Sur les séries de fonctions orthogonales.

Par

D. Menchoff (Moscou)

Première partie.

La convergence.

§ 1. Dans une note bien connue[1]) M. Plancherel a démontré le théorème suivant:

Si les fonctions $\varphi_n(x)$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *forment un système normé de fonctions orthogonales dans l'intervalle* (a, b), *c'est-à-dire si*

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx = 1, \quad \int_a^b \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n,$$

si, de plus, les constantes réelles a_n *sont telles que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lg n)^3 \tag{1}$$

converge, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{2}$$

converge presque partout dans l'intervalle (a, b).

Ce théorème peut être généralisé, en remplaçant, dans la série (1), le facteur $(\lg n)^3$ par $(\lg n)^2$. On obtient ainsi le théorème:

[1]) M. Plancherel, *Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales* Comptes Rendus, t. 157, 6 Octobre, 1913, p. 539.

Théorème 1. *Si la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lg n)^2 \tag{3}$$

converge, la série (2) *eonverge presque partout dans l'intervalle* (a, b) [1].

Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous pouvons prendre $a = 0$, $b = 1$ et considérer les logarithmes à base 2. Nous introduirons les abréviations

$$\chi(l, s) = 2^m + s \cdot 2^l, \quad S(x, n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \varphi_k(x),$$

$$A(l, s) = \sum_{n=\chi(l,s)+1}^{\chi(l,s+1)} a_n^2, \quad A_m = \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} a_n^2,$$

$$D(x, l, s) = S[x, \chi(l, s+1)] - S[x, \chi(l, s)],$$

d'où

$$\int_0^1 [D(x, l, s)]^2 dx = A(l, s), \quad \sum_{s=0}^{2^{m-l}-1} A(l, s) = A_m, \quad 0 \leqslant l < m. \tag{4}$$

Nous commençons par énoncer les trois propositions dont la démonstration a été déjà donnée par M. Plancherel [2]):

1⁰ Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot \lg n$$

converge, la suite infinie des sommes

$$S(x, 1), \quad S(x, 2), \quad S(x, 4), \ldots, \quad S(x, 2^m), \ldots$$

converge presque partout dans $(0, 1)$ [3]).

[1]) *Remarque de la Rédaction*: Ce théorème a été trouvé indépendamment par M. Rademacher qui le fit connaître (sans démonstration d'ailleurs) dans une communication lue au Congrès des Mathématiciens allemands à Jena le 23 septembre 1921, cf. *Jahresb. d. d. Math. Ver. t. 30* (1921); le résultat principal de M. Menchoff, le théorème (2), n'y est pas énoncé. Dans le cas spécial où la série (2) est une série de Fourier, le théorème a été démontré en 1915 pas M. Hobson (Proc. Lond. Math. Soc. (2) 14.); l'auteur n'a pas eu sans doute l'occasion de lire le travail cité, dont le résultat il a généralisé.

[2]) Voir la Note déjà citée. Seconde partie de la dém. de M. Plancherel.

[3]) Dans toutes ces trois propositions nous prendrons 2^m au lieu 10^m, comme le fait M. Plancherel, ce qui n'altère pas essentiellement leur démonstration.

2° $$\text{Mes}\, e(l, s) \leqslant \frac{A(l, s)}{\delta^2},$$

où $e(l, s)$ est l'ensemble de tous les points x pour lesquels subsiste l'inégalité

$$D(x, l, s) \geqslant \delta, \quad \delta > 0,$$

(les indices l et s étant regardés comme fixes).

3° Pour toutes les valeurs de n vérifiant la condition $2^m < n < 2^{m+1}$ subsiste la relation:

(5) $$S(x, n) - S(x, 2^m) = \sum_{i=1}^{\nu} D(x, l_i, s_i),$$

$$0 \leqslant s_i < 2^{m-l_i}, \quad 0 \leqslant l_i < m, \quad \nu < m$$ [1].

