STUDIA MATHEMATICA 148 (1) (2001)

Sur les grandes déviations en théorie de filtrage non linéaire

par

Abdelkarem Berkaoui (Marrakech), Boualem Djehiche (Stockholm) et Youssef Ouknine (Marrakech)

Sommaire. Soit X^ε la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t^\varepsilon = x + \sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(X_s^\varepsilon)\, dW_s^i + \varepsilon \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(X_s^\varepsilon)\, d\widetilde{W}_s^j + \int_0^t b(X_s^\varepsilon)\, ds,$$

et considérons $\varphi^\varepsilon\phi = \mathbb{E}\phi(X^\varepsilon)$. L'objectif de cet article est d'établir le principe de grandes déviations pour la famille des lois induites par $\{X^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ pour la norme höldérienne. Par conséquent, on montre le même résultat pour la famille des lois induites par $\{\varphi^\varepsilon\phi : \varepsilon > 0\}$. Enfin, on donne une application de ces résultats au filtrage non linéaire.

1. Introduction. Le principe des grandes déviations (PGD) s'est avéré un outil très puissant, en particulier dans l'étude asymptotique des solutions des équations différentielles stochastiques. D'ailleurs depuis le fameux résultat de M. Schilder [13], plusieurs auteurs ont travaillé dans ce sens ; on rappelle notamment les résultats de H. Doss [6], Baldi *et al.* [2], G. Ben Arous et M. Ledoux [4], et G. Ben Arous et F. Castelle [3].

Soient W et $\widetilde{W}$ deux mouvements Browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^r$ et $\mathbb{R}^l$, définis sur les espaces de Wiener $\Omega_1 = C_0([0,1],\mathbb{R}^r)$ et $\Omega_2 = C_0([0,1],\mathbb{R}^l)$. On note $\mathbb{P}$ (respectivement $\widetilde{\mathbb{P}}$) la mesure de Wiener sur Ω_1 (respectivement Ω_2), donc $\mathbb{E}$, $\widetilde{\mathbb{E}}$ et $\mathbb{E}\times\widetilde{\mathbb{E}}$ sont les espérances respectivement sous $\mathbb{P}$, $\widetilde{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}\otimes\widetilde{\mathbb{P}}$. On considère l'équation différentielle stochastique

$$(1.1)\quad X_t^\varepsilon = x + \sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(X_s^\varepsilon)\, dW_s^i + \varepsilon \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(X_s^\varepsilon)\, d\widetilde{W}_s^j + \int_0^t b(X_s^\varepsilon)\, ds,$$

où $t\in[0,1]$, $x\in\mathbb{R}^d$ et $\sigma_i, \widetilde{\sigma}_j, b$ sont des champs de vecteurs réguliers de $\mathbb{R}^d$. Soit ϕ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. On définit

$$(1.2)\qquad \varphi_t^\varepsilon\phi = \mathbb{E}(\phi(X_t^\varepsilon)).$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 60H10, 60F10, 60G35.

Pour $0<\alpha<1$, on note $C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$ l'espace séparable de fonctions höldériennes d'ordre α, à valeurs dans $L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d)$.

Notre travail se rapproche plus de l'article de G. Ben Arous et F. Castell [3] qui établit un principe de grandes déviations pour la loi de X^ε dans l'espace $L^2(\Omega_1,C([0,1],\mathbb{R}^d))$ où $C([0,1],\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous obtenons le même résultat dans l'espace $C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$ sans supposer l'hypothèse de commutation des champs et notre démonstration est nettement plus simple que celle dans [3] qui reposait sur des résultats fins sur les flots stochastiques et nécessitait des hypothèses de dérivabilité sur les coefficients, dues à l'utilisation du lemme d'injection de Sobolev.

Si on considère X^ε comme une variable aléatoire sur Ω_2 à valeurs dans $C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$, $\alpha<1/2$, alors le but de ce papier est de prouver que la famille de probabilités $\mathbb{Q}^\varepsilon=\widetilde{\mathbb{P}}\circ(X^\varepsilon)^{-1}$ satisfait le principe de grandes déviations sous des hypothèses sur les coefficients $\sigma_i,\widetilde{\sigma}_j$ et b que l'on précisera plus tard ; par conséquent, nous obtenons le même résultat pour la famille de probabilités $\mathbb{P}^\varepsilon=\widetilde{\mathbb{P}}\cdot(\varphi^\varepsilon\phi)^{-1}$, généralisant ainsi les résultats de J. T. Rabeheremanana [12] et ceux de M. Ouzina [9] dans le cas d'une algèbre de Lie nilpotente. Nous appliquons ces résultats au filtrage non linéaire.

2. Quelques résultats généraux. Dans cette section, on rappelle quelques résultats qui nous seront utiles par la suite. Soient $B=\{B_t:t\ge 0\}$ un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P}^*)$, et $\mathcal{H}$ l'espace de Cameron–Martin associé à B. On pose $\|h\|_{\mathcal{H}}=(\int_0^1|h'(s)|^2\,ds)^{1/2}$, $h\in\mathcal{H}$, où h' désigne la dérivée de h au sens des distributions. D'abord, on énonce une définition que l'on adoptera tout au long de ce papier.

DÉFINITION 2.1. Soit E un espace topologique. On dit que l'application $I:E\to[0,\infty]$ est une *bonne fonctionnelle d'action* si elle est semi-continue inférieurement et pour tout $a<\infty$, les ensembles $\{I\le a\}$ sont compacts.

Le théorème qui suit est une généralisation du résultat de M. Schilder dans l'espace de Hölder. Il est prouvé dans [2].

THÉORÈME 2.1. *La famille des lois induites par $\{\varepsilon B:\varepsilon>0\}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $C^\alpha([0,1],\mathbb{R}^k)$ avec la fonctionnelle d'action λ définie par*

$$\lambda(h)=\begin{cases}\frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 & \text{si } h\in\mathcal{H},\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}\tag{2.3}$$

LEMME 2.1. *Soit $\{U_t:t\ge 0\}$ un processus réel défini sur l'espace $\Omega_1\times\Omega_2$ et progressivement mesurable tel que $\mathbb{E}\times\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^1 U_t^2\,dt<\infty$. Alors pour*

$t \in [0,1]$, *on a*

$$\mathbb{E}\int_0^t U_s\, dW_s^i = 0, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

et

$$\mathbb{E}\int_0^t U_s\, d\widetilde{W}_s^j = \int_0^t (\mathbb{E}U_s)\, d\widetilde{W}_s^j, \qquad j = 1, \ldots, l.$$

Le lemme 2.1 est prouvé dans [10]. Le lemme suivant donne une estimation exponentielle d'un processus d'Itô en norme höldérienne. Il est démontré par D. W. Stroock dans [14].

