STUDIA MATHEMATICA 207 (2) (2011)

Sous-espaces fermés de séries universelles sur un espace de Fréchet

par

Quentin Menet (Mons)

Abstract. We improve a result of Charpentier [Studia Math. 198 (2010)]. We prove that even on Fréchet spaces with a continuous norm, the existence of only one restrictively universal series implies the existence of a closed infinite-dimensional subspace of restrictively universal series.

1. Introduction. Une suite d'opérateurs linéaires et continus $T_n : X \to Y$ où X et Y sont des espaces topologiques est dite *universelle* lorsqu'il existe un élément $x \in X$ (dit *universel*) tel que l'ensemble $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans Y. On parle de série universelle lorsqu'on considère une suite d'opérateurs $S_n : A \to X$ de la forme

$$S_n((a_k)_{k\geq 0}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k,$$

où X est un espace vectoriel topologique métrisable sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $(x_k)_{k\geq 0}$ est une suite dans X fixée au préalable et A est un espace de Fréchet inclus dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que l'ensemble des polynômes soit dense dans A et tel que les projections $P_i : A \to \mathbb{K}$ définies par $P_i((a_k)_{k\geq 0}) = a_i$ soient continues. Dans cet article, le terme *polynôme* sera utilisé pour désigner les suites constituées d'un nombre fini d'éléments non nuls.

On distingue deux niveaux parmi les séries universelles : les suites (non-restrictivement) universelles et les suites restrictivement universelles.

Définition 1.1. Soient $e_k = (\delta_{k,n})_{n\geq 0} = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots)$.

- Une suite $a \in A$ est dite (*non-restrictivement*) *universelle* si pour tout $x \in X$, il existe une suite croissante de naturels (λ_n) telle que
  (i) $\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_k x_k$ converge vers x dans X quand n tend vers l'infini.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 30Bxx; Secondary 30K05, 47A16.
Key words and phrases: universal series, closed subspace, basic sequence, Fréchet space.

DOI: 10.4064/sm207-2-5

- Une suite $a \in A$ est dite *restrictivement universelle* si pour tout $x \in X$, il existe une suite croissante de naturels (λ_n) telle que
  (i) $\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_k x_k$ converge vers x dans X quand n tend vers l'infini ;
  (ii) $\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_k e_k$ converge vers a dans A quand n tend vers l'infini.

On note U l'ensemble des suites (non-restrictivement) universelles, et U_A l'ensemble des suites restrictivement universelles.

Le premier exemple de série universelle est dû à Fekete en 1914. Il met alors en évidence l'existence d'une série de Taylor sur $[-1,1]$ dont les sommes partielles peuvent approximer uniformément toute fonction continue f sur $[-1,1]$ qui vérifie $f(0) = 0$ (voir [5]). De nombreux autres exemples ont ensuite été obtenus de manière constructive (voir [7], [8], [11]) jusqu'à ce qu'une formalisation de ces constructions soit faite en 2008 dans [2].

Une question récurrente concernant les suites d'opérateurs universelles est de savoir s'il existe des sous-espaces denses ou des sous-espaces fermés de dimension infinie composés uniquement d'éléments universels (exception faite de 0).

Il est en fait montré dans [2] qu'il suffit que U_A soit non vide pour qu'il existe un sous-espace inclus dans $U_A \cup \{0\}$ qui soit dense dans X.

Charpentier a quant à lui montré dans son article [3] que si A est un espace de Banach alors il suffit également que U_A soit non vide pour qu'il existe un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U_A \cup \{0\}$.

Dans le cas où A est un espace de Fréchet avec une norme continue, Charpentier remarque cependant que ses méthodes ne lui permettent pas de généraliser ce résultat complètement. Il obtient un résultat plus faible : si U_A est non vide alors il existe un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U \cup \{0\}$. Nous montrons que le résultat obtenu par Charpentier dans le cas des espaces de Banach reste vrai si A est un espace de Fréchet avec une norme continue.

Théorème Principal. *Sous les hypothèses données, si A est un espace de Fréchet avec une norme continue et si U_A est non vide alors il existe un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U_A \cup \{0\}$.*

Pour prouver ce théorème, nous nous baserons sur l'existence et les propriétés des suites basiques dans un espace de Fréchet avec une norme continue. Celles-ci ont déjà été utilisées dans le cadre des sous-espaces hypercycliques par Petersson (voir [10]).

Une application intéressante de ce théorème concerne les séries de Taylor universelles sur un domaine simplement connexe. En 2005, Bayart a prouvé l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie constitué uniquement de fonctions holomorphes sur le disque unité dont les séries de Taylor sont universelles (voir [1]). Une généralisation de ce résultat pour des domaines simplement connexes quelconques a ensuite été énoncée par Charpentier ([3, Théorème 5.6]). Néanmoins, son résultat dans le cas des espaces de Fréchet sur l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U \cup \{0\}$ ne lui permettait pas de prouver ce théorème en toute généralité. Nous apportons la preuve complète de ce théorème (voir Section 4).