De la proposition 2° il résulte immédiatement le lemme suivant:

Lemme. *Soit q une quantité positive quelconque et soit $E = E(\delta)$, $\delta > 0$, l'ensemble de tous les points x pour lesquels le nombre des quantités différentes $D(x, l, s)$, $0 \leqslant s < 2^{m-l}$, $0 \leqslant l < m$, vérifiant l'inégalité*

$$|D(x, l, s)| \geqslant \delta$$

est supérieur ou égal à q [2]. *On a alors*

(6) $$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{m \cdot A_m}{q \cdot \delta^2}$$

Démonstration. Soit $e(l, s)$ l'ensemble défini dans la proposition 2° et soit $E(l, s)$ la partie commune des ensembles E et $e(l, s)$. Nous aurons

$$\text{Mes}\, E(l, s) \leqslant \text{Mes}\, e(l, s), \quad E = \Sigma E(l, s),$$

[1]) M. Plancherel prend, au lieu de (5), l'identité suivante:

(5′) $$S(x, n) - S(x, 10^m) = S(x, n) - S(x, n_1) + \\ + \sum_{i=1}^{m-1} [S(x, n_i) - S(x, n_{i+1})] + S(x, n_m) - S(x, 10^m),$$

où $n = k_0 + k_1 \cdot 10 + k_2 \cdot 10^2 + \ldots + k_m \cdot 10^m$, $0 \leqslant k_i < 10$, $k_m \neq 0$, $n_1 = n - k_0$, $n_2 = n_1 - k_1 \cdot 10, \ldots, n_m = k_m 10^m$. La relation (5) s'obtient de (5′) en prenant $2, 2^2, \ldots, 2^m$ au lieu de $10, 10^2, \ldots, 10^m$ et en omettant les différences égales à zéro.

[2]) Nous regardons les expressions $D(x, l, s)$ comme distinctes, si elles diffèrent par un au moins des deux indices l et s, quoique leurs valeurs numériques soient égales.

où la sommation doit être étendue à tous les indices l et s vérifiant la condition

$$0 \leqslant s < 2^{l-m}, \quad 0 \leqslant l < m.$$

En vertu de la définition de l'ensemble E et des ensembles $E(l, s)$, chaque point de E appartient à quelques ensembles $E(l, s)$ différents [1]) dont le nombre, dans la somme $\Sigma E(l, s)$, est supérieur ou égal à q. On en peut facilement conclure que la mesure de l'ensemble E est inférieure ou égale à

$$\frac{1}{q}\sum \text{Mes}\, E(l, s)\, ^{2)},$$

d'où

$$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{1}{q}\sum \text{Mes}\, e(l.\, s).$$

En tenant compte de la proposition 2°, il résulte de cette dernière inégalité:

$$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{1}{q\,.\,\delta^2}\sum A(l, s) = \frac{1}{q\,.\,\delta^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{s=0}^{2^{m-l}-1} A(l, s),$$

d'où, en vertu de (4),

$$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{1}{q\,.\,\delta^2}\sum_{l=0}^{m-1} A_m = \frac{m\,.\,A_m}{q\,.\,\delta^2},$$

ce qui prouve le lemme proposé.

[1]) Les ensemble $E(l, s)$ sont appelés distincts dans le même sens que les expressions $D(x, l, s)$.

[2]) Cette proposition peut être démontrée comme il suit: Soit $f_{l,s}(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $E(l, s)$, c'est-à-dire, la fonction qui est égale à 1 ou à 0, selon que le point x correspondant appartient ou non à l'ensemble $E(l, s)$. Soit. de même, $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E. On a évidemment

$$f(x) \leqslant \frac{1}{q}\sum f_{l,s}(x), \quad \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{q}\sum \int_0^1 f_{l,s}(x)\,dx,$$

$$\text{Mes}\, E = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \text{Mes}\, E(l, s) = \int_0^1 f_{l,s}(x)\,dx,$$

d'oú

$$\text{Mes}\, E \leqslant \frac{1}{q}\,.\sum \text{Mes}\, E(l, s), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

L'idée de la démonstration de cette proposition à l'aide des fonc tions caractéristiques m'a été communiquée par M. Khintchine.

§ 2. Après ces remarques préliminaires on peut passer à la démonstration du théorème 1, énoncé dans le paragraphe précédent. Désignons par $G_m = G_m(\delta)$, $\delta > 0$, l'ensemble de tous les points x pour lesquels subsiste l'inégalité

$$|S(x, n') - S(x, n)| < 4\delta$$

quels que soient les n et n' vérifiant la condition

$$(7) \qquad 2^m \leqslant n < n' < 2^{m+1}.$$

Soit CG_m l'ensemble complémentaire à G_m par rapport à l'intervalle $(0, 1)$. On peut démontrer que la quantité non négative Mes CG_m est le $m^{\text{ième}}$ terme de la série infinie convergente.

