Sur les correspondances entre les points de deux espaces.

Par

Henri Lebesgue (Paris).

Introduction.

1. Lorsqu'on veut arithmétiser la géométrie on définit l'espace euclidien à n dimensions comme l'ensemble des systèmes de valeurs de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dans son mémoire „*Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*", Riemann adopte un point de vue analogue quand il dit qu'une variété a n dimensions si le voisinage d'un quelconque des points de cette variété correspond, de façon biunivoque et continue, au voisinage de l'un des points de l'espace euclidien décrit par n coordonnées curvilignes $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Pour qu'avec ces définitions, on puisse dire qu'un espace, une variété, a un nombre de dimensions bien déterminé il faut, étudiant l'effet d'un changement de coordonnées curvilignes, prouver que des équations

$$\text{I} \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_p = f_p(u_1, u_2, \ldots, u_n), \end{array} \right.$$

dans lesquelles les fonctions f_i sont continues et les u_i sont assujettis à décrire tout un domaine de l'espace des u, ne peuvent être équivalentes à des équations analogues

$$\text{II} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \varphi_1(v_1, v_2, \ldots, v_p) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \varphi_n(v_1, v_2, \ldots, v_p), \end{array} \right.$$

que dans le seul cas $n = p$.

Tout d'abord on ne pensa même pas à se poser cette question; mais, en 1878[1]), M. Cantor démontra l'existence des systèmes I et II, pourvu toutefois qu'on renonce à la continuité des f_i et φ_i, c'est-à-dire l'existence de correspondances biunivoques mais non continues entre les espaces à n et p dimensions et, en 1890[2]), M. Peano construisit une courbe qui remplissait tout un carré. Il réalisait ainsi entre les points d'un plan et ceux d'une droite une correspondance univoque et continue, dans l'un des sens. M. Lüroth démontra, tout de suite après les travaux de M Cantor[3]), l'impossibilité des systèmes I, II pour le cas $p=1$, $n \neq 1$. Il a, plus récemment, étudié le cas $p=3$, $n=2$ ou 4.

Le cas général restait à traiter. M. Baire[4]) donna, en 1907, un plan de démonstration, mais la démonstration complète fut obtenue pour la première fois, grâce à une méthode différente, par M. Brouwer en 1911[5]). 'A l'occasion de cette publication, j'ai esquissé[6]) une démonstration que je vais développer ici.

2. Cette démonstration repose sur le théorème suivant:

Si chaque point d'un domaine D à n dimensions appartient à l'un au moins des ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots, E_p$ en nombre fini et si ces ensembles sont suffisamment petits, il y a des points communs au moins à $n+1$ de ces ensembles.

D'ailleurs, quel que soit D, et quel que soit le degré de petitesse auquel on assujettit les E_i, il est toujours possible de décomposer D en ensembles fermés E_i tels qu'aucun point ne soit commun à plus de $n+1$ d'entre eux.

Les correspondances biunivoques et continues entre espaces transformant un petit ensemble fermé en un petit ensemble fermé, le théorème de „l'invariance du nombre de dimensions" des espaces ou des variétés définies paramétriquement résultera immédiatement de là.

[1]) Journ. f. r. u. a. Math. t. 84.

[2]) Math. Annalen, t. 36.

[3]) *Sitzgsb. phys.-medic. Soc. Erlangen* t. 10. Puis ib. t. 31 (1899) et *Math. Ann.* t. 63 (1907).

[4]) *Bull. sc. math.* t. 31 et *C. R. Acad. sc. Paris*, t. 144.

[5]) *Math. Ann.* t. 70.

[6]) *Math Ann.* t. 70. Je développerai dans une autre occasion une note que j'ai publiée aux *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 152.

Mais il y a d'autres ensembles, que ceux jusqu'ici considérés, qui, à certains égards, méritent le nom de variétés à n dimensions. Considérons un domaine dans le plan, sa frontière, supposée continue, a souvent été appelée une courbe bien qu'elle ne rentre pas nécessairement dans la catégorie des „trajectoires", c'est-à-dire des courbes à définition paramétrique. J'appellerai cette nouvelle espèce de courbe *frontière à une dimension*. Si maintenant on a, dans un espace quelconque, un point A dont la position est fonction continue de celle d'un point a décrivant une frontière à une dimensions, A décrira encore une sorte de courbe que j'appellerai une *variété frontière à une dimension*. On peut considérer de même des frontières et des variétés frontières à p dimensions analogues respectivement aux espaces et aux variétés à p dimensions. Mais ceci exige un théorème sur l'invariance du nombre des dimensions de ces nouvelles varietés. Il résulte de suite de la proposition fondamentale.

J'utilise ensuite cette proposition pour l'étude des correspondances biunivoques et continues entre deux domaines à m dimensions et je démontre l'important théorème de Schoenflies, affirmant que les points intérieurs se correspondent ainsi que les points frontières.

Je passe ensuite aux correspondances univoques et continues dans un seul sens; c'est-à-dire aux variétés à p dimensions remplissant un espace à m dimensions. Le seul cas vraiment étudié est celui où $p = 1$. Je prouve qu'une courbe remplissant un domaine de l'espace à m dimensions a nécessairement des points multiples d'ordre au moins égal à $m+1$; et cette limite de l'ordre minimum de multiplicité est la limite exacte.

Pour le cas des variétés à p dimensions remplissant un domaine à plus de p dimensions je ne donne que deux limites immédiates, l'une inférieure, l'autre supérieure de cet ordre minimum.

Un autre point qui appellerait de nouvelles recherches est le suivant. Notre théorème fondamental est la généralisation de cette remarque: dans une division de l'espace ordinaire en polyèdres il y a des points communs au moins à quatre polyèdres, et il y a des points communs à trois polyèdres et à deux polyèdres. Sur les divisions de l'espace en ensembles fermés, il y a certainement des faits importants à observer qui ne se réduisent pas aux conséquences immédiates du théorème fondamental que j'ai données au § 14.

Théorème fondamental.

3. Les premiers paragraphes vont être consacrés à la démonstration du théorème fondamental énoncé au début du § 2.

Le mot „domaine" sera précisé par la suite; pour le moment, on peut adopter la définition de M. C Jordan: un domaine est un ensemble ayant des points intérieurs. Un tel ensemble contient en particulier tous les points vérifiant n inégalités de la forme

$$0 \leqslant x_i - x_i' \leqslant l;$$

ces points forment ce que j'appellerai un intervalle de grandeur l [1]).

Si le domaine D, de l'énoncé, contient un intervalle I de grandeur l, je pourrai me borner à la considération de I et je montrerai que les E_i sont assez petits pour que l'énoncé s'applique si chacun d'eux peut être enfermé dans un intervalle de grandeur inférieure à l.

Considérons un réseau formé de mailles de grandeur ε, c'est-à-dire la division de l'espace en intervalles faite à l'aide des variétés

$$x_1 = m_1 \varepsilon,\ x_2 = m_2 \varepsilon, \ldots,\ x_n = m_n \varepsilon,$$

les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$ prenant toutes les valeurs entières positives, nulles et négatives.

Appelons $\mathcal{E}_i$ l'ensemble des points de celles des mailles de ce réseau qui contiennent des points de E_i. Si ε est assez petit, les $\mathcal{E}_i$ seront, comme les E_i, contenus chacun dans un intervalle de grandeur inférieure à l et notre théorème doit être vrai pour les $\mathcal{E}_i$. Il suffit d'ailleurs de le démontrer pour ces ensembles $\mathcal{E}_i$ spéciaux; supposons-le en effet démontré dans ce cas et donnons à ε une suite de valeurs, toutes assez petites pour que l'énoncé s'applique, et décroissant jusqu'à zéro; soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ces valeurs. Pour chacune de ces valeurs de ε il existe des points appartenant à au moins $n+1$ ensembles $\mathcal{E}_i$. Soit P_i un de ces points, quand $\varepsilon = \varepsilon_i$ [2]) et supposons que P_i appartienne à $\mathcal{E}_{\alpha_i^1}, \mathcal{E}_{\alpha_i^2}, \ldots, \mathcal{E}_{\alpha_i^{p_i}}$, $(p_i \geqslant n+1)$.

[1]) Les x_i sont des coordonnées rectilignes ou curvilignes suivant que l'espace est ou non euclidien. La même observation pourra être faite souvent.

[2]) Je prend prétexte du choix que je fais ici d'un point P_i déterminé pour chaque ε_i, pour dire que je ne suis pas d'accord avec plusieurs des Auteurs ayant écrit dans les *Fundamenta Mathematicae*, avec M. Sierpiński en particulier, sur les cas où l'on doit dire qu'on a ou non utilisé des choix faits sans loi,

Soit P un point limite des points P_i. Comme il n'y a qu'un nombre fini de combinaisons des indices $1, 2, \ldots, p$ pris $n+1$ à $n+1$, P est la limite de points P_j pour lesquels la même combinaison de $n+1$ indices se retrouve dans la suite $\alpha_j^1, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^{p_j}$. Soit $1, 2, \ldots, n+1$ cette combinaison; je dis que P appartient à $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$. En effet P est limite de points P_j qui tous appartiennent à l'ensemble, variable avec j, que nous avons nommé $\mathcal{E}_1$.

comme dans le raisonnement connu de M. Zermelo. J'ai déjà dit ailleurs (*Ann. Ecole Norm.*, t. 35, 3e Série, page 238) que M. Sierpiński fait, à mon avis des choix sans loi dans des raisonnements où il affirme se passer de l'axiome de Zermelo. Ici, je veux expliquer que je ne crois pas avoir fait de choix sans loi:

Il est vrai qu'en apparence on fait parfois des choix sans loi. Mais c'est, ou bien parce qu'il importe peu qu'on ait fait tel choix ou tel autre, pourvu qu'on en ait fait un, et qu'il est évident qu'on pourrait définir logiquement un choix „par un nombre fini de mots"; c'est, par exemple, le cas du texte; ou bien c'est parceque le choix est imposé. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de prouver que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable Soit $a_1^1, a_1^2, \ldots$ le premier ensemble E_1, soit $a_2^1, a_2^2, \ldots$ le second $E_2, \ldots$ On peut ranger tous les éléments dans la suite dénombrable

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \ldots$$

Mais, objecte-t-on, vous avez „énuméré" E_1 d'une façon particulière et il y a là un choix que vous avez fait sans loi. Et comme vous avez opéré de même sur chaque E_i, voici une infinité de choix faits sans loi.