2. Preuve du Théorème Principal. La preuve de ce théorème repose sur la construction d'une suite basique dont l'adhérence de l'espace engendré sera composée uniquement de séries restrictivement universelles. L'approche de Charpentier (voir [3]) dans le cas d'un espace de Fréchet A avec une norme continue $\|\cdot\|$ reposait sur la construction d'une suite basique dans le complété de $(A, \|\cdot\|)$. Nous procéderons ici de la même manière mais en construisant une suite basique non pas pour le complété de $(A, \|\cdot\|)$ mais pour l'espace A lui-même.

DÉFINITION 2.1. Une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ dans un espace de Fréchet est dite *basique* si pour tout $u \in \overline{\mathrm{span}}\{u_k : k \geq 1\}$, il existe une unique suite $(a_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$.

Si on considère Y un espace de Fréchet, l'existence d'une norme continue sur cet espace est équivalente à l'existence d'une suite croissante de normes $(\|\cdot\|_n)$ induisant la topologie de Y. Cette suite de normes nous permet de travailler directement avec des espaces normés $Y_n = (Y, \|\cdot\|_n)$. On voit par exemple facilement que si une suite $(u_k)_{k\geq 1} \subset Y$ est basique dans chacun des espaces Y_n, elle l'est également dans Y. (Par suite basique dans Y_n, on entend une suite qui est basique dans le complété de Y_n.)

De nombreux résultats sur les suites basiques dans un espace de Banach peuvent alors se transmettre aux espaces de Fréchet avec une norme continue. On sait par exemple ([4, Théorème V.1]) que dans un espace de Banach B, une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est basique si et seulement s'il existe une constante $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $m \geq n$, pour tous $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, on ait

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\Big\| \leq K \Big\|\sum_{k=1}^{m} a_k u_k\Big\|.$$

On appelle la plus petite constante K vérifiant cette propriété la *constante de basicité* de la suite $(u_k)_{k\geq 1}$. On en déduit comme dans l'article [10] le résultat suivant pour les espaces de Fréchet :

LEMME 2.2. *Soient Y un espace de Fréchet avec une norme continue, $(\|\cdot\|_n)$ une suite croissante de normes définissant la topologie de Y, et $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'on ait $\prod_n (1 + \varepsilon_n) = K < +\infty$. Si une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ dans Y vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout*

$j \leq n$, pour tous $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\Big\|_j \leq (1+\varepsilon_n)\Big\|\sum_{k=1}^{n+1} a_k u_k\Big\|_j \tag{2.1}$$

alors cette suite est basique dans chaque espace Y_n ainsi que dans Y, et pour tout n, la suite $(u_k)_{k\geq n}$ est une suite basique de constante de basicité $K_n \leq K$ dans chaque espace Y_n.

Preuve. Il découle directement des hypothèses que pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_k)_{k\geq n}$ est une suite basique dans Y_n de constante de basicité $K_n \leq K$. De plus, étant donné que pour tout $n \geq 1$, pour tout $0 \neq y \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, pour tout $x \in \operatorname{span}\{u_k : k \geq n\}$, par (2.1) on a

$$0 < \|y\|_1 \leq K\|y - x\|_1 \leq K\|y - x\|_n,$$

on en déduit que

$$\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \cap \overline{\operatorname{span}}\{u_k : k \geq n\} = \{0\}$$

où l'adhérence est prise dans le complété de Y_n. L'espace $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ étant de dimension finie, cela implique que la somme $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\} + \overline{\operatorname{span}}\{u_k : k \geq n\}$ est directe et que

$$\overline{\operatorname{span}}\{u_k : k \geq 1\} = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \oplus \overline{\operatorname{span}}\{u_k : k \geq n\}.$$

On en conclut que la suite tout entière $(u_k)_{k\geq 1}$ est basique dans Y_n pour tout $n \geq 1$ ainsi que dans Y. ∎

Nous disposons, grâce à ce lemme, d'une méthode récursive pour construire une suite basique dans un espace de Fréchet avec une norme continue. Or, on sait de plus ([6, Lemme 10.39]) que pour tout espace de Fréchet Y, pour tout espace de dimension finie F dans Y, pour toute semi-norme continue p sur Y et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace fermé de codimension finie E tel que pour tout $x \in E$, pour tout $y \in F$, on ait

$$p(x + y) \geq \max\left(\frac{p(x)}{2+\varepsilon}, \frac{p(y)}{1+\varepsilon}\right).$$

Cela nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soient Y un espace de Fréchet avec une norme continue, $(\|\cdot\|_n)$ une suite de normes continues et M un sous-espace de dimension infinie. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tous $u_1, \dots, u_n \in Y$, il existe $u_{n+1} \in M$ tel que $\|u_{n+1}\|_1 = 1$ et tel que pour tout $j \leq n$, pour tous $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ on ait*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\Big\|_j \leq (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{k=1}^{n+1} a_k u_k\Big\|_j.$$

Une autre propriété intéressante des suites basiques est la notion d'équivalence.

Définition 2.4. Soit Y un espace de Fréchet. Deux suites basiques (u_n) et (f_n) dans Y sont dites *équivalentes* si pour toute suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{K}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ converge dans Y si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ converge dans Y.

Dans le cas d'un espace de Banach B, on sait (voir [4, Théorème V.9]) que si (u_k) est une suite basique dans B de constante de basicité K avec $\|u_k\| \geq 1$ alors toute suite (f_k) vérifiant $\sum_{k=1}^{+\infty} 2K\|u_k - f_k\| < 1$ est basique dans B et équivalente à (u_k).

