Théorie des continus irréductibles entre deux points I.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Un continu C est dit *irréductible entre les points a et b*, lorsqu'il contient ces points mais aucun de ses vrai sous-continus ne les contient simultanément.

Cette définition a été proposée en 1909 par M. Zoretti [1]) à la suite des recherches sur la notion de ligne dans l'Analysis Situs. Dès lors les continus irréductibles interviennent dans plusieurs ouvrages mathématiques [2]); en particulier, MM. Janiszewski et Yoneyama consacrèrent à leur étude des Mémoires spéciaux.

Je me propose de donner dans cet article une esquisse d'une théorie des continus irréductibles, en étudiant quelques problèmes fondamentaux qui s'y rattachent. La méthode dont je me sert pour examiner les propriétés d'un continu C irréductible entre a et b consiste à étudier la classe des sous-continus de C qui contiennent a et sont „réguliers par rapport à C" (au sens établi dans la Note précédente). D'après le premier théorème fondamental, cette classe — que je dénote par $\mathfrak{R}(a, C)$ — se compose de continus croissants. Ce théorème conduit à l'examen du type d'ordre de cette classe et c'est dans le second théorème fondamental que j'énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre ordinal soit un type d'ordre de $\mathfrak{R}(a, C)$.

Les Notes I—III contiennent des applications directes de la théorie même. Plusieurs autres applications vont être publiées ailleurs.

[1]) *Ann. de l'Ecole Normale* XXVI.

[2]) Voir: Bibliographie, inserée à la fin de cet article

Tous les théorèmes de cet article sont vrais pour l'espace euclidien. Mais ils sont vrais encore pour des espaces bien plus généraux. En effet, tous les résultats des §§ 1—4 et de la Note I se déduisent des axiomes I—IV de ma Note „*Sur l'opération A de l'Analysis Situs*"; ces axiomes définissent, comme je l'ai signalé, des espaces plus généraux que les classes $\mathcal{S}$ de M. Fréchet.

Le mémoire présent, suggéré par les belles et importantes recherches de Janiszewski dans l'Analysis Situs, forme la partie principale de ma Thèse présentée en mai 1920 à l'Université de Varsovie. Les précieux conseils de mes Professeurs MM. Mazurkiewicz et Sierpiński m'ont aidé considérablement à rédiger cet article. Je tiens aussi à exprimer mon affectueuse gratitude à M. Knaster pour sa collaboration dans l'étude des continus.

Les conventions suivantes concernant les notations nous serviront à abréger le langage. C désigne tout le long du mémoire un continu arbitraire irréductible entre les points a et b; K en désigne un sous-continu quelconque. Le terme „continu" est employé ici au sens plus large, l'ensemble vide et les ensembles formés d'un seul point étant aussi nommés des continus. Quant aux autres termes et notations, je renvoie le lecteur à mon article précédent, auquel j'aurai souvent récours dans la suite.

Exemples: Le segment de droite est le plus simple exemple d'un continu irréductible entre deux points (notamment, entre les extrémités du segment). Un autre exemple est fourni par l'ensemble de points (x, y), où

$$-1 \leqslant y \leqslant +1 \quad \text{lorsque} \quad x = 0$$

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad \text{lorsque} \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Ce continu est irréductible entre le point $(1, \sin 1)$ et chaque point à $x = 0$.

La structure d'un continu irréductible peut être bien compliquée. Comme l'a signalé Janiszewski [1]), il y existe dans l'espace à trois dimensions des continus irréductibles qui renferment des portions du plan. Il est aussi à remarquer que les continus indécomposables forment une famille importante de continus irréductibles entre deux points [2]) (voir fig. 1 et 2).

[1]) *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Paris 1911 (Thèse).

[2]) Cf. Mazurkiewicz: *Un théorème sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, 1919.

§ 1. L'ensemble K^{c-}.

Théorème I. *Il n'existe aucune décomposition de C en deux vrais sous-continus ayant en commun le point a.*

Démonstration. Si $C = M + N$ et a appartient aux deux continus M et N, l'un d'eux contient — outre a — le point b et, comme C est irréductible entre a et b, ce continu est identique à C.

Théorème II. *K^{c-} est un continu ou une somme de deux continus* [1]).

Démonstration. Supposons que notre théorème ne soit pas vrai. Il existe alors trois ensembles fermés P, Q, R assujettis aux conditions

(1) $\quad K^{c-} = P + Q + R, \quad P \times Q = P \times R = Q \times R = 0,$

(2) $\quad P \neq 0, \quad Q \neq 0, \quad R \neq 0.$

Nous montrerons que les trois ensembles fermés:

(3) $\quad (K+P+Q), \quad (K+P+R) \quad$ et $\quad (K+Q+R)$

sont des continus. Nous déduirons cette assertion du théorème 2° p. 187.

Or, selon (1):

$$(K+P+Q) + (K+R) = K + K^{c-} = C$$
$$(K+P+Q) \times (K+R) = K + P \times R + Q \times R = K,$$

ce qui prouve que la somme et le produit des ensembles fermés $(K+P+Q)$ et $(K+R)$ sont des continus. Le théorème cité implique que ces ensembles fermés sont eux-mêmes des continus.

Par raison de symétrie, il en est de même de chacun des trois ensembles désignés par (3). Chaque couple de ces ensembles admet comme somme le continu C. Par conséquent a appartient à deux de ces ensembles; p. ex. aux ensembles $(K+P+Q)$ et $(K+P+R)$. D'après le th. I, un d'eux est donc identique à C. Nous pouvons poser:

$$K + P + Q = C,$$

d'où

$$K^{c} \subset P + Q$$

et

$$K^{c-} \subset \overline{P+Q} = P + Q$$

[1]) Pour les notations, voir le mémoire précédent, p. 191.

c'est-à-dire:

$$P+Q+R=P+Q,$$

et en multipliant cette égalité par R, on obtient en vertu de (1):

$$R=0,$$

contrairement à (2).

Ainsi, l'hypothèse, que K^{c-} n'est ni un continu ni une somme de deux continus conduit à une contradiction.

Théorème III. *Si* $a \varepsilon K$, K^{c-} *est un continu.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, on a

$$K^{c-}=A+B \quad \text{et} \quad A \times B=0,$$

A et B étant des continus.

Par conséquent

$$(K+A)+(K+B)=K+K^{c-}=C$$
$$(K+A) \times (K+B)=K,$$

ce qui prouve, selon le th. 2° p. 187, que $K+A$ et $K+B$ sont des continus.

Le point a étant situé, par hypothèse, sur chacun d'eux, on conclut du th. I que, p. ex:

$$K+A=C,$$

d'où

$$K^{c} \subset A$$

et

$$K^{c-} \subset A,$$

donc

$$K^{c-}=A,$$

ce qui prouve que K^{c-} est un continu C. Q. F. D.

Convenons de désigner par A et B les deux continus en lesquels se décompose K^{c-}. Comme nous venons de voir, $K+A$ et $K+B$ sont toujours des continus. A ou B peut être vide; c'est bien le cas, lorsque a ou b appartient à K, car, selon le th. III, K^{c-} se réduit à un seul continu.

Lorsque a n'appartient pas à K^{c-}, nous poserons $A=0$; dans le cas contraire, convenons que $a \varepsilon A$. Enfin lorsque $K^{c-}=C$, posons $B=0$. Ainsi, en tout cas: $A \times B=0$.

En tenant compte de ces conventions, on peut déduirent aisément des théorèmes sur A des autres qui concernent B.

Théorème IV. *Si K n'est pas un continu de condensation*[1]*, le continu A est irréductible entre a et chaque point de l'ensemble $K \times A$.*

Démonstration. Soit S un continu quelconque assujetti aux conditions:

$$S \subset A, \quad a \varepsilon S, \quad S \times K \neq 0.$$

Il s'agit de démontrer que $S = A$.

On a évidemment

$$C = K + A + B = (K + B + S) + A. \tag{4}$$

L'ensemble $(K + B + S)$ est un continu, car $K + B$ en est un et $S \times K \neq 0$. La décomposition (4) implique, d'après le th. I, que

$$A = C \quad \text{ou bien} \quad K + B + S = C.$$

La première égalité ne subsiste pas, car elle entraîne, en vertu de $A \subset K^{c-}$, que $K^{c-} = C$, ce qui veut dire que K est un continu de condensation, contrairement à l'hypothèse.

La seconde implique:

$$K^c \subset B + S$$

donc

$$K^{c-} = B + S = B + A$$

et d'après

$$A \times B = 0 = S \times B,$$

on a

$$S = A.$$

§ 2. L'ensemble $K^{c\,c-}$

Nous établirons d'abord les deux formules suivantes:

$$A^c = B + K^{c-c} \tag{5}$$

$$K^{c-c} = \overline{A^{c-} - B}. \tag{6}$$

Pour prouver la première, remarquons que

$$K^{c-} = A + B,$$

d'où

$$K^{c-c} = A^c \times B^c,$$

et comme

$$A^c = A^c \times B^c + A^c \times B,$$

[1] Voir, ce volume p. 191.

on en déduit:

$$A^c = K^{c-c} + A^c \times B,$$

d'où la formule (5), car $A^c \times B = B$, puisque $A \times B = 0$.

Quant à la formule (6), on a

$$K^{c-c} = A^c \times B^c = A^c - B$$

d'où

$$K^{c-c-} = \overline{A^c - B} \subset \overline{A^{c-} - B}.$$

D'autre part, la formule (5) implique:

$$A^{c-} = B + K^{c-c-}$$

d'où

$$A^{c-} - B \subset K^{c-c-}$$

et

$$\overline{A^{c-} - B} \subset K^{c-c-}.$$

La formule (6) est donc établie.