En aucune façon. On m'a donné les ensembles $E_1, E_2, \ldots$ non pas un à un, mais par une loi. De cette loi j'ai du tirer la preuve que chacun d'eux était dénombrable, ce que je n'ai pu faire séparément pour chaque ensemble, mais grâce à un raisonnement qui m'a permis d'effectuer le classement des éléments de chaque ensemble E_i dans une suite $a_i^1, a_i^2, \ldots$ bien déterminée. Donc ces suites doivent être considérées comme données, elle ne résultent pas de choix.

Je répondrais de la même manière aux remarques faites à l'occasion de la démonstration de cette propriété: la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

Il me semble que ceux qui voient dans ces démonstrations l'emploi de l'axiome de Zermelo, donnent aux énoncés un sens „idéaliste", alors que je ne conçois que le sens „empiriste". Je montrerai mieux la différence entre ces interprétations en disant que je ne comprends pas ce que l'on veut dire quand on parle d'un ensemble *dénombrable* non *effectivement énumérable*. Il y a là deux mentalités en présence; on perdrait son temps en essayant de prouver que l'une d'elles est la bonne et que l'autre n'est pas cohérente. Les recherches faites en partant de l'axiome de Zermelo sont autrement importantes: si ces travaux conduisaient à quelque découverte notable, la cause de l'axiome serait bien près d'être gagnée.

On pourra rapprocher ces observations de celles faites dans mon article: *Sur certaines démonstrations d'existence* (Bull. de la Soc. Math. de France, t. 45).

Mais un point de $\mathcal{E}_1$ est dans une maille contenant des points de E_1; donc, si Π_j est le point de E_1 le plus rapproché de P_j, la distance $P_j\Pi_j$ est inférieure à la longueur de la diagonale d'une maille, et a fortiori à $n\varepsilon_j$. Donc P est la limite des points Π_j de E_1, et, comme E_1 est fermé, P appartient à E_1. De même P appartient à chaque ensemble $E_1, E_2 \ldots, E_{n+1}$ et la proposition est démontrée.

4. J'examine maintenant le cas particulier auquel nous sommes ramenés: D se réduit à I, $(0 \leqslant x_i \leqslant l)$, les E_i sont formés de mailles.

Soit e_1 l'ensemble de ceux de E_i qui contiennent des points de la variété $x_1 = 0$ frontière de I. e_1, considéré comme ensemble de points, ne contient aucun point de $x_1 = l$; donc e_1 a une frontière I_1 intérieure à I. Cette frontière est constituée par des intervalles situés dans des variétés linéaires à $n-1$ dimensions parallèles à l'une des variétés coordonnées à $n-1$ dimensions $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Tout point de I_1 appartient à l'un au moins des ensembles E_i ayant constitué e_1 et à d'autres ensembles E_i. Soit e_2 l'ensemble de ceux de ces autres E_i qui contiennent des points de $x_2 = 0$. e_2 ne contient aucun point commun avec $x_2 = l$; l'ensemble des points communs à e_2 et à I_1 contiendra donc tous les points de I_1 situés dans $x_2 = 0$ et aucun de ceux des points de I_1 situés dans $x_2 = l$. Par suite cet ensemble aura une frontière I_2 constituée par des intervalles situés dans des variétés linéaires à $n-2$ dimensions parallèles aux variétés à $n-2$ dimensions coordonnées $(x_1 = 0,\ x_2 = 0), \ldots, (x_{n-1} = 0,\ x_n = 0)$.

Tout point de I_2 appartient à, au moins un E_i constituant e_1, au moins un E_i constituant e_2 et à au moins un autre E_i, ne faisant partie ni de e_1 ni de e_2. Soit e_3 l'ensemble de ceux de ces autres E_i qui contiennent des points de $x_3 = 0$. A partir de e_3 nous définirons I_3 et ainsi de suite.

Si nous ne sommes pas arrêtés, si la suite $I, I_1, I_2, \ldots, I_n$ existe bien, I_n sera formé de points appartenant chacun à un moins $n+1$ ensembles E_i et le théorème sera démontré

5. L'existence de I_1, seule, est évidente. e_1 est formé de mailles; passons de maille en maille en traversant des intervalles à $n-1$ dimensions frontières de mailles mais en évitant de rencontrer les frontières à un nombre moindre de dimensions. Si nous allons ainsi d'un point de $x_1 = 0$ à un point de $x_1 = l$, nous passerons nécessairement un nombre impair de fois de e_1 à son complément, donc nous traverserons un nombre impair de frontières à $n-1$ dimensions faisant partie de I_1.

Donc: l'ensemble I_1 existe, il est formé d'intervalles à $n-1$ dimensions, frontières de mailles; chaque droite

$$x_2=\alpha_2,\ x_3=\alpha_3,\ldots,\ x_n=\alpha_n,$$

non située dans une frontière de mailles et passant dans I, rencontre I_1 en un nombre impair de points.

Considérons un des intervalles à $n-1$ dimensions constituant I_1; cet intervalle i sépare deux mailles a et b, a appartient à e_1, b ne lui appartient pas. Soit X une frontière à $n-2$ dimensions de i intérieure à I; par X passent quatre frontières à $n-1$ dimensions séparant 4 mailles a, b, c, d; i sépare a de b, j sépare b de c, k sépare c de d, l sépare d de a. Suivant que e_1 contiendra c et d, ou c seul, ou d seul, ou ni c, ni d, I_1 contiendra i et j, ou i, j, k, l, ou i, k, ou i, l. Dans tous les cas, on voit que: par chaque frontière à $n-2$ dimensions, intérieure à I, des intervalles constituant I_1, il passe un nombre pair de ces intervalles constituants.

6. L'existence de $I_2, I_3,\ldots$ résulte de ces propriétés de I_1, grâce à la proposition auxiliaire suivante:

„Un ensemble sera dit un J_p $(0<p\leqq n)$: 1° s'il est constitué par des frontières f_{n-p} à $n-p$ dimensions des mailles du réseau considéré [1]) et intérieures à I; 2° si par toute frontière f_{n-p-1} de ces mailles, qui est intérieure à I, passe zéro ou un nombre pair de frontières f_{n-p} constituant J_p, 3°, s'il ne contient aucun point des variétés

$$x_1=0,\ x_2=0,\ldots,\ x_p=0$$
$$x_1=l,\ x_2=l,\ldots,\ x_p=l;$$

4° si toute variété

$$x_{p+1}=\alpha_{p+1},\ x_{p+2}=\alpha_{p+2},\ldots,\ x_n=\alpha_n,$$

les α n'étant pas des multiples entiers de ε et étant compris entre 0 et l, rencontre l'ensemble en un nombre impair de points.

Ceci étant, si, par un procédé quelconque, on a partagé les f_{n-p} constituant un J_p $(p<n)$ en deux ensembles A et B, A contenant

[1]) L'énoncé pourrait être généralisé en prenant une variété polyédrale à $n-p$ dimensions.

toutes, celles des f_{n-p} qui contiennent des points de $x_{p+1}=0$ et B contenant toutes celles qui contiennent des points de $x_{p+1}=l$, il existe sur J_p une frontière séparant A et B et cette frontière est un J_{p+1}. Par frontière, il faut entendre l'ensemble des f_{n-p-1} par lesquelles il passe un nombre impair de f_{n-p} appartenant à A et un nombre impair de f_{n-p} appartenant à B".