Lemme 2.5. *Soient Y un espace de Fréchet avec une norme continue, $(\|\cdot\|_n)$ une suite croissante de normes définissant la topologie de Y, et K un réel positif. Si $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite basique dans Y telle que pour tout k, on ait $\|u_k\|_1 = 1$ et telle que pour tout n, la suite $(u_k)_{k\geq n}$ soit une suite basique dans Y_n avec constante de basicité $K_n \leq K$, alors toute suite $(f_k)_{k\geq 1} \subset Y$ vérifiant*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2K\|u_n - f_n\|_n < 1$$

est basique dans chaque espace Y_n ainsi que dans Y. De plus, les suites $(u_k)_{k\geq 1}$ et $(f_k)_{k\geq 1}$ sont équivalentes dans le complété de chaque espace Y_n ainsi que dans Y.

Preuve. Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite dans Y vérifiant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2K\|u_n - f_n\|_n < 1.$$

On déduit de cette inégalité et du fait que la suite $(\|\cdot\|_n)$ soit croissante que pour tout n, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} 2K\|u_k - f_k\|_n < 1.$$

Comme on suppose de plus que $\|u_k\|_1 = 1$, on en conclut que pour tout n, la suite $(f_k)_{k\geq n}$ est basique dans Y_n, et que les suites $(u_k)_{k\geq n}$ et $(f_k)_{k\geq n}$ sont équivalentes dans le complété de Y_n. Il découle alors comme dans le Lemme 2.2 que la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ est basique dans chaque espace Y_n ainsi que dans Y. De plus, par définition de suites basiques équivalentes, il est évident que pour tout n, la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ sera également équivalente à $(u_k)_{k\geq 1}$ dans le complété de Y_n et dès lors, comme noté dans [10, Lemme 2], que les suites $(u_k)_{k\geq 1}$ et $(f_k)_{k\geq 1}$ sont équivalentes dans Y. ∎

Replaçons-nous maintenant dans le cadre du Théorème Principal et considérons que $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace vectoriel topologique métrisable sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) où $\|\cdot\|_X$ est une F-norme induisant la topologie de X, que $(x_k)_{k\geq 0}$ est une suite dans X fixée au préalable, que A est un espace de

Fréchet avec une norme continue inclus dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, que $(\|\cdot\|_n)$ désigne une suite croissante de normes induisant la topologie de A et que $\|\cdot\|_A$ désigne la F-norme définie par

$$\|a\|_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \|a\|_n).$$

Nous rappelons qu'une *F-norme* $\|\cdot\|_Y$ sur un espace Y est une application à valeurs positives telle que pour tous $x, y \in Y$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

(1) $\|x + y\|_Y \leq \|x\|_Y + \|y\|_Y$;
(2) $\|\lambda x\|_Y \leq \|x\|_Y$ si $|\lambda| < 1$;
(3) $\lim_{\lambda \to 0} \|\lambda x\|_Y = 0$;
(4) $\|x\|_Y = 0$ implique $x = 0$.

Une propriété intéressante des F-normes découlant de (1) et (2) est que pour tout $x \in Y$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\|\lambda x\|_Y \leq (|\lambda| + 1)\|x\|_Y. \tag{2.2}$$

Par la suite, on notera également $e_k = (\delta_{k,n})_{n\geq 0}$ les suites constituées uniquement d'un 1 en k-ème position, G l'espace des polynômes dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et on suppose que l'espace A vérifie quelques conditions classiques :

(1) $G \subset A$;
(2) G est dense dans A ;
(3) les projections $P_i : A \to \mathbb{K}$ définies par $P_i((a_k)_{k\geq 0}) = a_i$ sont continues.

Nous rappelons que le terme polynôme est ici utilisé pour désigner les suites constituées d'un nombre fini d'éléments non nuls. Nous utiliserons également les termes *degré* et *valuation* pour désigner respectivement le plus grand indice référençant un élément non nul d'un polynôme et le plus petit.

L'hypothèse du Théorème Principal de l'existence d'une série restrictivement universelle (voir Définition 1.1) sera utilisée via la proposition suivante :

Proposition 2.6 ([2, Théorème 1]). *Sous les hypothèses données, si U_A est non vide alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in X$ et tout entier $p \geq 0$, il existe un polynôme $(a_k)_{k\geq 0}$ de valuation plus grande que p tel qu'on ait*

$$\Big\|\sum_{k\geq 0} a_k x_k - x\Big\|_X < \varepsilon \quad \text{et} \quad \Big\|\sum_{k\geq 0} a_k e_k\Big\|_A < \varepsilon.$$

Nous avons maintenant à notre disposition tous les résultats nécessaires pour prouver notre Théorème Principal.

Preuve du Théorème Principal. Notons S_n l'opérateur de A dans X défini par $S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k$, $d(a)$ le degré d'un polynôme a, $v(a)$ sa valuation et $\prec$ un ordre strict sur les couples (k, j) avec $j \geq k$ défini par

$(k,j) \prec (k',j')$ si et seulement si on a soit $j < j'$, soit $j = j'$ et $k < k'$. On considère également $(y_j)_{j\geq 1}$ une suite dense dans X (dont l'existence est garantie par l'existence d'une série universelle) et $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\prod_{k\geq 1}(1+\varepsilon_k) < 2$.

