STUDIA MATHEMATICA 155 (1) (2003)

Une inégalité maximale sous-gaussienne sur les espaces de tentes

par

E. Labeye-Voisin (Lyon)

Abstract. We introduce a maximal function (denoted by $\overline{\pi}$) on the tent spaces $T^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $0 < p < \infty$, of Coifman, Meyer and Stein [8]. We prove a good-λ estimate of subgaussian type for this maximal function and for the square function of tent spaces, leading to integrability results for $\overline{\pi}$. We deduce convergence results for the singular integral defining π.

1. Introduction. On fixe deux entiers strictement positifs n et m. On se place sur le demi-espace euclidien $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Par la suite $\theta \in \mathbb{R}^n$ désignera un point du bord et $(x,y),(s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ des points du demi-espace. Soit $\phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ à support dans la boule unité et supposée fixée dans la suite. On note $\phi_y(\theta - x) = y^{-n}\phi\big(\frac{\theta-x}{y}\big)$ le noyau associé.

Pour $0 < p \le 1$, on notera $(\mathcal{H}_p)$ la condition d'annulation supplémentaire suivante :

$$(\mathcal{H}_p) \qquad \int x^\gamma \phi(x) = 0 \qquad \begin{array}{l}\text{pour tout multi-indice } \gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in \mathbb{N}^n \\ \text{tel que } |\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n \le \lfloor n/p - n \rfloor,\end{array}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Dans toute la suite la condition $(\mathcal{H}_1)$ sera toujours supposée vérifiée.

À toute application $F : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}^m$ localement de carré intégrable et à tout $\alpha > 0$ on associe la fonction quadratique

$$A_\alpha(F,\theta) = \Big(\int\limits_{\Gamma_\alpha(\theta)} ds\,dt\,t^{1-n}|F(s,t)|^2\Big)^{1/2}$$

où $\Gamma_\alpha(\theta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} ; |x-\theta| < \alpha y\}$ et $|F(s,t)|$ désigne la norme euclidienne de $F(s,t)$ dans $\mathbb{R}^m$. On convient de plus que par défaut, l'ouverture d'un cône vaut 1 (i.e. $A(F) = A_1(F)$).

2000 *Mathematics Subject Classification*: 42B25, 42B30, 31B25.

Key words and phrases: tent spaces, maximal inequality, subgaussian estimate.

Rappelons la définition des espaces de tentes introduits par Coifman–Meyer–Stein [8] et notés T^p ("tent spaces") :

$$T^p = \{F : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}^m \,;\, A(F) \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \qquad 0 < p < \infty,$$

on les munit de la "norme" $\|F\|_{T^p} = \|A(F)\|_p$. Ces espaces sont apparentés aux espaces de Hardy H^p habituels. Sur ces espaces Coifman, Meyer et Stein introduisent l'opérateur π défini *a priori* sur l'espace T_c des fonctions tentes F à support compact dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$\pi(F, \theta) = \int\limits_{\Gamma(\theta)} ds\, dt\, \phi_t(\theta - s) \cdot F(s, t)$$

pour lequel ils prouvent le :

Théorème 1.1 (cf. [8] et [18, chap. IV.6]). *Sous la condition d'annulation* $(\mathcal{H}_1)$, *pour tout* $n/(n+1) < p < \infty$, *l'opérateur* π *s'étend en un opérateur continu de* T^p *sur* H^p.

Pour $0 < p \le n/(n+1)$, *si* ϕ *vérifie de plus la condition d'annulation* $(\mathcal{H}_p)$ *alors l'opérateur* π *s'étend encore en un opérateur continu de* T^p *sur* H^p.

Cet opérateur peut remplacer (quoiqu'imparfaitement), dans le contexte de l'analyse réelle, l'intégrale stochastique des probabilistes. De tels opérateurs ont déjà été étudiés et on peut remarquer avec Gundy [10] (voir aussi [18, chap. IV.6]) que si $F(s,t) = \nabla u(s,t)$ avec u extension harmonique à $\mathbb{R}_+^{n+1}$ de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors π vu comme opérateur agissant sur f redonne l'opérateur identité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et les transformées de Riesz si on fait le bon choix de noyau ϕ (cf. [10, pp. 18 à 30]).

L'existence de cette extension n'assure pas *a priori* que l'on puisse écrire et manipuler sereinement une formule comme $\int \phi_y(\theta - x) \cdot F(x, y)\, dx\, dy$ pour tout $F \in T^p$ et $\theta \in \mathbb{R}^n$. En effet l'intégrande n'est pas en général absolument intégrable et le procédé utilisé pour construire cette intégrale ne lui donne un sens qu'en tant que classe de fonctions dans les espaces H^p, $0 < p < \infty$, et donc pas en tout point θ de $\mathbb{R}^n$ (en presque tout point seulement). Dès lors, toute notion faisant intervenir les valeurs de π pour une famille non dénombrable de fonctions tentes ne peut avoir de sens (ponctuel, presque partout ou dans les espaces H^p). Par exemple, si $\mathcal{L}$ est un ensemble non dénombrable de parties de $\mathbb{R}_+^{n+1}$, et $F \in \bigcup_{1<p<\infty} T^p$, l'application $\theta \mapsto \sup_{V \in \mathcal{L}} \pi(F\mathbb{1}_V, \theta)$ est en général mal définie. Pourtant, comme nous le verrons, il est possible de donner presque partout une définition "ponctuelle" à la troncature de l'opérateur π par une famille raisonnable de parties de $\mathbb{R}_+^{n+1}$. C'est là un des principaux buts de ce papier. Cela permet de donner à cet opérateur une partie de l'intérêt technique que présentent les intégrales stochastiques en probabilités. En effet nous obtenons ainsi un contrôle du comportement de π sous l'effet d'une troncature par des "saw-tooth regions", lesquelles jouent souvent en analyse réelle le rôle des temps d'arrêts en probabilités. C'est ce qui motive l'introduction de notre fonction maximale dans la section suivante.