Posons, à cet effet, $k_p = \frac{m}{p^4}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, et désignons par e_p l'ensemble de tous les points x pour lesquels le nombre des quantités différentes $D(x, l, s)$, $0 \leqslant s < 2^{l-1}$, $0 \leqslant l < m$, vérifiant la condition

$$(8) \qquad \frac{\delta}{k_{p-1}} \leqslant |D(x, l, s)| < \frac{\delta}{k_p},$$

est inférieur à $\frac{k_p}{p^2}$. Soit Ce_p l'ensemble complémentaire à e_p.

Eu vertu du lemme démontré dans le paragraphe précédent [l'inégalité (6)], où l'on doit prendre $\frac{\delta}{k_{p-1}}$ et $\frac{k_p}{p^2}$ au lieu de δ et q, nous aurons:

$$(9) \qquad \text{Mes } Ce_p \leqslant \frac{m \cdot k_{p-1}^2 \cdot p^2}{\delta^2 \cdot k_p} \cdot A_m = \frac{m^2 \cdot p^6}{\delta^2 \cdot (p-1)^8} \cdot A_m.$$

En désignans par E_m la partie commune de tous les ensembles e_p, $p = 2, 3, 4, \ldots$, et en tenant compte de la relation

$$CE_m = \sum_{p=2}^{\infty} Ce_p,$$

on obtient immédiatement de l'inégalité (9):

$$\text{Mes } CE_m < \frac{2^6 m^2}{\delta^2} \cdot A_m \cdot \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(p-1)^2}$$

c'est-à-dire,

$$(10) \qquad \text{Mes } CE_m < \frac{2^7 m^2}{\delta^2} \cdot A_m.$$

Il est facile à démontrer que l'ensemble E_m est une partie de l'ensemble G_m. Soit, en effet, x un point quelconque de E_m. En vertu de la définition de E_m, le point x considéré appartient à tous les ensembles e_p, $p=1, 2, 3, \ldots$ Soit N_p, $p=2, 3, 4, \ldots$, le nombre des quantités différentes $D(x, l, s)$, $0 \leqslant s < 2^{m-l}$, $0 \leqslant l < m$, pour lesquelles subsiste l'inégalité

$$(11) \qquad \frac{\delta}{k_{p-1}} \leqslant D(x, l, s) < \frac{\delta}{k_p};$$

on obtient, de la définition de l'ensemble e_p:

$$(12) \qquad N_p < \frac{k_p}{p^2}.$$

Comme $k_1 = m$, on arrive à la conclusion suivante:

1° Quelque soit $p \geqslant 2$, il existe N_p quantités différentes $D(x, l, s)$ vérifiant l'inégalité (11).

(2) Pour toutes les autres quantités $D(x, l, s)$ subsiste l'inégalité

$$D(x, l, s) < \frac{\delta}{m}.$$

Soit n un entier quelconque vérifiant la condition $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$ En vertu de la proposition 3° du paragraphe précédent,

$$|S(x, n) - S(x, 2^m)| \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} D(x, l_i, s_i),$$

où $0 \leqslant s_i < 2^{m-l_i}$, $0 \leqslant l_i < m$, $\nu < m$. Parmi les ν termes de la dernière somme il y a au plus N_p termes pour lesquels subsiste l'inégalité (11), $p=2, 3, 4, \ldots$, tous les autres termes, dont le nombre ne peut dépasser m, sont inférieurs à $\frac{\delta}{m}$.

On a donc

$$|S(x, n) - S(x, 2^m)| \leqslant \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\delta \,.\, N_p}{k_p} + \delta,$$

d'où, en vertu de l'inégalité (12) et de la définition des quantités k_p:

$$|S(x, n) - S(x, 2^m)| < \delta \,.\, \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^2} + \delta,$$

c'est-à-dire,

$$|S(x, n) - S(x, 2^m)| < 2\delta.$$

On obtient ainsi:

$$|S(x, n') - S(x, n)| < 4\delta,$$

quels que soient les entiers n et n' vérifiant la condition (7).

Comme le point x considéré est un point arbitraire de l'ensemble E_m, on voit immédiatement de la définition de l'ensemble G_m, que E_m est une partie de G_m et, par suite, CG_m est une partie de CE_m. On a donc, en verte de (10),

$$\text{Mes } CG_m < \frac{2^7 m^2}{\delta^2} A_m.$$

En tenant compte de la convergence de la série (3) et de l'inégalité évidente

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} a_n^2 (lg\, n)^2,$$

on voit immédiatement que la série dont le $m^{\text{ième}}$ terme est Mes CG_m doit être convergente. En vertu d'un théorème connu[1]), l'ensemble limite complet des ensembles CG_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, est de mesure nulle et, par suite, la mesure de l'ensemble limite restreint des ensembles G_m est égale à 1.