On cherche à construire une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ basique dans A dont l'adhérence de l'espace vectoriel engendré sera un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U_A \cup \{0\}$. Pour ce faire, on posera $f_k = u_k + \sum_{j\geq k} x_{k,j}$ où la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ formera une suite basique de polynômes dans A et où les suites $(x_{k,j})_{j\geq k}$ seront des perturbations suffisamment petites pour que la suite (f_k) soit équivalente à (u_k) et judicieusement choisies pour que l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par (f_k) soit incluse dans $U_A \cup \{0\}$. La construction des éléments $(x_{k,j})_{j\geq k}$ passera quant à elle par la construction de deux autres familles de polynômes $(p_{k,j})_{j\geq k}$ et $(q_{k,j})_{j\geq k}$ à partir desquelles on définira $x_{k,j}$ comme étant la somme : $x_{k,j} = p_{k,j} + q_{k,j}$.

Nous construisons ces différentes familles de polynômes suivant l'ordre $\prec$ de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{cccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \\
u_1 & & p_{1,2} & & p_{1,3} & \\
p_{1,1} & & q_{1,2} & & q_{1,3} & \\
q_{1,1} & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\
 & & (2,2) & & (2,3) & \\
 & & u_2 & & p_{2,3} & \cdots \\
 & & p_{2,2} & & q_{2,3} & \\
 & & q_{2,2} & & \downarrow & \\
 & & & & (3,3) & \\
 & & & & u_3 & \\
 & & & & p_{3,3} & \\
 & & & & q_{3,3} &
\end{array}\right).$$

Nous nous arrangeons également pour que chaque nouveau polynôme soit de valuation strictement plus grande que le degré du précédent.

- Si l'on se trouve à l'étape (k,k), on commence par utiliser, pour $k \geq 2$, le Lemme 2.3 afin d'obtenir un polynôme u_k vérifiant
$$\|u_k\|_1 = 1, \qquad d(q_{k-1,k}) < v(u_k),$$
et vérifiant pour tout $n \leq k-1$, pour tous $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$,
$$\Big\| \sum_{l=1}^{k-1} a_l u_l \Big\|_n \leq (1+\varepsilon_k) \Big\| \sum_{l=1}^{k} a_l u_l \Big\|_n.$$
Si $k = 1$, on pose simplement $u_1 = e_1/\|e_1\|_1$.

On utilise alors la Proposition 2.6 pour obtenir un polynôme $p_{k,k}$ et ensuite un polynôme $q_{k,k}$ vérifiant

$$d(u_k) < v(p_{k,k}), \quad \max(\|p_{k,k}\|_k, \|p_{k,k}\|_A) < \frac{1}{2^{k+4}},$$
$$\|S_{d(p_{k,k})}(u_k + p_{k,k}) - y_k\|_X < \frac{1}{2^{k+1}}$$

et

$$d(p_{k,k}) < v(q_{k,k}), \quad \max(\|q_{k,k}\|_k, \|q_{k,k}\|_A) < \frac{1}{2^{k+4}},$$
$$\|S_{d(q_{k,k})}(u_k + p_{k,k} + q_{k,k})\|_X < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On pose pour finir $x_{k,k} = p_{k,k} + q_{k,k}$.

- Si l'on se trouve à l'étape (k,j) avec $j > k$, on utilise directement la Proposition 2.6 pour obtenir des polynômes $p_{k,j}$ et $q_{k,j}$ vérifiant

$$\max_{(k',j')\prec(k,j)} d(q_{k',j'}) < v(p_{k,j}), \quad \max(\|p_{k,j}\|_k, \|p_{k,j}\|_A) < \frac{1}{2^{j+4}},$$
$$\Big\|S_{d(p_{k,j})}\Big(u_k + \sum_{j'=k}^{j-1} x_{k,j'} + p_{k,j}\Big) - y_j\Big\|_X < \frac{1}{2^{j+1}}$$

et

$$d(p_{k,j}) < v(q_{k,j}), \quad \max(\|q_{k,j}\|_k, \|q_{k,j}\|_A) < \frac{1}{2^{j+4}},$$
$$\Big\|S_{d(q_{k,j})}\Big(u_k + \sum_{j'=k}^{j-1} x_{k,j'} + p_{k,j} + q_{k,j}\Big)\Big\|_X < \frac{1}{2^{j+1}}.$$

On pose alors $x_{k,j} = p_{k,j} + q_{k,j}$.

Les conditions sur les valuations et les degrés des différents polynômes construits ci-dessus sont bien telles que lorsque l'on construit un nouveau polynôme, la valuation de celui-ci est toujours strictement supérieure aux degrés des éléments déjà construits.