Cela nous a permis, par exemple dans [12] et [13], d'étudier en norme la dépendance de la fonctionnelle densité de l'intégrale d'aire $D^a u$ par rapport à la fonction harmonique u, et d'obtenir des résultats analogues à ceux obtenus en probabilités par Barlow et Yor (cf. [5]) sur le temps local de martingales continues. Dans cet exemple, les espaces de tentes interviennent de façon essentielle au travers d'une formule due dans ce contexte à Gundy, Bañuelos et Moore (cf. [11] et [4]) et très proche de la formule "à la Tanaka" de Chevalier (cf. [7]) qui permet de décomposer la densité d'intégrale d'aire sous la forme : $D^a u = (u-a)^+ + \pi(\nabla(u-a)^+)$. Le noyau ϕ intervenant dans cette décomposition constitue un exemple pratique de noyau pour lequel seule la condition d'annulation $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.

2. Présentation des résultats. Dans toute cette section on suppose seulement que ϕ vérifie l'hypothèse d'annulation $\big(\mathcal{H}_1\big)$.

Notons $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^0(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions positives w, lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire telles que $|w(x) - w(y)| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$). On associera à tout élément $w \in \mathcal{L}$ son épigraphe $W = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ ; y > w(x)\big\}$, en convenant de les noter de la même lettre (minuscule pour la fonction, majuscule pour l'épigraphe associé). Notons aussi $\mathcal{L}^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}$ constitué des fonctions w strictement positives.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}_+$ on note de plus $\pi^I(F)$ (resp. $A^I(F)$, W^I) l'ensemble $\pi(F\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\times I})$ (resp. $A(F\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\times I})$, $W \cap (\mathbb{R}^n \times I)$).

Commençons par quelques résultats de régularité sur π qui vont nous permettre de donner une définition ponctuelle de notre fonction maximale.

Pour $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nous noterons $y_D = \inf\{y > 0 \,; \exists x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in D\big\}$ et aussi $y_D(\theta) = y_{D\cap\Gamma(\theta)}$.

Lemme 2.1. (a) *Il existe une constante c_1 ne dépendant que de ϕ et n telle que pour tout borélien $D \subset \Gamma(\theta)$ et tout épigraphe V de fonction lipschitzienne, on ait la majoration*

$$|\pi^{]y_V(\theta),+\infty[}(F\mathbb{1}_{D\setminus V}, \theta)| \leq c_1 A^{]y_V(\theta),+\infty[}(F\mathbb{1}_{D\setminus V}, \theta).$$

(b) *Il existe une constante c_2 ne dépendant que de ϕ et n telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, tout borélien D, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute fonction tente F, on ait*

$$|\pi(F\mathbb{1}_D, x) - \pi(F\mathbb{1}_D, \theta)| \leq c_2\, \frac{|\theta - x|}{y_D}\, (A(F\mathbb{1}_D, \theta) + A(F\mathbb{1}_D, x)).$$

Démonstration. Commençons par établir le (a). D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\phi_y(\theta - x)|\,|F(x,y)|\mathbb{1}_{D\setminus V}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\le \|\phi\|_\infty A(F\mathbb{1}_{D\setminus V},\theta)\Big(\int_{\Gamma(\theta)} \frac{dx\ dy}{y^{n+1}}\,\mathbb{1}_{D\setminus V}(x,y)\Big)^{1/2}.$$

Il nous reste à estimer (en fonction de y) la mesure des tranches $E_y = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\,(x,y) \in \Gamma(\theta) \cap D \setminus V\}$:

$$\begin{aligned}|E_y| &\le |B(\theta,y)| - |\{x \in \mathbb{R}^n\,;\,(x,y) \in V\}|\\ &\le c_n(y^n - (y - y_V(\theta))^n) \le nc_n y^{n-1} y_V(\theta).\end{aligned}$$

En effet, il y a au moins une boule de rayon $y - y_V(\theta)$ dans chaque tranche $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\,(x,y) \in V\}$ de V ; ce qui donne le résultat.

Passons à la preuve du (b). Elle est dans l'esprit du lemme 6 de [3], et s'obtient par les mêmes techniques :

$$\begin{aligned}&|\pi(F\mathbb{1}_D,x) - \pi(F\mathbb{1}_D,\theta)|\\ &\quad\le \Big(\int_{D\cap(\Gamma(\theta)\cup\Gamma(x))} t^{n-1}|\phi_t(\theta - s) - \phi_t(x-s)|^2\,ds\,dt\Big)^{1/2}\\ &\qquad\times \Big(\int_{D\cap(\Gamma(\theta)\cup\Gamma(x))} \frac{ds\,dt}{t^{n-1}}\,|F(s,t)|^2\Big)^{1/2}\\ &\quad\le \|D\phi\|_\infty|\theta - x|\Big(\int_D \frac{ds\,dt}{t^{n+3}}\Big)^{1/2}\Big(\int_{D\cap(\Gamma(\theta)\cup\Gamma(x))} \frac{ds\ dt}{t^{n-1}}\,|F(s,t)|^2\Big)^{1/2}\\ &\quad\le \sqrt{c_n}\,\|D\phi\|_\infty\,\frac{|\theta - x|}{y_D}\Big(\int_{D\cap(\Gamma(\theta)\cup\Gamma(x))} \frac{ds\,dt}{t^{n-1}}\,|F(s,t)|^2\Big)^{1/2}. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Les résultats suivants permettent d'estimer la régularité de la partie "haute" de $\pi(F)$.

LEMME 2.2. *Pour tout borélien $W \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$, tout $0 < p \le 1$ et tout $\alpha > -n/p$, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de n, α, p et ϕ telle que, pour toute fonction tente F,*

$$\int_W \frac{|F(x,y)|}{y^{n+\alpha}}\,dx\,dy \le c\Big(\int_{\mathbb{R}^n} d\theta\ A(F\mathbb{1}_W,\theta)^p y_W(\theta)^{-n-\alpha p}\Big)^{1/p}.$$

COROLLAIRE 2.3. *Soient $W \in \mathcal{L}$, $F \in T^p$, $0 < p < \infty$ et*

$$E = \{\theta \in \mathbb{R}^n\,;\,w(\theta) > 0\}.$$

(i) *L'intégrale* $\int_W \phi_y(\theta - x)\cdot F(x,y)\,dx\,dy$ *est absolument convergente en tout point* θ *de* E *et il existe une constante* c_3 *ne dépendant que de* n, ϕ *et* p *telle que*

$$\int\limits_W |\phi_y(\theta - x)|\ |F(x,y)|\,dx\,dy \le c_3 y_W(\theta)^{-n/p}\|F\mathbb{1}_W\|_{T^p}.$$

(ii) *L'application* $\theta \mapsto \int_W \phi_y(\theta - x)\cdot F(x,y)\ dx\ dy$ *a les mêmes propriétés de régularité* (*continuité et différentiabilité*) *que* ϕ *en tout point de* E.