Théorème V. *K^{c-c-} est un continu.*

Démonstration. Si $A^{c-} = C$, on a d'après (6): $K^{c-c-} = B^{c-}$ et notre théorème résulte du th. III (en y remplaçant a par b et K par B). Soit donc $A^{c-} \neq C$. Il en résulte que $A \neq 0$ et, par définiton de A, on a $a \varepsilon A$; A^{c-} est donc un continu irréductible entre b et les points du produit $A \times A^{c-}$ (on remplace dans le th. IV: K par A, A par A^{c-} et a par b). Or, d'après le théorème III, $\overline{A^{c-} - B}$ est un continu (on remplace C par A^{c-}, a par b et K par B) et en vertu de la formule (6), notre théorème est démontré.

Théoreme VI. *Si $a \varepsilon K^{c-c-}$, le continu K^{c-c-} est irréductible entre a et chaque point de l'ensemble $K^{c-} \times K^{c-c-}$; dans le cas contraire, K^{c-c-} est irréductible entre chaque point de $A \times K^{c-c-}$ et chaque point de $B \times K^{c-c-}$.*

Démonstration. Soit $a \varepsilon K^{c-c-}$. D'après les théorèmes V et III, K^{c-c-c-} est un continu. Mais, selon le th. 6 p. 183 relativisé par rapport à C, on a $K^{c-c-c-} = K^{c-}$. Si K^{c-} était un continu de condensation, on aurait $K^{c-c-} = C$ et $K^{c-} = K^{c-c-c-} = 0$ et notre assertion serait évidemment vraie. D'autre part, si K^{c-} n'est pas un continu de condensation, on remplace dans le th. IV K par K^{c-} et on obtient la proposition cherchée, car A passe en K^{c-c-}

Soit a *non*-ε K^{c-c-}. Donc $a\varepsilon A$. Nous pouvons supposer, en outre $B \neq 0$. Or, soit S un sous-continu de K^{c-c-} tel que

$$S \times A \neq 0, \quad S \times B \neq 0.$$

Il s'agit de prouver $S = K^{c-c-}$.

Or,

$$C = K + A + B = (K + A) + (A + S + B).$$

Les deux sommandes de cette somme étant des continus, il résulte du th. I qu'une d'elle est identique à C. Si on avait $K + A = C$, on en déduirait $K^c \subset A$ et $B = 0$, contrairement à l'hypothèse. Par suite:

$$A + S + B = C,$$

d'où

$$K^{c-} + S = C$$

et

$$K^{c-c-} \subset S,$$

donc

$$S = K^{c-c-}.$$

Théorème VII. *Si* $K^{c-c-} \neq 0$ *et* $a\varepsilon K$, *alors* $a\varepsilon K^{c-c-}$.

Démonstration. Si a *non*-ε K^{c-c-}, on a $a\varepsilon K^{c-}$; par suite $C = K + K^{c-}$ se décompose en deux continus ayant a comme élément. L'un d'eux est identique à C. Ça ne peut être K^{c-}, car on aurait $K^{c-c-} = 0$. Donc $K = C$ et $K^{c-c-} = C$. Ainsi, en tout cas: $a\varepsilon K^{c-c-}$.

§ 3. Les sous-continus réguliers. La classe $\mathfrak{R}(a, C)$.

Il résulte des théorèmes démontrés dans les §§ 1 et 2 que les ensembles A, B, A^{c-}, B^{c-} et K^{c-c-} sont des continus irréductibles entre deux points (à moins qu'il ne soit vides). De plus, ils sont des continus r é g u l i e r s p a r r a p p o r t à C, c'est à dire ils remplissent l'égalité $X = X^{c-c-}$. En effet, en relativisant le théorème 9 p. 193 par rapport à C, on montre que les continus A^{c-}, B^{c-} et K^{c-c-} sont réguliers par rapport à C; il en est de même de l'ensemble K^{c-} et par conséquent, selon le corollaire 3 p. 194 (relativisé), — des continus A et B.

Nous passons à l'étude plus détaillée de sous-continus réguliers par rapport à C. Nous les appellerons, tout court, sous-continus réguliers.

Une conséquence immédiate du th. VI est, que *chaque sous-continu régulier est irréductible entre deux points.*

Théorème VIII. *Si les sous-continus K et L de C contiennent le point a et L non $\subset K$, alors $K^{c-c-} \subset L$.*

Démonstration. La condition L *non* $\subset K$ équivaut à: $L \times K^c \neq 0$, d'où

$$L \times K^{c-} \neq 0$$

et, par conséquent (th. III), $L + K^{c-}$ est un continu.

Ainsi, l'égalité évidente

$$C = K + (L + K^{c-})$$

représente une décomposition de C en deux continus contenant a. D'après le th. I, un d'eux est identique à C. Or, $K \neq C$, car L *non* $\subset K$. Donc

$$L + K^{c-} = C,$$

d'où

$$K^{c-c} \subset L$$

et finalement

$$K^{c-c-} \subset L \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Soit $\mathfrak{R}(a, C)$ la classe qui admet comme éléments tous les sous-continus réguliers contenant a; soit en outre $0 \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$.

Si on suppose que les continus K et L du th. VIII appartiennent à $\mathfrak{R}(a, C)$, on a $K^{c-c-} = K$ et on arrive à l'énoncé suivant.

Premier théorème fondamental. *$\mathfrak{R}(a, C)$ est une classe d'ensembles croissants.*

Autrement dit: *pour tout couple d'éléments* R_1 et R_2 de $\mathfrak{R}(a, C)$ *on a*

$$R_1 \subset R_2 \quad \textit{ou bien} \quad R_2 \subset R_1.$$

Désignons par α le type d'ordre de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ ordonnée selon la grandeur de ses éléments. On désignera par α^* le type d'ordre inverse. Soit $|\alpha|$ la valeur absolue de α; c'est-à-dire: $|\alpha| = |\alpha^*|$ Ainsi $|\alpha|$ ne dépend pas du sens de l'ordre α.

Nous appellerons $|\alpha|$ le *nombre ordinal* du continu C.

Passons à l'étude de ces nombres.

Théorème IX. *La classe $\mathfrak{R}(b, C)$ se compose de tous les R^{c-}, où $R \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$.*

Démonstration. D'après le th. III, R^{c-} est un continu-élément de $\mathfrak{R}(b, C)$. D'autre part si $S \varepsilon \mathfrak{R}(b, C)$, S est un R^{c-}, car $S = (S^{c-})^{c-}$

et S^{c-} est un R qui appartient à $\mathfrak{R}(a, C)$. Ainsi, l'opération „$C-$" fait passer les éléments d'une des classes $\mathfrak{R}(a, C)$ ou $\mathfrak{R}(b, C)$ en ceux de l'autre, c. q. f. d.

Il est aisé de voir que le type d'ordre de $\mathfrak{R}(b, C)$ est inverse par rapport à celui de $\mathfrak{R}(a, C)$, car

1⁰: $R_1 \supset R_2$ entraîne $R_1^{c-} \subset R_2^{c-}$

2⁰: $R_1^{c-} = R_2^{c-}$ entraîne $R_1^{c-c-} = R_2^{c-c-}$ donc $R_1 = R_2$.

Lemme[1]. *Si C est irréductible entre a et b et entre c et d, C est irréductible ou bien entre a et c ou bien entre a et d.*

Démonstration. Si C n'est irréductible ni entre a et c ni entre a et d, il y a deux sous-continus K et L de C tels que

(7) $$a \varepsilon K, \quad c \varepsilon K,$$

(8) $$a \varepsilon L, \quad d \varepsilon L,$$

(9) $$K \neq C, \quad L \neq C.$$

C étant irréductible entre a et b, la formule (9) implique que b n'appartient ni à K ni à L. Donc:

(10) $$b \text{ non-}\varepsilon (K+L).$$

Mais $K+L$ est, en vertu de (7) et (8), un continu contenant c et d, et C étant irréductible entre ces points, on en conclut que $K+L=C$, ce qui contredit la formule (10).

C est donc bien irréductible entre a et c ou entre a et d.

Soit $I(C)$ l'ensemble de tous les points x pour lesquels il existe un y tel que C soit irréductible entre x et y. D'après le lemme, $I(C)$ se compose de deux ensembles I_1 et I_2: le continu C est irréductible entre chaque point de I_1 et chaque point de I_2. On en conclut, en vertu du th. IX, que si $x \varepsilon I(C)$, on a $\mathfrak{R}(x, C) = \mathfrak{R}(a, C)$ ou bien $\mathfrak{R}(x, C) = \mathfrak{R}(b, C)$, et comme l'ordre de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ ne diffère de celui de $\mathfrak{R}(b, C)$ que par son sens. on arrive a cet énoncé:

Théorème X. *Le nombre ordinal $|\alpha|$ du continu C ne dépend pas du point a.*

Théorème XI. *Le type d'ordre α n'admet pas de lacunes.*

Démonstration. Divisons la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ en deux sous-classes disjointes $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ de façon que tout continu-élément de $\mathfrak{R}_1$ soit

[1] Ce lemme est dû à M. Yoneyama. Voir: *Theory of continuous set of points*, th. 3, p. 48, Tôhoku Math. Journ., Sendai 1917.

un sous-continu de tout élément de $\mathfrak{R}_2$. Nous allons prouver qu'il existe ou bien dans $\mathfrak{R}_1$ le plus grand continu ou bien dans $\mathfrak{R}_2$ le plus petit.