LEMME 2.2. *Soient* $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^k$ *et* $g : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^l$ *deux processus progressivement mesurables et bornés. On pose*

$$U_t = \int_0^t f(s)\, dB_s + \int_0^t g(s)\, ds, \qquad t \in [0,1],$$

et on définit $A = \sup_{t,\omega} \operatorname{tr}(f(t,\omega) f^*(t,\omega))$ *et* $L = \sup_{t,\omega} |g(t,\omega)|$. *Alors pour tout* $s \ge 0$, $T \ge 0$, $0 < \alpha < 1/2$ *et* $r > lLT^{1-\alpha}$ *on a*

$$\mathbb{P}^*\biggl(\sup_{s \le t \le s+T} \frac{|U_t - U_s|}{|t-s|^\alpha} > r\biggr) \le 2l \exp\biggl(-\frac{(r - lLT^{1-\alpha})^2}{2Al^2T^{1-2\alpha}}\biggr). \tag{2.4}$$

Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques complets et I une bonne fonctionnelle d'action sur E. Pour $a > 0$, on pose $\Gamma_a = \{x \in E : I(x) \le a\}$ et $\Gamma_\infty = \bigcup_a \Gamma_a$. Notre travail repose essentiellement sur le théorème suivant montré par Pérez-Abreu et Tudor dans [11].

THÉORÈME 2.2. *On considère des applications* $F_n, F : E \to E'$ *et* $X_n^\varepsilon, X^\varepsilon : \Omega \to E'$ *telles que :*

(i) F_n *est continue de* E *dans* E'.

(ii) F_n *converge uniformément vers* F *sur* Γ_a.

(iii) *Pour tout* $n \ge 1$, $\{X_n^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *satisfait le principe de grandes déviations* (*quand* $\varepsilon \to 0$) *sur* E' *avec la bonne fonctionnelle d'action donnée par*

$$I_n(\xi) = \inf\{I(x) : F_n(x) = \xi\}.$$

(iv) $\{X_n^\varepsilon\}$ *est exponentiellement une bonne approximation de* $\{X^\varepsilon\}$, *i.e. pour tout* $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \mathbb{P}^*(d'(X_n^\varepsilon, X^\varepsilon) > \delta) = -\infty.$$

Alors $\{X^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *satisfait le principe de grandes déviations sur* E' *avec la bonne fonctionnelle d'action donnée par*

$$\widetilde{I}(\xi) = \inf\{I(x) : F(x) = \xi\}.$$

3. Résultat principal. Pour tout espace de Banach $(V, \|\cdot\|_V)$, on note par $C^\alpha([0,1],V)$, $0 \le \alpha < 1$, l'espace des fonctions höldériennes d'ordre α à valeurs dans V, muni de la norme suivante :

$$\|z\|_{\alpha,V} = \|z(0)\|_V + \sup_{0\le s<t\le 1} \frac{\|z(t)-z(s)\|_V}{|t-s|^\alpha},$$

et par $C^{\alpha,0}([0,1],V)$ le sous-espace séparable de $C^\alpha([0,1],V)$ défini par

$$C^{\alpha,0}([0,1],V) = \{z \in C^\alpha([0,1],V) : \lim_{\tau\to 0} \omega_\alpha(z,\tau) = 0\},$$

où

$$\omega_\alpha(z,\tau) = \sup_{0\le|t-s|\le\tau} \frac{\|z(t)-z(s)\|_V}{|t-s|^\alpha}.$$

Enfin, on désigne par $\|\cdot\|_{\infty,V}$ la norme uniforme associée à l'espace des fonctions continues $C([0,1],V)$. Pour $V = \mathbb{R}^d$, on note $\|\cdot\|_{\alpha,V}$ (respectivement $\|\cdot\|_{\infty,V}$) par $\|\cdot\|_\alpha$ (respectivement $\|\cdot\|_\infty$) et pour $V = L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d)$, on note $\|\cdot\|_V$ (respectivement $\|\cdot\|_{\infty,V}, \|\cdot\|_{\alpha,V}$) par $\|\cdot\|_2$ (respectivement $\|\cdot\|_{\infty,2}, \|\cdot\|_{\alpha,2}$). Dans cette section, on donne les conditions sous lesquelles la solution X^ε de l'équation différentielle stochastique (1.1) satisfait le principe de grandes déviations et par suite il en serait de même pour la famille de processus $\varphi^\varepsilon\phi$ définie dans (1.2). On suppose alors que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H1) $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^r$ et $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^l$ sont lipschitziennes et bornées.

(H2) $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de classe C^2_{b}.

(H3) $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est lipschitzienne.

Remarque. En fait, en adoptant la technique de localisation d'Azencott [1], on peut relaxer la condition de bornitude de σ et $\widetilde{\sigma}$.

Soit maintenant $\widetilde{\mathcal{H}}$ l'espace de Cameron–Martin associé à $\widetilde{W}$. On définit

$$\Phi : \widetilde{\mathcal{H}} \to C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^d), \qquad u \mapsto \varphi^u\phi = \mathbb{E}(\phi(X^u)), \tag{3.5}$$

où X^u est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$X^u_t = x + \sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(X^u_s)\,dW^i_s + \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(X^u_s)\,du^j(s) + \int_0^t b(X^u_s)\,ds. \tag{3.6}$$

On définit aussi

$$F : \widetilde{\mathcal{H}} \to C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d)), \qquad h \mapsto F(h) = z, \tag{3.7}$$

où z est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$z_t = x + \sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(z_s)\,dW^i_s + \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(z_s)\,dh^j(s) + \int_0^t b(z_s)\,ds. \tag{3.8}$$

On peut alors considérer, sous les hypothèses (H1) et (H3), la solution X^ε comme une variable aléatoire définie sur Ω_2 à valeurs dans $C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$, $\alpha < 1/2$. Soit $\mathbb{Q}^\varepsilon$ la loi de X^ε (mesure de probabilité sur $C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d)))$. Alors on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. *Sous* (H1) *et* (H3), *la famille de mesures de probabilités* $(\mathbb{Q}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *satisfait le principe de grandes déviations sur* $C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$ *avec la fonctionnelle d'action* Λ *définie pour tout* $z \in C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$ *par*

$$\Lambda(z) = \inf\left\{\tfrac{1}{2}\|h\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} : F(h) = z\right\}.$$

Considérons maintenant $\varphi^\varepsilon\phi$ comme une variable aléatoire définie sur Ω_2, à valeurs dans $C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^d)$. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. *Sous* (H1)–(H3), *la famille de mesures de probabilités* $(\mathbb{P}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *satisfait le principe de grandes déviations sur* $C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^d)$ *avec la fonctionnelle d'action* η *définie pour tout* $v \in C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^d)$ *par*

$$\eta(v) = \inf\{\lambda(u) : u \in \widetilde{\mathcal{H}},\ \varphi^u\phi = v\}.$$

4. Application au filtrage non linéaire. Dans cette partie, on donne une application des résultats précédents au filtrage non linéaire.