Démonstration du lemme 2.2. Le cas $p = 1$ se déduit directement de l'inégalité de dualité

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} F(x,y)G(x,y)y\,dx\,dy \le c_n \int\limits_{\mathbb{R}^n} A(F,\theta)A(G,\theta)\,d\theta$$

du théorème 2 de [8] appliqué à $G(x,y) = y^{-(n+\alpha+1)}\mathbb{1}_W(x,y)$.

Le cas général $0 < p \le 1$ nécessite d'autres arguments. Soit $\mathcal{F}$ la famille des cubes dyadiques de $\mathbb{R}^n$. À chaque cube $Q \in \mathcal{F}$ on associe le pavé de $\mathbb{R}^{n+1}_+$:

$$T_Q = Q \times [\sqrt{n}\,\ell(Q), 2\sqrt{n}\,\ell(Q)[$$

où $\ell(Q)$ désigne la longueur des côtés de Q. En utilisant la sous-additivité de $x \mapsto x^p$ pour $p \le 1$, puis l'inégalité de Cauchy–Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}&\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{|F(x,y)|}{y^{n+\alpha}}\,\mathbb{1}_W(x,y)\,dx\,dy\Bigg)^p \\ &\qquad\le \sum_{Q\in\mathcal{F}} \Bigg(\int\limits_{T_Q} \frac{|F(x,y)|^2}{y^{n-1}}\,\mathbb{1}_W(x,y)\,dx\,dy\Bigg)^{p/2}\Bigg(\int\limits_{T_Q} \frac{1}{y^{n+1+2\alpha}}\,dx\,dy\Bigg)^{p/2}.\end{aligned}$$

Par construction la première intégrale du membre de droite est égale à $A(F\mathbb{1}_{T_Q\cap W},\theta)$ pour tout $\theta \in Q$, d'où

$$\begin{aligned}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{|F(x,y)|}{y^{n+\alpha}}\,\mathbb{1}_W(x,y)\,dx\,dy\Bigg)^p &\le c\sum_{Q\in\mathcal{F}} \frac{\ell(Q)^{-\alpha p}}{|Q|}\int\limits_Q d\theta\,A(F\mathbb{1}_{T_Q\cap W},\theta)^p \\ &\le c\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\theta\,A(F\mathbb{1}_W,\theta)^p \sum_{\substack{Q\in\mathcal{F}\\ T_Q\cap W\neq\emptyset}} \ell(Q)^{-n-\alpha p}\mathbb{1}_Q(\theta).\end{aligned}$$

Or pour $\theta \in Q$ et $T_Q \cap W \neq \emptyset$ on a $\ell(Q) \ge (2\sqrt{n})^{-1}y_W(\theta)$. Ainsi la série du membre de droite est une série géométrique de raison $2^{-n-\alpha p} < 1$ et de premier terme $c_n y_W(\theta)^{-n-\alpha p}$. Le résultat s'en déduit directement. ∎

Le corollaire découle directement de ces estimations par les théorèmes classiques de dérivation sous le signe intégrale.

Nous pouvons dès lors introduire notre fonction maximale :

Définition 2.4. Pour toute fonction tente $F \in T^p$, $0 < p < \infty$, et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\overline{\pi}(F,\theta) = \sup_{W \in \mathcal{L}^*} |\pi(F\mathbb{1}_W, \theta)|.$$

D'après ce qui précède, ce *supremum* non dénombrable a bien un sens en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ puisque pour chaque $W \in \mathcal{L}^*$, $F\mathbb{1}_W$ vérifie bien les hypothèses de support du corollaire 2.3 ci-dessus. $\pi(F\mathbb{1}_W, \theta)$ est donc bien définie en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et continue. Ceci fait de $\overline{\pi}(F)$ une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^n$.

Dans notre étude de cette fonction maximale, notre principal outil sera un résultat d'intégrabilité exponentielle de la "partie basse" de π dû à Chang, Wilson, Wolff [6] et Bañuelos, Klemes, Moore (cf. [1], [2], [15]).

Proposition 2.5 (cf. [15] par exemple). *Soit $\alpha > 32\sqrt{n}$. Sous l'hypothèse d'annulation $(\mathcal{H}_1)$, pour tout $\beta > 0$, il existe deux constantes c_4 et c_5 ne dépendant que de n, ϕ, α et β telles que, pour tout cube Q de $\mathbb{R}^n$ et toute fonction tente $F \in \bigcup_{1<p<\infty} T^p$, on ait*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \, \exp(\pi^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta) - c_4 A_\alpha^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta)^2) \leq c_5$$

où $\ell(Q)$ désigne la longueur des côtés du cube Q.

Nous allons voir comme corollaire des théorèmes suivants que cette inégalité est encore vraie si on remplace l'opérateur π par l'opérateur maximal $\overline{\pi}$. Notre principal résultat est l'estimation "locale" suivante :

Théorème 2.6. *Soit $\alpha > 32\sqrt{n}$. Si ϕ vérifie la condition d'annulation $(\mathcal{H}_1)$, alors pour tout réel $\beta > 0$, il existe deux constantes positives c_6 et c_7 ne dépendant que de n, α, β et ϕ telles que, pour tout cube Q de $\mathbb{R}^n$ et toute fonction tente F, on ait*

$$|\{x \in Q\,;\, \overline{\pi}^{]0,\beta\ell(Q)[}(F,x) > \lambda\}| \leq c_7 \exp\left(-c_6 \frac{\lambda^2}{\|A_\alpha^{]0,\beta\ell(Q)[}(F)\|_\infty^2}\right)|Q|.$$