Comme le nombre positif δ, figurant dans la définition des ensembles G_m, peut être pris arbitrairement petit, on voit, en tenant compte de la proposition 1° du paragraphe précédent et de la définition des ensembles G_m, que la série (2) converge presque partout dans (0, 1), ce qui prouve le théorème 1.

§ 3. On peut se demander, si le théoréme 1 reste encore vrai, quand on prend, au lieu de la série (3) qui figure dans son énoncé, une autre série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot W(n), \tag{13}$$

où $W(n)$ est une fonction positive vérifiant la condition

$$W(n) = o[(\lg n)^2],$$

[1]) Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique*, Moscou, 1915, p. 38.

c'est-à-dire, l'ordre de croissance de $W(n)$ est inférieur à celui de $(\lg n)^2$. Nous prouverons qu'il n'en est rien en démontrant le théorème suivant:

Théorème 2. *Quelle que soit la fonction positive $W(n)$ vérifiant la condition $W(n) = o[(\lg n)^2]$, il existe toujours un système normé de fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, orthogonales dans $(0, 1)$, et une suite de constantes réelles a_n telles que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{2}$$

diverge partout dans $(0, 1)$, quoique la série (13) converge.

Comme conséquence du théorème 2, on obtient immédiatement le théorème:

Théorème 3. *Il existe une série (2) correspondant à un système normé de fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, orthogonales dans $(0, 1)$, qui diverge partout dans $(0, 1)$ quoique la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

converge.

Nous commençons par considérer quelques fonctions auxiliaires qui nous serons nécéssaires pour la démonstration du théorème 2. Posons

$$f_{\nu,m}\left(\frac{m}{\nu}\right) = 0; \, f_{\nu,m}(x) = \frac{\lg|\nu x - m|}{\lg \nu}, \quad x \neq \frac{m}{\nu},$$

$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$; $\nu = 2, 3, 4, \ldots$, et envisageons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_{\nu,\,m+p} - f_{\nu,\,m})^2 \, dx, \; p > 0 \text{ [1]}. \tag{14}$$

Il est facile à voir qu'en deux points quelconques, symmétriques par rapport au point $x = \frac{1}{\nu}\left(m + \frac{p}{2}\right)$, les valeurs de la différence $f_{\nu,\,m+p} - f_{\nu,\,m}$ ne diffèrent que de signe et, par suite, l'intégrale pré-

[1] Nous omettons, pour simplifier l'écriture, l'argument x sous le signe d'intégration.

cédente peut s'écrire sous la forme

$$I = 2\int_{\frac{1}{\nu}\left(m+\frac{p}{2}\right)}^{+\infty}(f_{\nu,\,m+p}-f_{\nu,\,m})^2\,dx = 2(I'+I''), \tag{15}$$

où

$$I' = \int_{\frac{1}{\nu}\left(m+\frac{p}{2}\right)}^{\frac{1}{\nu}(m+p)}(f_{\nu,\,m+p}-f_{\nu,\,m})^2dx = \frac{1}{(\lg\nu)^2}\int_{\frac{1}{\nu}\left(m+\frac{p}{2}\right)}^{\frac{1}{\nu}(m+p)}[\lg(m+p-\nu x)-\lg(\nu x-m)]^2dx$$

$$I'' = \int_{\frac{1}{\nu}(m+p)}^{+\infty}(f_{\nu,\,m+p}-f_{\nu,\,m})^2dx = \frac{1}{(\lg\nu)^2}\int_{\frac{1}{\nu}(m+p)}^{+\infty}[\lg(\nu x-m-p)-\lg(\nu x-m)]^2dx.$$

En effectuant, dans chacune de deux intégrales I' et I'', le changement de variable $y = \dfrac{p}{\nu x - m}$, on obtient

$$I' = \frac{p}{\nu(\lg\nu)^2}\cdot\int_1^2[\lg(y-1)]^2\frac{dy}{y^2},$$

$$I'' = \frac{p}{\nu(\lg\nu)^2}\int_0^1[\lg(1-y)]^2\frac{dy}{y^2}.$$

Comme les intégrales dans les deux dernières formules ont des valeurs finies, positives, il vient, en vertu de (14) et (15),

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f_{\nu,\,m+p}-f_{\nu,\,m})^2dx = \frac{p\,.\,C}{\nu(\lg\nu)^2}\ ^{1)}, \tag{16}$$

où C est une constante absolue, $C>0$.

