcal{G}_{c,\nu,N}^{\phi}$  et  $v_{\nu}(t)$  la solution de  $(\text{KG}_{\nu})$  avec donnée initiale  $(v_{(\nu,0)}, v_{(\nu,1)})$ . Alors il existe une solution  $u_{\nu}^+ \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi})$  de  $(\text{KG})$  avec

$$(9.13.3) \quad \|u_{\nu}^+(t) - j_{\nu}v_{\nu}(t)\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

(ii) Soient  $(u_0, u_1) \in \mathcal{G}_N^{\phi}$  et  $u(t)$  la solution de  $(\text{KG})$  avec donnée initiale  $(u_0, u_1)$ . Alors il existe une solution  $v_{\nu}^+ \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi})$  de  $(\text{KG}_{\nu})$  avec

$$(9.13.4) \quad \|v_{\nu}^+(t) - j_{\nu}u(t)\|_{\mathcal{E}_{\nu}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

REMARQUE 9.13.3. Par construction ou par la Proposition 9.9.3, on peut remplacer la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{\nu}}$  dans (9.13.1)–(9.13.4) par la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{G}_N^{\phi}}$  resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{G}_{\nu,N}^{\phi}}$ . Les théorèmes d'existence et d'unicité étant formulés dans les espaces  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_{\nu}$ , on a choisi les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{\nu}}$ .

**9.14. Les profils.** Dans cette section, nous allons décrire le comportement asymptotique des solutions en termes de profils. Considérons l'équation

$$(\text{KG}_{(+,2)}) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_s^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|}\theta_0(s))u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

Cette équation est décrite par le couple d'opérateurs  $(\tilde{h}_{(+,2)}, 0)$ , ce qui fait que l'énergie  $\mathcal{E}_{(+,2)}$  est la même énergie que nous avons associée à cette équation dans la Section 2.1, en particulier elle est conservée. Soient

$$\tilde{L}_{(+,2)} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{(+,2)}^{1/2} & 0 \\ 0 & -\tilde{h}_{(+,2)}^{1/2} \end{pmatrix}, \quad X(t) := it\sqrt{D_s^2 + m^2} - i \ln t \frac{Mm^2}{|D_s|},$$

$$U_D(t) = \exp \begin{pmatrix} -X(t) & 0 \\ 0 & X(t) \end{pmatrix}$$

Par le Théorème 8.5.1, on obtient :

THÉORÈME 9.14.1. *Les limites fortes*

$$(9.14.1) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\tilde{L}_{(+,2)}} U_D(t),$$

$$(9.14.2) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U_D(-t) e^{-it\tilde{L}_{(+,2)}} \mathbf{1}^c(\tilde{L}_{(+,2)})$$

existent. Si l'on désigne (9.14.1) par  $\tilde{\Omega}_{\text{lr}}^+$ , alors (9.14.2) est égale à  $(\tilde{\Omega}_{\text{lr}}^+)^*$  et on a

$$\tilde{\Omega}_{\text{lr}}^+(\tilde{\Omega}_{\text{lr}}^+)^* = \mathbf{1}^c(\tilde{L}_{(+,2)}), \quad (\tilde{\Omega}_{\text{lr}}^+)^*\tilde{\Omega}_{\text{lr}}^+ = \mathbf{1}.$$

On appelle  $\mathcal{E}_D$  l'espace d'énergie associé à  $(D_s^2 + m^2, 0)$  selon la Section 2.1 (qui est identique à l'espace d'énergie associé à  $(D_s^2 + m^2, 0)$  selon la Section 9.4). On a clairement  $\mathcal{E}_{(+,2)} = \mathcal{E}_D$  au sens des espaces topologiques. Soit  $U$  la transformation unitaire de la Section 2.1. On pose

$$U_D(t) := U^*(D_s^2 + m^2)U_D(t)U(D_s^2 + m^2).$$

On rappelle que  $\tilde{R}_{(+,2)}$  est l'opérateur sur  $\mathcal{E}_{(+,2)}$  associé à  $(\tilde{h}_{(+,2)}, 0)$  selon la Section 2.1.

THÉORÈME 9.14.2. (i) *Les limites fortes*

$$(9.14.3) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\tilde{R}_{(+,2)}} \mathcal{U}_D(t),$$

$$(9.14.4) \quad \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}_D(-t) e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \mathbf{1}^c(\tilde{R}_{(+,2)})$$

existent. Si (9.14.3) est égale à  $\Omega_{\text{lr}}^+$ , alors (9.14.4) est égale à  $(\Omega_{\text{lr}}^+)^*$  et on a

$$\Omega_{\text{lr}}^+(\Omega_{\text{lr}}^+)^* = \mathbf{1}^c(\tilde{R}_{(+,2)}), \quad (\Omega_{\text{lr}}^+)^* \Omega_{\text{lr}}^+ = \mathbf{1}.$$

(ii) Si  $(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f} \subset \mathcal{E}_{(+,2)}$ , alors

$$(9.14.5) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}}(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f},$$

$$(9.14.6) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_D(t)(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f},$$

$$(9.14.7) \quad \Omega_{\text{lr}}^+(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f},$$

$$(9.14.8) \quad \|e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \Omega_{\text{lr}}^+(v_0, v_1) - \mathcal{U}_D(t)(v_0, v_1)\|_{\mathcal{G}_N^\phi} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

(iii) Si  $(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}_{(+,2)}$ , alors  $(\Omega_{\text{lr}}^+)^*(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^\phi$ .

*Démonstration.* (i) À partir du Théorème 9.14.1, on obtient l'existence des limites

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\tilde{R}_{(+,2)}} U^*(\tilde{h}_{(+,2)}) U(D_s^2 + m^2) \mathcal{U}_D(t),$$

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}_D(-t) U^*(D_s^2 + m^2) U(\tilde{h}_{(+,2)}) e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \mathbf{1}^c(\tilde{R}_{(+,2)}).$$

Il reste à voir que

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\tilde{R}_{(+,2)}} (\mathbf{1} - U^*(\tilde{h}_{(+,2)}) U(D_s^2 + m^2)) \mathcal{U}_D(t) = 0,$$

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}_D(-t) (\mathbf{1} - U^*(D_s^2 + m^2) U(\tilde{h}_{(+,2)})) e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \mathbf{1}^c(\tilde{R}_{(+,2)}) = 0$$

resp.

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{it\tilde{L}_{(+,2)}^{m,l}} (U(\tilde{h}_{(+,2)}^{m,l}) U^*(D_s^2 + m^2) - \mathbf{1}) U_D^{m,l}(t) = 0, \quad \forall m, l,$$

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} U_D(t)^{m,l} (-t) (U(D_s^2 + m^2) U^*(\tilde{h}_{(+,2)}^{m,l}) - \mathbf{1}) e^{-it\tilde{L}_{(+,2)}^{m,l}} \mathbf{1}^c(\tilde{L}_{(+,2)}^{m,l}) = 0, \quad \forall m, l,$$

où l'exposant  $m, l$  signifie la restriction à  $\mathcal{H}_{m,l}$  resp.  $\mathcal{L}_{m,l}$ . Nous allons supprimer cet exposant à partir de maintenant. Pour que l'affirmation précédente soit vraie, il suffit que

$$U(D_s^2 + m^2) U^*(\tilde{h}_{(+,2)}) - \mathbf{1} \text{ soit compact.}$$

On a

$$U(D_s^2 + m^2) U^*(\tilde{h}_{(+,2)}) - \mathbf{1} = \frac{1}{2} ((D_s^2 + m^2)^{1/2} \tilde{h}_{(+,2)}^{-1/2} - \mathbf{1}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\check{h}_{(+,2)} = D_s^2 + m^2/2 - \theta_0(s)2Mm^2/|s|$ . On a  $\check{h} > D_s^2$ . Grâce au Théorème C.3,

$$\sigma_{\text{pr}}(\tilde{h}_{(+,2)}^{-1/2}) = \sigma_{\text{pr}}\left(\left(\check{h}_{(+,2)} + \frac{m^2}{2}\right)^{-1/2}\right) = \left(\xi^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s)\right)^{-1/2}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \left( \xi^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|} \right)^{-1/2} - (\xi^2 + m^2)^{-1/2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \left( \tau \left( \xi^2 + m^2 - \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s) \right) + (1-\tau)(\xi^2 + m^2) \right)^{-3/2} \frac{2Mm^2}{|s|} \theta_0(s) d\tau \in \mathbf{S}^{-3,-1}. \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\tilde{h}_{(+,2)}^{-1/2} = (D_s^2 + m^2)^{-1/2} + e^w \quad \text{avec } e^w \in \Psi^{-3,-1}.$$

Alors  $(D_s^2 + m^2)^{1/2} e^w \in \Psi^{-2,-1}$  et donc compact par le Lemme C.4. Il s'ensuit que

$$(D_s^2 + m^2)^{1/2} \tilde{h}_{(+,2)}^{-1/2} - 1 \text{ est compact.}$$

(ii) Soit  $\mathcal{L}_M$  comme dans la démonstration du Lemme 9.9.4. Les dynamiques  $e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}}$  et  $\mathcal{U}_D(t)$  sont définies par restriction à  $\mathcal{E}_{(+,2)} \cap \mathcal{L}_{m,l}$  et elles préservent alors les espaces  $\mathcal{E}_{(+,2)} \cap \mathcal{L}_{m,l}$ ,  $\mathcal{E}_{(+,2)} \cap \mathcal{L}_M$ . D'autre part, on a

$$(9.14.9) \quad \forall |n| \leq N, \quad \tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n}^\phi \hookrightarrow \mathcal{E}_{(+,2)} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{(+,2),n},$$

ce qui donne (9.14.5)–(9.14.7). Si  $(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f}$ , alors il existe  $M > 0$  tel que  $(v_0, v_1) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^\phi \cap \mathcal{L}_M$  et (9.14.8) suit de

$$\begin{aligned} & \|e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \Omega_{\text{lr}}^+(v_0, v_1) - \mathcal{U}_D(t)(v_0, v_1)\|_{\mathcal{G}_N^\phi} \\ & \leq C_M \|e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \Omega_{\text{lr}}^+(v_0, v_1) - \mathcal{U}_D(t)(v_0, v_1)\|_{\mathcal{G}_{(+,2),N}^\phi} \\ & \leq \tilde{C}_M \|e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}} \Omega_{\text{lr}}^+(v_0, v_1) - \mathcal{U}_D(t)(v_0, v_1)\|_{\mathcal{E}_{(+,2)}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé (9.9.6) ainsi que le Lemme 9.9.2.