Ces différentes familles vérifient dès lors les propriétés suivantes :

(1) la suite $(u_k)_{k\ge 1}$ est une suite basique de polynômes dans chaque espace $(A, \|\cdot\|_n)$ ainsi que dans A telle que pour tout $k \ge 1$, $\|u_k\|_1 = 1$, et telle que pour tout n, la suite $(u_k)_{k\ge n}$ est une suite basique de constante de basicité plus petite que 2 dans chaque espace $(A, \|\cdot\|_n)$ (voir Lemme 2.2) ;

(2) les suites $(p_{k,j})_{j\ge k}$ et $(q_{k,j})_{j\ge k}$ sont des suites de polynômes telles que pour tout k, pour tout $j \ge k$, on ait

$$\max(\|p_{k,j}\|_k, \|p_{k,j}\|_A) < \frac{1}{2^{j+4}}, \quad \max(\|q_{k,j}\|_k, \|q_{k,j}\|_A) < \frac{1}{2^{j+4}} \tag{2.3}$$

et les suites $(x_{k,j})_{j\geq k}$ sont donc des suites de polynômes vérifiant pour tout k, pour tout $j \geq k$,

$$\max(\|x_{k,j}\|_k, \|x_{k,j}\|_A) < \frac{1}{2^{j+3}}\,; \tag{2.4}$$

(3) les suites $(u_k)_{k\geq 1}$, $(p_{k,j})_{j\geq k}$ et $(q_{k,j})_{j\geq k}$ sont telles qu'on ait

$$\forall (k,j) \prec (k',j'), \quad d(p_{k,j}) < v(q_{k,j}) \leq d(q_{k,j}) < v(p_{k',j'}) \tag{2.5}$$

et telles qu'on ait

$$\begin{aligned} &\forall (k',j') \prec (k,k), \quad d(q_{k',j'}) < v(u_k) \text{ et } d(p_{k',j'}) < v(u_k),\\ &\forall (k,k) \prec (k',j'), \quad d(u_k) < v(q_{k',j'}) \text{ et } d(u_k) < v(p_{k',j'})\,; \end{aligned} \tag{2.6}$$

(4) la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ et les suites $(x_{k,j})_{j\geq k}$ sont telles que si on note $n_{k,j} := d(p_{k,j})$, on ait

$$\forall j \geq k, \quad \Big\| S_{n_{k,j}}\Big(u_k + \sum_{l=k}^{j} x_{k,l}\Big) - y_j \Big\|_X < \frac{1}{2^{j+1}}, \tag{2.7}$$

$$\forall (k',j') \prec (k,j), \quad \Big\| S_{n_{k,j}}\Big(u_{k'} + \sum_{l=k'}^{j'} x_{k',l}\Big) \Big\|_X < \frac{1}{2^{j'+1}}. \tag{2.8}$$

On remarque que poser $f_k = u_k + \sum_{j\geq k} x_{k,j}$ a bien un sens étant donné que, par (2.4), on a

$$\sum_{j\geq k} \|x_{k,j}\|_A < \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^{j+3}} < +\infty.$$

La suite (f_k) ainsi définie vérifie dès lors les inégalités suivantes :

i. Pour tout $k \geq 1$, il découle de (2.4) que

$$\|f_k - u_k\|_k < \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{2.9}$$

ii. Pour tout $j \geq k$, il découle de (2.5)–(2.7) que

$$\Big\| S_{n_{k,j}}(f_k) - y_j \Big\|_X = \Big\| S_{n_{k,j}}\Big(u_k + \sum_{l=k}^{j} x_{k,l}\Big) - y_j \Big\|_X < \frac{1}{2^{j+1}}. \tag{2.10}$$

iii. Pour tout $k < k' < j$, il découle de (2.5), (2.6) et (2.8) que

$$\Big\| S_{n_{k,j}}(f_{k'}) \Big\|_X = \Big\| S_{n_{k,j}}\Big(u_{k'} + \sum_{l=k'}^{j-1} x_{k',l}\Big) \Big\|_X < \frac{1}{2^{j}}. \tag{2.11}$$

iv. Pour tout $(k,j) \prec (k',k')$, il découle de (2.5) et (2.6) que

$$S_{n_{k,j}}(f_{k'}) = 0. \tag{2.12}$$

Si l'on note de plus S_n^A l'opérateur de A dans A défini par $S_n^A(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$ alors la suite (f_k) vérifie également les inégalités suivantes :

v. Pour tout $(k,j) \prec (k',k')$, il découle de (2.5) et (2.6) que

$$S^A_{n_{k,j}}(f_{k'}) = 0. \tag{2.13}$$

vi. Pour tout $k < k' < j$, il découle de (2.4), (2.5) et (2.6) que

$$\Big\|f_{k'} - S^A_{n_{k,j}}(f_{k'})\Big\|_A = \Big\|\sum_{j'\geq j} x_{k',j'}\Big\|_A \leq \frac{1}{2^{j+2}}. \tag{2.14}$$

vii. Pour tout $1 \leq k \leq j$, il découle de (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) que

$$\Big\|f_k - S^A_{n_{k,j}}(f_k)\Big\|_A = \Big\|\sum_{j'\geq j} x_{k,j'} - p_{k,j}\Big\|_A \leq \frac{1}{2^{j+1}}. \tag{2.15}$$

En utilisant le Lemme 2.5, on déduit de (2.9) que la suite (f_k) est une suite basique dans A équivalente à (u_k). On considère dès lors

$$M := \overline{\text{span}}\{f_k : k \geq 1\} = \Big\{\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k f_k : \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k f_k \text{ converge dans } A\Big\}.$$

Il est évident que M est un espace de dimension infinie fermé dans A et grâce aux inégalités (2.10) à (2.15), il n'est en fait pas difficile de montrer que M est de plus inclus dans $U_A \cup \{0\}$.