De cette majoration de la fonction de répartition de la "partie basse" de $\overline{\pi}(F)$ on déduira les inégalités suivantes :

Théorème 2.7. *Soit $\alpha > 96\sqrt{n}$. Si ϕ vérifie la condition d'annulation $(\mathcal{H}_1)$, alors il existe deux constantes positives c_8 et c_9 ne dépendant que de n, α et ϕ telles que, pour tous $\lambda > 0$, $\delta > 0$ et $\gamma > 3$, et toute fonction tente F, on ait*

$$\begin{aligned}&|\{\theta \in \mathbb{R}^n\,;\, \overline{\pi}(F,\theta) > \gamma\lambda \text{ et } A_\alpha(F,\theta) \leq \delta\lambda\}| \\ &\qquad\qquad \leq c_9 \exp(-c_8(\gamma/\delta)^2)|\{\theta \in \mathbb{R}^n\,;\, \overline{\pi}(F,\theta) > \lambda\}|.\end{aligned}$$

Corollaire 2.8. *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème* 2.7, *pour toute fonction tente $F \in \bigcup_{0<p<\infty} T^p$:*

(a) *Pour tout* $0 < p < \infty$, *il existe une constante* $c_p > 0$ *ne dépendant que de* n, ϕ *et* p *telle que* $\|\overline{\pi}(F)\|_p \leq c_p \|F\|_{T^p}$. *On a de plus* $c_p = O(\sqrt{p})$ *quand* p *tend vers* $+\infty$.

(b) *Pour tout* $0 < p < \infty$, *il existe deux constantes* c_{10} *et* c'_p (c_{10} *ne dépendant que de* n, α *et* ϕ ; c'_p *dépendant en plus de* p) *telles que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\theta \left(\exp\left(c_{10} \frac{\overline{\pi}(F,\theta)^2}{A_\alpha(F,\theta)^2} \right) (\overline{\pi}(F,\theta))^p \right) \leq c'_p \|F\|_{T^p}^p .$$

(c) *Pour tout* $\beta > 0$, *il existe deux constantes* c_{11} *et* c_{12} *ne dépendant que de* n, ϕ, α *et* β *telles que, pour tout cube* Q *de* $\mathbb{R}^n$ *et toute fonction tente* $F \in \bigcup_{0<p<\infty} T^p$, *on ait*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q d\theta \, \exp(\overline{\pi}^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta) - c_{11} A_\alpha^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta)^2) \leq c_{12}$$

où $\ell(Q)$ *désigne la longueur des côtés du cube* Q.

Démonstration du théorème 2.6. On note $I =]0, \beta\ell(Q)]$. Quitte à multiplier F par un scalaire bien choisi, on peut supposer $\|A^I(F)\|_\infty = 1$. On peut de plus se contenter de ne considérer que les $\lambda > K$ avec $K = 2(c_1 + c_2)$ (cf. lemme 2.1), une constante ne dépendant que de ϕ et n.

Notons E l'ensemble $\{\theta \in Q\,;\, \overline{\pi}^I(F,\theta) > \lambda\}$. Grâce au lemme suivant, pour chaque $\theta \in E$, on construit dans $\Gamma^I(\theta)$ un domaine V_θ correspondant à un (il n'y a pas unicité) “premier instant” d'atteinte de la valeur λ par

$$V \mapsto |\pi^I(F \mathbb{1}_V, \theta)|.$$

Lemme 2.9. *Soient* $\theta \in \mathbb{R}^n$, $I \subset]a,b[\subset \mathbb{R}_+^*$, *et* $F \in T^p$, $0 < p < \infty$. *Pour tout* $0 < \lambda < \overline{\pi}^I(F,\theta)$, *il existe un domaine* $V \in \mathcal{L}^*$ *tel que* $V \subset \Gamma^{]a,+\infty[}(\theta)$ *et*

$$|\pi^I(F\mathbb{1}_V,\theta)| = \overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_V,\theta) = \lambda.$$

Un tel domaine sera noté V_θ.

Démonstration du lemme. Notons $\varepsilon = \overline{\pi}^I(F,\theta) - \lambda > 0$. On va construire, par récurrence, une suite $(V_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ décroissante de parties (i.e. $V_n \subseteq V_m$ si $n > m$) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(H_n) \qquad \begin{cases} V_n \in \mathcal{L}^* \quad \text{et} \quad V_n \subset \Gamma^{]a,+\infty[}(\theta), \\ |\pi^I(F\mathbb{1}_{V_n},\theta)| = \lambda \quad \text{et} \quad \overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_n},\theta) \leq \lambda + \varepsilon/n. \end{cases}$$

Supposons ces V_n construits, posons $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$ et montrons que ce V convient.

Tout d'abord $V \neq \emptyset$. En effet, d'après le (i) du corollaire 2.3 on voit aisément que $\{y_W\,;\, |\pi^I(F\mathbb{1}_W,\theta)| = \lambda\}$ est majoré par $y_{\max} = (c_3\|F\|_{T^p}/\lambda)^{p/n}$, donc $\Gamma^{]2y_{\max},+\infty[}(\theta) \subset W$ pour tout W tel que $|\pi^I(F\mathbb{1}_W,\theta)| = \lambda$. Notons que $V_n \to V$ dans $\mathcal{L}$ lorsque $n \to \infty$ dans $\mathcal{L}$ et du fait de la croissance de $\overline{\pi}$ par rapport aux domaines, on en déduit que

$$|\pi^I(F\mathbb{1}_V, \theta)| = \overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_V, \theta) = \lambda.$$

Construisons donc notre suite V_n, $n \in \mathbb{N}^*$:

Prenons $V_1 \in \mathcal{L}^*$ tel que $V_1 \subset \mathit{\Gamma}^{]a,+\infty[}(\theta)$ et $|\pi^I(F\mathbb{1}_{V_1}, \theta)| = \lambda$ (son existence est assurée par le fait que $\overline{\pi}^I(F, \theta) > \lambda$ et $\overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{\mathit{\Gamma}^{]2y_{\max},+\infty[}(\theta)}, \theta) < \lambda$). On a alors $\overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_1}, \theta) \le \overline{\pi}^I(F, \theta) = \lambda + \varepsilon$. Donc V_1 vérifie bien (H_1).