(iii) suit également du fait que les dynamiques  $e^{-it\tilde{R}_{(+,2)}}$  et  $\mathcal{U}_D(t)$  sont définies par restriction à  $\mathcal{E}_{(+,2)} \cap \mathcal{L}_{m,l}$  et de (9.14.9). ■

Nous allons calculer la dynamique  $\mathcal{U}_D(t)$  explicitement. Soit  $h_+ = D_s^2 + m^2$ . On a

$$\begin{aligned} U^*(h_+) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} U(h_+) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+^{-1/2} & h_+^{-1/2} \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+^{1/2} & i \\ h_+^{1/2} & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ih_+^{-1/2} \\ -ih_+^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_D(t) &= \exp \left( -it \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i(D_s^2 + m^2) & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. - i \ln t \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{m^2 M}{|D_s|} (D_s^2 + m^2)^{-1/2} \\ i \frac{m^2 M}{|D_s|} (D_s^2 + m^2)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Pour décrire les profils près de l'horizon, nous allons démontrer une formule explicite pour les solutions de l'équation  $(\text{KG}_{(-,2)})$ . Soit  $c_1 := a/(r_+^2 + a^2)$ . On considère alors l'équation

$$(\text{KG}_{(-,2)}) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_s^2 + 2c_1 \partial_t \partial_\phi + c_1^2 \partial_\phi^2)u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

**THÉORÈME 9.14.3.** *Si  $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times S_\omega^2)$ , alors la solution  $(u(t), \partial_t u(t))$  de  $(\text{KG}_{(-,2)})$  est donnée par*

$$(9.14.10) \quad u(t) = \frac{1}{2} (u_0(s+t, \theta, \phi - c_1 t) + u_0(s-t, \theta, \phi - c_1 t)) \\ + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} (u_1(\tau, \theta, \phi - c_1 \tau) + c_1 \partial_\phi u_0(\tau, \theta, \phi - c_1 \tau)) d\tau.$$

*Démonstration.* Si  $(u(t), \partial_t u(t))$  est solution de  $(\text{KG}_{(-,2)})$ , alors  $v(t, s, \theta, \phi) = u(t, s, \theta, \phi + c_1 t)$  vérifie

$$(9.14.11) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_s^2)v = 0, \\ v|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t v|_{t=0} = u_1 + c_1 \partial_\phi u_0. \end{cases}$$

(9.14.10) suit alors de la formule bien connue pour la solution de (9.14.11). ■

On a ensuite le

**THÉORÈME 9.14.4.** (i) *Pour tout  $(v_{(-,0)}, v_{(-,1)}) \in \mathcal{G}_{(-,2),N}^{\phi,f}$  et tout  $(v_{(+,0)}, v_{(+,1)}) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f}$ , il existe des solutions  $u_-^\pm, u_+^\pm \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_N^\phi)$  de  $(\text{KG})$  telles que*

$$(9.14.12) \quad \|u_-^\pm(t) - j_- \mathcal{U}_{(-,2),N}(t)(v_{(-,0)}, v_{(-,1)})\|_\varepsilon \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$(9.14.13) \quad \|u_+^\pm(t) - j_+ \mathcal{U}_D(t)(v_{(+,0)}, v_{(+,1)})\|_\varepsilon \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

(ii) *Soient  $(u_0, u_1) \in \mathcal{G}_N^\phi$  et  $u(t)$  la solution de  $(\text{KG})$  avec donnée initiale  $(u_0, u_1)$ . Alors il existe  $(v_{(-,0)}^+, v_{(-,1)}^+) \in \mathcal{G}_{(-,2),N}^\phi$  et  $(v_{(+,0)}^+, v_{(+,1)}^+) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^\phi$  telles que*

$$(9.14.14) \quad \|\mathcal{U}_{(-,2),N}(v_{(-,0)}^+, v_{(-,1)}^+) - j_- u(t)\|_{\mathcal{E}_{(-,2)}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$(9.14.15) \quad \|\mathcal{U}_D(v_{(+,0)}^+, v_{(+,1)}^+) - j_+ u(t)\|_{\mathcal{E}_{(+,2)}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

**REMARQUE 9.14.5.** Comme dans les Théorèmes 9.13.1 et 9.13.2, on peut remplacer la norme  $\|\cdot\|_\varepsilon$  resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_{(\pm,2)}}$  par la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{G}_N^\phi}$  resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{G}_{(\pm,2),N}^\phi}$ .

*Démonstration du Théorème 9.14.4.* (i) L'existence de  $u_\pm^\pm(t)$  est déjà incluse dans le Théorème 9.13.2. Pour démontrer l'existence de  $u_\pm^\pm(t)$ , nous choisissons d'abord  $w_1(t)$  solution de  $(\text{KG}_{(+,2)})$  telle que

$$\|w_1(t) - \mathcal{U}_D(t)(v_{(+,0)}, v_{(+,1)})\|_{\mathcal{G}_N^\phi} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

L'existence de  $w_1$  est assurée par le Théorème 9.14.2. Par le même théorème et le Lemme 9.10.3, on obtient

$$w_1|_{t=0} \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi,f} \cap \mathcal{G}_{c,(+,2),N}^\phi.$$



Par le Théorème 9.13.2, nous pouvons alors choisir  $u_{\pm}^{\dagger} \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_N^{\phi})$  solution de (KG) telle que

$$\|u_{\pm}^{\dagger}(t) - j_{\pm} w_1(t)\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \|u_{\pm}^{\dagger}(t) - j_{\pm} \mathcal{U}_D(t)(v_{(+,0)}, v_{(+,1)})\|_{\mathcal{E}} \\ & \leq \|u_{\pm}^{\dagger}(t) - j_{\pm} w_1(t)\|_{\mathcal{E}} + \|w_1(t) - \mathcal{U}_D(t)(v_{(+,0)}, v_{(+,1)})\|_{\mathcal{E}} \\ & \leq \|u_{\pm}^{\dagger}(t) - j_{\pm} w_1(t)\|_{\mathcal{E}} + C \|w_1(t) - \mathcal{U}_D(t)(v_{(+,0)}, v_{(+,1)})\|_{\mathcal{G}_N^{\phi}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

où on a utilisé le Lemme 9.9.1.

(ii) L'existence de  $(v_{(-,0)}^{\dagger}, v_{(-,1)}^{\dagger})$  suit du Théorème 9.13.2. Pour  $(u_0, u_1) \in \mathcal{G}_N^{\phi}$ , il existe par le même théorème une solution  $w_2 \in C([0, \infty[; \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi})$  de (KG) $_{(+,2)}$  telle que

$$\|w_2(t) - j_{+} u(t)\|_{\mathcal{E}_{(+,2)}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Utilisant le Lemme 9.10.3, on obtient  $w_2|_{t=0} \in \text{Im } \mathbf{1}^c(\tilde{R}_{(+,2)})$ . On peut alors appliquer le Théorème 9.14.2 pour obtenir  $(v_{(+,0)}^{\dagger}, v_{(+,1)}^{\dagger}) \in \mathcal{G}_{(+,2),N}^{\phi}$  telle que

$$\|\mathcal{U}_D(t)(v_{(+,0)}^{\dagger}, v_{(+,1)}^{\dagger}) - w_2(t)\|_{\mathcal{E}_{(+,2)}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

et  $(v_{(+,0)}^{\dagger}, v_{(+,1)}^{\dagger})$  vérifie (9.14.15). ■

## Annexe A. Quelques lemmes concernant le problème non séparable

**A.1. Remarques préliminaires.** Dans tout cet appendice,  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  est une fonction de troncature. Une extension *presque analytique*  $\tilde{\chi}$  de  $\chi$  est une fonction  $\tilde{\chi} \in C_0^{\infty}(\mathbb{C})$  avec

$$\tilde{\chi}|_{\mathbb{R}} = \chi, \quad |\bar{\partial} \tilde{\chi}(z)| \leq C_N |\text{Im } z|^N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Pour un opérateur autoadjoint  $H$ , on peut calculer  $\chi(H)$  par la formule de Helffer–Sjöstrand

$$\chi(H) = \frac{i}{2\pi} \int \bar{\partial} \tilde{\chi}(z - H)^{-1} dz \wedge d\bar{z}.$$

La fonction  $\chi$  va être souvent supportée dans  $]0, \infty[$ . Dans ce cas nous choisissons  $\chi_1 \in C_0^{\infty}(]0, \infty[)$  avec  $\chi \chi_1 = \chi$ . La fonction  $\chi_1$  aidera à établir la convergence des intégrales qui interviennent. Expliquons ceci à l'aide d'un exemple.

Rappelons que  $b_{\chi}$  est la fermeture de  $\chi(h)b_{\chi}(h)$ . L'opérateur borné  $[ih^{1/2}, b_{\chi}]$  s'écrit comme intégrale convergente en norme :

$$(A.1.1) \quad [ih^{1/2}, b_{\chi}] = \pi^{-1} \int_0^{\infty} s^{1/2} (s+h)^{-1} \chi(h) [ih, b]_0 \chi(h) (s+h)^{-1} ds.$$

Ici  $[ih, b]_0$  désigne l'extension de  $[ih, b]$  à un opérateur borné de  $\mathcal{H}^2$  dans  $\mathcal{H}^{-1}$ . Pour établir la convergence en norme des intégrales que nous rencontrons, nous utiliserons les faits

suivants :

$$(A.1.2) \quad \|(s+h)^{-1}\| \leq \langle s \rangle^{-1}, \quad s \geq 1,$$

$$(A.1.3) \quad \|\chi_1(h)(s+h)^{-1}\| \leq C, \quad s \leq 1.$$

Tout terme  $\chi(h)$  dans une intégrale peut être composé à droite et à gauche par  $\chi_1(h)$ , sans changer la valeur de l'intégrale. Nous utiliserons systématiquement cette remarque pour obtenir la convergence en 0 des intégrales (à l'aide de (A.1.3)), la convergence en  $\infty$  suivant de (A.1.2). En particulier la convergence en norme de l'intégrale dans (A.1.1) suit de cette méthode.