Il est évident que si la frontière F séparant A de B existe, elle satisfait aux conditions 1° et 3° auxquelles sont assujettis les J_{p+1}. Pour étudier la condition 2° remarquons qu'une f_{n-k} qui appartient à une f_{n-k+2} n'appartient qu'à deux f_{n-k+1} de cette f_{n-k+2}; par exemple, les relations

$$(1)\quad \begin{cases} x_1=m_1\varepsilon,\ x_2=m_2\varepsilon,\dots,\ x_{k-2}=m_{k-2}\varepsilon, \\ m_{k+1}\varepsilon\leqslant x_{k+1}\leqslant(m_{k+1}+1)\varepsilon,\dots,\ m_n\varepsilon\leqslant x_n\leqslant(m_n+1)\varepsilon, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_{k-1}=m_{k-1}\varepsilon, \\ x_k=m_k\varepsilon, \end{cases}$$

définissent une f_{n-k} qui appartient à la f_{n-k+2} définie par (1) et par

$$m_{k-1}\varepsilon\leqslant x_{k-1}\leqslant(m_{k-1}+1)\varepsilon,\quad m_k\varepsilon\leqslant x_k\leqslant(m_k+1)\varepsilon,$$

et seulement aux deux f_{n-k+1} de cette f_{n-k+2} qui sont définies par (1) et par l'un de deux groupes (3) et (3′) qui suivent:

$$(3)\quad \begin{cases} x_{k-1}=m_{k-1}\varepsilon, \\ m_k\varepsilon\leqslant x_k\leqslant(m_k+1)\varepsilon; \end{cases} \qquad (3')\quad \begin{cases} m_{k-1}\varepsilon\leqslant x_{k-1}\leqslant(m_{k-1}+1)\varepsilon, \\ x_k=m_k\varepsilon. \end{cases}$$

Ceci étant, soit M une f_{n-p-2}. Par M passent des f_{n-p} appartenant à A, si M appartient à A; affectons du signe $+$ les deux f_{n-p-1} passant par A de chacun de ces f_{n-p}. Nous aurons ainsi employé un nombre pair de signes $+$ et par suite il y aura zéro ou un nombre pair de f_{n-p-1} affectées d'un nombre impair de signes $+$. Or ces f_{n-p-1} affectées d'un nombre impair de signes $+$ sont celles qui, passant par M, appartiennent à F. La condition 2° est donc bien remplie.

7. Il nous reste à montrer que la condition 4° est aussi remplie, sans admettre à l'avance l'existence de F. Cette existence résultera alors de ce que la condition 4° fait connaître un nombre impair de points de F, donc un point au moins de F.

Coupons J_p par une variété V

$$x_{p+2}=a_{p+2},\dots,\ x_n=a_n,$$

les α n'étant pas des multiples entiers de ε et étant compris entre 0 et l. Chaque f_{n-p} appartenant à J_p qui rencontre V, est coupée par V suivant un segment s et chaque f_{n-p-1} suivant un point p. J_p vérifiant la condition 2^0, par chaque p, intérieur à I il passe un nombre pair de s. Si, dans V, nous traçons la variété V', $x_{p+1}=\alpha_{p+1}$, α_{p+1} étant très petit positif, nous obtenons sur V', d'après 4^0, un nombre impair de points de J_p; donc il y a un nombre impair de segments s ayant une extrémité dans $x_{p+1}=0$. Tous ces segments font partie de A, qui existe donc bien.

Affectons du signe $+$ les deux extrémités du chaque segment s appartenant à A. Nous utiliserons ainsi un nombre pair de signes $+$; aucun d'eux, d'après 3^0, ne peut être dans les frontières de I parallèles aux variétés coordonnées $x_1=0, \ldots, x_p=0$; ni, d'après la définition de V, dans celles parallèles à $x_{p+2}=0, \ldots, x_n=0$; ni, d'après la définition de A et B, dans $x_{p+1}=l$. Un nombre impair d'entre eux est dans $x_{p+1}=0$, donc il y en a un nombre impair à l'intérieur de I. L'un au moins des points p est donc affecté d'un nombre impair de signes $+$ et il y a un nombre impair de points p dans ce cas. Comme ces points p sont ceux où aboutissent un nombre impair de segments s de A et par suite un nombre impair de segments s de B, ces points p appartiennent à F. Il est donc prouvé que F existe et satisfait à la condition 4^0; la démonstration de la proposition auxiliaire est terminée.

8. L'application de cette proposition auxiliaire à la démonstration de notre théorème est immédiate. I_1 est un J_1 et l'opération qui permet de passer de I_1 à I_2 est l'une de celles auxquelles s'applique la proposition auxiliaire, si l'on donne au mot frontière le sens indiqué, donc I_2 existe et est un J_2; de même I_3 existe et est un $J_3, \ldots$

L'énoncé du § 2 est entièrement légitimé.

Lorsque l'un des ensembles I_p de la démonstration précédente est constitué par plusieurs ensembles, d'un seul tenant et sans points communs deux à deux, l'un au moins de ces ensembles est un J_p et cet ensemble i_p pourrait remplacer I_p dans la suite de la démonstration. Dans ma lettre des *Mathematische Annalen*, j'avais pris pour les $i_1, i_2, \ldots$ successifs, des ensembles d'un seul tenant ce qui est, on le voit, possible. Mais, comme M. Brouwer me l'a fait observer, j'avais caractérisé de façon incorrecte et insuffisante les i_p que je considérais: par exemple, j'avais dit seulement sur i_1 que cet ensemble s'étendait de chaque $x_i = 0$ jusqu'à chaque $x_i = l$, pour $i = 2, 3, \ldots, n$, Or, si cela suffit pour que i_2 existe, cela n'entraîne pas nécessairement l'existence de $i_3, i_4, \ldots, i_n$. J'aurais du dire que i partageait I en deux régions, l'une contenant tous les points de $x_1 = 0$, l'autre tous les points de $x_1 = l$; et alors i_1 aurait possédé, *en particulier*, la propriété de s'étendre de $x_2 = 0$ à $x_2 = l, \ldots$, de $x_n = 0$ à $x_n = l$.

Cette erreur semblait faire tomber entièrement le raisonnement, car je n'avais pas donné la démonstration de l'existence des $I_1, I_2, \ldots$ et l'on pouvait croire que je prétendais la fonder uniquement sur la propriété que j'avais énoncée. En réalité, j'avais toujours pensé à des separations en régions de $I, I_1, \ldots$ Mais mon exposé primitif, de forme geométrique, n'était pas au point et M. Brouwer fit plusieurs objections à un premier essai de rédaction que je lui avais communiqué.

Pour arriver à une rédaction meilleure, j'ai eu l'idée, en reprenant récemment la question, d'arithmétiser la démonstration par le procédé classique, qui consiste à remplacer la considération d'une séparation en régions par celle d'un nombre qui change de parité avec la région Le raisonnement a pris alors une forme beaucoup plus claire et que j'espère est tout à fait correcte.

Correspondances biunivoques et continues.

9. J'arrive à la démonstration relative à l'invariance du nombre des dimensions.

Il est impossible d'établir une correspondance univoque et continue dans les deux sens entre les points de deux ensembles E_n et E_p situés respectivement dans des espaces à n et à p dimensions, si p est plus grand que n et si E_p contient tous les points d'un domaine de l'espace à p dimensions.

On peut naturellement, dans la démonstration de cet énoncé, qui contient celui du § 1, se borner au cas où E_p est un intervalle I; alors E_n est un ensemble fermé, borné. Si l'on considère une division de l'espace contenant E_n en intervalles de grandeur ε, E_n se trouvera partagé en un nombre fini d'ensembles fermés $E_n^1, E_n^2, \ldots, E_n^m$ auxquels correspondront des ensembles fermés $E_p^1, E_p^2, \ldots E_p^m$ dont la somme sera $E_p = I$. Si ε a été pris assez petit, il y a des points de ? appartenant à $p+1$ des ensembles E^i_p d'après le théorème précédent; donc il y a des points appartenant à $p+1$ des ensembles E^i_n.

Or nous allons montrer que l'on peut faire en sorte qu'il n'y ait jamais de points communs à plus de $n+1$ des E^i_n, d'où la contradiction. Pour cela, il nous suffira de diviser l'espace des E^i_n en intervalles de façon qu'il n'y ait pas de points communs à plus de $n+1$ de ces intervalles. Par là nous aurons montré en même temps que la limite inférieure $n+1$ qui figure dans l'énoncé du théorème du § 2 ne peut pas être élevée.

10. Couvrons l'espace à n dimensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un réseau R_n de mailles de grandeur ε; elles sont obtenues à l'aide des variétés $x_i = \alpha_i \varepsilon$ et chaque maille est définie par n inégalités de la forme

$$\alpha_i \varepsilon \leqq x_i \leqq (\alpha_i + 1)\varepsilon;$$

les α_i étant entiers. Les α_i sont des sortes de coordonnées de la maille. Faisons subir à la maille de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ la translation qui amène l'origine au point

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_2 \dfrac{\varepsilon}{2} + \alpha_3 \dfrac{\varepsilon}{4} + \ldots + \alpha_n \dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \\ x_2 = \alpha_3 \dfrac{\varepsilon}{4} + \ldots + \alpha_n \dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \alpha_n \dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}. \\ x_n = 0. \end{array}\right.$$

Je dis 1° que l'ensemble S_n des mailles ainsi déplacées remplit l'espace, 2° que deux mailles déplacées n'ont pas de points intérieurs communs, 3° que les points frontières de mailles communs à r mailles, $r \leqq n+1$, forment des variétés à $n-r+1$ dimensions définies par $r-1$ équations de la forme $x_i = m_i \dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}$, les m_i étant des entiers.