Supposons $V_1, \dots, V_n$ trouvés tels que V_i vérifie (H_i) pour $1 \le i \le n$. Comme $\overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_n}, \theta) \in \big[\lambda, \lambda + \varepsilon/n\big]$, on peut trouver $W_n \subseteq V_n$ tel que

$$\overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{W_n}, \theta) \in [\lambda, \lambda + \varepsilon/(n+1)] \quad \text{puisque } \mathit{\Gamma}(\theta, 2y_{\max}) \subset V_n.$$

On prend alors $V_{n+1} \subseteq W_n$ tel que $|\pi^I(F\mathbb{1}_{V_{n+1}}, \theta)| = \lambda$. Et bien évidemment

$$\overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_{V_{n+1}}, \theta) \le \overline{\pi}^I(F\mathbb{1}_W, \theta) \le \lambda + \varepsilon/(n+1).$$

L'ensemble V_{n+1} ainsi trouvé vérifie bien (H_{n+1}).

Nous obtenons ainsi notre suite et la démonstration du lemme est terminée. ∎

Notons $Q_\theta = Q(\theta, y_{V_\theta})$ et $Q'_\theta = Q(\theta, 11y_{V_\theta})$ les cubes de $\mathbb{R}^n$ de centre θ et diamètres respectivement y_{V_θ} et $11y_{V_\theta}$. Par un lemme de recouvrement de type Vitali (cf. [17, p. 9] par exemple) on extrait un sous-ensemble fini $\mathit{\Delta}$ de E tel que :

(i) les $\{Q'_\theta\,;\, \theta \in \mathit{\Delta}\}$ soient deux à deux essentiellement disjoints ;
(ii) $|E| \le c\sum_{\theta\in\mathit{\Delta}} |Q_\theta|$.

On pose alors $V = \bigcup_{\theta\in\mathit{\Delta}} V_\theta$. On exploite les propriétés de régularité locales de π (lemme 2.1) pour voir que pour tout $x \in \bigcup_{\theta\in\mathit{\Delta}} Q_\theta$ on a $|\pi^I(F\mathbb{1}_V, x)| \ge \lambda/2$ et $A^I_\alpha(F\mathbb{1}_V, x) \le 1$: remarquons en effet que pour tout $\theta \in \mathit{\Delta}$ et tout $x \in Q_\theta$ on a $y_{V\setminus V_\theta}(x) \ge y_{V_\theta}(x)$. On peut donc estimer

$$\begin{aligned}
&|\pi^I(F\mathbb{1}_V, x) - \lambda| \\
&\qquad \le |\pi^I(F\mathbb{1}_V, x) - \pi^I(F\mathbb{1}_{V_\theta}, x)| + |\pi^I(F\mathbb{1}_{V_\theta}, x) - \pi^I(F\mathbb{1}_{V_\theta}, \theta)| \\
&\qquad \le \left(c_1 + c_2\,\frac{|\theta - x|}{y_{V_\theta}}\right) A^{]y_{V_\theta},+\infty[\cap I}(F, \theta) \le c_1 + c_2 = \frac{K}{2} \le \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

Dès lors on voit que pour tout $x \in \bigcup_{\theta\in\mathit{\Delta}} Q_\theta$ on a $|\pi^I(F\mathbb{1}_V, x)| \ge \lambda/2$ et $A^I_\alpha(F\mathbb{1}_V, x) \le 1$.

Et donc, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
|E| &\le c\sum_{\theta\in\mathit{\Delta}} |Q_\theta| \\
&\le c\sum_{\theta\in\mathit{\Delta}} \exp\left(-\mu\frac{\lambda}{2} + c_4\mu^2\right) \int\limits_{Q_\theta} dx\, \exp(\mu|\pi^I(F\mathbb{1}_V, x)| - c_4\mu^2 A^I_\alpha(F\mathbb{1}_V, x)^2)
\end{aligned}$$

$$\le cc_5 \exp\Big(-\mu\,\frac{\lambda}{2} + c_4\mu^2\Big)|Q| \quad \text{d'après la proposition 2.5}$$
$$\le cc_5 \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{16c_4}\Big)|Q| \quad \text{si on prend } \mu = \frac{\lambda}{4c_4}.$$

Démonstration du théorème 2.7. Posons $a = 2c_2 + c_1$ (cf. lemme 2.1). ∎

Quitte à prendre $c_9 > e^{36c_8a^2}$, on peut se contenter de montrer le résultat pour $\gamma > 2(a\delta + 1)$ (et toujours $\gamma > 3$). Notons :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\theta \in \mathbb{R}^n \,;\, A_\alpha(F,\theta) \le \delta\lambda\},\\
E_2 &= \big\{\theta \in \mathbb{R}^n \,;\, \overline{\pi}(F,\theta) > \gamma\lambda \text{ et } A_{\alpha/3}(F,\theta) \le \delta\lambda\big\},\\
W_1 &= \bigcup_{\theta\in E_1} \Gamma_{\alpha/3}(\theta), \qquad F_1 = F\mathbb{1}_{W_1},\\
E_3 &= \{\theta \in \mathbb{R} \,;\, \overline{\pi}(F_1,\theta) > \gamma\lambda\} \supset E_2.
\end{aligned}$$

Remarquons que par construction de W_1 et le choix des ouvertures des cônes, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $\theta \in E_1$ tel que $\Gamma_{\alpha/3}(x) \cap W_1 \subset \Gamma_\alpha(\theta)$ et donc

$$\|A_{\alpha/3}(F_1)\|_\infty \le \delta\lambda. \tag{1}$$

À chaque $\theta \in E_3$, on associe comme dans le lemme 2.9 un domaine lipschitzien V_θ de $\Gamma(\theta)$ tel que $|\pi(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},\theta)| = \overline{\pi}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},\theta) = (1 + c_2\delta)\lambda$. Cette fois on prend pour Q_θ le cube dyadique contenant θ et de longueur $\sup\{2^k \,;\, k \in \mathbb{Z},\ \sqrt{n}\,2^k < y_{V_\theta}\}$.