**A.2. Démonstration des Lemmes 5.4.1 et 5.4.2.** On adopte les notations du Chapitre 5. Nous posons  $Z := X_- + X_+$ .

LEMME A.2.1. *On a*

$$(A.2.1) \quad |Z^{(i)}Z^{(k)}| \leq C \quad \text{unif. en } q \quad \text{si } i+k \geq 2.$$

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $i = 0$ . Sinon le lemme suit du Corollaire 5.2.2. Rappelons que :

$$(A.2.2) \quad |X_{\pm}| \leq C\langle r \rangle,$$

$$(A.2.3) \quad |X_{\pm}^{(i)}| \leq C \quad \text{unif. en } q, \quad \forall i \geq 1,$$

$$(A.2.4) \quad |X_-| \leq C\langle r + \ln q \rangle.$$

$X_+X_+^{(k)}$ ,  $X_-X_+^{(k)}$  et  $X_+X_-^{(k)}$  sont des fonctions supportées pour  $r$  dans un ensemble compact qui est indépendant de  $q$ , ce qui donne l'estimation pour ces termes grâce à (A.2.2) et (A.2.3). Il reste à considérer  $X_-X_-^{(k)}$ . Puisque  $X_-^{(k)}$  est bornée, il suffit grâce à (A.2.2) et (A.2.4) de démontrer que  $X_-^{(k)}$  est une somme de termes qui sont supportés soit en  $|r + \ln q| \leq C$ , soit en  $|r| \leq C$ . Comme  $k \geq 2$ ,  $X_-^{(k)}$  est une somme de termes du genre

$$(f_{+,R}^2)^{(i)}(\sigma r + \ln q - 2S)^{(n)} \left( F^2 \left( \frac{\sigma r + \ln q}{S} \right) \right)^{(j)} \quad \text{avec } i \geq 1 \text{ ou } j \geq 1.$$

Si  $i \geq 1$ , ce terme est supporté en  $|r| \leq C$ ; si  $j \geq 1$ , il est supporté en  $|r + \ln q| \leq C$ . ■

LEMME A.2.2. *Soient  $j, i, k \in \mathbb{N}$ ,  $3 \geq i \geq 1$  et  $i+k \geq 2$ . On a uniformément en  $l$  :*

$$(A.2.5) \quad |g^{(i)}\lambda_l X_-^{(j)}| \leq C, \quad |X_-^{(k)}g^{(i)}\lambda_l X_-^{(j)}| \leq C,$$

$$(A.2.6) \quad |g^{(i)}\lambda_l X_+^{(j)}| \leq Cg(r)\lambda_l, \quad |X_+^{(j)}g^{(i)}\lambda_l X_+^{(k)}| \leq Cg(r)\lambda_l,$$

$$(A.2.7) \quad |X_-^{(j)}g^{(i)}\lambda_l X_+^{(k)}| \leq C, \quad |X_+^{(j)}g^{(i)}\lambda_l X_-^{(k)}| \leq C.$$

*Démonstration.* Montrons d'abord (A.2.5). On a

$$|g^{(i)}\lambda_l| \leq Ce^{\sigma r + \ln q}$$

sur  $\text{supp } X_-^{(j)}$ . D'autre part,  $\sigma r + \ln q \leq S$  sur  $\text{supp } X_-^{(j)}$  et

$$|X_-^{(k)}|, |X_-^{(j)}| \leq C|\sigma r + \ln q - 2S|.$$

La fonction  $x \mapsto e^x x^n$  étant bornée sur  $]-\infty, S[$ , ceci donne (A.2.5).

Montrons maintenant (A.2.6). On a

$$|g^{(i)}| \leq C \langle r \rangle^{-2-i} \quad \text{sur } \text{supp } X_+^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad |X_+^{(n)}| \leq C \langle r \rangle^{1-n}.$$

Donc

$$|X_+^{(j)} g^{(i)} \lambda_l X_+^{(k)}| \leq C \langle r \rangle^{-(i+j+k)} \lambda_l \mathbf{1}_{\{r \geq 0\}}(r) \leq C g(r) \lambda_l$$

puisque  $i + k \geq 2$ ; on obtient la première inégalité par le même raisonnement.

L'inégalité (A.2.7) suit de (A.2.5) en utilisant que  $|X_+^{(n)}| \leq C$  sur  $\text{supp } X_+^{(n)} \cap \text{supp } X_-^{(k)}$  pour tout  $k, n \in \mathbb{N}$ . ■

La démonstration du Lemme 5.2.5 montre que  $[ih_0^l, b^l]$  possède une extension à un opérateur borné de  $D(h_0^l)$  dans  $\mathcal{H}_l$  avec norme indépendante de  $l$  et par dualité de  $\mathcal{H}_l$  dans  $D(h_0^l)^*$ . Nous notons cette extension  $[ih_0^l, b^l]_0$ . On peut alors considérer le double commutateur  $ad_{h_0^l}^2 b^l$  comme forme quadratique sur  $H^k$  pour tout  $k \geq 2$ . Nous allons voir qu'il possède une extension à un opérateur borné de  $H^3$  dans  $L^2$ . Ceci permet de définir  $b^l ad_{h_0^l}^2 b^l$  comme forme quadratique sur  $H^3 \cap D(N^l) = H^3 \cap D(\langle r \rangle^2)$ .

LEMME A.2.3. (i) *Le commutateur  $ad_{h_0^l}^2 b^l$  défini comme forme quadratique sur  $H^3$  possède une extension à un opérateur borné de  $H^3$  dans  $L^2$  que nous allons noter  $(ad_{h_0^l}^2 b^l)_0$ .*

(ii) *L'opérateur  $b^l (ad_{h_0^l}^2 b^l)_0$  défini comme forme quadratique sur  $H^3 \cap D(\langle r \rangle^2)$  possède une extension à un opérateur borné de  $D(h_0^l)$  dans  $D(h_0^l)^*$  avec norme indépendante de  $l$ .*

*Démonstration.* (i) Il s'agit de démontrer

$$(A.2.8) \quad |ad_{h_0^l}^2 b^l(u, v)| \leq C \|(D_r^2 + 1)^{3/2} u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H^3,$$

et par densité, il suffit de démontrer (A.2.8) pour  $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . On a

$$(A.2.9) \quad [ih_0^l, b^l] = 2D_r Z' D_r + \frac{1}{2} Z''' - (g'(r) \lambda_l + f'(r)) Z,$$

d'où

$$(A.2.10) \quad [h_0^l, [ih_0^l, b^l]] = \sum_{j=0}^3 \left( \sum_{i_j=2}^5 \alpha_{i_j} Z^{(i_j)} \right) D_r^j + ((g'(r) \lambda_l + f'(r)) Z)'' \\ + 2((g'(r) \lambda_l + f'(r)) Z)' \partial_r + 2\partial_r (g(r) \lambda_l + f(r))' Z' \\ + 2Z' (g(r) \lambda_l + f(r))' \partial_r$$

avec  $\alpha_{i_j} \in \mathbb{C}$ . L'inégalité (A.2.8) suit alors de  $f' \in \mathbf{S}^{-2}$ , (A.2.2) et du Lemme A.2.2.

(ii) Il suffit de démontrer

$$(A.2.11) \quad |b^l (ad_{h_0^l}^2 b^l)_0(u, v)| \leq C \|(h_0^l + 1)u\| \|(h_0^l + 1)v\|, \quad \forall u, v \in H^3 \cap D(\langle r \rangle^2),$$

avec  $C$  indépendante de  $l$ . Grâce au Lemme 4.1.1, il suffit de démontrer (A.2.11) pour  $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Ceci suit des Lemmes A.2.1, A.2.2. ■

On avait vu dans la démonstration du Lemme 5.2.5 que  $[ih_0, b]$  possède une extension à un opérateur borné de  $\mathcal{H}^2$  dans  $\mathcal{H}$  que nous notons  $[ih_0, b]_0$ . Le double commutateur  $ad_{h_0}^2 h_0$  est alors bien défini sur  $D(N)$ .

LEMME A.2.4. *Le double commutateur  $ad_{h_0}^2 h_0$  défini comme forme quadratique sur  $D(N)$  possède une extension à un opérateur borné de  $\mathcal{H}^2$  dans  $\mathcal{H}$ .*

*Démonstration.* Toujours par les mêmes arguments, il suffit de démontrer

$$|[ib^l, [ih_0^l, b^l]](u, v)| \leq C \|(h_0^l + 1)u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

avec  $C$  indépendante de  $l$ . Comme opérateur agissant sur  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , on a

$$[ib^l, [ih_0^l, b^l]] = \sum_{j=0}^2 \left( \sum_{4 \geq i_j + k_j \geq 2} \tilde{\alpha}_{i_j, k_j} Z^{(i_j)} Z^{(k_j)} \right) D_r^j - ((g'(r)\lambda_l + f'(r))Z)' Z$$

avec  $\tilde{\alpha}_{i_j, k_j} \in \mathbb{C}$ . Le lemme suit maintenant des Lemmes A.2.1, A.2.2. ■

LEMME A.2.5.  $ad_{b_\chi}^2 h$  définie comme forme quadratique sur  $D(N)$  possède une extension à un opérateur borné.

*Démonstration.* Nous notons d'abord que  $[b_\chi, \chi(h)]$  possède une extension à un opérateur borné que nous appelons  $[b_\chi, \chi(h)]_0$ . Ceci suit du fait que  $[b_\chi, h]$  possède une extension à un opérateur borné et de la formule de Helffer–Sjöstrand. On a au sens des formes quadratiques sur  $D(N)$  ( $\chi_1$  comme dans les remarques préliminaires) :

$$[b_\chi, [b_\chi, h]] = \chi_1(h)[b_\chi, \chi(h)]_0 \chi_1(h)[b, h]_0 \chi(h) + hc + \chi(h)[b_\chi, [b, h]_0] \chi(h)$$

puisque  $[b_\chi, \chi_1(h)] = 0$ . Le premier terme est clairement borné, il reste à démontrer que

$$(A.2.12) \quad \chi(h)[b_\chi, [ih, b]_0] \chi(h) \text{ est borné.}$$

Nous avons  $[h, b] = [h_0, b] + [h_1, b]$ . Nous affirmons que

$$(A.2.13) \quad \chi(h)b_\chi[h_1, b] \chi(h) \text{ est borné,}$$

ce qui entraîne que  $\chi(h)[b_\chi, [h_1, b]] \chi(h)$  est borné. Pour montrer (A.2.13), nous développons le commutateur, et montrons séparément que

$$(A.2.14) \quad \chi(h)b_\chi h_1 b \chi(h) \text{ est borné,}$$

$$(A.2.15) \quad \chi(h)b_\chi b h_1 \chi(h) \text{ est borné.}$$

Pour montrer (A.2.14), on écrit

$$\begin{aligned} \chi(h)b_\chi h_1 b \chi(h) &= (\chi^2(h)b\langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle \chi(h) \langle r \rangle^{-1} (h+i)) \times ((h+i)^{-1} \langle r \rangle h_1 \langle r \rangle) \\ &\quad \times (\langle r \rangle^{-1} b \chi(h)), \end{aligned}$$

d'où l'on obtient (A.2.14) à l'aide des Lemmes 4.3.2, A.4.1 et du Corollaire 5.2.2. Pour montrer (A.2.15), on écrit

$$\begin{aligned} \chi(h)b_\chi b h_1 \chi(h) &= (\chi^2(h)b\langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle \chi(h) \langle r \rangle^{-1} (h+i)) \\ &\quad \times ((h+i)^{-1} \langle r \rangle b \langle r \rangle^{-2}) \times (\langle r \rangle^2 h_1 \chi(h)), \end{aligned}$$

d'où l'on obtient (A.2.15) à l'aide des Lemmes 4.3.2, A.4.1 et du Corollaire 5.2.2.