Soit S la somme de tous les continus-éléments de $\mathfrak{R}_1$. S est un semi-continu. En effet, si les points p_1 et p_2 appartiennent à S il existe deux sous-continus R_1 et R_2 contenant ces points respectivement. L'un d'eux est sur-continu de l'autre; il réunit donc les points p_1 et p_2.

Par conséquent, S est un continu [1]). De plus, S étant somme de sous-continus réguliers, $\bar{S}$ est régulier, d'après le théorème 10 p. 193 relativisé par rapport à C

Donc $\bar{S}$ appartient à la classe $\mathfrak{R}(a, C)$. Si $S \varepsilon \mathfrak{R}_1$, $\bar{S}$ est le plus grand élément de $\mathfrak{R}_1$, car

$$R \subset S \subset \bar{S}$$

pour tout $R \varepsilon \mathfrak{R}_1$.

Dans le cas contraire: $\bar{S} \varepsilon \mathfrak{R}_2$ et comme tout élément de $\mathfrak{R}_1$ est contenu dans ceux de $\mathfrak{R}_2$, on a

$$S \subset R$$

pour tout $R \varepsilon \mathfrak{R}_2$. Donc $\bar{S} \subset R$, ce qui prouve que $\bar{S}$ est le plus petit élément de $\mathfrak{R}_2$.

§ 4. Les continus indécomposables et les sauts dans la classe $\mathfrak{R}(a, C)$.

Un continu est dit *indécomposable* [2]), s'il n'est pas somme de deux continus différents de lui.

Voici un simple exemple d'un continu indécomposable [3]) (voir fig. 1):

E désigne l'ensemble de nombres du segments $(0, 1)$ qui peuvent être écrits dans le système de numération à base 3 sans l'aide du chiffre 1.

$E_n (n \geqslant 0)$ désigne l'ensemble de points e de E tels que

$$\frac{2}{3^{n+1}} \leqslant e \leqslant \frac{1}{3^n}.$$

---

[1]) Théorème déduit par Janiszewski des axiomes I—IV. *Sur les coupures du plan* p. 23, Prace Mat.-Fiz. Varsovie 1913.

[2]) Voir Janiszewski et Kuratowski, *Fund. Math.* I.

[3]) Ce continu ne diffère pas au point de vue topologique de celui de Janiszewski Thèse p. 36). La définition dont je me sers est due à M. Knaster.

On décrit du point $\frac{1}{2}$ par chaque point de E une demi-circonférence au-dessus de l'axe X; les points $\frac{5}{6} \cdot 3^{1-n}$ sont les centres des demi-circonférences décrites au-dessous de l'axe X par les points de E_n.

L'ensemble ainsi formé, pour tous les n naturels, est un continu indécomposable

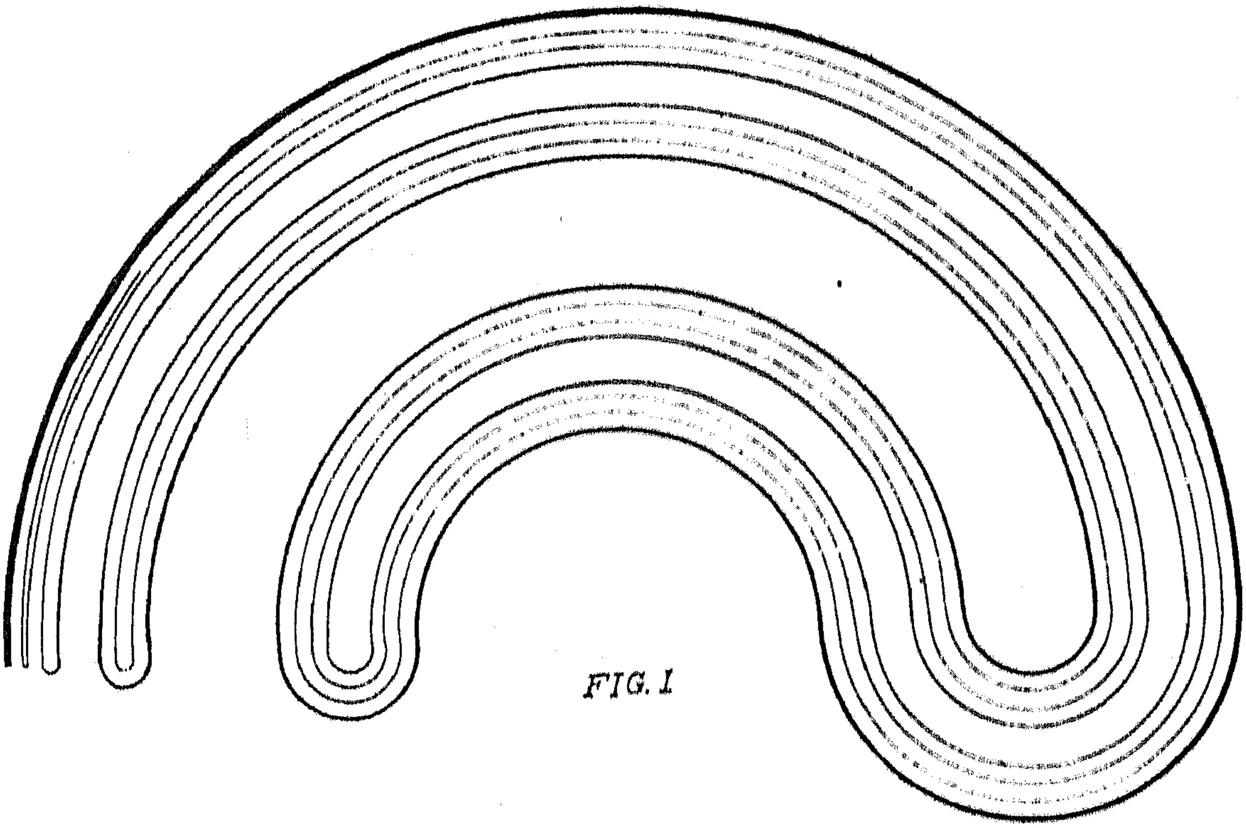

FIG. I

On montre que tout vrai sous-continu d'un continu indécomposable est un continu de condensation [1]). Or, supposons que le continu C renferme un continu indécomposable K. D'après le th. V, K^{c-c} est un continu; comme, en, outre, $K^{c-c-} \subset K$, ce continu est un continu de condensation de K ou bien est identique à K. Dans le premier cas, K^{c-c-} est à plus forte raison, continu de condensation de C; donc $K^{c-c-c-} = 0$ et $K^{c-} = 0$. Nous avons donc deux alternatives:

$$K = K^{c-c} \quad \textit{ou bien} \quad K^{c-} = 0.$$

Le théorème suivant se trouve démontré:

Théorème XII. *Si C renferme un continu indécomposable K, ce continu est ou bien un continu de condensation ou bien un sous-continu régulier de C.*

Lemme. *Si $R_0 \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$ et $p \varepsilon R_0 \times R_0^c$, il est vrai que:*

1°: *la classe $\mathfrak{R}(a, R_0)$ est formée de tous les continus R tels que $R \subset R_0$ et $R \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$:*

[1]) Janiszewski et Kuratowski. *Fund. Math.* I, théorème II.

2°: *la classe* $\mathfrak{R}(p, R_0^{C-})$ *est formée de tous les ensembles* $\overline{R - R_0}$ *tels que* $R_0 \subset R$ *et* $R \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$;

3°: R_1 *étant un sur-continu de* R_0 *appartenant à* $\mathfrak{R}(a, C)$, *la classe* $\mathfrak{R}(p, \overline{R_1 - R_0})$ *est formée de tous les* $\overline{R - R_0}$, *tels que* $R_0 \subset R \subset R_1$ *et* $R \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$.

Démonstration. 1. La première partie du lemme est une conséquence immédiate du corollaire 1 p. 194 relativisé par rapport à C.

2. La classe $\mathfrak{R}(b, C)$ est formée des continus R^{C-}, où $R \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$. Or, R_0^{C-} est irréductible entre b et p d'après le th. IV (on remplace K par R_0, a par b et A par R_0^{C-}). Par conséquent, la première partie du lemme implique que la classe $\mathfrak{R}(b, R_0^{C-})$ renferme les continus $R^{C-} \subset R_0^{C-}$; donc la classe $\mathfrak{R}(p, R_0^{C-})$ renferme les continus $\overline{R_0^{C-} - R^{C-}}$, où $R^{C-} \subset R_0^{C-}$, c'est-à-dire: où $R_0 \subset R$.

Pour établir la seconde partie du lemme il suffit de prouver que

$$\overline{R_0^{C-} - R^{C-}} = \overline{R - R_0}. \tag{11}$$

Or (th. 3 p. 183):

$$R_0^{C-} - R^{C-} \subset \overline{R_0^{C} - R^{C}} = \overline{R - R_0}$$

d'où

$$\overline{R_0^{C-} - R^{C-}} \subset \overline{R - R_0};$$

d'autre part,

$$R_0^{C-} - R^{C-} = R^{C-C} - R_0^{C-C}$$

et

$$\overline{R^{C-C} - R_0^{C-C}} \supset R^{C-C-} - R_0^{C-C-} = R - R_0$$

donc

$$\overline{R_0^{C-} - R^{C-}} \supset \overline{R - R_0}.$$

La formule (11) est donc établie.

3. D'après 1°, la classe $\mathfrak{R}(a, R_1)$ se compose de tous les R tels que $R \subset R_1$. En remplaçant dans 2° le continu C par R_1, on en conclut que $\mathfrak{R}(p, \overline{R_1 - R_0})$ se compose de ces R qui satisfont en outre à $R_0 \subset R$.