Posons

$$\delta_{\nu,\,m}(x) = \delta_{\nu,\,m} = f_{\nu,\,m+1} - f_{\nu,\,m};$$

on obtient immédiatement

$$\delta_{\nu,\,m} + \delta_{\nu,\,m+1} + \ldots + \delta_{\nu,\,m+p-1} = f_{\nu,\,m+p} - f_{\nu,\,m} \tag{17}$$

[1]) La méthode du calcul de l'intégrale I à l'aide de la substitution $y = \dfrac{y}{\nu x - m}$ m'a été indiquée par M. Stepanoff.

et, par suite, en vertu de (16),

(18) $$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\nu,m}^2 \, dx = \frac{C}{\nu (\lg \nu)^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_{\nu,m} + \delta_{\nu,m+1} + \ldots + \delta_{\nu,m+p-1})^2 dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_{\nu,m}^2 + \delta_{\nu,m+1}^2 + \ldots + \delta_{\nu,m+p-1}^2) dx.$$

En posant successivement dans la dernière identité $p = 1, 2, 3, \ldots$, il vient

(19) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\nu,m} \cdot \delta_{\nu,m+p} \, dx = 0,$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$; $p = 1, 2, 3, \ldots$, c'est-à-dire, toutes les fonctions $\delta_{\nu,m}$, pour ν fixe et pour m quelconque, sont deux à deux orthogonales dans l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$.

Il nous sera utile, dans la suite, d'envisager la somme

(20) $$\delta_{\nu,m} + \delta_{\nu,m+1} + \ldots + \delta_{\nu,2\nu-1},$$

c'est-à-dire, la première partie de la relation (17) pour $p = 2\nu - m$. D'après la définition des fonctions $f_{\nu,m}$, nous aurons, dans l'intervalle $\left(\frac{m-1}{\nu}, \frac{m}{\nu}\right)$, $1 \leqslant m \leqslant \nu$,

$$f_{\nu,m} \leqslant 0, \quad f_{\nu,2\nu} \geqslant 1$$

et, par suite, en vertu de (17), la somme (20) est supérieure ou égale à *un* dans l'intervalle considéré.

En donnant successivement à m toutes les valeurs vérifiant la condition

(21) $$1 \leqslant m \leqslant \nu$$

et en tenant compte que les ν intervalles $\left(\frac{m-1}{\nu}, \frac{m}{\nu}\right)$ correspondants couvrent entièrement l'intervalle (0, 1), on arrive à la conclusion suivante:

En chaque point x de l'intervalle (0, 1) subsiste l'inégalité

(22) $$\delta_{\nu,m} + \delta_{\nu,m+1} + \ldots + \delta_{\nu,2\nu-1} \geqslant 1$$

pour une au moins de valeurs de m vérifiant l'inégalité (21).

§ 4. Considérons un intervalle quelconque (a, b) et effectuons, dans les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta_{\nu,m}(x)]^2dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\nu,m}(x)\,.\,\delta_{\nu,m'}(x)dx, \quad m \neq m',$$

le changement de variable

$$x = \operatorname{tg}\left[-\frac{\pi}{2}+\frac{(y-a)\,.\,\pi}{b-a}\right] = \chi(y),$$

à l'aide duquel l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$ se transforme en (a, b). Il vient:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta_{\nu,m}(x)]^2dx = \int_a^b\{\delta_{\nu,m}[\chi(y)]\}^2\cdot\chi'(y)\,dy,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\nu,m}(x)\,.\,\delta_{\nu,m'}(x)dx = \int_a^b\delta_{\nu,m}[\chi(y)]\cdot\delta_{\nu,m'}[\chi(y)]\cdot\chi'(y)\,dy.$$

On obtient donc, en posant

$$\psi_{\nu,m}(a) = \psi_{\nu,m}(b) = 0;$$

$$\psi_{\nu,m}(y) = \delta_{\nu,m}[\chi(y)]\cdot\sqrt{(b-a)\cdot\chi'(y)}, \quad a < y < b,$$

et en tenant compte de (18) et (19):

$$(23) \qquad 0 < \int_a^b[\psi_{\nu,m}(y)]^2dy = \frac{(b-a)\,.\,C}{\nu(\lg\nu)^2}$$

$$(24) \qquad \int_a^b\psi_{\nu,m}(y)\,.\,\psi_{\nu,m'}(y)\,dy = 0, \qquad m \neq m',$$

où C est la constante absolue définie au paragraphe précédent. On voit, de (23) et (24), que les fonctions $\psi_{\nu,m}(y)$ sont toutes à carré sommable et forment, pour ν fixe, un système de fonctions orthogonales dans l'intervalle (a, b).