Montrons maintenant que

$$(A.2.16) \quad \chi(h)[b_\chi, [ih_0, b]_0] \chi(h) \text{ est borné.}$$

On a comme forme quadratique sur  $D(N)$  :

$$(A.2.17) \quad \begin{aligned} \chi(h)[b_\chi, [ih_0, b]] \chi(h) &= \chi^2(h)[b, [ih_0, b]_0] \chi^2(h) \\ &\quad + \chi^2(h)b[\chi(h), [ih_0, b]_0] \chi(h). \end{aligned}$$

Notons que l'application de la règle de Leibniz est justifiée ici puisque le membre de droite est bien défini comme forme quadratique sur  $D(N)$ . Le premier terme est borné grâce au Lemme A.2.4. Traitons maintenant le deuxième terme. On a comme forme quadratique sur  $D(N)$  :

$$\begin{aligned} & \chi(h)b[\chi(h), [ih_0, b]_0]\chi(h) \\ &= \chi(h)b(\chi(h) - \chi(h_0))[ih_0, b]_0\chi(h) - \chi(h)b[ih_0, b]_0(\chi(h) - \chi(h_0))\chi(h) \\ & \quad + \chi(h)b[\chi(h_0), [ih_0, b]_0]\chi(h) \\ &= \chi(h)b[\chi(h_0), [ih_0, b]_0]\chi(h) + \chi(h)b(\chi(h) - \chi(h_0))[ih_0, b]_0\chi(h) \\ & \quad - \chi(h)[b, [ih_0, b]_0](\chi(h) - \chi(h_0))\chi(h) - \chi(h)[ih_0, b]_0b(\chi(h) - \chi(h_0))\chi(h). \end{aligned}$$

Les deuxième et quatrième termes sont bornés grâce au Lemme A.4.3. Le troisième terme est borné grâce au Lemme A.2.4. Traitons alors le premier terme. Grâce au Lemme A.4.3, il suffit de démontrer

$$(A.2.18) \quad \chi(h_0)b[\chi(h_0), [ih_0, b]_0] \text{ est borné,}$$

ou bien

$$(A.2.19) \quad \chi(h_0^l)b^l[\chi(h_0^l), [ih_0^l, b^l]_0] \text{ est borné avec norme indépendante de } l.$$

Nous allons montrer (A.2.19). Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(h_0^l)$ . On a au sens des formes quadratiques sur  $D(N^l)$  :

$$\begin{aligned} & \chi(h_0^l)b^l(z - h_0^l)^{-1}(ad_{h_0^l}^2 b^l)_0(z - h_0^l)^{-1} \\ &= \chi(h_0^l)(z - h_0^l)^{-1}b^l(ad_{h_0^l}^2 b^l)_0(z - h_0^l)^{-1} \\ & \quad + \chi(h_0^l)(z - h_0^l)^{-1}[b^l, h_0^l]_0(z - h_0^l)^{-1}(ad_{h_0^l}^2 b^l)_0(z - h_0^l)^{-1} \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $(z - h_0^l)^{-1} : D(N^l) \rightarrow D(N^l)$  (voir Remarque 5.1.4). On utilise ensuite le Lemme A.2.3(ii) pour voir que

$$\|I_1\| \leq C|\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C},$$

avec  $C$  indépendante de  $l$ . Traitons maintenant  $I_2$ . On a clairement

$$\|\chi(h_0^l)(z - h_0^l)^{-1}[b^l, h_0^l]_0\| \leq C \quad \text{indép. de } l \text{ pour } z \in K \subset \subset \mathbb{C}$$

et il suffit alors de démontrer

$$\|(z - h_0^l)^{-1}h_0^l ad_{h_0^l} b^l(z - h_0^l)^{-1}\| \leq C \text{ indep. de } l \text{ pour } z \in K \subset \subset \mathbb{C},$$

ce qui suit du fait que  $ad_{h_0^l} b^l$  est borné de  $D(h_0^l) \rightarrow \mathcal{H}_l$  avec norme indépendante de  $l$ . Ceci termine la démonstration grâce à la formule de Helffer–Sjöstrand. ■

*Démonstration du Lemme 5.4.1.* On a au sens des formes quadratiques sur  $D(N)$  :

$$[ih^{1/2}, b_\chi] = \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2}(s+h)^{-1}\chi_1(h)[ih, b_\chi]\chi_1(h)(s+h)^{-1} ds,$$

avec  $\chi_1$  comme dans les remarques préliminaires. Ceci donne

$$\begin{aligned} [b_\chi, [ih^{1/2}, b_\chi]] &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2}(s+h)^{-1} \chi_1(h) [b_\chi, h] (s+h)^{-1} \chi_1(h) [ih, b_\chi] \chi_1(h) (s+h)^{-1} ds \\ &\quad + \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2}(s+h)^{-1} \chi_1(h) [b_\chi, [ih, b_\chi]] \chi_1(h) (s+h)^{-1} ds + hc \end{aligned}$$

puisque  $[b_\chi, \chi_1(h)] = 0$ . Les commutateurs  $[b_\chi, h]$  et  $[b_\chi, [ih, b_\chi]]$  sont bornés. On a

$$\begin{aligned} \|s^{1/2}(s+h)^{-1} \chi_1(h) [b_\chi, h] (s+h)^{-1} \chi_1(h) [ih, b_\chi] \chi_1(h) (s+h)^{-1}\| &\leq \begin{cases} Cs^{1/2}, & s \leq 1, \\ C\langle s \rangle^{-5/2}, & s \geq 1, \end{cases} \\ \|s^{1/2}(s+h)^{-1} \chi_1(h) [b_\chi, [ih, b_\chi]] \chi_1(h) (s+h)^{-1}\| &\leq \begin{cases} Cs^{1/2}, & s \leq 1, \\ C\langle s \rangle^{-3/2}, & s \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui assure la convergence en norme des deux intégrales et termine alors la démonstration du lemme. ■

*Démonstration du Lemme 5.4.2.* Nous allons montrer que

$$(A.2.20) \quad (h+i)\langle r \rangle [k_1, b_\chi] \text{ est borné,}$$

$$(A.2.21) \quad (h+i)\langle r \rangle [k_0, b_\chi] \text{ est borné,}$$

ce qui entraîne le lemme grâce au Lemme 4.4.2. Pour montrer (A.2.20), nous montrons séparément :

$$(A.2.22) \quad (h+i)\langle r \rangle k_1 b_\chi \text{ est borné,}$$

$$(A.2.23) \quad (h+i)\langle r \rangle b_\chi k_1 \text{ est borné.}$$

On a

$$(h+i)\langle r \rangle k_1 b_\chi = ((h+i)\langle r \rangle k_1 \langle r \rangle (h+i)^{-1}) \times ((h+i)\langle r \rangle^{-1} \chi(h) \langle r \rangle \times \langle r \rangle^{-1} b_\chi(h)).$$

Le premier facteur est borné par (3.3.11), le deuxième facteur borné par le Lemme A.4.1, le troisième est borné par le Corollaire 5.2.2. On a donc (A.2.22). Pour montrer (A.2.23), on écrit

$$\begin{aligned} (h+i)\langle r \rangle b_\chi k_1 &= ((h+i)\langle r \rangle \chi(h) \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle b \langle r \rangle^{-2} (h+i)^{-1}) \\ &\quad \times ((h+i)\langle r \rangle^2 \chi(h) \langle r \rangle^{-2}) \times (\langle r \rangle^2 k_1). \end{aligned}$$

Les premier et troisième facteurs sont bornés par le Lemme A.4.1, le deuxième est borné par le Corollaire 5.2.2, le quatrième est borné par (3.3.11).

Montrons maintenant (A.2.21). On a

$$[k_0, b_\chi] = [k_0, \chi(h)] b_\chi(h) + hc + \chi(h) [k_0, b] \chi(h).$$

Pour montrer (A.2.21), il suffit alors de montrer :

$$(A.2.24) \quad (h+i)\langle r \rangle [k_0, \chi(h)] \langle r \rangle \text{ est borné,}$$

$$(A.2.25) \quad (h+i)\langle r \rangle \chi(h) [k_0, b] \chi(h) \text{ est borné.}$$

Montrons d'abord (A.2.24). On a

$$[k_0, h] = k_0'' + 2k_0' \partial_r + g^{rr} k_0'' + k_0' (\partial_r g^{rr} + g^{rr} \partial_r) + i(k_0' g^r + k_0' \bar{g}^r).$$

Il suit que  $\langle r \rangle [k_0, h] \langle r \rangle (h + i)^{-1}$  est borné. On a pour  $z \in K \subset \subset \mathbb{C}$  compact :

$$(A.2.26) \quad \| (h + i) \langle r \rangle (z - h)^{-1} \langle r \rangle^{-1} \| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-2},$$

$$(A.2.27) \quad \| (h + i) \langle r \rangle^{-1} (z - h)^{-1} \langle r \rangle \| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-2}$$

par le Lemme A.4.1. Nous écrivons maintenant

$$\begin{aligned} & \| (h + i) \langle r \rangle (z - h)^{-1} [k_0, h] (z - h)^{-1} \langle r \rangle \| \\ & \leq \| (h + i) \langle r \rangle (z - h)^{-1} \langle r \rangle^{-1} \| \\ & \quad \times \| \langle r \rangle [k_0, h] \langle r \rangle (h + i)^{-1} \| \times \| (h + i) \langle r \rangle^{-1} (z - h)^{-1} \langle r \rangle \| \\ & \leq C |\operatorname{Im} z|^{-4}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}. \end{aligned}$$

(A.2.24) suit alors de la formule de Helffer–Sjöstrand.