Pour $n=2$, la vérification est immédiate. Les mailles de R_2 de même α_2 forment une file $F(\alpha_2)$ que l'on fait glisser sur elle même, de la quantité $\dfrac{\alpha_2 \varepsilon}{2}$. De sorte que deux files consécutives, $F(\alpha_2)$ et

$F(\alpha_2 - 1)$ par exemple, ne se pénètrent pas, restent contigues et sont décalées l'une par rapport à l'autre de $\frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons la propriété vraie pour n et passons à $n+1$. Les mailles de R_{n+1} de même α_{n+1} forment un étage $E(\alpha_{n+1})$ qui remplit la partie de l'espace définie par

$$\alpha_{n+1}\varepsilon \leqslant x_{n+1} \leqslant (\alpha_{n+1}+1)\varepsilon.$$

Les mailles de $E(\alpha_{n+1})$ restent dans cette même partie de l'espace après leur déplacement, donc pour vérifier les conditions (1) et (2), il suffit de s'occuper de ce qui se passe pour un étage. Toutes les mailles de $E(\alpha_{n+1})$ sont caractérisées par leur base dans $x_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon$ et elles occupent les unes par rapport aux autres la même position relative que leurs bases. D'une façon plus précise, si un point $M[x_i = \xi_i,\ \alpha_{n+1}\varepsilon < x_{n+1} < (\alpha_{n+1}+1)\varepsilon]$ de $E(\alpha_{n+1})$ appartient à r mailles de S_{n+1}, tout le segment $[x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2, \ldots,\ x_n = \xi_n,\ \alpha_{n+1}\varepsilon \leqslant x_{n+1} \leqslant (\alpha_{n+1}+1)\varepsilon]$ appartient aux mêmes r mailles et son extrémité, dans $x_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon$, appartient aux r bases de ces mailles.

Or ces bases forment, dans $x_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon$, une figure S'_n qui se déduit de S_n par la translation qui amène l'origine en

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \alpha_{n+1}\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Donc les conditions (1) et (2) sont vérifiées et il en est de même de la condition (3) en ce qui concerne les points intérieurs à un étage, car à une variété V'_r commune à r mailles de S'_n correspond une variété à une dimension de plus, intérieure à $E(\alpha_{n+1})$, commune à r mailles et inversement.

Occupons nous maintenant des points situés dans la frontière d'un étage, dans $x_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon$ qui sépare $E(\alpha_{n+1})$ de $E(\alpha_{n+1}-1)$, par exemple. Et supposons, pour fixer les idées, α_{n+1} pair. Les points de $x_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon$ qui sont communs à r mailles de $E(\alpha_{n+1})$ sont communs à r mailles de S'_n, donc ils forment des variétés linéaires V'_r à $n = r+1$ dimensions définies par $x_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon$ et, d'après 3°, par $r-1$ égalités de la forme $x_i = m_i\frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \alpha_{n+1}\frac{\varepsilon}{2^n}$, c'est-à-dire par des égalités de la forme $x_i = \mu_i\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$, les μ_i étant entiers puisque α_{n+1} est pair.

Les mailles de $E(\alpha_{n+1}-1)$ ont sur $x_{n+1}=\alpha_{n+1}\varepsilon$ des bases formant une figure S''_n obtenue en déplaçant S'_n de $-\frac{\varepsilon}{2^n}$ successivement le long de chaque axe $0x_1, 0x_2, \ldots, 0x_n$. Donc les variétés V''_s communes à s mailles de $E(\alpha_{n+1}-1)$ et situées dans $x_{n+1}=\alpha_{n+1}\varepsilon$ sont définies par cette équation et $s-1$ autres de la forme $x_i=(2\nu_i+1)\frac{\varepsilon}{2^n}$. Les équations définissant les V'_r diffèrent donc de celles relatives aux V''_s et par suite deux telles variétés n'ont de points communs que si les $r+s-2$ équations linéaires, qui les définissent et qui sont toutes de la forme $x_i=m_i\frac{\varepsilon}{2^n}$, sont relatives à des x_i différents. Cela exige $r+s-2\leqq n$; donc $r+s\leqq n+2$. Comme s est au moins égal à 2, on voit qu'il faut $r<n+1$; donc les points communs à $n+1$ mailles de S'_n n'appatiennent qu'à une maille de S''_n, donc à seulement $n+2$ mailles de S_{n+1}.

Soient maintenant deux variétés V_r et V''_s ayant des points communs, ces points communs formeront une variété définie par $x_{n+1}=\alpha_{n+1}\varepsilon$ et $r+s=2$ autres équations, donc ce sera une variété à $n+1-(r+s-2+1)=n-(r+s)+2$ dimensions commune à $r+s$ mailles de S_{n+1}. La condition 3⁰ est vérifiée, car les équations des points et variétés obtenus sont bien toutes de la forme $x_i=m_i\frac{\varepsilon}{2^n}$.

11. L'énoncé du § 9, maintenant justifié montre que les correspondances univoques et continues dans les deux sens ne sont possibles entre ensembles possédant des points intérieurs, que si ces ensembles sont dans des espaces ayant le même nombre de dimensions.

Supposons qu'une telle correspondance existe entre les points de deux ensembles fermés e et E situés dans des espaces à n dimensions. Partageons e en l'ensemble d de ceux de ses points qui sont limites de points intérieurs et l'ensemble f des points dans le voisinage desquels e est partout non dense. De même partageons E en D et F. Je dis que, *dans la correspondance,* d et D *sont transformés l'un de l'autre, ainsi que* f et F.

Il suffit de le démontrer pour f et F c'est-à-dire de démontrer que le transformé φ d'un ensemble partout non dense f est lui-même partout non dense. Si φ n'était pas partout non dense, il contiendrait un intervalle I lequel serait le transformé d'une partie f' de f, laquelle serait un ensemble parfait. Si l'on partage f' en un nombre fini d'ensembles fermés f'_i, I sera partagé de la même manière. Si l'on a pris tous les f'_i assez petits, c'est-à-dire intérieurs à des intervalles assez petits, les composants de I seront assez petits pour que le théorème du § 2 s'applique. Nous serons donc conduits à une contradiction si nous prouvons que l'on peut choisir les f'_i de façon qu'aucun point n'appartienne à plus de n d'entre eux.

Pour faire ce choix je considère la division S_n, § 10, de l'espace contenant f'. A cette division de l'espace correspond une division de f' qui répond à la question si aucun des points de f' n'appartient à $n+1$ mailles de S_n. Mais supposons que le point P appartienne à f' et aux $n+1$ mailles $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ de S_n. Entourons P d'un petit intervalle i assez petit pour qu'il ne contienne que des points de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et qu'il n'y ait, ni à son intérieur ni sur sa frontière, aucun autre point appartenant à $n+1$ mailles de S_n. Modifions maintenant les ensembles fermés $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ à l'intérieur de i de la façon suivante: je prends dans i un point p n'appartenant pas à f, ce qui est possible puisque f est partout non dense, et je conviens que si un point q de la frontière de i appartient à certains des ensembles $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à α et β par exemple, il en sera de même de tous les points du segment pq. Ainsi modifiés les $n+1$ ensembles $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ont bien encore un point commun à l'intérieur de i mais ce point est p qui n'appartient pas à f'.

En opérant de même sur chaque sommet de S_n, on aura bien une division de l'espace fournissant une division de f' en ensembles tels qu'aucun point n'appartienne à plus de n d'entre eux.

12. On peut aller plus loin et démontrer que les points intérieurs de d et D se correspondent et de même pour les points frontières

Dans les paragraphes 3 à 7 nous avons démontré plus que l'énoncé du paragraphe 2; nous avons prouvé en effet qu'il existait au moins un point commun aux ensembles appelés $e_1, e_2, \ldots, e_n$ et à l'un des E_i ne faisant partie ni de e_1, ni de $e_2, \ldots$, ni de e_n. Disons que ces autres E_i forment e_{n+1}

Ceci étant, supposons qu'au point p, frontière de d, corresponde un point $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ intérieur à D. Soit I un intervalle de centre P et faisant tout entier partie de D. Partageons I en intervalles E_i de façon que e_1 soit formé de la partie de I telle que $x_1 < \xi_1$; que e_2 soit formé de la partie de I donnée par $x_1 > \xi_1$, $x_2 < \xi_2$; et d'une façon générale que e_p, $(p \leqslant n)$, soit formé de points de I tels que $x_1 < \xi_1, x_2 > \xi_2, \ldots, x_{p-1} > \xi_{p-1}, x_p < \xi_p$. Alors e_{n+1} sera formé des points tels que $x_1 > \xi_1, x_2 > \xi_2, \ldots, x_p > \xi_p$.

$e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ auront en commun le seul point P. Suivant la façon dont $e_1, e_2, \ldots$ seront décomposés en ensembles E_i, il pourra y avoir des points communs à un plus ou moins grand nombre d'ensembles E_i, peu nous importe, nous ne nous occupons plus que de la division en $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$.

Dans un instant, nous modifierons $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ dans un voisinage V suffisamment restreint de P, de façon qu'ils restent fermés et remplissent I; ils devraient continuer à avoir un point commun, point qui ne pourrait d'ailleurs être que dans le voisinage V considéré.

Aux ensembles $e_1. e_2, \ldots, e_{n+1}$ correspondent dans l'espace contenant d des ensembles $e'_1, e'_2, \ldots e'_{n+1}$ ayant en commun le seul point p. D'ailleurs un voisinage v de p correspond à un voisinage V de P; pour modifier les e_i autour de P, il suffit donc de modifier les e'_i autour de p de façon qu'ils restent fermés et remplissent l'ensemble parfait i transformé de I.

Opérons comme au numéro précédent; prenons un intervalle j suffisamment petit et de centre p; sur la frontière de j les ensembles $e'_1, \ldots, e'_{n+1}$ ne passent pas tous par un même point, donc un point q de cette frontière appartient à n d'entre eux au plus. Ayant choisi une fois pour toutes un point p' intérieur à j et non situé sur d, ce qui est possible, puisque p est point frontière de d, convenons que si q appartient aux ensembles $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_p}$, nous attribuons tous les points de $p'q$, qui appartiennent à i aux ensembles $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_p}$ modifiés.