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons le couple signal-observation $(\mathcal{X}^\varepsilon, \mathcal{Y}^\varepsilon)$ solution de l'équation différentielle stochastique, $t \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \mathcal{X}^\varepsilon_t = x + \displaystyle\sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, dW^i_s + \varepsilon \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, d\mathcal{Y}^{j,\varepsilon}_s + \int_0^t b(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, ds, \\ \mathcal{Y}^\varepsilon_t = \varepsilon \displaystyle\int_0^t h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, ds + \widetilde{W}_t, \end{cases}.$$

où h est une application régulière.

On définit une nouvelle probabilité $(\mathbb{P}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}^\varepsilon}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\sigma(W_s,\widetilde{W}_s,\, s\le t)} &= \exp\left[-\varepsilon\int_0^t h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, d\widetilde{W}_s - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t \|h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\|^2\, ds\right] \\ &= \exp\left[-\varepsilon\int_0^t h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, d\mathcal{Y}^\varepsilon_s + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t \|h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\|^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

On notera

$$\mathcal{Z}^\varepsilon_t = \exp\left[\varepsilon\int_0^t h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\, d\widetilde{W}_s + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t \|h(\mathcal{X}^\varepsilon_s)\|^2\, ds\right].$$

Sous $\mathbb{P}^\varepsilon$, $\mathcal{Y}^\varepsilon$ est un mouvement Brownien indépendant de W. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^2$. On définit le filtre normalisé par

$$\varPi_t^\varepsilon \phi = \frac{\mathbb{E}^\varepsilon(\mathcal{Z}_t^\varepsilon \phi(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \,|\, \sigma(\mathcal{Y}_s^\varepsilon, s \le t))}{\mathbb{E}^\varepsilon(\mathcal{Z}_t^\varepsilon \,|\, \sigma(\mathcal{Y}_s^\varepsilon, s \le t))} = \frac{\varrho_t^\varepsilon \phi}{\mathbb{E}^\varepsilon(\mathcal{Z}_t^\varepsilon \,|\, \sigma(\mathcal{Y}_s^\varepsilon, s \le t))}.$$

On a

$$\mathbb{E}^\varepsilon(\mathcal{Z}_t^\varepsilon \phi(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \,|\, \sigma(\mathcal{Y}_s^\varepsilon, s \le t)) = \mathbb{E}^\varepsilon(\mathcal{Z}_t^\varepsilon \phi(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \,|\, \sigma(\mathcal{Y}_s^\varepsilon, s \le 1)).$$

Comme $\mathcal{Y}^\varepsilon$ est indépendant de W, on a

$$\varrho_t^\varepsilon \phi = \mathbb{E}_w^\varepsilon(\mathcal{Z}_t^\varepsilon \phi(\mathcal{X}_t^\varepsilon)),$$

où $\mathbb{E}_w^\varepsilon$ désigne l'intégration par rapport à la loi de W sous la probabilité $\mathbb{P}^\varepsilon$.

À tout $u \in \widetilde{\mathcal{H}}$ on associe X^u solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathcal{X}_t^u = x + \sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(\mathcal{X}_s^u)\, dW_s^i + \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(\mathcal{X}_s^u)\, du^j(s) + \int_0^t b(\mathcal{X}_s^u)\, ds, \tag{4.9}$$

et $\mathcal{Z}^u$ la solution de l'équation différentielle

$$\mathcal{Z}_t^u = 1 + \sum_{j=1}^l \int_0^t \mathcal{Z}_t^u h_j(\mathcal{X}_s^u)\, du^j(s). \tag{4.10}$$

On pose

$$\varPi_\cdot^u \phi = \frac{\mathbb{E}(\mathcal{Z}_\cdot^u \phi(\mathcal{X}_\cdot^u))}{\mathbb{E}(\mathcal{Z}_\cdot^u)}. \tag{4.11}$$

On peut alors considérer, sous les hypothèses (H1)–(H3), $\varPi_\cdot^\varepsilon \phi$ comme une variable aléatoire de $\varOmega_2$ à valeurs dans $C([0,1], \mathbb{R}^d)$, et si $\mathbb{K}^\varepsilon$ désigne sa loi de probabilité, alors le but est d'établir le principe de grandes déviations pour la famille de mesures $(\mathbb{K}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. D'où le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Sous* (H1)–(H3), *la famille de mesures de probabilités* $(\mathbb{K}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *satisfait le principe de grandes déviations sur* $C^{\alpha,0}([0,1], \mathbb{R}^d)$ *avec la fonctionnelle d'action* η *définie pour tout* $v \in C^{\alpha,0}([0,1], \mathbb{R}^d)$ *par*

$$\eta(v) = \inf\{\lambda(u) : u \in \widetilde{\mathcal{H}},\ \varPi^u \phi = v\}.$$

Preuve. Introduisons, pour $t \in [0,1]$, le couple $\mathcal{S}_t^\varepsilon = (\mathcal{X}_t^\varepsilon, \varepsilon \int_0^t h(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, d\mathcal{Y}_s^\varepsilon) = (\mathcal{S}_t^{1,\varepsilon}, \mathcal{S}_t^{2,\varepsilon})$. Sous $\mathbb{P}^\varepsilon$, $\mathcal{Y}^\varepsilon$ est un mouvement Brownien indépendant de W et $\mathcal{S}_t^\varepsilon$ est un processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{S}_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^r \int_0^t g_i(\mathcal{S}_s^\varepsilon)\, dW_s^i + \varepsilon \sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{g}_j(\mathcal{S}_s^\varepsilon)\, d\mathcal{Y}_s^{j,\varepsilon} + \int_0^t \widehat{b}(\mathcal{S}_s^\varepsilon)\, ds, \tag{4.12}$$

où les fonctions g, $\widetilde{g}$ et $\widehat{b}$ sont définies par $g_i(x,y) = (\sigma_i(x), 0)$, $\widetilde{g}_i(x,y) = (\widetilde{\sigma}_i(x), h_i(x))$ et $\widehat{b}(x,y) = (b(x), 0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

D'après les résultats de la première partie, le processus $\mathcal{S}_t^\varepsilon$ satisfait le principe de grandes déviations sous $\mathbb{P}^\varepsilon$.