Montrons maintenant (A.2.25). On a

$$[ik_0, b] = -k'_0 Z(r, P + 1).$$

Le fait que  $k'_0 \in S^{-2}$ , le Corollaire 5.2.2 et le Lemme A.4.1 permettent de conclure que  $(h + i) \langle r \rangle \chi(h) [k_0, b] \chi(h)$  est borné. ■

### A.3. Quelques commutateurs

LEMME A.3.1. Soient  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ ,  $s \geq 0$  et  $\psi \in S^1(\mathbb{R})$ . Alors  $[\psi, \chi(h)(h + s)^{-1}]$  défini sur  $D(\langle r \rangle)$  possède une extension à un opérateur borné de  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^2$  avec norme dans  $O((s + \delta)^{-1})$  pour un  $\delta > 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\chi_1 \in C_0^\infty(]0, \infty[)$  avec  $\chi \chi_1 = \chi$ . On a au sens des formes quadratiques sur  $D(\langle r \rangle)$  :

$$\begin{aligned} [\psi, \chi(h)(s + h)^{-1}] &= [\psi, \chi(h)(s + h)^{-1} \chi_1(h)] \\ &= [\psi, \chi(h)](s + h)^{-1} \chi_1(h) \\ & \quad + \chi(h)(s + h)^{-1} [\psi, h](s + h)^{-1} \chi_1(h) + \chi(h)(s + h)^{-1} [\psi, \chi_1(h)], \end{aligned}$$

où on a utilisé que  $\chi(h), \chi_1(h), (s + h)^{-1} : D(\langle r \rangle) \rightarrow D(\langle r \rangle)$ . Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(h)$ , on a

$$\begin{aligned} [\psi, (z - h)^{-1}] &= (z - h)^{-1} [\psi, h]_0 (z - h)^{-1}, \\ \|(i + h)(z - h)^{-1} [\psi, h]_0 (z - h)^{-1}\| &\leq |\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}, \end{aligned}$$

où  $[\psi, h]_0$  désigne l'extension de  $[\psi, h]$  à un opérateur borné de  $\mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}$ . Il s'ensuit l'estimation pour le premier terme par la formule de Helffer–Sjöstrand, si l'on suppose  $\operatorname{supp} \chi_1, \operatorname{supp} \chi \subset ]\delta, \infty[$ . Les autres termes peuvent être traités de la même façon. ■

LEMME A.3.2. Soit  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\psi' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Alors l'opérateur

$$(i + h)^{-1/2} [h^{1/2}, \psi] (i + h)^{-1/2} \text{ est compact.}$$

*Démonstration.* On a

$$(i + h)^{-1/2} [h^{1/2}, \psi] (i + h)^{-1/2} = \lim_{t \rightarrow \infty} (i + h)^{-1/2} [(h + t^{-1})^{1/2}, \psi] (h + i)^{-1/2}.$$

Il suffit alors de démontrer que

$$(i + h)^{-1/2} [(h + t^{-1})^{1/2}, \psi] (h + i)^{-1/2} \text{ est compact pour } t > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} & (i+h)^{-1/2}[(h+t^{-1})^{1/2}, \psi](i+h)^{-1/2} \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2}(i+h)^{-1/2}[h, \psi](s+h+t^{-1})^{-1}(i+h)^{-1/2} ds \\ & \quad + \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2}(i+h)^{-1/2}(h+t^{-1})(s+h+t^{-1})^{-1}[h, \psi](s+h+t^{-1})^{-1}(i+h)^{-1/2} ds. \end{aligned}$$

On voit pour  $s \leq 1$  :

$$\begin{aligned} & \|s^{-1/2}(i+h)^{-1/2}[h, \psi](s+h+t^{-1})^{-1}(i+h)^{-1/2}\| \leq Cs^{-1/2}t, \\ & \|s^{-1/2}(i+h)^{-1/2}(h+t^{-1})(s+h+t^{-1})^{-1}[h, \psi](s+h+t^{-1})^{-1}(i+h)^{-1/2}\| \leq Cs^{-1/2}t, \end{aligned}$$

et pour  $s \geq 1$  :

$$\begin{aligned} & \|s^{-1/2}(i+h)^{-1/2}[h, \psi](s+h+t^{-1})^{-1}(i+h)^{-1/2}\| \leq C\langle s \rangle^{-3/2}, \\ & \|s^{-1/2}(i+h)^{-1/2}(h+t^{-1})(s+h+t^{-1})^{-1}[h, \psi](s+h+t^{-1})^{-1}(i+h)^{-1/2}\| \leq C\langle s \rangle^{-3/2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que les deux intégrales convergent en norme. Par le Lemme 4.4.2, l'opérateur  $(i+h)^{-1/2}[h, \psi](i+h)^{-1/2}$  est compact, ce qui montre que les deux intégrandes sont compactes. Les deux intégrales étant convergentes en norme, l'opérateur est compact. ■

Rappelons à cet endroit que

$$L_M = \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 \\ c_1 & -c_1 \end{pmatrix}, \quad L_D = \begin{pmatrix} h^{1/2} & 0 \\ 0 & -h^{1/2} \end{pmatrix}.$$

LEMME A.3.3. Soient  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\psi' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

(i) Les commutateurs

$$[\psi, \chi(L_D)] \text{ et } [\psi, \chi(L_M)] \text{ sont compacts.}$$

(ii) Si en plus  $\text{supp } \chi \subset ]0, \infty[$ , alors le commutateur

$$[\psi, [iL, B_\chi]] \text{ est compact.}$$

*Démonstration.* (i)  $L_D$  étant un cas particulier de  $L_M$ , nous démontrons uniquement l'affirmation pour  $L_M$ . Utilisant la formule de Helffer–Sjöstrand, il suffit de démontrer que

$$(A.3.1) \quad (z - L_M)^{-1}[\psi, L_M](z - L_M)^{-1} \text{ est compact pour } z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L_M),$$

$$(A.3.2) \quad \|(z - L_M)^{-1}[\psi, L_M](z - L_M)^{-1}\| \leq C|\text{Im } z|^{-2}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}.$$

(A.3.2) est clair, il reste à démontrer (A.3.1). On a

$$\begin{aligned} & (z - L_M)^{-1}[\psi, L_M](z - L_M)^{-1} \\ &= ((z - L_M)^{-1}(i+h)^{1/2}) \times \left( (i+h)^{-1/2}[\psi, h^{1/2}](i+h)^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \right) \\ & \quad \times ((i+h)^{1/2}(z - L_M)^{-1}). \end{aligned}$$



Les premier et troisième facteurs sont bornés grâce à  $D(L_M) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ , le deuxième facteur est compact par le Lemme A.3.2.

(ii) On a

$$[iL, B_\chi] = \begin{pmatrix} [ih^{1/2}, b_\chi] & 0 \\ 0 & -[ih^{1/2}, b_\chi] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -[ik, b_\chi] & [ik, b_\chi] \\ [ik, b_\chi] & -[ik, b_\chi] \end{pmatrix}.$$

Par le Lemme 5.4.2,  $[ik, b_\chi]$  est compact, donc  $[\psi, [ik, b_\chi]]$  est compact. On a au sens des opérateurs bornés

$$[ih^{1/2}, b_\chi] = \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} (s+h)^{-1} \chi(h) [ih, b]_0 \chi(h) (s+h)^{-1} ds$$

et l'intégrale converge en norme (voir remarques préliminaires). Donc, on a

$$(A.3.3) \quad [\psi, [ih^{1/2}, b_\chi]] = \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} [\psi, (s+h)^{-1} \chi(h)] [ih, b]_0 \chi(h) (s+h)^{-1} ds + hc \\ + \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} (s+h)^{-1} \chi(h) [\psi, [ih, b]_0] \chi(h) (s+h)^{-1} ds.$$

Notons que

$$\|s^{1/2} [\psi, (s+h)^{-1} \chi(h)] [ih, b]_0 \chi(h) (s+h)^{-1}\| \leq \begin{cases} C s^{1/2}, & s \leq 1, \\ C \langle s \rangle^{-3/2}, & s \geq 1, \end{cases} \\ \|s^{1/2} (s+h)^{-1} \chi(h) [\psi, [ih, b]_0] \chi(h) (s+h)^{-1}\| \leq \begin{cases} C s^{1/2}, & s \leq 1, \\ C \langle s \rangle^{-3/2}, & s \geq 1, \end{cases}$$

où on a utilisé le Lemme A.3.1. Ceci assure la convergence en norme des deux intégrales et il suffit alors de démontrer que pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  :

$$(A.3.4) \quad [\psi, \chi(h)] \text{ est compact,}$$

$$(A.3.5) \quad \chi(h) [\psi, [ih, b]_0] \chi(h) \text{ est compact.}$$

Montrons d'abord (A.3.4). Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(h)$  on voit que

$$(z-h)^{-1} [\psi, h] (z-h)^{-1} \text{ est compact}$$

grâce au Lemme 4.4.2. D'autre part,

$$\|(z-h)^{-1} [\psi, h] (z-h)^{-1}\| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \mathbb{C}.$$

(A.3.4) suit alors de la formule de Helffer–Sjöstrand.

Montrons maintenant (A.3.5). Nous allons d'abord montrer que  $\chi(h) [\psi, [ih_1, b]] \chi(h)$  est compact en montrant que  $\chi(h) \psi [ih_1, b] \chi(h)$  est compact, ce qui va suivre de

$$(A.3.6) \quad \chi(h) \psi h_1 b \chi(h) \text{ compact,}$$

$$(A.3.7) \quad \chi(h) \psi b h_1 \chi(h) \text{ compact.}$$

Nous affirmons d'abord que

$$(A.3.8) \quad \chi(h) \psi \langle r \rangle^{-1} (h+i) \text{ est compact.}$$

En effet,

$$\chi(h)\psi\langle r \rangle^{-1}(h+i) = \chi(h)[\psi\langle r \rangle^{-1}, h] + \chi(h)(h+i)\psi\langle r \rangle^{-1}.$$

$[\psi\langle r \rangle^{-1}, h]$  est un opérateur différentiel du premier ordre à support compact, le premier terme est alors compact par le Lemme 4.4.2, le deuxième est compact par le même lemme.

Pour montrer (A.3.6), on écrit

$$\chi(h)\psi h_1 b \chi(h) = (\chi(h)\psi\langle r \rangle^{-1}(h+i)) \times ((h+i)^{-1}\langle r \rangle h_1 \langle r \rangle) \times (\langle r \rangle^{-1} b \chi(h)).$$

Le premier facteur est compact par (A.3.8), le deuxième est borné par le Lemme 4.3.2, le troisième est borné par le Corollaire 5.2.2.

Pour montrer (A.3.7), on écrit

$$\begin{aligned} \chi(h)\psi b h_1 \chi(h) &= (\chi(h)\psi b \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle h_1 \langle r \rangle (h+i)^{-1}) \\ &\quad \times ((h+i)\langle r \rangle^{-1}(h+i)^{-1}\langle r \rangle) \times (\langle r \rangle^{-1}(h+i)\chi(h)). \end{aligned}$$

Le premier facteur est borné par le Corollaire 5.2.2, le deuxième est borné par le Lemme 4.3.2, le troisième est borné par le Lemme A.4.1 et le quatrième est compact par le Lemme 4.4.2.