Alors les $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ modifiés n'ont plus de point qui leur appartienne à tous et il n'y a plus de point qui soit commun à la fois à $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$. C'est la contradiction qui justifie notre énoncé.

En résumé, nous avons prouvé l'importante propriété suivante, connue sous le nom de théorème de Schoenflies[1]):

Si l'on a une correspondance univoque et continue dans les deux sens entre les points de deux ensembles fermés de deux espaces à n dimensions,

[1]) C'est en effet M. Schoenflies qui en a le premier formulé l'énoncé; il a montré le grand intérêt de la proposition et l'a démontré, dans le cas de $n = 2$. Voir, par exemple, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, Ergänzungsband 2, 1908; voir aussi la note de M. Hadamard contenue dans le tome II de la deuxième édition de l'Introduction à la théorie des fonction d'une variable de J. Tannery.

les points intérieurs des deux ensembles se correspondent,

les points frontières, limites de points intérieurs se correspondent,

ainsi que les points frontières non limites de points intérieurs.

13. J'étudierai plus loin certaines correspondances univoques et continues dans un seul sens pour l'instant j'indique comment, en essayant d'utiliser ces correspondances pour l'examen de celles qui sont biunivoques et continues, j'ai été conduit à l'énoncé du § 2.

M. Lüroth a démontré qu'une courbe sans point multiple ne peut pas remplir une partie d'un espace à n dimensions, comme je l'ai dit au § 1; or, nous savons construire des courbes remplissant un tel espace, que peut-on dire d'une telle courbe? L'énoncé de M. Lüroth nous apprend, que la courbe a des points multiples; mais il ne nous renseigne pas sur le degré de multiplicité de ces points.

Or, il suffit d'avoir quelque peu manié les courbes remplissant une partie de plan pour être persuadé qu'elles ont nécessairement des points triples et que d'ailleurs on peut en construire qui n'aient que des points triples. Pour les courbes remplissant l'espace ordinaire, elles paraissent bien avoir nécessairement des points quadruples et d'ailleurs cet ordre de multiplicité suffit

Si l'on pouvait démontrer et généraliser ces faits, on aurait mis en évidence une différence essentielle entre les espaces à n et à p dimensions et par suite établi le théorème du § 1.

Or, s'il est vrai qu'un courbe remplissant le plan, l'espace ordinaire,... a nécessairement des points triples, quadruples,... en divisant cette courbe en arcs assez petits on aura nécessairement des points appartenant à 3, 4,... de ces arcs. D'où l'idée de l'énoncé du § 2.

14. Cet énoncé généralise ce fait élémentaire que, dans une division du plan en polygones, ou de l'espace en polyèdres, il y a nécessairement des sommets communs à au moins trois polygones dans le plan, et à au moins quatre polyèdres dans l'espace. Voyons ce qu'il nous apprend sur l'existence des ensembles analogues aux arêtes communes à deux polygones ou aux arêtes et faces communes à plusieurs polyèdres.

Lorsqu'une suite finie d'ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots$

remplit un intervalle I de l'espace à n dimensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1° Il existe dans I des points communs à $n+1$ au moins des ensembles E_i.

2° Sur chaque variété V à $n-p$ dimensions, située dans I et définie par p égalités de la forme $x_i = \alpha_i$, il existe des points communs à au moins $p+1$ des ensembles E_i;

pourvu qu'aucun des E_i ne renferme à la fois des points de deux frontières opposées de I.

Si les E_i pouvaient être enfermés chacun dans un intervalle de grandeur inférieure à ε. la propriété 1° serait celle donnée par l'énoncé du § 2. Mais, dans la légitimation de cet énoncé, la condition que chaque E_i puisse être enfermé dans un intervalle assez petit n'intervenait que par cette conséquence: aucun E_i n'a à la fois des points appartenant à deux frontières opposées de I; donc la partie 1° est démontrée. Or la partie 2° n'est que l'application de cette partie 1° à l'intervalle et aux ensembles obtenus en coupant I et les E_i par la variété V définie par p égalités de la forme $x_i = \alpha_i$.

On peut, dans l'énoncé précédent, remplacer la variété linéaire V par une des variétés polyédrales J_{n-p} du § 6.

Reprenons, en effet, le raisonnement des premiers paragraphes, modifié comme il suit. Nous ne considérons plus d'ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_{n-p}$; e_{n-p+1} sera l'ensemble des E_i qui contiennent des points de $x_{n-p+1} = 0$, l'intervalle I étant $0 \leqslant x_i \leqslant l$, comme précédemment. Si l'on se place dans l'hypothèse où les E_i sont des ensembles de mailles d'un réseau, cela conduit à une frontière sur J_{n-p} qui est une variété J_{n-p+1} et tous les points de cette J_{n-p+1} appartiennent à un E_i de e_{n-p+1} et à un autre E_i. e_{n-p+2} sera l'ensemble de ceux de ces autres E_i qui contiennent des points de $x_{n-p+2} = 0$ et cela définira sur J_{n-p+1} une frontière J_{n-p+2}, etc. On ira ainsi jusqu'à e_n, d'après les théorèmes de début, et les points constituant J_n, points qui appartiennent à toutes les frontières $J_{n-1}, J_{n-2}, \ldots, J_{n-p}$ considérées, sont communs à au moins $p+1$ des ensembles E_i, savoir un ensemble de e_{n-p+1}, un de $e_{n-p+2}, \ldots$ un de e_n et un n'appartenant à aucun des e_i.

Pour le cas où les E_i sont constitués de mailles, le nouvel énoncé est ainsi établi, on passera au cas général comme précédemment.

L'ensemble des points communs à k au moins des E_i étant fermé, on peut encore remplacer dans l'énoncé la variété V par un ensemble W pourvu qu'il puisse être considéré comme l'ensemble des points limites d'une suite de variétés J_{n-p}. En effet, dans ce cas, puisque sur chaque J_{n-p} il y a des points $(p+1)$uples, il y a sur W un point limite de ces points multiples et ce point limite est au moins $(p+1)$uple.

Cette nouvelle extension est intéressante surtout à cause de cette conséquence: O n p e u t r e m p l a c e r l a v a r i é t é V p a r u n e v a r i é t é d é f i n i e p a r p é g a l i t é s d e l a f o r m e:

$$x_i = f_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n), \qquad (i = 1, 2, \dots p)$$

l e s f_i é t a n t d e s f o n c t i o n s c o n t i n u e s d é f i n i e s p o u r t o u s l e s s y s t è m e s d e v a l e u r s c o m p r i s e s e n t r e 0 et l d e s $n-p$ v a r i a b l e s d o n t e l l e s d é p e n d e n t e t n e p r e n a n t q u e d e s v a l e u r s c o m p r i s e s e n t r e 0 et l l o r s q u e I e s t l'i n t e r v a l l e $0 \leqslant x_i \leqslant l$, $(i = 1, 2, \dots n)$.

Ces variétés, qui sont les variétés générales les plus simples à $n-p$ dimensions, sont évidemment des limites des variétés J_{n-p}.

On pourrait passer de là à des variétés encore plus générales; je ne m'y arrête pas.

15 On peut chercher à généraliser l'énoncé du § 2 dans d'autres directions. Puisque cet énoncé donne une propriété importante des espaces à n dimensions, voyons si cette propriété appartient aussi aux variétés à n dimensions.

Si ces variétés sont définies à la façon de R i e m a n n, comme c'est le cas pour les variétés analytiques, c'est-à dire par la considération des fonctions continues f_i de n variables $u_1, u_2, \dots, u_n$, la propriété est démontrée puisqu'elle l'est pour l'espace $u_1, u_2, \dots, u_n$ des coordonnées curvilignes.

Mais il y a un autre procédé qu'on peut utiliser pour définir l'analogue d'un cercle dans le plan, d'une sphère dans l'espace,...

Définissons un d o m a i n e o u v e r t de l'espace comme un ensemble borné n'ayant que des points intérieurs; le d o m a i n e f e r m é correspondant sera la somme du domaine ouvert et des points frontières.

Dans la plupart des questions, il faut ajouter les restrictions suivantes, que je ferai, bien qu'ici elles soient sans importance réelle:

1° On peut passer d'un point à l'autre du domaine ouvert par un chemin polygonal ne contenant que des points de ce domaine;

2° tout point frontière est limite à la fois de points intérieurs au domaine et de points qui lui sont extérieurs[1]).

La frontière d'un domaine de l'espace à n dimensions, que j'appellerai par abréviation une frontière à $n-1$ dimensions, peut être considérée comme l'analogue d'une sphère à $n-1$ dimensions de l'espace à n dimensions. Une telle frontière pour $n=3$ semble bien être l'un des ensembles que l'on doit appeler une surface, d'après cette définition que l'on trouvait autrefois dans de nombreuses Géométries: „une surface est la limite d'un volume"; le mot limite ayant le sens de frontière. De même, si „une courbe est la limite d'une surface", une frontière à une dimension est une courbe.

Pour utiliser plus complètement ces anciennes définitions il serait naturel, par exemple, de considérer une portion P d'une frontière F à 2 dimensions et la frontière de P sur F. Cet ensemble frontière répond, en un sens, à la définition citée des courbes. Mais ce procédé de définition appellerait des études qui n'ont pas encore été entreprises, je crois. Supposons, en effet, que F soit formé d'un ellipsoïde de révolution allongé et de la sphère décrite sur le grand axe comme diamètre. Cette sphère formera une portion P de F et elle n'aura, sur F, que deux points frontières: les extrémités du grand axe de l'ellipsoïde.