On vérifie facilement que l'application

$$\Psi : C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})) \to C^{\alpha,0}([0,1], \mathbb{R}^d)\ ,$$
$$z \mapsto \Psi(z_1, z_2) = \frac{\mathbb{E}\phi(z_1)\exp z_2}{\mathbb{E}\exp z_2},$$

est continue (cf. la preuve du théorème 3.2 ci-dessous). Par le principe de contraction, on déduit que $\Psi(\mathcal{S}^\varepsilon)$ satisfait le principe de grandes déviations. Mais

$$\Pi_\cdot^\varepsilon \phi = \frac{(\mathbb{E}\phi(\mathcal{S}^{1,\varepsilon})\exp\{\mathcal{S}_1^{2,\varepsilon} - (\varepsilon^2/2)\int_0^1 \|h(\mathcal{S}_s^{1,\varepsilon})\|^2\,ds\})}{\mathbb{E}\exp\{\mathcal{S}_1^{2,\varepsilon} - (\varepsilon^2/2)\int_0^1 \|h(\mathcal{S}_s^{1,\varepsilon})\|^2\,ds\}} = \Psi_\varepsilon(\mathcal{S}^\varepsilon),$$

où Ψ_ε est une fonctionnelle qui converge uniformément sur tout compact de Ω_2 vers Ψ. Il en résulte donc que $\Pi_\cdot^\varepsilon\phi$ satisfait le principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action spécifiée ci-dessus.

5. Preuves des théorèmes

5.1. *Preuve du théorème 3.1.* Dans le but de pouvoir appliquer le théorème 2.2, on donne les notations suivantes: Pour $0 \le \alpha < 1/2$, on pose $(E, \|\cdot\|_E) = (C^{\alpha,0}([0,1], \mathbb{R}^l), \|\cdot\|_\alpha)$, $(E', \|\cdot\|_{E'}) = (C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^d)), \|\cdot\|_{\alpha,2})$ et la bonne fonctionnelle d'action $I = \lambda$ où λ est donnée par (2.3). Pour $\varepsilon > 0$, $n \ge 1$ et $t \in [0,1]$, on note $\underline{t}_n = \sup\{x : x = k/n \le t,\ k = 0, \ldots, n\}$ et $J_{n,k} = [k/n, (k+1)/n]$. Soient X^ε la solution de l'équation (1.1) et X_n^ε est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}(5.13)\qquad X_n^\varepsilon(t) = x &+ \sum_{i=1}^r \int_0^t \sigma_i(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n))\,dW_s^i \\ &+ \varepsilon\sum_{j=1}^l \int_0^t \widetilde{\sigma}_j(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n))\,d\widetilde{W}_s^j + \int_0^t b(X_n^\varepsilon(s))\,ds.\end{aligned}$$

Pour $h \in C^{\alpha,0}([0,1], \mathbb{R}^l)$, on définit $F_n(h)(0) = x$ et

$$\begin{aligned}(5.14)\quad F_n(h)(t) = F_n(h)(\underline{t}_n) &+ \sum_{i=1}^r \int_{\underline{t}_n}^t \sigma_i(F_n(h)(\underline{s}_n))\,dW_s^i \\ &+ \sum_{j=1}^l \widetilde{\sigma}_j(F_n(h)(\underline{t}_n))(h^j(t) - h^j(\underline{t}_n)) + \int_{\underline{t}_n}^t b(F_n(h)(s))\,ds,\end{aligned}$$

et soit F l'application définie par (3.7). Dans la suite, pour prouver le théorème 3.1, on va vérifier les conditions (i)–(iv) du théorème 2.2.

(i) *Continuité de F_n.* On montre que l'application $F_n : C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^l) \to C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$ est continue. Soient $h_1,h_2 \in C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^l)$, $F_n^i = F_n(h_i)$, $i=1,2$, et $A_n = F_n^1 - F_n^2$.

LEMME 5.1. *Pour tout réel $C>0$, il existe une constante réelle $C_n>0$ (dépendant de C et de n) telle que pour $\|h_1\|_\alpha \vee \|h_2\|_\alpha \le C$,*

$$\|A_n\|_{\alpha,2} \le C_n\|h_1-h_2\|_\alpha. \tag{5.15}$$

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$\|A_n\|_{\alpha,2} \le \max\left[2n^\alpha\|A_n\|_{\infty,2}, \max_{0\le k\le n} \sup_{k/n\le s<t\le(k+1)/n} \frac{\|A_n(t)-A_n(s)\|_2}{|t-s|^\alpha}.\right] \tag{5.16}$$

On montre alors au début que pour $\|h_1\|_\infty \vee \|h_2\|_\infty \le C$, on a

$$\|A_n\|_{\infty,2} \le C_n\|h_1-h_2\|_\infty. \tag{5.17}$$

Pour $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}A_n(t) = A_n(\underline{t}_n) &+ \sum_{i=1}^r(\sigma_i(F_n^1(\underline{t}_n)) - \sigma_i(F_n^2(\underline{t}_n)))(W^i(t)-W^i(\underline{t}_n))\\ &+ \sum_{j=1}^l[\widetilde{\sigma}_j(F_n^1(\underline{t}_n))(h_1^j(t)-h_1^j(\underline{t}_n)) - \widetilde{\sigma}_j(F_n^2(\underline{t}_n))(h_2^j(t)-h_2^j(\underline{t}_n))]\\ &+ \int_{\underline{t}_n}^t (b(F_n^1(s)) - b(F_n^2(s)))\,ds,\end{aligned}$$

donc il existe des constantes K_i, $i=1,\dots,4$, telles que l'on ait

$$\begin{aligned}\|A_n(t)\|_2 \le \|A_n(\underline{t}_n)\|_2 &+ K_1\sum_{i=1}^r \|A_n(\underline{t}_n)(W^i(t)-W^i(\underline{t}_n))\|_2\\ &+ K_2\sum_{j=1}^l |(h_1^j(t)-h_2^j(t)) - (h_1^j(\underline{t}_n)-h_2^j(\underline{t}_n))|\\ &+ K_3\sum_{j=1}^l \|A_n(\underline{t}_n)\|_2|h_1^j(t)-h_1^j(\underline{t}_n)| + K_4\int_{\underline{t}_n}^t \|A_n(s)\|_2\,ds.\end{aligned}$$

Puisque F_n^1 et F_n^2 sont des processus adaptés par rapport à la filtration Brownienne associée à W, alors

$$\begin{aligned}\|A_n(\underline{t}_n)(W^i(t)-W^i(\underline{t}_n))\|_2 &= \|A_n(\underline{t}_n)\|_2\|(W^i(t)-W^i(\underline{t}_n))\|_2\\ &\le \|A_n(\underline{t}_n)\|_2.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Par conséquent pour $t \in J_{n,k}$, on a

$$\|A_n(t)\|_2 \le C_1[\|A_n(k/n)\|_2 + \|h_1 - h_2\|_\infty] + K_4 \int_{k/n}^{t} \|A_n(s)\|_2\, ds.$$