Montrons maintenant que

$$\chi(h)[\psi, [ih_0, b]_0]\chi(h) \text{ est compact.}$$

On a

$$[ih_0, b] = 2D_r Z' D_r + \frac{1}{2} Z''' - Z(g'(r)P + f'(r))$$

d'où

$$[\psi, [ih_0, b]] = 2\psi' Z' \partial_r + hc$$

avec  $Z^{(i)} = Z^{(i)}(r, P+1)$ . Donc,

$$\chi(h)[\psi, [ih_0, b]]\chi(h) = \chi(h)2\psi' Z' \partial_r \chi(h) = (2\chi(h)\psi') \times (Z' \partial_r \chi(h)).$$

Le premier facteur est compact grâce au Lemme 4.4.2, le deuxième est borné grâce à (A.2.3). ■

#### A.4. Lemmes de comparaison

LEMME A.4.1. Soient  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(h)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

(i)  $\langle r \rangle^n (z-h)^{-1} \langle r \rangle^{-n} (h+i)$  est borné et on a

$$\|\langle r \rangle^n (z-h)^{-1} \langle r \rangle^{-n} (h+i)\| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}.$$

(ii)  $\langle r \rangle^n \chi(h) \langle r \rangle^{-n} (h+i)$  est borné.

*Démonstration.* (ii) suit de (i) par la formule de Helffer-Sjöstrand. Nous montrons (i) d'abord pour  $n=1$ . On a

$$\langle r \rangle (z-h)^{-1} \langle r \rangle^{-1} (h+i) = (z-h)^{-1} (h+i) + (z-h)^{-1} [\langle r \rangle, h] (z-h)^{-1} (h+i),$$

ce qui est un opérateur borné qui vérifie l'estimation. Supposons maintenant l'affirmation démontrée pour  $n$ . On a

$$\begin{aligned} & \langle r \rangle^{n+1} (z - h)^{-1} \langle r \rangle^{-n-1} (h + i) \\ &= \langle r \rangle^n (z - \langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1})^{-1} \langle r \rangle^{-n} (\langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1} + i) (\langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1} + i)^{-1} (h + i), \end{aligned}$$

ce qui est également un opérateur borné qui vérifie l'estimation puisque  $\langle r \rangle h \langle r \rangle^{-1}$  est un opérateur du même type que  $h$ . ■

LEMME A.4.2. (i)  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $(z - h)^{-1} - (z - h_0)^{-1}$  est compact,

(ii)  $\forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi(h) - \chi(h_0)$  est compact,

(iii)  $(i + h)^{-1/2} (h^{1/2} - h_0^{1/2}) (i + h_0)^{-1/2}$  est compact.

*Démonstration.* (ii) suit de (i) par la formule de Helffer–Sjöstrand. On a

$$\begin{aligned} (z - h)^{-1} - (z - h_0)^{-1} &= (z - h)^{-1} (h - h_0) (z - h_0)^{-1} \\ &= ((z - h)^{-1} h_1 \langle r \rangle^2) (\langle r \rangle^{-2} (z - h_0)^{-1}). \end{aligned}$$

Le premier facteur est borné par le lemme 4.3.2, le deuxième est compact par le Lemme 4.4.2.

(iii) On a

$$\begin{aligned} (i + h)^{-1/2} (h^{1/2} - h_0^{1/2}) (i + h_0)^{-1/2} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} (i + h)^{-1/2} ((h + t^{-1})^{1/2} - (h_0 + t^{-1})^{1/2}) (i + h_0)^{-1/2} \end{aligned}$$

et il suffit de démontrer que

$$(A.4.1) \quad (i + h)^{-1/2} ((h + t^{-1})^{1/2} - (h_0 + t^{-1})^{1/2}) (i + h_0)^{-1/2} \text{ est compact pour } t > 0.$$

On a au sens des opérateurs bornés :

$$\begin{aligned} & (i + h)^{-1/2} ((h + t^{-1})^{1/2} - (h_0 + t^{-1})^{1/2}) (i + h_0)^{-1/2} \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2} (h + i)^{-1/2} ((h + t^{-1})(s + t^{-1} + h)^{-1} \\ &\quad - (h_0 + t^{-1})(t^{-1} + s + h_0)) (i + h_0)^{-1/2} ds \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} (h + i)^{-1/2} ((s + t^{-1} + h_0)^{-1} - (s + t^{-1} + h)^{-1}) (i + h_0)^{-1/2} ds \\ &= \pi^{-1} \int_0^\infty s^{1/2} (h + i)^{-1/2} (h + t^{-1} + s)^{-1} h_1 (h_0 + t^{-1} + s)^{-1} (i + h_0)^{-1/2} ds. \end{aligned}$$

Notons que :

$$\|s^{1/2} (h + i)^{-1/2} (h + t^{-1} + s)^{-1} h_1 (h_0 + t^{-1} + s)^{-1} (i + h_0)^{-1/2}\| \leq \begin{cases} s^{1/2} t, & s \leq 1, \\ C \langle s \rangle^{-3/2}, & s \geq 1, \end{cases}$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale. Il reste alors à démontrer que

$$(A.4.2) \quad (h + i)^{-1/2} (h + t^{-1} + s)^{-1} h_1 (h_0 + t^{-1} + s)^{-1} (i + h_0)^{-1/2} \text{ est compact.}$$

En effet,

$$\begin{aligned} & (h + i)^{-1/2} (h + t^{-1} + s)^{-1} h_1 (h_0 + t^{-1} + s)^{-1} (i + h_0)^{-1/2} \\ &= ((h + i)^{-1/2} (h + t^{-1} + s)^{-1} \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle h_1 (h_0 + t^{-1} + s)^{-1} (i + h_0)^{-1/2}). \end{aligned}$$

Le premier facteur est compact par le Lemme 4.4.2, le deuxième est borné par le Lemme 4.3.2. ■

LEMME A.4.3. *Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Alors :*

- (i)  $\langle r \rangle (\chi(h) - \chi(h_0)) \langle r \rangle$  est borné de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}^2$ ,
- (ii)  $\langle r \rangle (\chi(h) - \chi(h_0)) h_0^\alpha$  est borné pour tout  $\alpha \leq 1$ ,
- (iii)  $b(\chi(h) - \chi(h_0))$  est borné.

*Démonstration.* (i) Utilisant la formule de Helffer–Sjöstrand, il suffit de démontrer que :

$$(A.4.3) \quad (i+h)\langle r \rangle (z-h)^{-1} h_1 (z-h_0)^{-1} \langle r \rangle \text{ est borné pour } z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(h) \cup \sigma(h_0)),$$

$$(A.4.4) \quad \|(i+h)\langle r \rangle (z-h)^{-1} h_1 (z-h_0)^{-1} \langle r \rangle\| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-4}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}.$$

On a

$$(A.4.5) \quad (i+h)\langle r \rangle (z-h)^{-1} h_1 (z-h_0)^{-1} \langle r \rangle \\ = ((i+h)\langle r \rangle (z-h)^{-1} \langle r \rangle^{-1}) \times (\langle r \rangle h_1 \langle r \rangle (i+h)^{-1}) \times ((i+h)\langle r \rangle^{-1} (z-h_0)^{-1} \langle r \rangle)$$

(A.4.3), (A.4.4) suivent de (A.4.5) en utilisant les Lemmes 4.3.2 et A.4.1.

(ii) Utilisant la formule de Helffer–Sjöstrand, il suffit de démontrer que :

$$(A.4.6) \quad \langle r \rangle (z-h)^{-1} h_1 (z-h_0)^{-1} h_0^\alpha \text{ est borné pour } z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(h) \cup \sigma(h_0))$$

$$(A.4.7) \quad \|\langle r \rangle (z-h)^{-1} h_1 (z-h_0)^{-1} h_0^\alpha\| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-3}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}.$$

En effet,

$$\|\langle r \rangle (z-h)^{-1} h_1 (z-h_0)^{-1} h_0^\alpha\| \\ = \|\langle r \rangle (z-h)^{-1} \langle r \rangle^{-1} (h+i) (h+i)^{-1} \langle r \rangle h_1 (z-h_0)^{-1} h_0^\alpha\| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-3}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C},$$

en utilisant les Lemmes 4.3.2 et A.4.1.

(iii) On a

$$b(\chi(h) - \chi(h_0)) = (b\langle r \rangle^{-1} (i+h_0)^{-1/2}) \times ((i+h_0)^{1/2} (\chi(h) - \chi(h_0)) \langle r \rangle) \\ + (b\langle r \rangle^{-1} (i+h_0)^{-1/2}) \times ((i+h_0)^{1/2} [\langle r \rangle, (\chi(h) - \chi(h_0))]).$$

Le premier facteur dans les deux termes est borné par le Corollaire 5.2.2. Le deuxième facteur dans le premier terme est borné par la partie (ii) du Lemme. Le deuxième facteur dans le deuxième terme est borné par le Lemme A.3.1. ■

LEMME A.4.4. *Soient  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\psi_\pm \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\operatorname{supp} \psi_- \subset ]-\infty, R[$ ,  $\operatorname{supp} \psi_+ \subset ]-R, \infty[$  ( $R > 0$ ). Alors les opérateurs suivants sont compacts :*

$$R_1 := \chi(L) - \chi(L_0), \quad R_2 := (\chi(L) - \chi(L_D)) \psi_-, \quad R_3 := (\chi(L) - \chi(L_M)) \psi_+.$$

*Démonstration.* Utilisant la formule de Helffer–Sjöstrand, on s'aperçoit qu'il suffit de démontrer que les opérateurs

$$T_1 := (z-L)^{-1} (L-L_0) (z-L_0)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(L) \cup \sigma(L_0)), \\ T_2 := (z-L)^{-1} (L-L_D) (z-L_D)^{-1} \psi_-, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(L) \cup \sigma(L_D)), \\ T_3 := (z-L)^{-1} (L-L_M) (z-L_M)^{-1} \psi_+, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(L) \cup \sigma(L_M)),$$

sont compacts et que

$$(A.4.8) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \exists N_i \in \mathbb{N}, \quad \|T_i\| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-N_i}, \quad z \in K \subset \subset \mathbb{C}.$$

En utilisant  $D(L) = D(L_0) = D(L_D) = D(L_M) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ , on obtient (A.4.8). Il reste à démontrer que les opérateurs  $T_i$  sont compacts.