16. Aussi je m'arrête au premier stade dans l'emploi de ce mode de définition et je me borne à la considération des frontières à $n-1$ dimensions qui sont, à un certain point de vue, des généralisations des variétés à $n-1$ dimensions usuelles.

Je vais montrer que le théorème du § 2 s'applique à cette nouvelle espèce de variétés, c'est-à-dire que:

Si l'on a partagé une frontière à n dimensions en un nombre fini d'ensembles fermés assez petits, il y a des points appartenant à $n+1$ de ces ensembles; d'ailleurs, si petit que soit ε, on peut toujours diviser une frontière à n dimensions en un nombre fini d'ensembles fermés de grandeur ε au plus et cela de façon qu'aucun point n'appartienne à plus de $n+1$ de ces ensembles.

Pour démontrer la première partie, je suppose que la frontière

[1]) Nous avons utilisé cette restriction au § 12.

F considérée soit la frontière d'un domaine fermé D contenant un intervalle I. En prenant convenablement les axes, I sera défini par $n+1$ inégalités de la forme $0 \leqslant x_i \leqslant l$.

Je m'occuperai seulement de la partie de F satisfaisant aux inégalités:

$$x_1 > 0, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l \qquad (i=2, 3, \ldots, n+1);$$

partie que je désignerai encore par F. Si je fais la transformation $X_1 = kx_1$, k étant convenablement choisi, F sera tel que l'on ait $0 < X_1 < l$ pour tous ses points et F sera un ensemble W, limite d'un J_1 de l'espace $X_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ et la proposition résulte du § 14.

Je précise cependant la démonstration: couvrons l'espace $X_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ d'un réseau de mailles très petites et soit $\varDelta$ l'ensemble de celles de ces mailles qui contiennent des points de D. 'A l'intérieur de l'intervalle J, défini par:

$$0 \leqslant X_1 \leqslant l, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant l \qquad (i=2, 3 \ldots, n+1),$$

$\varDelta$ est limité par une variété J_1, dont F est la limite quand on rend les mailles de plus en plus petites.

D'autre part, F est donnée partagée en un nombre fini d'ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Soit a une variété à n dimensions faisant partie de J_1, a est frontière d'une maille α faisant partie de $\varDelta$ et d'une maille β n'en faisant pas partie. β ne contenant pas de point de D, a ne contient pas des points de D et, comme α en contient, α contient des points de F. Ces points appartiennent à certains des ensembles E_i; si λ est le plus petit des indices de ces ensembles, nous dirons que tous les points de a appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}_i$. Les ensembles $\mathcal{E}_i$ sont fermés et ont pour somme J_1; si les E_i sont très petits ils seront aussi très petits et il y aura sur J_1 des points communs à $n+1$ au moins de ees $\mathcal{E}_i$.

On conclut de là qu'il y a, sur F, des points communs à $n+1$ au moins des E_i par le passage à la limite qui nous a déjà servi.

Pour démontrer la deuxième partie, considérons la division S_{n+1}, § 10, de l'espace contenant F et modifions-la, comme au § 11, de façon qu'aucun point commun à $n+2$ mailles de S_{n+1} n'appartienne à F, modification possible puisque F est partout non dense dans l'espace. 'A cette division de l'espace, correspond alors la division de F en ensembles fermés prévue par la seconde partie de l'énoncé.

On remarquera que les deux restrictions apportées au § 15 à la notion de domaine ne sont intervenues nulle part et que l'énoncé de ce paragraphe est vrai pour tout ensemble fermé nulle part dense et séparant en régions l'espace à $n+1$ dimensions.

17. Le raisonnement qui a permis précédemment de déduire le théorème du § 9 sur l'invariance du nombre de dimensions des espaces de l'énoncé du § 2 fournit maintenant la propriété suivante qui affirme l'invariance du nombre des dimensions des variétés frontières:

Entre les points d'une frontière à n dimensions ou d'une partie de cette frontière et les points d'une partie d'une frontière F à $n+p$ dimensions, contenant en particulier tous les points de F suffisamment voisins d'un point déterminé de F, il ne peut exister une correspondance biunivoque et réciproque.

Voici une autre forme du même énoncé:

Si les points d'un ensemble E, que nous appellerons une variété frontière à p dimensions sans point multiple de l'espace à n dimensions correspondent, de façon univoque et continue dans les deux sens, à ceux d'une frontière à p dimensions, $(p < n)$, E ne divise en régions ni l'espace, ni un domaine quelconque de cet espace.

Si, en effet, E divisait un domaine, il suffirait de décomposer ce domaine en intervalles pour conclure que E diviserait en régions un intervalle, serait un ensemble W, et possèderait la propriété du § 16, ce qui est en contradiction avec cette hypothèse que E correspond biunivoquement à une frontière à moins de $n-1$ dimensions.

En particulier, une courbe ne divise en régions aucun domaine de l'espace ordinaire; une surface ne partage pas en régions l'espace à quatre dimensions; etc

Pour donner toute sa portée à cette remarque je considérerai les variétés définies par la réunion d'une infinité dénombrable d'éléments, chaque élément étant donné par n équations: $x_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_p)$, les f_i étant continues et les u_k étant les coordonnées des points d'un intervalle de l'espace des u. Les variétés à p dimensions ainsi définies comprennent en particulier les variétés analytiques multiformes Ceci étant, il résulte de ce qui précède que:

1° une variété sans point multiple à p dimensions, d'un espace à plus de p dimensions, ne remplit aucun domaine de cet espace;

2° une variété sans point multiple à p dimensions, d'un espace à plus de $p+1$ dimensions, ne remplit et ne divise en régions aucun domaine de cet espace[1])

Soient $E_1, E_2, \ldots$ les éléments définissant la variété et soit D un domaine de l'espace. E_1 ne remplissant pas D et étant fermé, on peut définir dans D un domaine complètement intérieur D_1 et dont aucun point n'appartient à E_1; de même. dans D_1 on prendra D_2 ne contenant pas de points de E_2, etc. A l'intérieur de tous ces domaines, existera au moins un point qui, n'appartenant à aucun des éléments E_k, n'appartiendra pas à la variété.

Si, de plus, l'espace a plus de $p+1$ dimensions et si A et B sont deux points intérieurs à D n'appartenant pas à la variété, nous savons que nous pouvons aller de A à B à l'intérieur de D sans rencontrer E_1; soit L_1 un chemin réalisant ces conditions. Soit D_1 l'ensemble des points distants de L_1 de moins de ε_1, ε_1 étant pris assez petit pour que D_1 ne contienne pas de points de E_1. ni de la frontière de D. Dans D_1, on peut trouver un chemin ne rencontrant pas E_2, soit L_2 et de là, grâce à un nombre ε_2 assez petit, on déduira un domaine D_2 entièrement intérieur à D_1; etc. Les ε étant pris tendant vers zéro, à l'intérieur de $D, D_1, D_2, \ldots$ on trouvera un ensemble de points formant un continu limite de $L_1, L_2, \ldots$ qui permet de passer de A à B, à l'intérieur de D, sans rencontrer la variété donnée.

Pour terminer je signale une différence entre les frontières et les variétés. Le théorème de Schoenflies n'est pas nécessairement vrai en ce qui concerne les correspondances entre frontières à n dimensions. On s'en rendra compte de suite en reprenant, par exemple, le cas de cette frontière à deux dimensions formée d'une sphère et d'un ellipsoïde bitangents.

Correspondances univoques et continues dans un sens.

18. Je passe maintenant à l'étude de correspondances univoques et continues dans un seul sens. Je rappelle qu'un raisonnement très

[1]) Le théorème est vrai pour une variété ayant des points multiples, mais qui est formée avec des éléments dont aucun n'a de point multiple.

simple, dû à M. Jordan, montre qu'une correspondance ne peut être biunivoque et de plus continue dans un sens sans être continue dans les deux sens; les correspondances que nous allons rencontrer ne seront donc uniformes que dans un sens. Elles feront correspondre des points de deux espaces E_n et E_p à n et p dimensions; nous les supposerons définies dans certains domaines de E_n et E_p; le point homologue A d'un point a de E_p étant bien déterminé et variant de facon continue avec a. Le cas que nous examinerons, le seul qui paraisse intéressant est celui de $n > p$. Je prendrai d'abord $p = 1$; la correspondance entre A et a définit alors une courbe Γ qui remplit tout un domaine de E_n; la correspondance n'est pas biunivoque, c'est à dire que Γ a des points multiples. Nous allons prouver la propriété suivante:

Une courbe Γ, qui remplit un domaine de l'espace à n dimensions, a des points multiples d'ordre $n+1$ au moins dans ce domaine.