Le lemme de Gronwall nous donne

$$\sup_{t \in J_{n,k}} \|A_n(t)\|_2 \le C_1'[\|A_n(k/n)\|_2 + \|h_1 - h_2\|_\infty], \tag{5.19}$$

en particulier on a

$$\|A_n((k+1)/n)\|_2 \le C_1'[\|A_n(k/n)\|_2 + \|h_1 - h_2\|_\infty],$$

ce qui implique que

$$\sup_{0 \le k \le n} \|A_n(k/n)\|_2 \le K(n)\|h_1 - h_2\|_\infty. \tag{5.20}$$

Finalement, (5.19) et (5.20) nous donnent (5.17). Il reste à prouver que pour tout $0 \le k \le n$, il existe une constante C_n telle que l'on ait

$$\sup_{k/n \le s < t \le (k+1)/n} \frac{\|A_n(t) - A_n(s)\|_2}{|t-s|^\alpha} \le C_n \|h_1 - h_2\|_\alpha. \tag{5.21}$$

Pour $k/n \le s < t \le (k+1)/n$, on a, en utilisant le même argument que celui dans (5.18),

$$\begin{aligned}\|A_n(t) - A_n(s)\|_2 \le K_1 \sum_{i=1}^{r} &\|A_n(k/n)\|_2 \|W^i(t) - W^i(s)\|_2 \\ &+ K_2 \sum_{j=1}^{l} |(h_1^j(t) - h_2^j(t)) - (h_1^j(s) - h_2^j(s))| \\ &+ K_3 \sum_{j=1}^{l} \|A_n(k/n)\|_2 |h_1^j(t) - h_1^j(s)| \\ &+ K_4 \int_s^t \|A_n(u)\|_2\, du.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\sup_{k/n \le s < t \le (k+1)/n} \frac{\|A_n(t) - A_n(s)\|_2}{|t-s|^\alpha} \le K_1' \|A_n\|_{\infty,2} &\sum_{i=1}^{r} \|W^i\|_{\alpha,2} \\ &+ K_2' \sum_{j=1}^{l} \|h_1^j - h_2^j\|_\alpha \\ &+ K_3' \|A_n\|_{\infty,2} \sum_{j=1}^{l} \|h_1^j\|_\alpha + K_4' \|A_n\|_{\infty,2}.\end{aligned}$$

En utilisant de plus (5.17), on trouve (5.21).

(ii) *Convergence uniforme de F_n vers F dans Γ_a*

LEMME 5.2. *Pour tout $a > 0$*

$$\sup_n \sup_{\|h\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \le a} (\|F_n(h)\|_{\infty,2} \vee \|F(h)\|_{\infty,2}) < \infty, \tag{5.22}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|h\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \le a} \|F_n(h) - F(h)\|_{\alpha,2} = 0. \tag{5.23}$$

Preuve. (5.22) est une conséquence immédiate du lemme de Gronwall. On montre (5.23). Pour $t \in [0,1]$ et $\|h\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \le a$, on a, d'après les inégalités de Burkholder et Schwarz,

$$\|F(h)(t) - F(h)(\underline{t}_n)\|_2 \le C/\sqrt{n},$$

et

$$\begin{aligned}
\|F_n(h)(t) - F(h)(t)\|_2^2 &\le K \int_0^t \|F_n(h)(\underline{s}_n) - F(h)(s)\|_2^2\, ds \\
&\quad + K \int_0^t \|F_n(h)(s) - F(h)(s)\|_2^2\, ds \\
&\le \frac{K_1'}{n} + K_2' \int_0^t \sup_{u\le s} \|F_n(h)(u) - F(h)(u)\|_2^2\, ds.
\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall nous donne

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|h\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \le a} \|F_n(h) - F(h)\|_{\infty,2}^2 = 0. \tag{5.24}$$

D'autre part, pour tous $t, s \in [0,1]$ et $\|h\|_{\widetilde{\mathcal{H}}} \le a$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\|(F_n(h)(t) - F(h)(t)) - (F_n(h)(s) - F(h)(s))\|_2}{|t-s|^\alpha} &\le K_2''\|F_n(h) - F(h)\|_{\infty,2} \\
&\quad + K_1''/\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

De (5.24), on déduit (5.22).

Le lemme suivant montre en fait que le système $\{X_n^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1))$ avec une bonne fonctionnelle d'action λ_n.

LEMME 5.3. *Pour tout $n \ge 1$, la famille des lois de $\{X_n^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1))$ avec comme bonne fonctionnelle d'action*

$$\lambda_n(\xi) = \inf\{\lambda(x) : F_n(x) = \xi\}.$$

Preuve. D'après le théorème 2.1, la famille des lois de $\{\varepsilon\widetilde{W} : \varepsilon > 0\}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^l)$ avec comme fonctionnelle d'action λ. Or on sait que $X_n^\varepsilon = F_n(\varepsilon\widetilde{W})$ et F_n est continue, donc le résultat du lemme se déduit de l'application du principe de contraction.

Pour finir la preuve du théorème 3.1, il reste à montrer que X_n^ε est exponentiellement une bonne approximation de X^ε. Pour cela on montre d'abord le lemme suivant.

Lemme 5.4. *Pour tout $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\widetilde{\mathbb{P}}[\|X_n^\varepsilon - X^\varepsilon\|_{\infty,2} \geq \delta/n^\alpha] = -\infty. \tag{5.25}$$

Preuve. On suit de près la preuve de Y. Hu dans [7]. Si on pose, pour $0 \leq \alpha < \beta < 1/2$, $\gamma < \beta - \alpha$,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon} = \{&\sup_{1\leq k\leq n}\varepsilon\|\widetilde{W}(k/n) - \widetilde{W}(k-1/n)\| \leq n^{\gamma-\beta}\}\\ &\cap\{\varepsilon\|\widetilde{W}\|_\beta \leq n^\gamma\},\end{aligned} \tag{5.26}$$

alors, d'après le théorème 2.1, on a

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\beta,\gamma,\varepsilon}) = -\infty, \tag{5.27}$$

où $\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ est le complémentaire de $\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ dans Ω_2. Posons

$$Z_n^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^r\int_0^t \sigma_i(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n))\,dW_s^i,$$

et appliquons la formule d'Itô à $Z_n^\varepsilon(t)$ et $\overline{Z}_n^\varepsilon(t) = Z_n^\varepsilon(t) - Z_n^\varepsilon(\underline{t}_n)$. On trouve alors