Théorème XIII. *Si les éléments* R_0 *et* R_1 *de la classe* $\mathfrak{R}(a, C)$ *forment un saut, l'ensemble* $\overline{R_1 - R_0}$ *est un continu indécomposable.*

Démonstration. Envisageons d'abord le cas: $R_0 = 0$ et $R_1 = C$. Si le théorème n'était pas vrai, il y aurait deux continus C_1 et C_2 tels que

$$C = C_1 + C_2, \quad C_1 \neq C, \quad C_2 \neq C. \tag{12}$$

D'après le th. I, le point a n'appartient pas aux deux continus C_1 et C_2 simultanément. Soit donc $a \varepsilon C_1^{c-}$. Or, $C_1^{c-} \neq C$, car selon (12):

$$C_1^c \subset C_2 \quad \text{et} \quad C_1^{c-} \subset C_2 \neq C.$$

Mais, d'après le th. II, C_1^{c-} est une somme de deux continus réguliers dont l'un contient a; celui-ci est donc un élément de $\mathfrak{R}(a, C)$ distinct de 0 et de C, contrairement à l'hypothèse.

Passons maintenant au cas, où seulement $R_0 = 0$. D'après la première partie du lemme, la classe $\mathfrak{R}(a, R_1)$ se réduit aux éléments 0 et R_1. Le continu R_1 est donc, comme nous venons de voir — indécomposable.

Pour établir enfin notre théorème dans l'hypothèse $R_0 \neq 0$, il suffira d'appliquer la troisième partie du lemme.

Théorème XIV. *Si K est un sous-continu indécomposable de C, sans en être un continu de condensation, les éléments A et $A+K$ de $\mathfrak{R}(a, C)$ forment un saut.*

Démonstration. A étant, conformément aux conventions antérieures (p. 203), un élément de $\mathfrak{R}(a, C)$, le continu $A+K$ en est également un élément en vertu des théorèmes XII et 10 p. 193.

Or, $K = \overline{K-A}$, car $\overline{K-A} \subset K$ et, d'autre part, l'inclusion $A \subset K^{c-}$ implique $\overline{K-A} \supset \overline{K \times K^{c-c}} = K^{c-c-}$ d'après la table (T) p. 186, et $\overline{K-A} = K$ en vertu du th. XII.

Nous avons ainsi

$$K = \overline{K-A} = \overline{(A+K)-A}.$$

D'après le lemme, il n'y a donc aucun élément de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ qui soit plus grand que A et plus petit que $A+K$, puisque K n'admet aucun sous-continu régulier par rapport à lui qui soit différent de 0 et de K. C. Q. F. D.

Les deux derniers théorèmes montrent que la propriété du continu C d'admettre des sous-continus indécomposables K (tels que $K^{c-} \neq C$) est intimement liée à l'existence des sauts dans le type ordinal α: *ces continus et les sauts se correspondent de façon biunivoque.*

En particulier, pour que C soit indécomposable il faut et il suffit que la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ se compose de deux éléments 0 et C. Ainsi, 2 est le nombre ordinal d'un continu indécomposable. Le type d'ordre de l'ensemble $0 \leqslant x \leqslant 1$ est le nombre ordinal d'un continu qui ne renferme pas de sous-continu indécomposable; c'est donc le nombre ordinal d'un arc simple.

§ 5. Les nombres ordinaux.

Dans ce qui précède nous avons developpé une méthode de traiter les continus irréductibles entre deux points qui consiste à analyser les „nombres ordinaux" de ces continus. Les seules hypothèses dont nous nous sommes servies étaient les axiomes I—IV.

Dans ce § nous allons invoquer plusieurs autres propriétés de l'espace pour pouvoir achever l'étude des nombres ordinaux. En particulier, nous aurons à établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un type ordinal α soit un nombre ordinal d'un continu irréductible entre deux points.

Théorème XV. *Le type d'ordre α de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ admet une partie dense finie ou dénombrable.*

Autrement dit: il existe une sous-classe $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{R}(a, C)$ finie ou dénombrable et telle que pour tout couple d'éléments R_1 et R_2 $(R_1 \subset R_2, R_1 \neq R_2)$ de $\mathfrak{R}(a, C)$ il existe un élément P de $\mathfrak{P}$ satisfaisant à la formule: $R_1 \subset P \subset R_2$.

Démonstration. Envisageons la suite des sphères à centre et rayon rationnels et désignons par $W_1, W_2, \dots W_n, \dots$ la suite des intérieurs de ces sphères.

Soit, pour un n donné, K_n la somme de tous les continus situés dans $(C - W_n)$ et contenant le point a; K_n est un continu [1]). Nous désignerons par $\mathfrak{P}$ la classe de tous les K_n^{c-c-}.

C'est une sous-classe de $\mathfrak{R}(a, C)$, car ou bien $K_n = 0$, ou bien $a \varepsilon K_n$; dans le second cas, si $K_n^{c-c-} \neq 0$, on a $a \varepsilon K_n^{c-c-}$ d'après le th. VII. Donc, en tous cas, $K_n^{c-c-} \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$.

Soit $R_1 \neq R_2$ et $R_1 \subset R_2$. Il existe donc un W_n tel que

$$R_1 \times W_n = 0 \tag{13}$$

$$R_2 \times W_n \neq 0. \tag{14}$$

Soit

$$P = K_n^{c-c-}.$$

D'après (13):

$$R_1 \subset K_n,$$

[1]) Janiszewski, Thèse p. 21.

d'où

$$R_1 = R_1^{c-c-} \subset K_n^{c-c-} = P.$$

D'autre part, comme $K_n \times W_n = 0$, on a selon (14):

$$R_2 \text{ non} \subset K_n;$$

et, à plus forte raison:

$$R_2 \text{ non} \subset K_n^{c-c-} = P,$$

ce qui entraîne, en vertu du th. fond., que

$$P \subset R_2.$$

Ainsi:

$$R_1 \subset P \subset R_2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Si un ensemble ordonné renferme un sous-ensemble dense fini ou dénombrable, cet ensemble n'admet que tout au plus une infinité dénombrable de sauts.

Nous avons donc le

Corollaire. *Un continu irréductible entre deux points ne renferme que tout au plus une infinité dénombrable de continus indécomposables qui ne sont pas des continus de condensation* [1]).

Il résulte de la définition de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ et des théorèmes XI et XV que le type d'ordre a de cette classe remplit les trois conditions suivantes:

1°: *il existe le premier et le dernier élément,*

2°: *il n'y a pas de lacunes,*

3°: *il existe une partie dense finie ou dénombrable.*

Ce sont donc les conditions nécessaires pour que a soit un nombre ordinal d'un continu irréductible entre deux points. Nous allons démontrer qu'elles sont suffisantes.

Nous établirons au préalable le lemme suivant:

Lemme. *a étant un type ordinal donné, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un ensemble de nombres réels du type a (ordonné selon la grandeur), — est que a admette une partie finie ou dénombrable.*

[1]) Cette restriction est essentielle. En effet, on peut construire dans l'espace à 3 dimensions un continu irréductible entre deux points qui contient une portion du plan; ce continu renferme une infinité non dénombrable (de la puissance $2^{\aleph_0}$) de continus indécomposables de condensation. Voir: Janiszewski, Thèse.

Démonstration. En s'appuyant sur l'axiome du choix de M. Zermelo, on montre facilement que la condition est nécessaire. Nous allons prouver qu'elle est suffisante.

Soit Z un ensemble ordonné du type α. Soit F sa partie dense finie ou dénombrable.

L'ensemble Z a évidemment tout au plus une infinité dénombrable de sauts. Soit H l'ensemble qui contient outre les éléments de F ceux de Z qui admettent un élément voisin et, de plus, le premier et le dernier élément de Z (s'il existe). H peut donc être rangé en une suite: $h_1, h_2, \dots h_n, \dots$

Posons

1°: $\varphi(h_0) = \frac{1}{2}$;

2°: la suite $\varphi(h_1), \dots \varphi(h_{n-1})$ étant définie, soit

$$\varphi(h_n) = \frac{\varphi_k + \varphi_l}{2},$$

φ_k et φ_l étant définis de la façon suivante:

si aucun des $h_1, \dots h_{n-1}$ ne précède h_n, on pose $\varphi_k = 0$; dans le cas contraire h_k sera le dernier des éléments qui précèdent h_n et $\varphi_k = \varphi(h_k)$. Tout pareillement, si parmi ces éléments il y en a qui suivent h_n, h_l en sera le premier et $\varphi_l = \varphi(h_l)$; dans le cas contraire: $\varphi_l = 1$.

Pour compléter la définition de la fonction φ aux éléments de $Z - H$, remarquons que, si $p \varepsilon (Z - H)$. p détermine une lacune dans Z et dans H. H_p désignant l'ensemble des éléments de H qui précèdent p et H^p l'ensemble de ceux qui le suivent, H_p ne possède pas d'élément dernier ni H^p de premier. Il en est de même des ensembles $\varphi(H_p)$ et $\varphi(H^p)$. Or, soit

$$\varphi(p) = \lim \varphi(H_p).$$

Il est aisé de voir que la fonction φ détermine une correspondance biunivoque entre les éléments de Z et ceux de $\varphi(Z)$ et, de plus, que la condition $p_1 \prec p_2$ équivaut à $\varphi(p_1) < \varphi(p_2)$.

Le lemme étant établi, remarquons encore que si, pour un élément p de Z. l'ensemble Z_p d'éléments qui précèdent p ne contient pas de dernier élément, le point $\varphi(p)$ est un point d'accumulation de l'ensemble $\varphi(Z_p)$. Une remarque analogue concerne l'ensemble Z^p d'éléments qui suivent p.