En effet, si $a \in M\backslash\{0\}$, on sait que a peut s'écrire sous la forme $a = \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k f_k$. Comme la suite (f_k) est équivalente à la suite (u_k), on en déduit que $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k u_k$ converge également. Il existe donc $K > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$, on ait $|\alpha_k| \leq K$ étant donné qu'on a

$$|\alpha_k| = \|\alpha_k u_k\|_1 \leq \Big\|\sum_{l=1}^{k}\alpha_l u_l\Big\|_1 + \Big\|\sum_{l=1}^{k-1}\alpha_l u_l\Big\|_1 \leq 4\Big\|\sum_{l=1}^{+\infty}\alpha_l u_l\Big\|_1.$$

Posons $k_0 = \min\{k : \alpha_k \neq 0\}$. Quitte à diviser par α_{k_0}, on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha_{k_0} = 1$ et on a alors pour tout $j > k_0 + 1$,

$$\begin{aligned}
\|S_{n_{k_0,j}}(a) - y_j\|_X &\leq \|S_{n_{k_0,j}}(f_{k_0}) - y_j\|_X + \sum_{k'>k_0}\|\alpha_{k'}S_{n_{k_0,j}}(f_{k'})\|_X \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \sum_{k'=k_0+1}^{j-1}\|\alpha_{k'}S_{n_{k_0,j}}(f_{k'})\|_X + \sum_{k'=j}^{+\infty}\|\alpha_{k'}S_{n_{k_0,j}}(f_{k'})\|_X \quad \text{(par (2.10))} \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \sum_{k'=k_0+1}^{j-1}(|\alpha_{k'}|+1)\|S_{n_{k_0,j}}(f_{k'})\|_X + 0 \quad \text{(par (2.2) et (2.12))} \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \sum_{k'=k_0+1}^{j-1}(|\alpha_{k'}|+1)\frac{1}{2^j} \quad \text{(par (2.11))} \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}} + (K+1)\frac{j}{2^j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On a également $\lim_{j\to+\infty} S^A_{n_{k_0,j}}(a) = a$ dans A car pour tout $j > k_0+1$,

$$\begin{aligned}
\|a - S^A_{n_{k_0,j}}(a)\|_A &= \Big\| \sum_{k'=k_0}^{j-1} \alpha_{k'}(f_{k'} - S^A_{n_{k_0,j}}(f_{k'})) + \sum_{k'\ge j} \alpha_{k'} f_{k'} \Big\|_A \qquad \text{(par (2.13))} \\
&\le \sum_{k'=k_0}^{j-1} (|\alpha_{k'}|+1) \Big\|(f_{k'} - S^A_{n_{k_0,j}}(f_{k'}))\Big\|_A + \Big\| \sum_{k'\ge j} \alpha_{k'} f_{k'} \Big\|_A \qquad \text{(par (2.2))} \\
&\le (K+1)\bigg(\frac{1}{2^{j+1}} + \sum_{k'=k_0+1}^{j-1} \frac{1}{2^{j+2}}\bigg) + \Big\| \sum_{k'\ge j} \alpha_{k'} f_{k'} \Big\|_A \qquad \text{(par (2.14) et (2.15))} \\
&\le (K+1)\bigg(\frac{1}{2^{j+1}} + \frac{j}{2^{j+2}}\bigg) + \Big\| \sum_{k'\ge j} \alpha_{k'} f_{k'} \Big\|_A \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

La suite $(y_j)_{j\ge 1}$ étant dense dans X, chaque élément non nul de M est donc bien restrictivement universel. ∎

Remarque 2.7. Si l'on compare ce résultat avec celui de Charpentier sur les espaces de Fréchet avec une norme continue où il obtient l'existence d'un espace fermé de dimension infinie inclus dans $U \cup \{0\}$ (voir [3]), on remarque que l'amélioration apportée à ce résultat n'est réellement significative que dans le cas où la suite (e_k) n'est pas une base de Schauder dans A.

3. Généralisation. Au lieu de se restreindre à un seul espace X, on peut vouloir considérer un nombre dénombrable d'espaces topologiques métrisables $(X_i)_{i\ge 1}$ et une famille $(x_k^{(i)})_{i\ge 1, k\ge 0}$ où pour tout $i \ge 1$, la suite $(x_k^{(i)})_{k\ge 0}$ est une suite dans X_i fixée au préalable. La notion de suite restrictivement universelle se définit alors dans ce cadre de la manière suivante :

Définition 3.1. Une suite $a \in A$ est dite *restrictivement universelle* si pour tout $i \ge 1$, pour tout $x \in X_i$, il existe une suite croissante de naturels (λ_n) telle que

(i) $\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_k x_k^{(i)}$ converge vers x dans X_i quand n tend vers l'infini ;
(ii) $\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_k e_k$ converge vers a dans A quand n tend vers l'infini.

On note $U_{A,(X_i)_i}$ l'ensemble de ces suites restrictivement universelles.