D'après (1) et les propriétés de régularité de π (lemme 2.1) on voit donc que

$$\begin{aligned}
|\overline{\pi}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},x) - (1 + c_2r\delta)\lambda| &= |\overline{\pi}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},x) - \overline{\pi}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},\theta)|\\
&\le c_2\,\frac{|\theta - x|}{y_{V_\theta}}\,A(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},\theta) \le c_2\delta\lambda,
\end{aligned}$$
$$\overline{\pi}^{[3\ell(Q_\theta),+\infty[}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta^c},x) \le c_1A^{[3\ell(Q_\theta),+\infty[}(F_1,x) \le c_1\delta\lambda$$

(car on vérifie aisément que pour $x \in Q_\theta$, $y_{V_\theta}(x) \le \frac{3}{2}y_{V_\theta} \le 3\ell(Q_\theta)$). D'où

$$\begin{aligned}
\overline{\pi}^{[3\ell(Q_\theta),+\infty[}(F_1,x) &\le \overline{\pi}^{[3\ell(Q_\theta),+\infty[}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta^c},x) + \overline{\pi}^{[3\ell(Q_\theta),+\infty[}(F_1\mathbb{1}_{V_\theta},x)\\
&\le [(c_1 + 2c_2)\delta + 1]\lambda = (a\delta + 1)\lambda.
\end{aligned}$$

Puisque $\gamma > 2(a\delta + 1)$, on en conclut que

$$\begin{aligned}
E_3 \cap Q_\theta &= \{x \in Q_\theta \,;\, \overline{\pi}(F_1,x) > \gamma\lambda\}\\
&\subset \{x \in Q_\theta \,;\, \overline{\pi}^{]0,3\ell(Q_\theta)]}(F_1,x) > \gamma\lambda/2\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Comme les Q_θ, $\theta \in E_3$, forment un recouvrement dyadique de E_3, on en extrait un sous-recouvrement Δ de E_3 de cubes essentiellement disjoints. Ainsi

$$\begin{aligned}|E_2| \le |E_3| &\le \sum_{\theta\in\Delta} |E_3 \cap Q_\theta| \\ &\le \sum_{\theta\in\Delta} |\{x \in Q_\theta\,;\, \overline{\pi}^{]0,3\ell(Q_\theta)]}(F_1,x) > \gamma\lambda/2\}| \qquad \text{d'après (2)} \\ &\le \sum_{\theta\in\Delta} c_7 \exp\Bigl(-c_6\Bigl(\frac{\gamma}{2\delta}\Bigr)^2\Bigr)|Q_\theta| \\ &\le c_7 \exp\Bigl(-\frac{c_6}{4}\Bigl(\frac{\gamma}{\delta}\Bigr)^2\Bigr)|\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,\overline{\pi}(F,x)>\lambda\}|\end{aligned}$$

d'après le théorème 2.6, et grâce à (1). ■

Démonstration du corollaire 2.8. (a) : C'est une conséquence, selon des méthodes classiques, de l'inégalité aux bons-λ du théorème 2.7 (voir [14] par exemple) : en l'intégrant en λ après avoir multiplié par $p\lambda^{p-1}d\lambda$, on obtient après quelques manipulations (on utilise notamment que $\|A_\alpha(F)\|_p \le c_\alpha\|F\|_{T_p}$) que

$$\gamma^{-p}\int_{\mathbb{R}^n} d\theta\,\overline{\pi}(F,\theta)^p \le \delta^{-p}\int_{\mathbb{R}^n} d\theta\, A_\alpha(F,\theta)^p + c_9 e^{-c_8(\gamma/\delta)^2}\int_{\mathbb{R}^n} d\theta\,\overline{\pi}(F,\theta)^p. \tag{3}$$

Pour $F \in T_c$, la finitude de ces intégrales permet d'obtenir l'estimation souhaitée. Pour conclure il suffit d'utiliser la densité de T_c dans les T_p. L'estimation en $+\infty$ sur c_p s'obtient par optimisations successives dans les choix de δ et γ dans l'équation (3).

(b) : Ce résultat d'intégrabilité pour le rapport $\overline{\pi}(F)/A_\alpha(F)$ se déduit de l'inégalité aux bons-λ par des méthodes dues à Murai et Uchiyama (cf. [16] et [9]).

(c) : C'est une conséquence directe de l'inégalité aux bons-λ et de la relation suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q d\theta\,\exp(\overline{\pi}^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta) - cA_\alpha^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta)^2) \\ &\qquad = \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} dx\int_{\mathbb{R}} dy\, 2cye^{x-cy^2}|\{\theta\in Q\,;\,\overline{\pi}^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta) > x \\ &\qquad\qquad \text{et } A_\alpha^{]0,\beta\ell(Q)]}(F,\theta)\le y\}|.\ ■\end{aligned}$$

3. Extension au cas des espaces H^p, $0 < p < 1$. Nous avons vu au paragraphe 2 que dans un certain sens, sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ et pour $F \in T^p$, $0 < p < \infty$, les $\pi(F\mathbb{1}_W)$, $W \in \mathcal{L}^*$, sont “uniformément” dans L^p. Le théorème 1.1 de Coifman, Meyer et Stein assure que pour $F \in T^p$, $0 < p \le 1$, et sous la condition supplémentaire $(\mathcal{H}_p)$, les $\pi(F\mathbb{1}_W)$ peuvent être vus comme des éléments de H^p. La question se pose alors de savoir si ces $\pi(F\mathbb{1}_W)$, $W \in \mathcal{L}$, sont “uniformément” dans H^p. C'est ce que nous allons établir.