Nous arrivons donc à cet énoncé:

si α satisfait aux conditions 1°—3°, il existe dans le segment (0, 1) un ensemble *fermé* V du type d'ordre α.

Pour en déduire que α est un „nombre ordinal" nous remplacerons chaque saut de V par un continu indécomposable.

Nous nous servirons à ce but d'un continu construit par M. Knaster.

Soit E l'ensemble de nombres du segment (0, 1) qui peuvent être écrits dans le système de numération à base 5 sans l'usage des nombres 1 et 3.

Soit $E_n (n \geqslant 0)$ l'ensemble des points e de E tels que

$$\frac{2}{5^{n+1}} \leqslant e \leqslant \frac{1}{5^n}.$$

Soit F_n l'ensemble des points e tels que $(1-e)$ appartient à E_n.

Pour un n donné, on décrit du point $\frac{7}{10} \cdot 5^{-n}$ des demi-circonférences au-dessous de l'axe X par chaque point de l'ensemble E_n; tout pareillement, on décrit du point $\left(1 - \frac{7}{10} \cdot 5^{-n}\right)$ des demi-circonférences au-dessus de l'axe X par chaque point de l'ensemble F_n.

L'ensemble formé de ces demi-circonférences, pour tous les n de 0 à ∞, est bien le continu indécomposable demandé [1]).

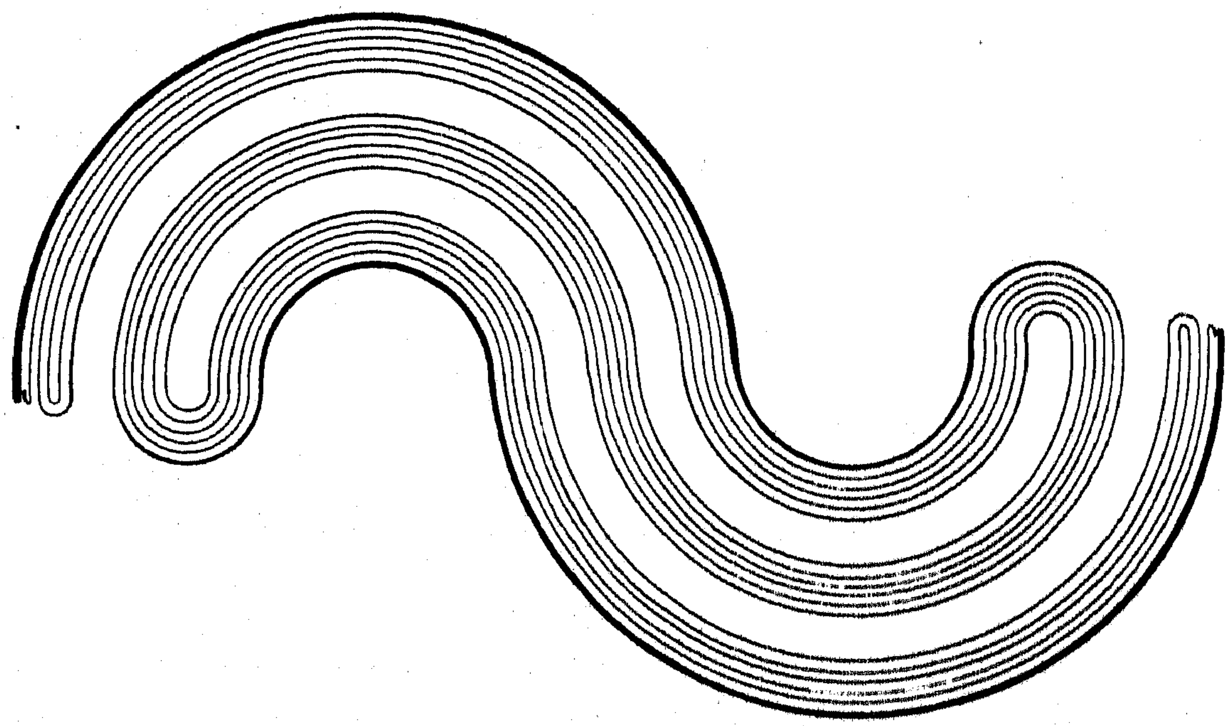

Fig. 2.

[1]) La différence essentielle entre les continus fig. 1 et fig. 2 est que le premier

Nous le désignons par $D(0, 1)$. D'une façon analogue, si dans cette construction on remplace le segment $(0, 1)$ par (x_1, x_2) on désignera le continu par $D(x_1, x_2)$. On remarquera que le continu $D(x_1, x_2)$ est irréductible entre les points x_1 et x_2.

Pour passer à la définition du continu ayant le nombre ordinal α, reprenons l'ensemble V.

Soient a et b le premier et dernier éléments de V. L'ensemble V diffère donc du segment (a, b) par un nombre fini ou dénombrable d'intervalles $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_n, b_n), \dots$, dépourvus de bornes.

L'ensemble

$$C = V + \sum D(a_n, b_n)$$

repond au problème, car

1°: C est fermé, puisque le diamètre des $D(a_n, b_n)$ tend vers 0 avec n;

2°: C est un continu irréductible entre a et b, les $D(a_n, b_n)$ étant irréductibles entre a_n et b_n:

3°: le type d'ordre de la classe $\mathfrak{K}(a, C)$ est le même que celui de l'ensemble V, puisque à chaque saut correspond un continu indécomposable.

Donc $|\alpha|$ est le nombre ordinal du continu C.

Le théorème suivant est donc démontré:

Second théorème fodamental. *α étant un type ordinal donné, la condition nécessaire et suffisante pour que $|\alpha|$ soit un nombre ordinal d'un continu irréductible entre deux points, est que α remplisse les conditions* 1°—3° p. 214.

Nous terminons la théorie des nombres ordinaux par une remarque concernant leur invariance par rapport aux transformations biunivoques et bicontinues.

On sait que si le continu $\varphi(C)$ est l'image biunivoque est bicontinue du continu C irréductible entre a et b, $\varphi(C)$ est irréductible entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. En outre, la notion d'ensemble régulier

---

n'est irréductible entre aucun couple de points accessibles, tandis que le second l'est entre les points 0 et 1 de l'axe X, qui sont tous deux accessibles.

Grace à cette propriété du continu $D(0, 1)$ on peut résoudre sur le plan plusieurs problèmes que l'on ne pouvait résoudre que dans l'espace à 3 dimensions en se servant du continu indécompòsable défini auparavant. C'est le cas de quelques problèmes de Janiszewski, traités dans sa Thèse; voir surtout: p. 26 et 43.

relatif par rapport à C reste invariante lorsque on transforme C. On en déduit donc le

Théorème XVI. *Le nombre ordinal d'un continu irréductible entre deux points est un invariant de l'Analysis Situs.*

Note I.

Sur l'existence de sous-continus irréductibles entre deux points.

a et b étant deux points d'un continu borné E il existe un sous-continu de E irréductible entre a et b [1]).

Ce théorème vrai des continus bornés ne peut être étendu au cas des continus non bornés. Pour s'en convaincre considérons l'exemple suivant:

Le continu E se compose 1°: des demi-droites ($x=1$, $y\geqslant 0$) et ($x=-1$, $y\geqslant 0$), 2°: des segments qui joignent le point n de l'axe Y aux points $\pm\dfrac{n}{n+1}$ de l'axe X, pour tout entier $n\geqslant 1$, et 3°: des segments $\left(\dfrac{2n}{2n+1}, \dfrac{2n+1}{2n+2}\right)$ et $\left(-\dfrac{2n-1}{2n}, -\dfrac{2n}{2n+1}\right)$ de l'axe X.

Le continu E ne renferme aucun sous-continu irréductible entre les points 1 et $+1$ de l'axe X. (D'ailleurs, il est à remarquer que E est irréductible entre le point $(\frac{1}{2}, 0)$ et chaque point des demi-droites $x=\pm 1$).

Dans cette Note nous supposons le continu C irréductible entre a et b et nous en établirons quelques propriétés caractéristiques concernant l'existence de sous-continus irréductibles entre deux points.

[1]) Ce théorème a été établi par MM. Janiszewski et Mazurkiewicz en 1910 (*Comptes Rendus*, Paris). Voir aussi Mazurkiewicz, *Bull. Acad. Polonaise* 1919, p. 44. Quant au rôle des nombres transfinis dans le raisonnement de Janiszewski, voir mon article: *Une méthode d'élimination des nombres transfinis*... § 3, ce volume. Cf. Zoretti, Acta Math. 36, 1912.

Le même théorème était traité par M. Yoneyama dans son article: *The conception of a Curve*... Kyoto 1913. Toutefois, la démonstration de M. Yoneyama ne peut être considérée comme rigoureuse, car M. Yoneyama s'appuie sur la proposition suivante qu'il ne démontre pas: il existe une classe $\mathfrak{M}^*$ telle que 1°: les éléments de cette classe sont des sous-continus de E et contiennent a et b, 2°: leur partie commune est un continu, 3°: $\mathfrak{M}^*$ n'est pas une vraie sous-classe d'aucune classe qui remplit les conditions 1° et 2°.

On reconnait d'ailleurs aisément que cette proposition équivaut au théorème même de l'existence de sous-continus irréductibles.