Si $\|\cdot\|_{X_i}$ désigne une F-norme induisant la topologie de X_i, la Définition 3.1 et la Proposition 2.6 impliquent directement le résultat suivant :

Proposition 3.2 ([2, Théorème 3]). *Sous les hypothèses données, si $U_{A,(X_i)_i}$ est non vide alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $i \ge 1$, pour tout $x \in X_i$ et pour tout entier $p \ge 0$, il existe $(a_k)_{k\ge 0} \in G$ de valuation plus* *grande que p tel qu'on ait*

$$\Big\|\sum_{k\geq 0} a_k x_k^{(i)} - x\Big\|_{X_i} < \varepsilon \quad et \quad \Big\|\sum_{k\geq 0} a_k e_k\Big\|_A < \varepsilon.$$

Le Théorème Principal se généralise dès lors à ce contexte.

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses données, si A est un espace de Fréchet avec une norme continue et si $U_{A,(X_i)_i}$ est non vide alors il existe un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U_{A,(X_i)_i} \cup \{0\}$.*

Preuve. On cherche comme précédemment à construire une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ basique dans A dont l'adhérence de l'espace vectoriel engendré sera un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U_{A,(X_i)_i} \cup \{0\}$.

On se donne pour cela des suites $(y_n^{(i)})_{i,n\geq 1}$ telles que pour tout $i \geq 1$, $(y_n^{(i)})_{n\geq 1}$ est une suite dense dans X_i, ainsi qu'une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que pour tout $i, m \geq 1$, on ait $\#\{j \in \mathbb{N} : \phi(j) = (i,m)\} = \infty$. On désignera également par $S_n^{(i)}$ l'opérateur de A dans X_i défini par $S_n^{(i)}(a) = \sum_{k=0}^n a_k x_k^{(i)}$.

Comme dans la preuve du Théorème Principal, on posera $f_k = u_k + \sum_{j\geq k} x_{k,j}$ où la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ formera une suite basique de polynômes dans A et où les suites $(x_{k,j})_{j\geq k}$ seront des perturbations choisies judicieusement et obtenues comme la somme de deux familles de polynômes $(p_{k,j})_{j\geq k}$ et $(q_{k,j})_{j\geq k}$.

On construit en fait les différentes familles ci-dessus selon l'ordre $\prec$ utilisé dans la preuve du Théorème Principal de la même manière qu'auparavant, si ce n'est que pour j fixé, si $\phi(j) = (i,m)$, le polynôme $p_{k,j}$ est construit de manière à ce qu'on ait

$$\Big\|S^{(i)}_{d(p_{k,j})}\Big(u_k + \sum_{j'=k}^{j-1} x_{k,j'} + p_{k,j}\Big) - y_m^{(i)}\Big\|_{X_i} < \frac{1}{2^{j+1}}$$

et le polynôme $q_{k,j}$ est construit de manière à ce que si $\phi(j+1) = (i', m')$, on ait

$$\Big\|S^{(i')}_{d(q_{k,j})}\Big(u_k + \sum_{j'=k}^{j-1} x_{k,j'} + p_{k,j} + q_{k,j}\Big)\Big\|_{X_{i'}} < \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Il découle de la construction de ces différentes suites que pour tout $k \leq j$, si $\phi(j) = (i,m)$ et si $n_{k,j} := d(p_{k,j})$, on a en particulier

$$\|S^{(i)}_{n_{k,j}}(f_k) - y_m^{(i)}\|_{X_i} = \Big\|S^{(i)}_{n_{k,j}}\Big(u_k + \sum_{l=k}^{j} x_{k,l}\Big) - y_m^{(i)}\Big\|_{X_i} < \frac{1}{2^{j+1}}$$

et pour tout $k < k' < j$, on a

$$\|S^{(i)}_{n_{k,j}}(f_{k'})\|_{X_i} = \Big\|S^{(i)}_{n_{k,j}}\Big(u_{k'} + \sum_{l=k'}^{j-1} x_{k',l}\Big)\Big\|_{X_i} < \frac{1}{2^j}.$$

La suite de la preuve est alors analogue à celle du Théorème Principal. ■

Remarque 3.4. Dans [3, Section 4], Charpentier considère également le cas où les suites (e_k) et $(x_k^{(i)})$ dépendent d'un paramètre variant dans un ensemble compact (ou une union dénombrable de compacts). Néanmoins, contrairement à ce qu'il affirme, il n'est pas clair, même dans le cas des espaces de Banach, qu'il soit vraiment possible de construire une suite basique (f_k) de la même façon que dans la version non-paramétrée.

En effet, bien que le degré d'un polynôme soit supposé uniformément borné pour tout paramètre, ce n'est pas forcément le cas pour la valuation. Le fait qu'un polynôme ait une valuation suffisamment grande pour un certain paramètre ξ_0 n'entraînera pas obligatoirement que la valuation de ce polynôme pour un autre paramètre ξ soit également grande. Ceci semble compromettre l'ensemble de la construction.

4. Application : Séries de Taylor universelles sur un domaine simplement connexe. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et ξ un élément de Ω. On considère (K_i) une suite de compacts dans $\mathbb{C}$ telle que :

- pour tout $i \geq 1$, on ait $K_i \subset \Omega^c$ et K_i^c connexe ;
- pour tout compact $K \subset \Omega^c$ avec K^c connexe, il existe $i \geq 1$ tel que $K \subset K_i$.