Commençons avec  $T_1$ . On a

$$T_1 = T_{1,1} + T_{1,2}$$

avec

$$T_{1,1} = (z - L)^{-1} k_1 \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} (z - L_0)^{-1},$$

$$T_{1,2} = (z - L)^{-1} (h^{1/2} - h_0^{1/2}) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} (z - L_0)^{-1}.$$

Traitons d'abord  $T_{1,1}$

$$T_{1,1} = ((z - L)^{-1} (h + i)^{1/2}) \times \left( (h + i)^{-1/2} k_1 \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \right) \times (z - L_0)^{-1}.$$

Le premier facteur est borné grâce à  $D(L) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ , le deuxième est compact grâce au Lemme 4.4.2.

Pour montrer que  $T_{1,2}$  est compact, il suffit en utilisant de nouveau  $D(L) = D(L_0) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$  de démontrer que

$$(A.4.9) \quad (i + h)^{-1/2} (h^{1/2} - h_0^{1/2}) (i + h_0)^{-1/2} \text{ est compact,}$$

ce qui est inclus dans le Lemme A.4.2. Ceci termine la démonstration pour  $T_1$ .

Traitons maintenant  $T_2$ . On a

$$\begin{aligned} & (z - L)^{-1} (L - L_D) (z - L_D)^{-1} \psi_- \\ &= (z - L)^{-1} k \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \psi_- (z - L_D)^{-1} \\ &+ (z - L)^{-1} k \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} (z - L_D)^{-1} [L_D, \psi_-] (z - L_D)^{-1} \\ &= ((z - L)^{-1} (i + h)^{1/2}) \left( (i + h)^{-1/2} k \psi_- \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \right) (z - L_D)^{-1} \\ &+ ((z - L)^{-1} k \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}) (z - L_D)^{-1} (h + i)^{1/2} \\ &\times \left( (i + h)^{-1/2} [h^{1/2}, \psi_-] \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} (i + h)^{-1/2} \right) \times ((i + h)^{1/2} (z - L_D)^{-1}). \end{aligned}$$

Dans le premier terme, le premier facteur est borné grâce à  $D(L) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ , le deuxième est compact grâce à  $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} k \psi_- = 0$  et le Lemme 4.4.2. Dans le deuxième terme, les premier et troisième facteurs sont bornés grâce à  $D(L) = D(L_D) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$ . Le deuxième facteur est compact grâce au Lemme A.3.2. Ceci termine la démonstration pour  $T_2$ .

La démonstration pour  $T_3$  est analogue en utilisant  $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} (k - c_1)\psi_+ = 0$ ,  $[\psi_+, k] = 0$ . ■

LEMME A.4.5. Soit  $\chi \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ . Alors l'opérateur  $h^{-1/2}(i + h)\chi(L_M)$  est borné.

Démonstration. Soit  $V(h)$  la transformation unitaire de la Section 2.2 avec  $c = c_1$  et

$$\widehat{L}_M = V^*(h)L_M V(h) = \begin{pmatrix} -c_1 + \sqrt{h + c_1^2} & 0 \\ 0 & -c_1 - \sqrt{h + c_1^2} \end{pmatrix}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} h^{-1/2}(i + h)\chi(L_M) &= h^{-1/2}(i + h)V(h)\chi(\widehat{L}_M)V^*(h) \\ &= V(h) \begin{pmatrix} h^{-1/2}(i + h)^{-1}\chi(-c_1 + \sqrt{h + c_1^2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^*(h). \end{aligned}$$

Ceci est un opérateur borné puisque  $-c_1 + \sqrt{h + c_1^2} \geq \delta > 0$  entraîne

$$h \geq (\delta + c_1)^2 - c_1^2 > 0 \quad (c_1 \geq 0). \quad \blacksquare$$

## Annexe B. Quelques lemmes concernant le problème séparable

Dans tout l'appendice B, nous allons considérer des restrictions à  $\mathcal{H}_l = L^2(\mathbb{R}, dr) \otimes Y_l$  et nous supprimerons l'indice  $l$  pour toute la suite.

LEMME B.1. Soient  $\nu \in \mathcal{N}$  et  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

(i) Soit  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\psi' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 1, 2$ ). Alors

$$(h_\nu + 1)^{\alpha_1} \langle r \rangle^{\beta_1} [\psi, \chi(h_\nu)] \langle r \rangle^{\beta_2} (h_\nu + 1)^{\alpha_2} \text{ est compact.}$$

(ii) Soit  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Alors l'opérateur

$$\langle r \rangle (\chi(h_0)j_\nu - j_\nu \chi(h_\nu)) \langle r \rangle (h_\nu + 1)^\alpha \text{ est borné.}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le calcul pseudodifférentiel.

(i) suit de  $(h_\nu + 1)^{\alpha_1} \langle r \rangle^{\beta_1} [\psi, \chi(h_\nu)] \langle r \rangle^{\beta_2} (h_\nu + 1)^{\alpha_2} \in \Psi^{-\infty, -\infty}$  et du Lemme C.4.

(ii) Utilisant (i), on peut se ramener à démontrer que

$$\langle r \rangle j_\nu (\chi(h_0) - \chi(h_\nu)) \langle r \rangle (h_\nu + 1)^\alpha \text{ est borné.}$$

On a en utilisant le Théorème C.3 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pr}}(\langle r \rangle j_\nu (\chi(h_0) - \chi(h_\nu)) \langle r \rangle (h_\nu + 1)^\alpha) &= \langle r \rangle j_\nu (\chi(\sigma(h_0)) - \chi(\sigma(h_\nu))) \langle r \rangle (\sigma(h_\nu) + 1)^\alpha \\ &= \int_0^1 \chi'(\tau \sigma(h_0) + (1 - \tau)\sigma(h_\nu)) d\tau \langle r \rangle^2 j_\nu (W_0 - W_\nu) \in S^{-\infty, 0}, \end{aligned}$$

en particulier l'opérateur est borné. ■

LEMME B.2. Soient  $\nu \in \mathcal{N}$  et  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec  $\psi' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Alors

$$[\psi, \chi(L_\nu)] \text{ est compact.}$$

*Démonstration.* Par la formule de Helffer–Sjöstrand, il suffit de démontrer :

$$(B.1) \quad \|(z - L_\nu)^{-1}[\psi, L_\nu](z - L_\nu)^{-1}\| \leq C|\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \mathbb{C},$$

$$(B.2) \quad (z - L_\nu)^{-1}[\psi, L_\nu](z - L_\nu)^{-1} \text{ est compact, } \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L_\nu).$$

(B.1) est clair, (B.2) va suivre de

$$(B.3) \quad (i + h_\nu)^{-1/2}[\psi, h_\nu^{1/2}](i + h_\nu)^{-1/2} \text{ compact.}$$

On a

$$(i + h_\nu)^{-1/2}[\psi, h_\nu^{1/2}](i + h_\nu)^{-1/2} = \lim_{t \rightarrow \infty} (i + h_\nu)^{-1/2}[\psi, (h_\nu + t^{-1})^{1/2}](i + h_\nu)^{-1/2}$$

et (B.3) va alors suivre de

$$(i + h_\nu)^{-1/2}[\psi, (h_\nu + t^{-1})^{1/2}](i + h_\nu)^{-1/2} \text{ compact pour } t > 0.$$

Utilisant le Théorème C.3, on a

$$(i + h_\nu)^{-1/2}[\psi, (h_\nu + t^{-1})^{1/2}](i + h_\nu)^{-1/2} \in \Psi^{-2, -\infty}$$

et donc l'opération compact par le Lemme C.4. ■

LEMME B.3. *Pour  $\nu \in \mathcal{N}$ , l'opérateur  $j_\nu(\chi(L_0) - \chi(L_\nu))$  est compact.*

*Démonstration.* Utilisant la formule de Helffer–Sjöstrand, il suffit de démontrer :

$$(B.4) \quad \|j_\nu(z - L_0)^{-1}(L_0 - L_\nu)(z - L_\nu)^{-1}\| \leq C|\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad z \in K \subset \mathbb{C},$$

$$(B.5) \quad j_\nu(z - L_0)^{-1}(L_0 - L_\nu)(z - L_\nu)^{-1} \text{ est compact, } \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(L_0) \cup \sigma(L_\nu)).$$

(B.4) est clair, montrons (B.5). On a

$$j_\nu(z - L_0)^{-1}(L_0 - L_\nu)(z - L_\nu)^{-1} = (z - L_0)^{-1}[j_\nu, L_0](z - L_0)^{-1}(L_0 - L_\nu)(z - L_\nu)^{-1} \\ + (z - L_0)^{-1}j_\nu(L_0 - L_\nu)(z - L_\nu)^{-1}.$$

Le premier terme est compact par le même raisonnement que dans la démonstration du Lemme B.2. Pour montrer que le deuxième terme est compact, il suffit, grâce à  $D(L_\nu) = D(L_0) = H^1 \oplus H^1$ , le Lemme 4.4.2 et le fait que  $\lim_{|r| \rightarrow \infty} j_\nu(k - k_\nu) = 0$ , de montrer que

$$(i + h_0)^{-1/2}j_\nu(h_0^{1/2} - h_\nu^{1/2})(i + h_\nu)^{-1/2} \text{ est compact.}$$

On a

$$(i + h_0)^{-1/2}j_\nu(h_0^{1/2} - h_\nu^{1/2})(i + h_\nu)^{-1/2} \\ = \pi^{-1} \int_0^\infty s^{-1/2}(i + h_0)^{-1/2}j_\nu(h_0(s + h_0)^{-1} - h_\nu(s + h_\nu)^{-1})(i + h_\nu)^{-1/2} ds$$

et l'intégrale converge en norme :

$$\|s^{-1/2}(i + h_0)^{-1/2}j_\nu h_0(s + h_0)^{-1}(i + h_\nu)^{-1/2}\| \leq \begin{cases} Cs^{-1/2}, & s \leq 1, \\ C\langle s \rangle^{-3/2}, & s \geq 1. \end{cases}$$

On a des estimations analogues pour l'autre terme. Ensuite

$$\begin{aligned}
& (i + h_0)^{-1/2} s^{-1/2} j_\nu (h_0 (s + h_0)^{-1} - h_\nu (s + h_\nu)^{-1}) (i + h_\nu)^{-1/2} \\
&= s^{1/2} (i + h_0)^{-1/2} j_\nu (h_0 + s)^{-1} (h_0 - h_\nu) (h_\nu + s)^{-1} (i + h_\nu)^{-1/2} \\
&= s^{1/2} (i + h_0)^{-1/2} (h_0 + s)^{-1} [j_\nu, h_0] (h_0 + s)^{-1} (h_0 - h_\nu) (h_\nu + s)^{-1} (i + h_\nu)^{-1/2} \\
&\quad + (s^{1/2} (i + h_0)^{-1/2} (h_0 + s)^{-1} \langle r \rangle^{-1}) (j_\nu \langle r \rangle) (h_0 - h_\nu) (h_\nu + s)^{-1} (i + h_\nu)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