$$\begin{aligned}\|Z_n^\varepsilon(t)\|^2 &= 2\sum_{i=1}^r\int_0^t\langle\sigma_i(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)), Z_n^\varepsilon(s)\rangle\,dW_s^i + \sum_{i=1}^d\int_0^t(\sigma\sigma^*)_{ii}(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n))\,ds,\\ \|\overline{Z}_n^\varepsilon(t)\|^2 &= 2\sum_{i=1}^r\int_{\underline{t}_n}^t\langle\sigma_i(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)), \overline{Z}_n^\varepsilon(s)\rangle\,dW_s^i + \sum_{i=1}^d\int_{\underline{t}_n}^t(\sigma\sigma^*)_{ii}(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n))\,ds,\end{aligned}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ et $\sigma^*(x)$ est la transposée de $\sigma(x)$. On obtient alors d'après le lemme 2.1 que

$$\sup_{n,\varepsilon,\omega}(\|Z_n^\varepsilon(\omega)\|_{\infty,2}) < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{\varepsilon,\omega}(\|\overline{Z}_n^\varepsilon(\omega)\|_{\infty,2} \leq K/n. \tag{5.28}$$

Par suite, sur l'ensemble $\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ on a

$$|X_n^\varepsilon(t)| \le |x| + |Z_n^\varepsilon(t)| + C'\int_0^t (1 + |X_n^\varepsilon(s)|)\,ds$$
$$+ C\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^l \varepsilon\left|\widetilde{W}^j\left(\frac{k}{n}\wedge t\right) - \widetilde{W}^j\left(\frac{k-1}{n}\wedge t\right)\right|$$
$$\le C_1 n^{\gamma-\beta+1} + C_1'\int_0^t |X_n^\varepsilon(s)|\,ds.$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|X_n^\varepsilon\|_{\infty,2} \le Cn^{\gamma-\beta+1}. \tag{5.29}$$

De même pour $\overline{X}_n^\varepsilon(t) = X_n^\varepsilon(t) - X_n^\varepsilon(\underline{t}_n)$, on a

$$|\overline{X}_n^\varepsilon(t)| \le |\overline{Z}_n^\varepsilon(t)| + C\sum_{j=1}^l \varepsilon|\widetilde{W}^j(t) - \widetilde{W}^j(\underline{t}_n)| + C'\int_{\underline{t}_n}^t (1 + |X_n^\varepsilon(s)|)\,ds.$$

Donc, en utilisant (5.28) et (5.29), sur l'ensemble $\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ on trouve

$$\|\overline{X}_n^\varepsilon\|_{\infty,2} \le Cn^{\gamma-\beta}. \tag{5.30}$$

Afin de prouver (5.25), pour tout $\varrho > 0$ on définit

$$G_{n,\varepsilon}^\varrho = \inf\{t \ge 0 : \|\overline{X}_n^\varepsilon(t)\|_2 \ge \varrho/n^\alpha\} \wedge 1,$$
$$\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta} = \inf\{t \ge 0 : \|X_n^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t)\|_2 \ge \delta/n^\alpha\} \wedge G_{n,\varepsilon}^\varrho,$$
$$V_{n,\varepsilon}^\varrho(t) = \widetilde{\mathbb{E}}[(\varrho^2/n^{2\alpha} + \|(X_n^\varepsilon - X^\varepsilon)(t \wedge \Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta})\|_2^2)^{1/\varepsilon^2}].$$

On a alors

$$\widetilde{\mathbb{P}}[\|X_n^\varepsilon - X^\varepsilon\|_{\infty,2} \ge \delta/n^\alpha] \le \widetilde{\mathbb{P}}(G_{n,\varepsilon}^\varrho < 1) + \widetilde{\mathbb{P}}(\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta} < 1). \tag{5.31}$$

Tout revient donc à montrer que pour $K_{n,\varepsilon} = G_{n,\varepsilon}^\varrho$ ou $\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta}$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \widetilde{\mathbb{P}}(K_{n,\varepsilon} < 1) = -\infty.$$

On remarque d'abord que

$$\widetilde{\mathbb{P}}(G_{n,\varepsilon}^\varrho < 1) \le \widetilde{\mathbb{P}}(G_{n,\varepsilon}^\varrho < 1; \mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}) + \widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}^{\mathrm{c}})$$

et

$$\widetilde{\mathbb{P}}(G_{n,\varepsilon}^\varrho < 1; \mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}) \le \sum_{k=1}^n \widetilde{\mathbb{P}}(\sup_{t\in J_{n,k-1}} \|\overline{X}_n^\varepsilon(t)\|_2 \ge \varrho/n^\alpha; \mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}).$$

En appliquant la formule d'Itô à $\overline{X}_n^\varepsilon(t)$, on trouve

$$\|\overline{X}_n^\varepsilon(t)\|_2^2 = 2\varepsilon \sum_{j=1}^{l} \int_{\underline{t}_n}^{t} \mathbb{E}\langle \widetilde{\sigma}_j(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)), \overline{X}_n^\varepsilon(s)\rangle \, d\widetilde{W}_s^j$$
$$+ \int_{\underline{t}_n}^{t} \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{d}((\sigma\sigma^*)_{ii} + \varepsilon^2(\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^*)_{ii})(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) + 2\langle b(X_n^\varepsilon(s)), \overline{X}_n^\varepsilon(s)\rangle\Big] \, ds.$$

Posons

$$f_{n,\varepsilon}^j(s) = \mathbb{E}\langle \widetilde{\sigma}_j(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)), \overline{X}_n^\varepsilon(s)\rangle,$$
$$g_{n,\varepsilon}(s) = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{d}((\sigma\sigma^*)_{ii} + \varepsilon^2(\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^*)_{ii})(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) + 2\langle b(X_n^\varepsilon(s)), \overline{X}_n^\varepsilon(s)\rangle\Big],$$
$$Y_n^\varepsilon(t) = 2\varepsilon \sum_{j=1}^{l} \int_0^t f_{n,\varepsilon}^j(s) \, d\widetilde{W}_s^j + \int_0^t g_{n,\varepsilon}(s) \, ds.$$

On constate alors que pour $t \in J_{n,k-1}$,

$$\|\overline{X}_n^\varepsilon(t)\|_2^2 = Y_n^\varepsilon(t) - Y_n^\varepsilon(\underline{t}_n).$$

De (5.29) et (5.30), sur l'ensemble $\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ on a

$$A := \sup_{t,\omega} \operatorname{tr}(f_{n,\varepsilon}(t,\omega) f_{n,\varepsilon}^*(t,\omega)) \leq C_1 \, n^{2\gamma-2\beta},$$
$$L := \sup_{t,\omega} |g_{n,\varepsilon}(t,\omega)| \leq C_2 \, n^{2\gamma-2\beta+1}.$$