Il convient pour cela de modifier notre fonction maximale. Considérons $\psi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ à support compact (dans la boule unité par exemple) et la fonction maximale associée, définie pour toute distribution f sur $\mathbb{R}^n$ par

$$N[f](\theta) = \sup_{(x,y)\in\Gamma(\theta)} |\psi_y * f(x)|.$$

Et introduisons :

DÉFINITION 3.1. Pour toute fonction tente $F \in T^p$, $0 < p < \infty$, et tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$M\pi(F, \theta) = \sup_{W\in\mathcal{L}} N[\pi(F\mathbb{1}_W)](\theta).$$

Remarquons que dans ce contexte (i.e. si la condition d'annulation $(\mathcal{H}_p)$ est vérifiée) $\sup_{W\in\mathcal{L}}$ et $\sup_{W\in\mathcal{L}^*}$ se confondent. En effet (d'après le théorème 1.1 de Coifman, Meyer et Stein),

$$|\psi_y * \pi(F\mathbb{1}_{W[0,\varepsilon]}, x)|^p \le \frac{c}{y^n}\, \|N(\pi(F\mathbb{1}_{W[0,\varepsilon]}))\|_p^p \le \frac{c}{y^n}\, \|F\mathbb{1}_{W[0,\varepsilon]}\|_{T_p}^p \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

PROPOSITION 3.2. *Si* $0 < p \le 1$, *et si* ϕ *vérifie la condition d'annulation* $(\mathcal{H}_p)$ *associée, alors il existe une constante* c_p *ne dépendant que de* n, ϕ, ψ, *et* p *telle que* $\|M\pi(F)\|_p \le c_p\|F\|_{T^p}$. *Il en va de même si* $1 < p < \infty$ *et si* ϕ *vérifie la condition d'annulation* $(\mathcal{H}_1)$.

Évidemment cela est encore vrai pour tout choix raisonnable de fonction maximale N, et notamment pour la grande fonction maximale.

Démonstration. Le cas $p > 1$ se déduit directement de l'inégalité maximale du paragraphe précédent (cf. corollaire 2.8(a)) et du fait que $M\pi(F) \le N(\overline{\pi}(F))$.

Dans le cas $0 < p \le 1$, il suffit de vérifier le résultat sur les atomes de T^p (cf. [18, p. 106] par exemple). Soit donc B une boule de $\mathbb{R}^n$ (de centre c_B et de rayon r_B) et $a \in T^2$ une fonction tente à support dans la tente au-dessus de B, $T(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}\,;\, |x - c_B| + y < r_B\}$, et telle que

$$\|a\|_{T^2}^2 = \int_{T(B)} y|a(x,y)|^2\, dx\, dy < |B|^{1-2/p}.$$

Sur $2B$, la boule de même centre que B et de rayon double, l'estimation souhaitée s'obtient grâce à l'inégalité de Hölder, à l'inégalité maximale $\|N(f)\|_p \le c_p\|f\|_p$, et à l'inégalité maximale du paragraphe 2 (cf. corollaire 2.8(a)) :

$$\begin{aligned}\int_{2B} M\pi(a,\theta)^p\, d\theta &\le \int_{2B} N[\overline{\pi}(a)](\theta)^p\, d\theta \le \Big(\int_{2B} N[\overline{\pi}(a)](\theta)^2\, d\theta\Big)^{p/2} |2B|^{1-p/2} \\ &\le c_n\|a\|_{T^2}^p |2B|^{1-p/2} \le c_{n,p}.\end{aligned}$$

Hors de $2B$, on utilise les conditions d'annulation $(\mathcal{H}_p)$. Soit $q_{x,y}(s)$ le polynôme de degré $d = \lfloor n/p - n \rfloor$ issu du développement de Taylor de la fonction $s \mapsto \psi_y(x-s)$ au point c_B. On a l'estimation habituelle

$$|\psi_y(x-s) - q_{x,y}(s)| \leq c\,\frac{|s-c_B|^{d+1}}{y^{n+d+1}}.$$

On voit donc que, pour tout $W \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}|\psi_y * \pi(a\mathbb{1}_W)(x)| &\leq \int_B |\pi(a\mathbb{1}_W, s)|\,|\psi_y(x-s) - q_{x,y}(s)|\,ds \\ &\leq c\,\|\pi(a\mathbb{1}_W)\|_2\,\frac{r_B^{n/2+d+1}}{y^{n+d+1}}.\end{aligned}$$

D'où

$$M\pi(a,x) \leq c_n \|a\|_{T^2}\;\frac{r_B^{n/2+d+1}}{|x-c_B|^{n+d+1}} \quad \text{si } x \notin 2B.$$

Puisque $p(n+d+1) > n$, on en déduit que $\int_{\mathbb{R}^n} M\pi(a,x)^p\,dx \leq c_{n,p}$. ∎

4. Application à la définition ponctuelle de π

PROPOSITION 4.1. *Supposons la condition d'annulation $(\mathcal{H}_1)$ vérifiée. Soit $F \in \bigcup_{0<p<\infty} T^p$. Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, la limite ci-dessous existe et permet donc de définir l'application π_f :*

$$\pi_f : T^p \to L^p, \qquad F \mapsto \pi_f(F,\theta) := \lim_{\substack{V \to \mathbb{R}_+^{n+1} \\ V \in \mathcal{L}^*}} \pi(F\mathbb{1}_V, \theta). \tag{4}$$

L'opérateur π_f est alors une extension continue de π de T^p sur L^p.

- *Si $p \geq 1$, la fonction $\pi_f(F)$ ainsi définie est un représentant dans L^p de la fonction $\pi(F)$ définie (par dualité) par Coifman, Meyer et Stein dans* [8] (*voir aussi le théorème* 1.1).
- *Si $0 < p < 1$, et si la condition d'annulation supplémentaire $(\mathcal{H}_p)$ est vérifiée, alors les $\pi(F)$ tels qu'ils sont définis par Coifman, Meyer et Stein sont des distributions appartenant à H^p. Nos $\pi_f(F)$ sont alors la "partie fonction" de ces distributions, c'est-à-dire des représentants dans L^p des limites non-tangentielles des extensions harmoniques des $\pi(F)$.*

Remarquons que dans le cas où $0 < p \leq n/(n+1)$ et où seule la condition d'annulation $\big(\mathcal{H}_1\big)$ est vérifiée, les $\pi_f(F)$ sont bien définis alors que les $\pi(F)$ ne le sont pas.

Démonstration de la proposition 4.1. Un schéma de preuve classique ([17, pp. 8–9]) montre à partir de l'inégalité maximale de la section 2 (cf. corollaire 2.8(a)) que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, la limite (4) existe et est uniforme sur $\mathcal{L}^*$.

Rappelons la démarche dans notre contexte.