Je choisis un intervalle I de l'espace E_n qui soit rempli par Γ; je suppose que la coordonnée définissant le point variable a de E_1 s'appelle t et qu'il suffise de la faire varier de 0 à ω pour avoir rempli I; je ne m'occuperai pas des valeurs de t extérieures à $(0, \omega)$. Je partage $(0, \omega)$ en petits intervalles partiels par des points $t_1, t_2 \ldots$ en nombre fini. J'enferme t_1 dans un intervalle (τ_1, τ_1') très petit par rapport à $(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots$ et de même j'enferme t_2 dans (τ_2, τ_2'), t_3 dans $(\tau_3. \tau_3'), \ldots$

Deux cas peuvent se présenter: ou bien les arcs $(0, \tau_1)$ et (τ_1', ω) de Γ suffisent à remplir I et je ne considérai plus que ces deux arcs formant ce que j'appellerai Γ_1, ou bien ces arcs ne remplissent pas tout I. Dans ce second cas il y aura dans (τ_1, τ_1') des valeurs de t fournissant dans E_n des points par lesquels ne passent aucun des arcs $(0, \tau_1), (\tau_1', \omega)$ de Γ, c'est-à-dire des points dont tous les homologues sont dans (τ_1, τ_1'). Je choisis une telle valeur de t, soit θ_1, et je modifie la division de $(0, \omega)$ en remplaçant t_1 par θ_1, enfin je désigne par Γ_1 toute la courbe Γ.

J'opère de même sur (τ_2, τ_2'), c'est-à-dire que si, sans l'arc (τ_2, τ_2') de Γ_1, Γ_1 remplit tout I, je supprime cet arc et j'appelle Γ_2 ce qui reste; si, sans l'arc (τ_2, τ_2'), tout I n'est pas rempli, Γ_2 désigne tout Γ_1 et je déplace t_2 en θ_2 dans (τ_2, τ_2'); θ_2 étant tel que le point de Γ_1 correspondant ait tous ses homologues dans (τ_2, τ_2'); etc.

Les suppressions d'arcs qui ont pu être ainsi faites remplacent finalement Γ par des arcs, constituant ce que j'appellerai γ, qui remplissent tout I. Ces arcs correspondent sur $(0, \omega)$ à un nombre fini d'intervalles formant un ensemble fermé e. La division de $(0, \omega)$ en les ensembles $(0, t_1$ ou $\theta_1)$ $(t_1$ ou θ_1, t_2 ou $\theta_2)$, .., fournit une division de e en ensembles fermés e_i, donc une division de γ en ensembles fermés γ_i. Ceux-ci seront assez petits pour que notre proposition fondamentale s'applique pourvu que les t_i aient été pris assez rapprochés, ce que je supposerai. Donc, il y aura des points communs à $n+1$ des γ_i. Si A est un tel point, et s'il appartient à $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \ldots \gamma_\lambda$, c'est qu'il a des homologues dans $e_\alpha, e_\beta, \ldots, e_\lambda$. Je dis que tous ces homologues sont différents. Si, en effet, les homologues a_α et a_β situés dans e_α et e_β étaient confondus, c'est qu'ils coïncideraient avec un point θ séparant e_α et e_β. Or, dans ce cas, tous les homologues de A seraient dans l'intervalle (τ, τ') enfermant θ, donc dans e_α et e_β et A n'aurait pas d'homologue dans $e_\gamma, \ldots, e_\lambda$. Or ceci est contradictoire, car $n+1$ étant plus grand que 2, il existe au moins 3 indices $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$.

Le point A, que nous avons obtenu, est donc un point multiple d'ordre $n+1$, au moins, pour Γ.

Nous pouvons préciser le théorème en faisant remarquer que parmi les points multiples d'ordre $n+1$ de Γ il y en a qui correspondent à des valeurs $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n+1}$ de t telles que $t_{n+1} - t_1$ soit aussi petit que l'on veut.

En effet, si l'on partage Γ en arcs, quelque petits que soient ces arcs, il y en aura qui rempliront tout un domaine; sans quoi ils seraient chacun partout non denses et il en serait de même de leur somme qui, par suite, ne couvrirait pas tout I.

19. Nous pouvons aussi généraliser le théorème comme nous l'avons fait au §§ 14 et suivants pour la proposition fondamentale.

Si une courbe Γ remplit tout un domaine D de l'espace à n dimensions, Γ a des points multiples:

1° d'ordre $n+1$ dans tout domaine intérieur à D;

2° d'ordre $p+1$ sur toute variété V à p dimensions sans point multiple intérieure à D.

Soit, en effet, une variété V à p dimensions intérieure à D, la correspondance entre les points M de V et ceux m du segment $(0, \omega)$ de l'axe des t est définie seulement pour les points d'un ensemble fermé de valeurs de $(0, \omega)$; mais, comme pour les points de cet ensemble M a une position, fonction bien définie et continue de m, et que M parcourt tout V, rien n'est à changer à notre raisonnement.

Cependant notre raisonnement est en défaut si V est à une dimension. Supposons alors V définie par un paramètre τ variant de τ_1 à τ_2 et supposons qu'il n'y ait pas de points multiples de Γ sur V. La correspondance entre τ et t sera biunivoque et comme elle est continue dans un sens, elle l'est dans les deux. Donc d'après le théorème de Schoenflies, à (τ_1, τ_2) correspond (t_1, t_2); mais alors (t_1, t_2) donne un arc de Γ ne remplissant aucun domaine et tous les points de V, sauf peut-être les extrémités données par t_1 et t_2, sont obtenus une seconde fois comme points de Γ; ils sont donc tous au moins doubles [1]).

Ceci suffit à la démonstration de l'énoncé. Mais remarquons encore que lorsque V est un arc de Γ, il y a sur V des points au moins triples; alors, en effet, aux points extérieurs à (t_1, t_2) correspondent encore des points de Γ couvrant tout V donc, en recommençant on verrait que certains de ces points de V sont obtenus deux fois en dehors de (t_1, t_2). On en déduira facilement que sur tout arc de Γ il y a au moins des points triples de la courbe Γ prise toute entière

Le théorème fondamental est intervenu, mais le fait que les points de l'espace ou de V sont donnés par certaines coordonnées continues n'est pas intervenu: donc, le théorème précédent subsiste si l'on remplace „espace à n dimensions" par „frontière à n dimensions" ou encore „variété à p dimensions" par „variété frontière à p dimensions".

En imitant un raisonnement précédent on prouvera que le théorème subsiste encore si le domaine D, au lieu d'être rempli par un arc de courbe Γ, est rempli par une infinité dénombrable d'arcs $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$, dont l'ensemble constituera Γ. On peut alors affirmer que l'un des arcs Γ_i, ou même une partie de grandeur fixée arbitrairement petite d'un de ces arcs. possède les points multiples prévus par l'énoncé.

20. Nous allons montrer qu'il est effectivement

[1]) La démonstration peut-être dite en termes plus élémentaires; elle repose sur le fait que $t \tau$) est une fonction continue dans $(\tau_1 \ \tau_2)$ qui, pour passer de t_1 à t_2 prend tous les valeurs intermédiaires,

possible de remplir un intervalle à n dimensions avec une courbe ne possédant aucun point multiple d'ordre supérieur à $n+1$. Déjà M. Hilbert[1]) en construisant une courbe remplissant un carré, remarquait que l'on aurait pu faire en sorte que la courbe n'ait que des points triples. La méthode de construction trés simple donnée par M. Hilbert permet sans peine de traiter le cas de n dimensions et l'on serait tenté de se borner à ces indications si les travaux de M. Schoenflies[2]) n'avaient pas montré que les domaines qui peuvent être couverts par des courbes sont spéciaux. J'entrerai donc dans quelques détails.

Je veux construire une courbe Γ remplissant tout le domaine I, que j'appellerai encore un intervalle, défini par les n inégalités:

$$0 \leqq x_i \leqq l_i;$$

entrant dans ce domaine par le point $(0, 0 \ldots 0)$, en sortant par le point $(l_1, 0, 0 \ldots 0, l_n)$ et définie par un paramètre t variant dans l'intervalle i, $0 \leqq t \leqq 1$.

Je partage i en $2n-3$ intervalles égaux $i_1, i_2 \ldots i_{2n-3}$ par des points $t_1, t_2 \ldots t_{2n-4}$.

Je partage I en $2n-3$ intervalles. I_1 est la partie de I pour laquelle on a $x_1 \leqq kl_1$, k étant un nombre donné compris entre 0 et 1. I_2 est défini par $x_1 \geqq kl_1, x_2 \geqq kl_2$; et d'une manière générale, pour $\alpha \leqq n-1$, I_α est défini par

$$x_1 \geqq kl_1, \quad x_2 \leqq kl_2, \ldots x_{\alpha-1} \leqq kl_{\alpha-1}, \quad x_\alpha \geqq kl_\alpha.$$

I_n est défini par les inégalités:

$$x_1 \geqq kl_1, \quad x_2 \leqq kl_2, \ldots x_{n-1} \leqq kl_{n-1}; \quad x_n \leqq kl_n.$$

Les autres I s'obtiennent en divisant l'intervalle $\mathfrak{J}$

$$x_1 \geqq kl_1, \quad x_2 \leqq kl_2, \ldots x_{n-1} \leqq kl_{n-1}, \quad x_n \geqq kl_n,$$

par les variétés

$$x_n = l_n \left[k + \frac{1-k}{n-3} p\right] = k_p l_n,$$

p étant un entier qui varie de 1 à $n-4$.

[1]) *Math. Ann.* 38 (1891).
[2]) *Jahresb. d. Math. Ver.* Ergänzungsband 2 (1908).