En appliquant l'inégalité de Stroock (2.4), on obtient

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\sup_{t\in J_{n,k-1}} \|\overline{X}_n^\varepsilon(t)\|_2 \geq \varrho/n^\alpha; \mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon})$$
$$\leq \widetilde{\mathbb{P}}\bigg(\sup_{t\in J_{n,k-1}} \frac{|Y_n^\varepsilon(t) - Y_n^\varepsilon(\underline{t}_n)|}{|t-\underline{t}_n|^\alpha} \geq \frac{\varrho^2}{n^\alpha}; \mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}\bigg)$$
$$\leq 2\exp\bigg(-\frac{(\varrho^2/n^\alpha - lC_2 n^{2\gamma-2\beta+1} n^{\alpha-1})^2}{8l^2 C_1 \varepsilon^2 n^{2\gamma-2\beta} n^{2\alpha-1}}\bigg)$$
$$\leq 2\exp\bigg(-\frac{(\varrho^2 - lC_2 n^{2\gamma-2\beta+2\alpha})^2}{4l^2 C_1 \varepsilon^2 n^{2\gamma-2\beta+4\alpha-1}}\bigg)$$
$$\leq 2\exp\bigg(-\frac{K\, n^{1-2\gamma+2\beta-4\alpha}}{\varepsilon^2}\bigg),$$

car $n^{2\gamma-2\beta+2\alpha} \to 0$ quand $n \to \infty$. En plus de (5.27), on déduit que pour tout $\varrho > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \widetilde{\mathbb{P}}(G_{n,\varepsilon}^\varrho < 1) = -\infty. \tag{5.32}$$

Soit $A_n^\varepsilon = X_n^\varepsilon - X^\varepsilon$. Par application de la formule d'Itô on a

$$\|A_n^\varepsilon(t)\|_2^2 = 2\varepsilon \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \overline{f}_{n,\varepsilon}^j(s)\, d\widetilde{W}_s^j + \int_0^t \overline{g}_{n,\varepsilon}(s)\, ds,$$

où

$$\overline{f}_{n,\varepsilon}^j(s) = \mathbb{E}\langle \widetilde{\sigma}_j(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) - \widetilde{\sigma}_j(X^\varepsilon(s)), A_n^\varepsilon(s)\rangle$$

et

$$\begin{aligned}\overline{g}_{n,\varepsilon}(s) = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{d}&[(\sigma(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) - \sigma(X^\varepsilon(s)))(\sigma^*(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) - \sigma^*(X^\varepsilon(s)))]_{ii}\\ &+ \varepsilon^2\mathbb{E}\sum_{i=1}^{d}[(\widetilde{\sigma}(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) - \widetilde{\sigma}(X^\varepsilon(s)))(\widetilde{\sigma}^*(X_n^\varepsilon(\underline{s}_n)) - \widetilde{\sigma}^*(X^\varepsilon(s)))]_{ii}\\ &+ 2\mathbb{E}\langle b(X_n^\varepsilon(s)) - b(X^\varepsilon(s)), A_n^\varepsilon(s)\rangle.\end{aligned}$$

Donc si on pose $\varrho_n = \varrho/n^\alpha$ et $p_{\varepsilon,\varrho}(y) = (\varrho_n^2 + y)^{1/\varepsilon^2}$, on aura que

$$p_{\varepsilon,\varrho}(\|A_n^\varepsilon(t\wedge \Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta})\|_2^2) - \varrho_n^{2/\varepsilon^2} - \int_0^{t\wedge\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta}} k_{n,\varepsilon}(s)\, ds$$

est une martingale dans Ω_2 avec

$$\begin{aligned}k_{n,\varepsilon}(s) = &\frac{1}{\varepsilon^2}(\varrho_n^2 + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2)^{1/\varepsilon^2-1}\overline{g}_{n,\varepsilon}(s)\\ &+ \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)(\varrho_n^2 + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2)^{1/\varepsilon^2-2}\sum_{i=1}^{l}(\overline{f}_{n,\varepsilon}^j(s))^2.\end{aligned}$$

Par conséquent pour $s < G_{n,\varepsilon}^\varrho$,

$$\begin{aligned}|k_{n,\varepsilon}(s)| &\le C\bigg\{\frac{1}{\varepsilon^2}(\varrho_n^2 + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2)^{1/\varepsilon^2-1}((1+\varepsilon^2)(\varrho_n^2 + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2) + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2)\\ &\quad + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)(\varrho_n^2 + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2)^{1/\varepsilon^2-2}(\varrho_n^2 + \|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2)\|A_n^\varepsilon(s)\|_2^2\bigg\}\\ &\le \frac{C}{\varepsilon^2}p_{\varepsilon,\varrho}(\|A_n^\varepsilon(t\wedge\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta})\|_2^2).\end{aligned}$$

On conclut alors que

$$V_{n,\varepsilon}^\varrho(t) \le \varrho_n^{2/\varepsilon^2} + \frac{C}{\varepsilon^2}\int_0^t V_{n,\varepsilon}^\varrho(s)\, ds,$$

donc

$$V_{n,\varepsilon}^\varrho(1) \le \exp\left(\frac{C}{\varepsilon^2}(3 + 2\ln\varrho - 2\alpha\ln n)\right),$$

d'où

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta} < 1) \le \left(\frac{\varrho^2+\delta^2}{n^{2\alpha}}\right)^{-1/\varepsilon^2} V_{n,\varepsilon}^{\varrho}(1).$$

Enfin on retrouve

$$\lim_{\varrho\to 0}\lim_{n}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\widetilde{\mathbb{P}}(\Theta_{n,\varepsilon}^{\varrho,\delta} < 1) = -\infty. \tag{5.33}$$

Le lemme se déduit alors de (5.31), (5.32) et (5.33).

Lemme 5.5. *Pour tout $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^2\ln\widetilde{\mathbb{P}}[\|X_n^\varepsilon - X^\varepsilon\|_{\alpha,2} \ge \delta] = -\infty. \tag{5.34}$$

Preuve. Par application de (5.16) à $A_n^\varepsilon = X_n^\varepsilon - X^\varepsilon$ et du lemme 5.4, il suffit alors de prouver que

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^2\ln\widetilde{\mathbb{P}}\left[\max_{1\le k\le n}\ \sup_{s,t\in J_{n,k}}\frac{\|A_n^\varepsilon(t)-A_n^\varepsilon(s)\|_2}{|t-s|^\alpha} \ge \delta\right] = -\infty.$$

En adoptant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 5.4, on montre que pour $0<\alpha<\beta<1/2$ et $\gamma<\beta-\alpha$,

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\widetilde{\mathbb{P}}\left[\max_{1\le k\le n}\ \sup_{s,t\in J_{n,k}}\frac{\|A_n^\varepsilon(t)-A_n^\varepsilon(s)\|_2}{|t-s|^\alpha} \ge \delta;\ \mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}\right] = -\infty, \tag{5.35}$$

où $\mathcal{B}_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ est défini dans (5.26). Le lemme découle alors de (5.27) et (5.35).