Remarquons d'abord que, *si K est un continu de condensation de C et $b \varepsilon K$. le continu C est irréductible entre a et chaque point de K.*

Soit, en effet

(1) $$K^{c-} = C$$

et soit L un sous-continu de C tel que

$$a \varepsilon L \quad \text{et} \quad L \times K \neq 0.$$

Comme $a \varepsilon (L+K)$ et $b \varepsilon (L+K)$, on a

$$L + K = C,$$

d'ou

$$K^c \subset L \quad \text{et} \quad K^{c-} \subset L$$

ce qui entraîne, en vertu de (1):

$$L = C \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous montrerons à présent que *p étant un point de C, il existe un sous-continu r é g u l i e r qui est irréductible ou bien entre a et p ou bien entre b et p.*

Envisageons la classe $\mathfrak{R}(a, C)$. D'après le th. XI, cette classe n'admet pas de lacunes. Il n'y a, par conséquent, que deux cas possibles:

1°: il existe l e p l u s p e t i t continu R parmi les éléments de $\mathfrak{R}(a, C)$ qui contiennent le point p;

2°. il existe l e p l u s g r a n d continu R parmi ces éléments de $\mathfrak{R}(a, C)$ qui ne contiennent pas le point p.

Supposons le premier cas réalisé et supposons que R ne soit pas irréductible entre a et p. Les points a et p sont donc situés sur un continu K tel que

(2) $$K \subset R \quad \text{et} \quad K \neq R$$

Or,

(3) $$p \text{ non-}\varepsilon\, K^{c-c-}.$$

car autrement on aurait (th. VII): $a \varepsilon K^{c-c-}$ et le continu K^{c-c-} serait, d'après (2), un sous-continu régulier plus petit que R, tout en contenant a et p.

La formule (3) implique: $p \varepsilon K^{c-}$ et

(4) $$p \varepsilon (K \times K^{c-}).$$

Si K est un continu de condensation, C est — comme nous venons de voir — irréductible entre b et chaque point de K; le théorème est donc dans ce cas réalisé. Si K n'est pas un continu de condensation, on remplace dans le th. IV: A par K^{c-} et a par b, et on déduit de (4) que K^{c-} est irréductible entre b et p.

Le second cas peut être ramené au premier. En effet, on a dans ce cas $p \varepsilon R^{c-}$ et $R^{c-} \varepsilon \mathfrak{R}(b, C)$. Or, si R^{c-} n'était pas le plus petit élément de $\mathfrak{R}(b, C)$, qui contienne p, il existerait un élément S de $\mathfrak{R}(b, C)$ tel que

(5) $$p \varepsilon S,$$

(6) $$S \subset R^{c-} \quad \text{et} \quad S \neq R^{c-}.$$

La formule (6) implique que

$$S^{c-} \supset R \quad \text{et} \quad S^{c-} \neq R;$$

donc, comme $S^{c-} \varepsilon \mathfrak{R}(a, C)$, on a, par définition de R:

(7) $$p \varepsilon S^{c-}.$$

Les formules (5) et (7) impliquent, selon le th. IV, que S^{c-} est irréductible entre a et p.

Nous pouvons donc supposer que parmi les éléments de $\mathfrak{R}(b, C)$ qui contiennent p, le continu R^{c-} en est le plus petit; cela ramène notre raisonnement au cas 1°.

Notre théorème est donc démontré complètement.

L'exemple du continu E prouve qu'un continu irréductible entre deux points peut contenir des points qui ne sont situés sur aucun sous-continu irréductible entre eux. D'autre part, on construit aisément un continu irréductible entre a et b qui contient plusieurs continus irréductibles entre a et p.

Un théorème qui se rattache à la considération de ces exemples fut démontré par Janiszewski [1]):

S'il existe sur un continu borné C irréductible entre a et b plus d'un continu irréductible entre a et p, il n'existe qu'un seul qui soit irréductible entre b et p.

Afin de généraliser ce théorème remarquons que *s'il existe un sous-continu régulier R irréductible entre a et p, R est le seul sous-continu irréductible entre ces points.*

[1]) *Bull. Acad. Sc.* Cracovie 1912.

En effet, s'il en existait un autre, soit K, on aurait évidemment:

$$K \, non \subset R \quad \text{et} \quad R \, non \subset K.$$

Mais la première de ces formules implique, en vertu du th. VIII: $R^{c-c-} \subset K$, donc $R \subset K$, en contradiction avec la seconde formule.

Ainsi, en s'appuyant sur les résultats de cette Note, nous pouvons affirmer que p étant un point arbitraire de C un des couples (a, p) ou (b, p) détermine un et un seul continu irréductible, bien que l'autre peut n'en déterminer aucun ou plus qu'un.

Ceci étant vrai de chaque continu C — qu'il soit borné ou non borné — on peut, en particulier, omettre la condition que le continu soit borné dans l'énoncé de Janiszewski[1]).

Note II.

Sur le »genre« des points d'un continu irréductible entre deux points.

Selon une classification due à M. Mazurkiewicz[2]), un point p d'un continu E est dit de *premier genre*, s'il est vrai de toute sphère S à centre p que

$$p \; non\text{-}\varepsilon \; \overline{E - Q}$$

Q désignant le plus grand sous-continu de $E \times S$ qui contienne le point p[3]).

M. Mazurkiewicz a démontré que, si C est un continu borné irréductible entre a et b et p est situé sur un continu de condensation (au sens strict) de C, alors p n'est pas de premier genre par rapport à C.

Le but de cette Note est d'étendre ce théorème au cas de continu irréductible quelconque: borné ou non borné.

1) La démonstration de Janiszewski ne se prête pas à cette généralisation, car elle est basée sur le lemme suivant:

p étant un point d'un ensemble fermé F et d'un continu borné E, si $E - F \neq 0$, on a $K \times (E - F) \neq 0$, où K désigne le plus grand sous-continu de $E \times F$ contenant p.

Or, ce lemme ne peut être étendu au cas de continus non-bornés.

2) *C. R. Soc. Sc.* Varsovie 1916, p. 430 et *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I. La même notion était traitée par M. Hahn sous le nom de „Zusammenhang im kleinen". Voir: *Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve*, Sgb. K. Akad. Wiss. Wien 1914.

3) Cf. mon article: *Une définition topologique de la ligne de Jordan*, Fund. Math. I

Nous allons démontrer au préalable ce lemme:

K étant un continu de condensation (au sens large) *de C, il n'existe que tout au plus un élément R de* $\mathfrak{R}(a, C)$ *assujetti aux conditions:*

(1) $$R \times K \neq 0 \quad \textit{et}, \quad K - R \neq 0.$$

Soit donc

(2) $$K^{C-} = C$$

et supposons que R_1 et R_2 satisfont à (1).

Il s'agit de prouver que $R_1 = R_2$.

En tenant compte du premier théorème fondamental, on peut poser

(3) $$R_1 \subset R_2.$$

Envisageons la décomposition évidente

$$C = R_2 + (R_2^{C-} + K + R_1).$$

Les continus R_1 et R_2 remplissant la formule (1), la seconde sommande est un continu admettant a comme élément. Or, comme $R_2 \neq C$ d'après (1), on déduit du th. I que

$$R_2^{C-} + K + R_1 = C,$$

d'où

$$K^{C-} \subset R_1 + R_2^{C-}$$

et suivant (2):

$$C = R_1 + R_2^{C-}$$

ce qui donne:

$$R_2^{C-C} \subset R_1$$

donc

$$R_2 = R_2^{C-C-} \subset R_1$$

et suivant (3):

$$R_1 = R_2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme établi, passons à la démonstration du théorème.

Soit donc K un continu de condensation au sens strict de C. Supposons qu'un point p de K soit de premier genre par rapport à C.

K étant un continu a u s e n s s t r i c t, il contient un point $r_1 \neq p$. Entourrons p d'une sphère S_1 qui ne contienne pas r_1. Soit Q_1 le plus grand sous-continu de $C \times S_1$ qui admet p comme élément. Par hypothèse:

(4) $$p \text{ non-}\varepsilon\ Q_1^{C-}$$

(5) $$r_1 \varepsilon\ Q_1^{C-}.$$

D'après (4), il existe sur K un point $r_2 \neq p$ tel que

(6) $$r_2 \text{ non-}\varepsilon\ Q_1^{C-}$$

Soit S_2 une sphère de centre p et r_2 *non*-ε S_2. En assignant à Q_2 un sens analogue à celui de Q_1, on a

(7) $$p \text{ non-}\varepsilon\ Q_2^{C-}$$

(8) $$r_2 \varepsilon Q_2^{C-}.$$

D'après le th. II, Q_1^{C-} et Q_2^{C-} se composent de deux continus, que nous désignons comme d'habitude par A_1, B_1 et A_2, B_2 respectivement (voir p. 203). A_1 et A_2 sont des éléments de $\mathfrak{R}(a, C)$ et B_1 et B_2 appartiennent à $\mathfrak{R}(b, C)$.

Par raison de symétrie, il n'y a que deux cas à envisager:

1°: $r_1 \varepsilon A_1$ et $r_2 \varepsilon A_2$.

2°: $r_1 \varepsilon A_1$ et $r_2 \varepsilon B_2$.

Dans le premier cas on a

(9) $$A_1 \times K \neq 0 \quad \text{et} \quad K - A_1 \neq 0,$$

en vertu de (4). Tout pareillement, d'après (7) on a

(10) $$A_2 \times K \neq 0 \quad \text{et} \quad K - A_2 \neq 0.$$

Les formules (9) et (10) impliquent — selon le lemme —

$$A_1 = A_2,$$

ce qui est absurde, puisque $r_2 \varepsilon A_2$ et r_2 *non*-ε A_1 suivant (6).

Dans le second cas on a

$$C = Q_1 + Q_1^{C-} = Q_1 + A_1 + B_1 = (Q_1 + B_1) + (A_1 + K + B_2).$$

Or, le continu $Q_1 + B_1$ contient b, puisque b *non*-ε A_1. En outre, ce continu diffère de C, car r_1 appartenant à A_1, $A_1 \neq 0$. D'autre part, $(A_1 + K + B_2)$ est un continu, car $r_1 \varepsilon A_1 \times K$ et $r_2 \varepsilon B_2 \times K$: de plus, $b \varepsilon B_2$, puisque r_2 appartenant à B_2, $B_2 \neq 0$.