On suppose alors que $A = \mathbb{H}(\Omega)$, X_i est l'espace des fonctions entières muni des semi-normes $p_n^{(i)}(f) = \sup_{z\in K_i} |f^{(n)}(z)|$ et $x_k^{(i)}$ est la fonction définie par $x_k^{(i)}(z) = (z-\xi)^k$. L'espace A peut être vu comme un sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à travers la correspondance $e_k = (z \mapsto (z-\xi)^k)$. Une suite (a_k) appartient donc à A si la fonction $\sum_{k\geq 0} a_k(z-\xi)^k$ a un rayon de convergence strictement positif et s'étend en une fonction holomorphe sur Ω. On pose également $S_n(\cdot,\xi)$ l'opérateur de A dans $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ défini par

$$S_n(f,\xi)(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-\xi)^k \quad \text{où} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}.$$

Notons que la suite (e_k) n'est pas une base de Schauder dans A excepté si Ω est un disque centré en ξ.

Comme on sait que $U_{A,(X_i)_i}$ est non vide (voir [2, Théorème 6]), on déduit du Théorème 3.3 qu'il existe un espace M fermé de dimension infinie dans

$\mathbb{H}(\Omega)$ tel que pour tout $f \in M\backslash\{0\}$, pour tout $i \geq 1$, pour toute fonction entière h, il existe une suite croissante (λ_n) telle que

(i) $S_{\lambda_n}(f,\xi)$ converge vers h dans X_i quand n tend vers l'infini ;
(ii) $S_{\lambda_n}(f,\xi)$ converge vers f dans A quand n tend vers l'infini.

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME 4.1. *Soient Ω un domaine simplement connexe et $\xi \in \Omega$. Il existe un espace M fermé de dimension infinie dans $\mathbb{H}(\Omega)$ tel que pour tout $f \in M\backslash\{0\}$, pour tout compact $K \subset \Omega^c$ avec K^c connexe, pour toute fonction entière h, il existe une suite croissante (λ_n) telle que*

(i) *pour tout $l \geq 0$,*
$$\sup_{z\in K}\left|\frac{d^l}{dz^l}S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - h^{(l)}(z)\right| \to 0\,;$$
(ii) *pour tout compact $L' \subset \Omega$,*
$$\sup_{z\in L'}|S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z)| \to 0.$$

Cela entraîne dès lors en vue des résultats sur les propriétés des trous d'Ostrowski (voir [9]) le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. *Soit Ω un domaine simplement connexe. Il existe un espace M fermé de dimension infinie dans $\mathbb{H}(\Omega)$ tel que pour tout $f \in M\backslash\{0\}$, pour tout compact $K \subset \Omega^c$ avec K^c connexe, pour toute fonction entière h, il existe une suite croissante (λ_n) telle que pour tout compact $L \subset \Omega$,*

(i) *pour tout $l \geq 0$,*
$$\sup_{\xi\in L}\sup_{z\in K}\left|\frac{d^l}{dz^l}S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - h^{(l)}(z)\right| \to 0\,;$$
(ii) *pour tout compact $L' \subset \Omega$,*
$$\sup_{\xi\in L}\sup_{z\in L'}|S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z)| \to 0.$$

Ce résultat avait déjà été énoncé par Charpentier ([3, Théorème 5.6]). Néanmoins, son résultat dans le cadre des espaces de Fréchet sur l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $U \cup \{0\}$ ne lui permettait de prouver ce théorème que dans le cas où la suite (e_k) était une base de Schauder, c'est-à-dire uniquement dans le cas où Ω était un disque.

Remerciements. L'auteur est soutenu par une bourse du FRIA.

Références

[1] F. Bayart, *Linearity of sets of strange functions*, Michigan Math. J. 53 (2005), 291–303.

[2] F. Bayart, K.-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis and C. Papadimitropoulos, *Abstract theory of universal series and applications*, Proc. London Math. Soc. 96 (2008), 417–463.

[3] S. Charpentier, *On the closed subspaces of universal series in Banach spaces and Fréchet spaces*, Studia Math. 198 (2010), 121–145.

[4] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, New York, 1984.

[5] J. Pál, *Zwei kleine Bemerkungen*, Tôhoku Math. J. 6 (1914), 42–43.

[6] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, London, 2011.

[7] W. Luh, *Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten*, Mitt. Math. Sem. Giessen 88 (1970), 56 pp.

[8] D. Menchoff [D. Men'shov], *Sur les séries trigonométriques universelles*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 49 (1945), 79–82.

[9] J. Müller, V. Vlachou and A. Yavrian, *Universal overconvergence and Ostrowski-gaps*, Bull. London Math. Soc. 38 (2006), 597–606.

[10] H. Petersson, *Hypercyclic subspaces for Fréchet space operators*, J. Math. Anal. Appl. 319 (2006), 764–782.

[11] A. I. Seleznev, *On universal power series*, Mat. Sb. (N.S.) 28 (1951), 453–460 (en russe).

Quentin Menet
Institut de Mathématique
Université de Mons
20 Place du Parc
7000 Mons, Belgique
E-mail: Quentin.Menet@umons.ac.be

Received November 14, 2011
Revised version November 29, 2011 (7356)