I_{n+p} est la partie de I, pour laquelle on a:

$$l_n\left[k+\frac{1-k}{n-3}(p-1)\right] \leqq x_n \leqq l_n\left[k+\frac{1-k}{n-3}p\right].$$

La courbe Γ sera telle que l'arc correspondant à i_α remplisse tout I_α; à chaque extrémité de i_α correspondra un sommet de I_α. Voici la correspondance entre les t_α et ces sommets:

à $t=0$ correspond le point de coordonnées $0, 0 \ldots 0$;
à $t=t_1$, le point $kl_1, l_2, 0, 0 \ldots 0$;
à $t=t_2$, le point $kl_1, kl_2, l_3, 0 \ldots 0$;
. . . .
à $t=t_{n-2}$. le point $kl_1, kl_2, \ldots, kl_{n-2}, l_{n-1}, 0$;
à $t=t_{n-1}$, le point $l_1, kl_2, \ldots, kl_{n-2}, kl_{n-1}, 0$;
à $t=t_n$, le point $l_1, 0, kl_3, \ldots, kl_{n-1}, kl_n$;
à $t=t_{n+1}$, le point $l_1, 0, 0, kl_4, \ldots, kl_{n-1}, k_1 l_n$;
à $t=t_{n+2}$, le point $l_1, 0, 0, 0, kl_5, \ldots, kl_{n-1}, k_2 l_n$;
. . . .
à $t=t_{2n-4}$, le point $l_1, 0 \ldots 0, kl_{n-1}, k_{n-4} l_n$;
à $t=t_{2n-3}$, le point $l_1, 0, 0 \ldots 0, l_n$.

Remarquons que les points d'entrée et de sortie de Γ dans I. ou dans l'un quelconque des I_α ont toutes leurs coordonnées égales sauf deux. Ces points occupent donc la même situation sur chacun des I et I_α; c'est-à-dire que l'on peut subdiviser un I_α et le i_α correspondant de la même manière que I et i, en faisant jouer aux points d'entrée et de sortie dans I_α le rôle des points analogues pour I. Dans cette subdivision de $I_1, I_2 \ldots I_{2n-3}$ on remplacera k par des valeurs $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(2n-3)}$ et l'on continuera ainsi indéfiniment à l'aide de valeurs $k^{(i)}$ qui seront précisées d'ici peu.

Pourvu que dans les subdivisions successives de I la grandeur des intervalles partiels tende uniformément vers zéro, ces subdivisions définissent entièrement la courbe Γ.

Cette courbe n'aura que des points multiples d'ordre au plus égal à $n+1$ si, à chaque stade de la subdivision de I, il n'y a pas de points communs à plus de $n+1$ intervalles partiels. Or, il n'y a que les points:

$$x_1 = kl_1, \quad x_2 = kl_2, \quad x_{n-1} = kl_{n-1}$$
$$x_n = kl_n \text{ ou } k_1 l_n \text{ ou } k_2 l_n \ldots \text{ ou } k_{n-4} l_n,$$

qui soient communs à $n+1$ des I_α et il n'y a pas de points communs à plus de $n+1$ de ces intervalles. Donc si les $k^{(i)}$ sont choisis de façon que deux variétés servant aux subdivisions successives, ne coïncident jamais, il n'y aura pas de points communs à plus de $n+1$ intervalles de subdivisions.

On satisfera à toutes ces conditions en prenant, par exemple,

$$k=\tfrac{1}{2},\quad k^{(1)}=\tfrac{1}{2}-\frac{1}{2n},\quad k^{(2)}=\tfrac{1}{2}-\left(\frac{1}{2n}\right)^2,\quad k^{(3)}=\tfrac{1}{2}-\left(\frac{1}{2n}\right)^3,\ldots$$

21. Les propriétés des §§ 18 et 20 constituent une nouvelle forme de la proposition des §§ 2 et 9 caractérisant les variétés à n dimensions.

Le nouvel énoncé présente cependant cet inconvénient que la construction analogue à celle du § 20 n'est possible, nous le savions à l'avance par les résultats de M. Schoenflies, que pour des domaines spéciaux. Il serait facile aussi de voir que la construction d'une courbe passant par tous les points d'une variété frontière à n dimensions n'est pas toujours possible. Voici au contraire un énoncé applicable à toutes les variétés bornées, que nous avons considérées.

Etant donnée une variété frontière à n dimensions V, il est toujours possible d'établir entre les points A de V et les points a d'un ensemble parfait linéaire v convenablement choisi une correspondance telle qu'à tout A de V correspondent au plus $n+1$ points a de v et qu'à un point a de v corresponde un point A de V et un seul, dont la position varie de façon continue quand a se déplace de façon continue.

La variété sans point multiple V est définie par une correspondance biunivoque et continue entre ses points et ceux d'une frontière à n dimensions V'. Si l'on établit entre les points de V' et ceux de v la correspondance dont parle l'énoncé, la correspondance entre V et v en résultera. Donc il suffit de s'occuper du cas d'une frontière à n dimensions

Cette frontière V' peut être enfermée dans un intervalle I de l'espace à $n+1$ dimensions qui la contient. Couvrons cet intervalle avec une courbe, comme il a été indiqué au paragraphe précédent en ayant soin à chaque stade de la subdivision de I de modifier légèrement les variétés donnant les intervalles tels que $I_1, I_2,\ldots,$ de facon que les sommets communs à $n+2$ de ces intervalles n'appartiennent pas à V'; ce qui est possible puisque V' est partout non dense.

Si la courbe est donnée en fonction d'un paramètre t, les valeurs de ce paramètre, qui fournissent des points de V', constituent l'ensemble v de l'énoncé ou du moins un ensemble fermé v_1 dont l'ensemble des points de condensation est v.

Cette démonstration s'applique aussi au cas où l'on se borne à considérer à la place de V un ensemble parfait situé sur une variété frontière à n dimensions sans point multiple. Or un domaine de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \dots x_n)$ peut toujours être considéré comme un ensemble parfait faisant partie d'une frontière à n dimensions de l'espace $(x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1})$; de la frontière d'un intervalle, par exemple.

Donc, on peut dans l'énoncé précédent, remplacer la variété V par un domaine D de l'espace à n dimensions ou par un domaine d'une variété à n dimensions.

22. Le cas général des correspondances entre les espaces E_m et E_p ne semble pas pouvoir être traité par la méthode qui a réussi dans le cas $p=1$; je me bornerai à indiquer le résultat partiel qui résulte de l'emploi de cette méthode.

Supposons qu'un intervalle I de E_m soit rempli par une variété Γ définie à l'aide de coordonnées curvilignes $u_1, u_2 \dots u_p$ variant dans un intervalle i de l'espace $u_1, u_2 \dots u_p$.

Imitant les raisonnements du § 18, divisons i en petits intervalles partiels tels qu'il n'y ait pas de points communs à plus de $p+1$ de ces intervalles. Soient $t_1, t_2, \dots$ les points qui sont communs à $p+1$ intervalles, nous enfermons chacun dans un très petit intervalle $\tau_1, \tau_2, \dots$ Si, en supprimant de Γ la partie donnée par τ_1, tout I est rempli, nous supprimons cette partie et nous ne déplaçons pas t_1. Si, au contraire, après cette suppression tout I n'est pas rempli, nous n'effectuons pas cette suppression, mais nous déplaçons t_1 dans τ_1 de façon à l'amener dans une position θ_1 qui donne un point de E_n dont tous les homologues sont dans τ_1, ce qui est possible.

La nouvelle variété Γ_1, qui est ou non tout Γ, remplit I. Nous raisonnons pour elle et pour τ_2 comme nous venons de le faire pour Γ et τ_1 et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à remplacer Γ par γ et la considération de tout i par un ensemble fermé e.

La division considérée de i, donne une division de e en $e_1, e_2 \dots$;

de γ en $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$; cette dernière division est une division de I. Donc il y a des points communs à $m+1$ de ces γ_k; mais on voit, comme au § 18, qu'un tel point de γ ne peut avoir dans e pour homologue, ni un point t_α, ni un point θ_α; donc ce point peut tout au plus correspondre à des points de e dont chacun peut être commun à, au plus, p des e_α. Par suite Γ a des points multiples d'ordre au moins égal au quotient, à une unité près par excès, de $m+1$ par p.

La limite ainsi obtenue pour l'ordre minimum de multiplicité est trop faible, comme on le voit en remarquant qu'il suffit de modifier la division de i pour qu'aucun des points communs à p des intervalles partiels de la première division reste commun à p intervalles de la nouvelle division. L'emploi de cette remarque permettrait, moyennant quelques précautions, d'obtenir une limite bien meilleure: le quotient, à une unité près par excès, de $m+1$ par l'entier $\frac{p}{2}$ ou $\frac{p+1}{2}$. Mais je ne sais si cette limite est stricte. En tout cas voici une limite supérieure de ce même ordre minimum: *On peut couvrir tout un intervalle I de E_m à l'aide d'une variété à p dimensions n'ayant pas de points multiples d'ordre supérieur à $m+2-p$ $(m>p)$.*

Soient, en effet, $x_1, x_2 \ldots x_m$ les coordonnées de l'espace E_m et i la projection de I sur $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = 0$. Couvrons tout i d'une courbe γ n'ayant que des points multiples d'ordre $m-p+2$ au plus et définie par des fonctions $x_p(t), x_{p+1}(t), \ldots x_m(t)$. La variété $x_p = x_p(t)$, $x_{p+1} = x_{p+1}(t), \ldots x_m = x_m(t)$, définie à l'aide des coordonnées curvilignes $t, x_1 \ldots x_{p-1}$, répond à la question.