$[j_\nu, h_\nu]$  est un opérateur différentiel de premier ordre à support compact, le premier terme est alors compact grâce au Lemme 4.4.2. Le premier facteur dans le deuxième terme est compact par le même lemme, le deuxième facteur est borné grâce au Lemme 4.3.2. ■

### Annexe C. Calcul pseudodifférentiel

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur le calcul pseudodifférentiel. On suit en principe l'exposé dans [DG, Appendix D]. Les symboles que nous considérons dans ce mémoire sont liés à la métrique

$$\gamma = \frac{dx^2}{\langle x \rangle^2} + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2} \quad \text{avec} \quad \langle x \rangle^2 = x^2 + 1.$$

Nous noterons

$$a \in S(\langle \xi \rangle^k \langle x \rangle^m, \gamma) \quad \text{ssi} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{k - |\alpha|} \langle x \rangle^{m - |\beta|}.$$

Nous allons souvent écrire  $a \in S^{k, m}$  au lieu de  $a \in S(\langle \xi \rangle^k \langle x \rangle^m, \gamma)$ . Nous allons noter  $\bar{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'espace de formes sesquilinéaires sur l'espace de fonctions tests de Schwartz. Tout symbole  $a$  définit un élément de  $\bar{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par

$$(\phi, a^w \psi) = (2\pi)^{-n} \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \bar{\phi}(x) \psi(y) e^{i\langle x-y, \xi \rangle} dx d\xi dy.$$

On écrit  $a^w \in \Psi(\langle \xi \rangle^k \langle x \rangle^m, \gamma)$  si  $a \in S(\langle \xi \rangle^k \langle x \rangle^m, \gamma)$  et on note  $\Psi(\langle \xi \rangle^k \langle x \rangle^m, \gamma)$  souvent simplement  $\Psi^{k, m}$ . On note ensuite

$$H^{m, k} := \{\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^m \langle D \rangle^k \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\} = \{\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle D \rangle^k \langle x \rangle^m \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On a le critère de Beals suivant :

**THÉORÈME C.1.** *Soit  $A \in \bar{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i)  *$A$  est un opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  t.q.  $ad_D^\alpha ad_x^\beta A$  est borné de  $H^{m-|\alpha|, k-|\beta|}$  dans  $H^{0,0}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $m, k \in \mathbb{R}$  et*

$$\|ad_D^\alpha ad_x^\beta A\|_{H^{m-|\alpha|, k-|\beta|} \rightarrow H^{0,0}} \leq C_{\alpha, \beta}.$$

(ii)  *$A$  est un opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  t.q.  $ad_D^\alpha ad_x^\beta A$  est borné de  $H^{m+m_0-|\alpha|, k+k_0-|\beta|}$  dans  $H^{m_0, k_0}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $m_0, m, k_0, k \in \mathbb{R}$  et*

$$\|ad_D^\alpha ad_x^\beta A\|_{H^{m+m_0-|\alpha|, k+k_0-|\beta|} \rightarrow H^{m_0, k_0}} \leq C_{\alpha, \beta}.$$

(iii)  *$A = a^w(x, D)$  avec  $a \in S(\langle x \rangle^m \langle \xi \rangle^k, \gamma)$ .*



On pose

$$S_{\text{pr}}(\langle x \rangle^m \langle \xi \rangle^k, \gamma) := S(\langle x \rangle^m \langle \xi \rangle^k, \gamma) / S(\langle x \rangle^{m-1} \langle \xi \rangle^{k-1}, \gamma).$$

Pour  $a \in S(\langle x \rangle^m \langle \xi \rangle^k, \gamma)$  on note  $\sigma_{\text{pr}}(a)$  la projection canonique sur  $S_{\text{pr}}(\langle x \rangle^m \langle \xi \rangle^k, \gamma)$ . Si  $A \in \Psi(\langle x \rangle^m \langle \xi \rangle^k, \gamma)$  et  $A = a^w(x, D)$ , alors on définit le symbole principal de  $A$  par

$$\sigma_{\text{pr}}(A) = \sigma_{\text{pr}}(a).$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION C.2. *Soient  $A_i \in \Psi(\langle x \rangle^{m_i} \langle \xi \rangle^{k_i}, \gamma)$ ,  $i = 1, 2$ . Alors*

$$A_1 A_2 \in \Psi(\langle x \rangle^{m_1+m_2} \langle \xi \rangle^{k_1+k_2}, \gamma) \quad \text{et} \quad [A_1, A_2] \in \Psi(\langle x \rangle^{m_1+m_2-1} \langle \xi \rangle^{k_1+k_2-1}, \gamma).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pr}}(A_1 A_2) &= \sigma_{\text{pr}}(A_1) \sigma_{\text{pr}}(A_2) \in S_{\text{pr}}(\langle x \rangle^{m_1+m_2} \langle \xi \rangle^{k_1+k_2}, \gamma), \\ \sigma_{\text{pr}}([A_1, A_2]) &= \frac{1}{i} \{ \sigma_{\text{pr}}(A_1), \sigma_{\text{pr}}(A_2) \} \in S_{\text{pr}}(\langle x \rangle^{m_1+m_2-1} \langle \xi \rangle^{k_1+k_2-1}, \gamma). \end{aligned}$$

Soit  $S^k$  la classe des symboles sur  $\mathbb{R}$ , i.e. des fonctions qui vérifient l'estimation suivante :

$$|\partial_t^l f(t)| \leq C_k \langle t \rangle^{k-l}$$

pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Le théorème suivant est un cas particulier de [HV, Theorem 1].

THÉORÈME C.3. *Soient  $a^w \in \Psi(\langle \xi \rangle^m, \gamma)$  un opérateur elliptique et  $f \in S^k(\mathbb{R})$ . Alors  $f(a^w) \in \Psi(\langle \xi \rangle^{km}, \gamma)$  et le symbole principal de  $f(a^w)$  est  $f(a)$ .*

Si le symbole d'un opérateur pseudodifférentiel décroît dans les deux directions, alors l'opérateur associé est compact :

LEMME C.4. *Soit  $a \in S^{-\delta, -\varepsilon}$  avec  $\delta, \varepsilon > 0$ . Alors  $a^w$  est compact.*

## Références

- [ABG] W. Amrein, A. Boutet de Monvel and V. Georgescu,  *$C_0$ -groups, Commutator Methods and Spectral Theory of  $N$ -body Hamiltonians*, Birkhäuser, 1996.
- [B1] A. Bachelot, *Gravitational scattering of electromagnetic field by a Schwarzschild black hole*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 54 (1991), 261–320.
- [B2] —, *Asymptotic completeness for the Klein–Gordon equation on the Schwarzschild metric*, ibid. 61 (1994), 411–441.
- [BM] A. Bachelot et A. Motet-Bachelot, *Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild*, ibid. 59 (1993), 3–68.
- [C] B. Carter, *Global structure of the Kerr family of gravitational fields*, Phys. Rev. 174 (1968), 1559–1571.
- [Ch] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press, 1983.
- [CFKS] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer, 1987.
- [DHS] S. De Bièvre, P. Hislop and I. M. Sigal, *Scattering theory for the wave equation on non-compact manifolds*, Rev. Math. Phys. 4 (1992), 575–618.
- [DG] J. Dereziński and C. Gérard, *Scattering Theory of Classical and Quantum  $N$ -particle Systems*, Springer, 1997.

- [D] J. Dimock, *Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric*, Gen. Relativity Gravitation 17 (1985), 353–369.
- [DK1] J. Dimock and B. S. Kay, *Scattering for massive scalar fields on Coulomb potentials and Schwarzschild metrics*, Classical Quantum Gravity 3 (1986), 71–80.
- [DK2] —, —, *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric I*, Ann. Phys. 175 (1987), 366–426.
- [DK3] —, —, *Classical and quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric II*, J. Math. Phys. 27 (1986), 2520–2525.
- [FH] R. Froese and P. Hislop, *Spectral analysis of second-order elliptic operators on non-compact manifolds*, Duke Math. J. 58 (1989), 103–129.
- [GG] V. Georgescu and C. Gérard, *On the virial theorem in quantum mechanics*, Comm. Math. Phys. 208 (1999), 275–281.
- [GL] C. Gérard and I. Laba, *Multiparticle quantum scattering in constant magnetic fields*, Math. Surveys Monogr. 90, Amer. Math. Soc., 2002.
- [H] D. Häfner, *Complétude asymptotique pour l'équation des ondes dans une classe d'espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), 779–833.
- [HV] A. Hassell and A. Vasy, *Symbolic functional calculus of  $N$  body resolvent estimates*, J. Funct. Anal. 173 (2000), 257–283.
- [HE] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monogr. Math. Phys. 1, 1973.
- [J] W. M. Jin, *Scattering of massive Dirac fields on the Schwarzschild black hole spacetime*, Classical Quantum Gravity 15 (1998), 3163–3175.
- [Ki1] H. Kitada, *Scattering theory for Schrödinger operators with long range potentials, I, abstract theory*, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 665–691.
- [Ki2] —, *Scattering theory for Schrödinger operators with long range potentials, II, spectral and scattering theory*, *ibid.* 30 (1978), 603–632.
- [Me1] F. Melnyk, *Wave operators for the massive charged linear Dirac field on the Reissner–Nordström metric*, Classical Quantum Gravity 17 (2000), 2281–2296.
- [Me2] —, *Scattering on Reissner–Nordström metric for massive charged spin 1/2 fields*, Ann. Henri Poincaré, à paraître.
- [M] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Comm. Math. Phys. 78 (1981), 391–408.
- [N1] J.-P. Nicolas, *Nonlinear Klein–Gordon equation on Schwarzschild-like metrics*, J. Math. Pures Appl. (9) 74 (1995), 35–58.
- [N2] —, *Scattering of linear Dirac fields by a spherical symmetric black hole*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 62 (1995), 145–179.
- [ON] B. O'Neill, *The Geometry of Kerr Black Holes*, A K Peters, Wellesley, MA, 1995.
- [T] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Univ. Press, 1981
- [RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics 2: Fourier Analysis, Selfadjointness*, Academic Press, New York, 1975.
- [SZ] A. Sá Barreto and M. Zworski, *Distribution of resonances for spherical black holes*, Math. Res. Lett. 4 (1997), 103–121.
- [W] R. Wald, *General Relativity*, The Univ. of Chicago Press, 1984.