5.2. *Preuve du théorème 3.2.* On vérifie d'abord que l'application

$$\Psi : C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d)) \to C^{\alpha,0}([0,1],\mathbb{R}^d), \qquad z\mapsto \Psi(z) = \mathbb{E}\phi(z),$$

est continue. Soient $z^1,z^2\in C^{\alpha,0}([0,1],L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^d))$. Puisque ϕ est lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned}|(\Psi(z^1)-\Psi(z^2))(0)| &\le K\mathbb{E}\|(z^1-z^2)(0)\| \\ &\le K\|(z^1-z^2)(0)\|_2,\end{aligned} \tag{5.36}$$

grâce à l'inégalité de Schwarz. Soient $t,s\in[0,1]$. Puisque $\phi\in C_{\mathrm{b}}^1$, on a

$$\phi(z_t^1)-\phi(z_s^1) = \int_0^1 \phi'(uz_t^1+(1-u)z_s^1)(z_t^1-z_s^1)\,du,$$

$$\phi(z_t^2)-\phi(z_s^2) = \int_0^1 \phi'(uz_t^2+(1-u)z_s^2)(z_t^2-z_s^2)\,du,$$

où ϕ' désigne la dérivée de ϕ. Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&|(\phi(z_t^1) - \phi(z_t^2)) - (\phi(z_s^1) - \phi(z_s^2))| \\
&\qquad \le \int_0^1 \|\phi'(uz_t^1 + (1-u)z_s^1) - \phi'(uz_t^2 + (1-u)z_s^2)\|\, du\, \|z_t^1 - z_s^1\| \\
&\qquad\quad + \int_0^1 \|\phi'(uz_t^2 + (1-u)z_s^2)\|\, du\, \|(z_t^1 - z_t^2) - (z_s^1 - z_s^2)\|,
\end{aligned}
$$

Reste à voir que ϕ' et ϕ'' sont bornées pour conclure que

$$
\begin{aligned}
(5.37)\quad &|(\phi(z_t^1) - \phi(z_t^2)) - (\phi(z_s^1) - \phi(z_s^2))| \\
&\qquad \le K_1(\|(z_t^1 - z_t^2) - (z_s^1 - z_s^2)\| + \|z_s^1 - z_s^2\|)\|z_t^1 - z_s^1\| \\
&\qquad\quad + K_2\|(z_t^1 - z_t^2) - (z_s^1 - z_s^2)\|.
\end{aligned}
$$

De (5.36) et (5.37), on obtient

$$
\|\Psi(z^1) - \Psi(z^2)\|_\alpha \le K_1\|z^1 - z^2\|_{\infty,2}\|z^1\|_{\alpha,2} + K_2\|z^1 - z^2\|_{\alpha,2},
$$

Or on sait que $\|z^1 - z^2\|_{\infty,2} \le \|z^1 - z^2\|_{\alpha,2}$, donc

$$
\|\Psi(z^1) - \Psi(z^2)\|_\alpha \le K(1 + \|z^1\|_{\alpha,2})\|z^1 - z^2\|_{\alpha,2}.
$$

D'après le principe de contraction et le théorème 3.1, on déduit que la famille de mesures de probabilités $(\mathbb{P}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ satisfait le principe de grandes déviations avec comme bonne fonctionnelle d'action μ définie pour tout $v \in C^{\alpha,0}([0,1], \mathbb{R}^d)$ par

$$
\mu(v) = \inf\{\Lambda(z) : z \in C^{\alpha,0}([0,1], L^2(\Omega_1)), \mathbb{E}\phi(z) = v\}.
$$

Le théorème 3.2 est alors démontré puisque $\eta = \mu$ (voir lemme 6.1.2, pp. 83 de [9]).

Références

[1] R. Azencott, *Grandes déviations et applications*, dans : École d'Été de Saint-Flour VIII–1978, Lecture Notes in Math. 774, Springer, 1980, New York, 1–76.

[2] P. Baldi, G. Ben Arous and G. Kerkyacharian, *Large deviations and Strassen law in Hölder norm*, Stochastic Process. Appl. 42 (1992), 171–180.

[3] G. Ben Arous and F. Castell, *Flow decomposition and large deviations*, J. Funct. Anal. 140 (1995), 23–67.

[4] G. Ben Arous et M. Ledoux, *Grandes déviations de Freidlin–Wentzell en norme holdérienne*, dans : Séminaire de Probabilités XXVIII, Lecture Notes in Math. 1583, Springer, Berlin, 1994, 293–299.

[5] J. D. Deuschel and D. W. Stroock, *Large Deviations*, Pure and Appl. Math. 137, Academic Press, 1989.

[6] H. Doss, *Un nouveau principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire*, Ann. Inst. H. Poincaré 27 (1991), 407–423.

[7] Y. J. Hu, *A large deviation principle for small perturbations of random evolution equations in Hölder norm*, Stochastic Process. Appl. 68 (1998), 83–99.

[8] M. Mellouk, *A large-deviation principle for random evolution equations*, Bernoulli 6 (2000), 977–999.
[9] M. Ouzina, *Théorème du support en théorie de filtrage non linéaire*, thèse, Univ. de Rouen, 1998.
[10] E. Pardoux, *Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées*, dans : École d'Été de Saint-Flour XIX, Lecture Notes in Math. 1446, Springer, 1989, 70–158.
[11] V. Pérez-Abreu and C. Tudor, *Large deviations for a class of chaos expansions*, J. Theoret. Probab. 7 (1994), 757–765.
[12] J. T. Rabeheremanana, *Petites perturbations de systèmes dynamiques et algèbres de Lie nilpotentes*, thèse, Univ. de Paris 7, 1992.
[13] M. Schilder, *Some asymptotic formulas for Wiener integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 125 (1996), 63–85.
[14] D. W. Stroock, *Some applications of stochastic calculus to partial differential equations*, dans : École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XI, Lecture Notes in Math. 976, Springer, Berlin, 1983, 267–382.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Université Cadi Ayyad
Marrakech, Maroc
E-mail: berkaoui@yahoo.fr
ouknine@ucam.ac.ma

Department of Mathematics
KTH
S-10044 Stockholm, Sweden
E-mail: boualem@math.kth.se

Received December 6, 1999
Revised version December 18, 2000 (4441)