Lemme 4.2. *Pour tout $F \in \bigcup_{0<p<\infty} T^p$ et presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\Lambda(F,\theta) := \limsup_{t\to 0} \overline{\pi}^{]0,t]}(F,\theta) = 0.$$

Démonstration du lemme 4.2. Constatons tout d'abord que $\Lambda(F,\theta) = 0$ en tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ dès que $F \in T_c$.

Notons aussi que pour $t > 0$ et $F \in T^p$ on a $\overline{\pi}^{]0,t]}(F,\theta) \le 2\overline{\pi}(F,\theta)$. Dès lors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $G \in T_c$ tel que $\|F - G\|_{T^p} \le \varepsilon$ et ainsi $\Lambda(F,\theta) \le \Lambda(F-G,\theta) + \Lambda(G,\theta) = \Lambda(F-G,\theta) \le 2\overline{\pi}(F-G,\theta)$. D'où $\|\Lambda(F)\|_p \le 2\|\overline{\pi}(F-G)\|_p \le 2c_p\|F-G\|_{T^p} \le 2c_p\varepsilon$ d'après l'inégalité maximale (cf. corollaire 2.8(a)). Et donc $\|\Lambda(F)\|_p = 0$. ■

Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, $V \mapsto \pi(F\mathbb{1}_V,\theta)$ se prolonge donc par continuité à $\mathcal{L}$. La limite (4) est donc bien définie.

Montrons maintenant que, sous les hypothèses de la proposition, elle coïncide avec les limites non-tangentielles. On peut se contenter de montrer le résultat pour des extensions associées à un noyau Ψ comme celui que nous avons utilisé dans la section 3 et vérifiant de plus $\int \Psi = 1$. Notons alors

$$\pi_{\mathrm{NT}}(F,\theta) = \lim_{\substack{z\in\Gamma(\theta)\\ z\to\theta}} \Psi_y * \pi(F)(x).$$

Considérons les ensembles $E_n = \{\theta \in \mathbb{R}^n\,;\, \overline{\pi}(F,\theta) \le n,\ A_3(F,\theta) \le n\}$, $W_n = \bigcup_{\theta\in E_n} \Gamma(\theta)$ et $\Omega_n = W_n^{\mathrm{c}}$. Par construction $\|A(F\mathbb{1}_{W_n})\|_\infty \le n$ et (c'est une simple conséquence du lemme 2.1(b)) $\|\overline{\pi}(F\mathbb{1}_{W_n})\|_\infty \le (1+c_2)n$. On est ainsi ramené à des fonctions intégrables, pour lesquelles il est clair que $\pi(F\mathbb{1}_{W_n}) = \pi_f(F\mathbb{1}_{W_n})$. On a donc

$$|\pi_{\mathrm{NT}}(F,\theta) - \pi_f(F,\theta)| \le M\pi(F\mathbb{1}_{\Omega_n},\theta) + \overline{\pi}(F\mathbb{1}_{\Omega_n},\theta).$$

Les inégalités maximales du corollaire 2.8(a) et de la proposition 3.2 impliquent que

$$\|\pi_{\mathrm{NT}}(F) - \pi_f(F)\|_p \le 2c_p\|F\mathbb{1}_{\Omega_n}\|_{T_p},$$

ce qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini (puisque $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \emptyset$). ■

Références

[1] R. Bañuelos, I. Klemes, and C. N. Moore, *An analogue for harmonic functions of Kolmogorov's law of the iterated logarithm*, Duke Math. J. 57 (1988), 37–68.

[2] R. Bañuelos and C. N. Moore, *Laws of the iterated logarithm, sharp good-λ inequalities and L^p-estimates for caloric and harmonic functions*, Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), 315–344.

[3] —, —, *Sharp estimates for nontangential maximal function and the Lusin area function in Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 312 (1989), 641–662.

[4] —, —, *Distribution function inequalities for the density of the area integral*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), 137–171.

[5] M. T. Barlow and M. Yor, *Semi-martingale inequalities via the Garsia–Rodemich–Rumsey lemma, and applications to local times*, J. Funct. Anal. 49 (1982), 198–229.
[6] S.-Y. A. Chang, J. M. Wilson and T. H. Wolff, *Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operators*, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 217–246.
[7] L. Chevalier, *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications*, Adv. Math. 138 (1998), 182–210.
[8] R. R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein, *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis*, J. Funct. Anal. 62 (1985), 304–335.
[9] R. Fefferman, R. Gundy, M. Silverstein and E. M. Stein, *Inequalities for ratios of functionals of harmonic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 79 (1982), 7958–7960.
[10] R. F. Gundy, *Some Topics in Probability and Analysis*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 70, Amer. Math. Soc., 1989.
[11] R. F. Gundy and M. L. Silverstein, *The density of the area integral in* $\mathbb{R}_+^{n+1}$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 35 (1985), 215–229.
[12] E. Labeye-Voisin, *Espaces de tentes, principe de domination et application à l'étude de la densité de l'intégrale d'aire*, thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1999.
[13] —, *Régularité de la densité de l'intégrale d'aire*, Potential Anal. (2002), à paraître.
[14] E. Lenglart, D. Lepingle et M. Pratelli, *Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales*, dans : Séminaire de probabilités XIV, 1978/79, Lecture Notes in Math. 784, Springer, 1980, 26–48.
[15] C. N. Moore, *Some inequalities for the density of the area integral*, dans : B. Dahlberg *et al.* (eds.), Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications (Chicago, IL, 1990), IMA Vol. Math. Appl. 42, Springer, 1992, 189–198.
[16] T. Murai and A. Uchiyama, *Good* λ *inequalities for the area integral and the nontangential maximal function*, Studia Math. 83 (1985), 251–262.
[17] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, 1970.
[18] —, *Harmonic Analysis*: *Real-Variable Methods*, *Orthogonality*, *and Oscillatory Integrals*, Princeton Math. Ser. 43, Princeton Univ. Press, 1993.

U.M.P.A., E.N.S. de Lyon
46 Allée d'Italie
69364 Lyon, France
E-mail: elabeye@voila.fr

Received June 27, 2000
Revised version June 17, 2002 (4555)