Par conséquent, selon le th. I,

$$C = A_1 + K + B_2,$$

et comme $K^{C-} = C$ on en conclut que

$$C = A_1 + B_2.$$

Mais ceci est impossible, car d'après (4) et (7), p n'appartient ni à A_1 ni à B_2.

Il est ainsi établi que l'hypothèse, que le point p est de premier genre, mène à une contradiction.

Note III.

Sur la décomposition d'un continu irréductible entre deux points en continus disjoints.

M. Sierpiński a construit récemment un continu non borné qui est somme d'une infinité dénombrable de continus n'ayant deux à deux aucun point commun. Il démontra aussi qu'un continu borné ne peut jamais être décomposé de la sorte [1]). Ici je vais prouver qu'*un continu irréductible entre deux points — qu'il soit borné ou non — ne peut être décomposé en une infinité dénombrable de continus n'ayant deux à deux aucun point commun.*

Pour établir ce théorème nous n'aurons à invoquer, outre les axiomes I—IV, que le théorème suivant: un ensemble fermé non vide n'est pas somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses par rapport à lui. Nous appellerons cet énoncé théorème de Baire.

Nous commençons par ce lemme: *si les sous-continus K_1 et K_2 de C n'en sont pas des continus de condensation, la condition*

$$(1) \qquad K_1 \times K_2 = 0$$

entraîne l'inégalité

$$(2) \qquad A_1 \neq A_2;$$

et si, en outre, $A_1 \subset A_2$, *on a*

$$(3) \qquad A_1 + K_1 \subset A_2 \quad et \quad A_1 + K_1 \neq A_2 \text{ }^{2)}.$$

Supposons, au contraire, que

$$A_1 = A_2 = A.$$

Or,

$$(K_1^{C-C-})^{C-} = K_1^{C-} = A_1 + B_1$$

et, par conséquent, $(A_1 + K_1^{C-C-})$ est un élément de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$; il en est de même de $(A_2 + K_2^{C-C-})$. En vertu du premier théorème fondamental nous pouvons donc poser:

$$A + K_1^{C-C-} \subset A + K_2^{C-C-},$$

[1]) Le théorème que M. Sierpiński a démontré, est même plus général: un continu borné n'est pas somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints. Voir *Wiadomości Matematyczne*, Varsovie 1919 et *Tôhoku Mathematical Journal* Vol. 13 (1918), p. 300.

[2]) Pour les notations, voir p. 203.

d'eù

$$A+K_1^{c-c-}=(A+K_1^{c-c-})\times(A+K_2^{c-c-})=$$
$$=A+K_1^{c-c-}\times K_2^{c-c-}=A,$$

puisque

$$K_1^{c-c-}\times K_2^{c-c-}\subset K_1\times K_2=0.$$

Ainsi

$$A+K_1^{c-c-}=A\subset K_1^{c-},$$

d'où

$$K_1^{c-c-}\subset K_1^{c}$$

et

$$K_1^{c-c}\subset K_1^{c-},$$

ce qui donne

$$K_1^{c-}=C,$$

contrairement à l'hypothèse.

La première partie du lemme est donc établie.

A_1 et A_2 étant des éléments de $\mathfrak{R}(a, C)$, nous pouvons poser

$$A_1\subset A_2. \tag{4}$$

Or, comme K_2 n'est pas un continu de condensation, et comme, d'après (2) et (4), $A_2\neq 0$, on a

$$K_2\times A_2\neq 0, \tag{5}$$

ce qui implique, suivant le th. IV, que A est irréductible entre a et chaque point de $K_2\times A_2$. Il s'en suit, en vertu des formules (2) et (4) que

$$K_2\times A_1=0. \tag{6}$$

Pour établir la première partie de la formule (3), on remarquera que, si elle n'etait pas réalisée, on aurait d'après le théorème VIII:

$$A_2\subset A_1+K_1$$

et en multipliant par K_2 les deux membres de cette inclusion, on arriverait à la formule

$$K_2\times A_2\subset K_2\times A_1+K_2\times K_1$$

qui contredit, selon (1) et (6), la formule (5).

Quant à la seconde partie de cette formule, observons qu'en ajoutant membre à membre les identités (1) et (6), on obtient

$$K_2\times(A_1+K_1)=0,$$

ce qui prouve, selon (5), que $A_2\neq A_1+K_1$.

Notre lemme est donc démontré complètement.

Supposons maintenant — contrairement à l'énoncé du théorème — le continu C décomposé en une infinité dénombrable de continus disjoints:

$$C = E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots$$

Désignons par $K_1, K_2, \dots$ ceux parmi les $E_1, E_2, \dots,$ qui ne sont pas des continus de condensation. Soit $\mathfrak{A}$ la classe des continus $A_1, A_2, \dots$ qui correspondent à $K_1, K_2, \dots$ Évidemment $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}(a, C)$.

L'idée de la démonstration consiste à prouver que la classe $\mathfrak{A}$ (ordonnée selon la grandeur) est semblable à l'ensemble des nombres rationnels. Chaque lacune de $\mathfrak{A}$ détermine un élément de $\mathfrak{R}(a, C)$, qui, à son tour, détermine un continu de la suite $\{E_n\}$. De plus, à deux lacunes différentes correspondent deux continus différents. Or, la suite, $\{E_n\}$ étant dénombrable et l'ensemble des lacunes ne l'étant pas, on arrive à une contradiction.

La démonstration se compose de 4 parties.

1. *La classe $\mathfrak{A}$ n'est pas vide.* En effet, dans le cas contraire, le continu C serait une somme d'une infinité dénombrable de continus de condensation, — contrairement au théorème de Baire.

2. *La classe $\mathfrak{A}$ ne se réduit pas à un seul élément.* En tenant compte du lemme. il s'agit de démontrer qu'il y a dans la suite $\{E_n\}$ plus d'un élément qui ne soit pas un continu de condensation.

Supposons que E_1 soit le seul élément qui jouisse de cette propriété. Or,

$$E_1^{c-} = E_1 \times E_1^{c-} + E_2 \times E_1^{c-} + E_3 \times E_1^{c-} + \dots.$$

L'ensemble E_1^{c-} étant régulier par rapport à C et l'ensemble $E_1 \times E_1^{c-}$ étant non dense par rapport à C (voir p. 188, corollaire relativisé par rapport à C), on en conclut que $E_1 \times E_1^{c-}$ est non dense par rapport à E_1^{c-} (voir p. 194, corollaire 4 relativisé par rapport à C). Les continus $E_2, E_3, \dots$ étant non denses dans C. on en conclut de même que les ensembles $E_2 \times E_1^{c-}, E_3 \times E_1^{c-}, \dots$ sont non denses dans E_1^{c-}.

On arrive ainsi à la conclusion, que l'ensemble E_1^{c-} est somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses par rapport à lui, ce qui contredit le théorème de Baire.

3. *La classe $\mathfrak{A}$ n'admet pas de sauts.* Or, supposons que les éléments A_1 et A_2 de $\mathfrak{A}$ forment un saut. D'après le corollaire 3 (relativisé) p. 194, l'ensemble $\overline{A_2 - A_1}$ et son sous-ensemble $\overline{A_2 - (A_1 + K_1)}$

sont réguliers par rapport à C. Par conséquent, si E_n est un continu de condensation, sa partie situé dans $\overline{A_2-(A_1+K_1)}$ y est non dense. Les ensembles $K_2 \times \overline{A_2-(A_1+K_1)}$ et $K_1 \times \overline{A_2-(A_1+K_1)}$ le sont aussi, car $K \times K^{c-}$ est non dense dans C, $\overline{A_2-A_1} \subset A_2 \subset K_2^{c-}$ et $\overline{A_2-(A_1+K_1)} \subset K_1^{c-}$.

Ainsi, pour démontrer que notre hypothèse contredit le théorème de Baire, il suffira de prouver pour $n \geqslant 3$ que $K_n \times \overline{A_2-A_1}=0$.

Or, soit $n \geqslant 3$. Comme A_1 et A_2 forment un saut, on a

$$A_n \subset A_1 \quad \text{ou bien} \quad A_2 \subset A_n.$$

Dans le premier cas, on a d'après le lemme:

$$A_n + K_n \subset A_1 \quad \text{et} \quad A_n + K_n \neq A_1.$$

Comme, selon le th IV, A_1 est irréductible entre a et chaque point de $A_1 \times A_1^{c-}$, on déduit de ces formules que

$$(A_n + K_n) \times A_1^{c-} = 0$$

et à plus forte raison:

$$K_n \times \overline{A_2-A_1} = 0.$$

Dans le second cas

$$A_2 \subset A_n \quad \text{et} \quad A_2 \neq A_n.$$

A_n étant irréductible entre a et chaque point de $A_n \times K_n$, on a

$$A_2 \times K_n = 0 \quad \text{d'où} \quad K_n \times \overline{A_2-A_1} = 0.$$

Il est ainsi établi que, lorsque $n \geqslant 3$, $K_n \times \overline{A_2-A_1}=0$.

Les propriétés de la classe $\mathfrak{A}$ établies jusqu'ici prouvent que cette classe est semblable à l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle (0, 1) si l'on néglige les extrémités. Il existe donc dans cette classe u n e i n f i n i t é n o n d é n o m b r a b l e d e l a c u n e s.

La classe $\mathfrak{R}(a, C)$ n'ayant pas de lacunes (th. XI), chaque lacune de la classe $\mathfrak{A}$ détermine un ou deux éléments de $\mathfrak{R}(a, C)$: R_1 et R_2. Soit $R_1 \subset R_2$. Le continu R_1 est irréductible entre deux points: l'un d'eux est a; soit r l'autre [1]).

Soit $E_{n(r)}$ ce continu de la suite $\{E_n\}$ qui contient le point r.

[1]) Il importe de remarquer que le choix du point r peut être effectué selon une loi bien déterminée. On a donc pas besoin d'invoquer ici l'axiome de Zermelo.

Nous avons fait ainsi correspondre à chaque lacune de la classe $\mathfrak{A}$ un continu de la suite $\{E_n\}$.

4. *A deux lacunes différentes de la classe $\mathfrak{A}$ correspondent deux continus différents de la suite $\{E_n\}$.*

Soit R_1 un élément de $\mathfrak{R}(a, C)$ déterminé par une lacune de la classe $\mathfrak{A}$. Nous montrerons que $E_{n(r)}$ est un continu de condensation.

En effet, supposons que $E_{n(r)} = K_{n(r)}$. Par hypothèse:

(7) $$R_1 \neq A_{n(r)}.$$

En outre:

(8) $$R_1 \subset A_{n(r)}$$

ou bien

(9) $$A_{n(r)} \subset R_1.$$

Si la formule (8) était réalisée, on aurait $r \varepsilon K_{n(r)} \times A_{n(r)}$ et $A_{n(r)}$ serait un continu irréductible entre a et r (th. IV). Mais ceci est impossible selon les formules (7) et (8).

La formule (9) n'est nonplus réalisée. Car autrement, il existerait dans $\mathfrak{A}$ un A_i tel que $A_{n(r)} \subset A_i \subset R_1$ et $A_{n(r)} \neq A_i$, $A_i \neq R_1$; on aurait d'après le lemme:

$$A_{n(r)} + K_{n(r)} \subset A_i \subset R_1 \quad \text{et} \quad A_{n(r)} + K_{n(r)} \neq A_i,$$

ce qui contredit l'hypothèse que R_1 est irréductible entre a et r.

$E_{n(r)}$ est donc un continu de condensation.

Soient maintenant R_1 et S_1 $(R_1 \subset S_1)$ deux éléments de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$, correspondant à deux lacunes différentes de $\mathfrak{A}$. Soit R_1 irréductible entre a et r et S_1 entre a et s. Supposons les points r et s situés sur un continu $E_{n(r)}$.

On trouve, par hypothèse, des continus A_k et A_l tels que

$$R_1 \subset A_k \subset A_l \subset S_1$$
$$R_1 \neq A_k \neq A_l \neq S_1.$$

Par conséquent,

$$r \varepsilon A_k, \quad r \varepsilon A_l$$
$$s \, non\text{-}\varepsilon A_k, \quad s \, non\text{-}\varepsilon A_l.$$

Il s'en suit que

$$A_k \times E_{n(r)} \neq 0 \quad \text{et} \quad E_{n(r)} - A_k \neq 0$$
$$A_l \times E_{n(r)} \neq 0 \quad \text{et} \quad E_{n(r)} - A_l \neq 0,$$

ce qui contredit le lemme de la Note II.

Il est donc établi qu'à deux lacunes différentes correspondent deux éléments différents de la suite $\{E_n\}$.

Les propositions 1—4 prouvent que le continu C ne peut être décomposé en une infinité dénombrable de continus disjoints. C. Q. F. D.

Nous montrerons à présent que chacune des trois conditions suivantes de notre énoncé y est indispensable pour que le théorème subsiste:

1°: le continu C est irréductible entre deux points;

2°: les continus E_n forment un ensemble dénombrable;

3°: les ensembles E_n sont fermés et connexes.

Nous nous servirons à ce but de trois exemples.

I. Il existe des continus *réductibles* qui se décomposent en une infinité dénombrable de continus disjoints.

Le continu cité de M. Sierpiński en est un.

II. Il existe des continus irréductibles entre deux points qui se décomposent en une infinité *non dénombrable* de continus disjoints (au sens strict).

Soit E l'ensemble non dense parfait de Cantor (voir p. 209).

Le continu C renferme tous les segments qui joignent le point $(e, 0)$ au point $(e, 1)$, e désignant un nombre de E; en outre, p_1 et p_2 étant des extrémités d'un même intervalle contigu à E, les segments qui joignent $(p_1, 1)$ et $(p_2, 0)$ font aussi partie de C.

Le continu C ainsi défini est irréductible entre $(0, 0)$ et $(1, 0)$ et se compose d'une infinité non dénombrable de continus disjoints, notamment: 1° d'une infinité dénombrable de continus de la forme „N" et 2° d'une infinité de la puissance $\mathfrak{c}$ de segments verticaux.

III. Il existe des continus irréductibles entre deux points qui se décomposent en une infinité dénombrable d'ensembles fermés *non connexes*.

Le continu qui répond au problème va être construit dans l'espace à 3 dimensions[1]).

Nous divisons les nombres qui entrent dans l'ensemble E de Cantor et qui sont de la forme $\frac{k}{3^n}(0 < k < 3^n, n > 0)$ en groupes de façon que le premier groupe se compose des nombres: $g_1^1 = \frac{1}{3}$ et $g_2^1 = \frac{2}{3}$, et qu'en général, le groupe n-ième comprenne les nombres

[1]) Quant à l'existence d'un tel continu sur le plan, comp. *Fund. Math.* II problème N° 13 de M. Sierpiński.

$g_1^n, g_2^n, \dots g_{2^n}^n$ qui n'appartiennent pas aux groupes antérieurs, tout en étant de la forme $\frac{k}{3^n}$.

Posons

$$a_k^n = g_k^n + \frac{1}{3^{n+1}}, \quad b_k^n = g_k^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}, \quad c_k^n = g_k^n + \frac{2}{3^{n+1}}$$

et envisageons, pour un n naturel et un k impair, la ligne polygonale qui joint successivement les points:

$$\begin{array}{llll} (g_k^n, n, n), & & & \\ & (a_k^n, n, n), & (b_k^n, 0, n), & (c_k^n, n, n), \\ & (a_k^n, n, n-1), & (b_k^n, 0, n-1), & (c_k^n, n, n-1), \\ & \dots & \dots & \dots \\ & (a_k^n, n, 0), & (b_k^n, 0, 0), & (c_k^n, n, 0), \\ & & & (g_{k+1}^n, n, n). \end{array}$$

Désignons par V l'ensemble formé par toutes ces lignes polygonales, pour tout n entier et k impair. L'ensemble $\overline{V}$ ne diffère évidemment de V que par les demi-droites:

$$x = e, \quad z = m, \quad y \geqslant 0, \tag{10}$$

avec m entier $\geqslant 0$ et $e \varepsilon E$.

L'ensemble $\overline{V}$ est un continu irréductible entre les points 0 et 1 de l'axe X et se décompose en une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints $F_1, F_2, F_m, \dots$, où F_m se compose des demi-droites de la formule (10) et des lignes polygonales, dont les extrémités ont la coordonnée $z = m$.

Bibliographie.

Brouwer L. E. J. *On the structure of perfect sets of points.* Proceed. K. Akad. Wett. Amsterdam 1911.

— *Sur les continus irréductibles de M. Zoretti.* Ann. Ecole Norm. XXVII, Paris 1910.

— *Zur Analysis Situs.* Math. Ann. 68, 1910.

Denjoy A. *Continu et discontinu.* C. R. 151, Paris 1910.

Janiszewski S. *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points.* Bull. Acad. Sc., Cracovie 1912.

— *Sur la géometrie des lignes cantoriennes.* C. R. 151, Paris 1910.

— *Sur les continus irréductibles entre deux points* C. R. 152, Paris 1911.

Janiszewski S. *Sur les continus irréductibles entre deux points.* (Thèse). Journ. Ecole Polytechn. II, 16, Paris 1912.

Janiszewski S. et Kuratowski C. *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, Varsovie 1920.

Knaster B. et Kuratowski C. *Sur les ensembles connexes.* Fund. Math. II, Varsovie 1921.

Kuratowski C. *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques.* Fund. Math. III, Varsovie 1921.

Mazurkiewicz S. *Nouvelle démonstration du théorème sur l'existence de continus irréductibles.* Bull. Acad. Sc. Polon. Cracovie 1919.

— *Sur la théorie des ensembles.* C. R. 151, Paris 1910.

— *O pewnej klasyfikacji punktów leżacych na kontynuach dowolnych.* C. R. Soc. Sc. Varsovie 1916.

— *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, Varsovie 1920.

— *Un théorème sur les continus indécomposables.* Fund Math. I, Varsovie 1920.

Yoneyama K. *The conception of a Curve, a Surface and a Solid* Mem of the Coll. of Science and Engineering Kyoto Imp. Univ. (Japan) v. V, 1943.

— *Theory of continuous set of points*, Tôhoku Math. Journ. Sendai (Japan). 1917—20.

Zoretti L. Ann. Ec. Norm. XXVII, Paris 1910.

— *Sur les ensembles de points.* C. R. 151, Paris 1910.

— Encycl. des Sc. Math. II, 1, f. 2. Paris 1912.

— *La notion de ligne*, Ann. Ec. Norm. XXVI, Paris 1909.

— *Lecons sur le prolongement analytique.* Paris 1911.

— *Contribution à l'étude des lignes cantoriennes.* Acta Math. 36, 1912, p. 241—268.

— *Sur la représentation analytique d'un continu irréductible.* Bull. Soc.

— Math. Fr. 39, 1911.