Désignons respectivement par a' et b' les points de l'intervalle (a, b) qui correspondent aux points 0 et 1 de l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$. Il est clair que $a' = a + \frac{1}{2}(b-a)$, $b' = a + \frac{3}{4}(b-a)$, $b' - a' = \frac{1}{4}(b-a)$, c'est-à-dire, l'étendue de l'intervalle (a', b') est égale à $\frac{1}{4}(b-a)$ et son extrémité gauche est au centre de l'intervalle (a, b).

Nous allons démontrer, pour les fonctions $\psi_{\nu, m}(y)$, la proposition suivante:

En chaque point de l'intervalle (a', b') subsiste l'inégalité

$$(25) \qquad \psi_{\nu, m}(y) + \psi_{\nu, m+1}(y) + \ldots + \psi_{\nu, 2\nu-1}(y) \geqslant 1,$$

où m est un entier dépendant de x et vérifiant la condition (21). En effet, soit y un point quelconque de l'intervalle (a', b'). En vertu de la propriété des fonctions $\delta_{\nu, m}(x)$, exposée à la fin du paragraphe précédent et exprimée par l'inégalité (22), il vient

$$\delta_{\nu, m}[\chi(y)] + \delta_{\nu, m+1}[\chi(y)] + \ldots + \delta_{\nu, 2\nu-1}[\chi(y)] \geqslant 1$$

où m et un entier convenablement choisi pour lequel subsiste l'inégalité (21). En multipliant par $\sqrt{(b-a) \cdot \chi'(y)}$ la première partie de cette inégalité et en tenant compte de la définition des fonctions $\psi_{\nu, m}(y)$ et de l'inégalité évidente

$$\sqrt{(b-a) \cdot \chi'(y)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\cos\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{(y-a)\pi}{b-a}\right]} > 1,$$

on obtient l'inégalité (24), ce qui prouve la proposition à démontrer.

En résumant tout ce qui a été exposé dans ce paragraphe, on obtient le résultat suivant:

Quel que soit l'entier ν supérieur à *un*, il existe, pour un intervalle arbitraire (a, b), le système de 2ν fonctions $\psi_{\nu, m}(y)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, orthogonales dans l'intervalle (a, b), possédant la propriété exprimée à l'aide de l'inégalité (24) et vérifiant la relation (23). Nous désignerons dans la suite la variable indépendante par x.

§ 5. Le système de fonctions $\psi_{\nu, m}(x)$, envisagé au paragraphe précédent, nous servira à définir un autre système de fonctions qui puissent être regardées comme des approximations des fonctions $\psi_{\nu, m}(x)$ et qui conservent des valeurs constantes dans chacun des intervalles, en nombre fini, obtenus par une subdivision convenable de l'intévalle (a, b).

Prenons un entier quelconque $N \geqslant 3$ et divisons l'intervalle (a, b) en 2^N parties égales; soient $x_i = a + \frac{i}{2^N}(b-a)$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^N$, les points de subdivision. Nous définissons les fonctions $\tilde{\psi}_{\nu, m}(x)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, de la façon suivante:

$$\tilde{\psi}_{\nu, m}(a) = 0; \quad \tilde{\psi}_{\nu, m}(x) = \psi_{\nu, m}(x_i), \quad x_{i-1} < x \leqslant x_i,$$

$0 < i \leqslant 2^N$. Les fonctions $\psi_{\nu, m}(x)$, ainsi définies, sont simultanément constantes dans chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i), $0 < i \leqslant 2^N$.

Donnons nous un nombre positif ε quelconque. Comme les fonctions $\psi_{\nu, m}(x)$ $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, sont toutes à carré sommable et n'ont qu'un nombre fini de points de discontinuité, il est aisé de démontrer que le nombre N peut être pris assez grand, pour que les fonctions correspondantes $\widetilde{\psi}_{\nu, m}(x)$ vérifient les conditions suivantes:

1⁰ $\mathcal{E}_\nu$ étant l'ensemble de tous les points x pour lesquels subsiste l'inégalité

(26) $$\sum_{m=1}^{2\nu} |\psi_{\nu, m}(x) - \psi_{\nu, m}(x)| < \tfrac{1}{2},$$

la somme des longueurs des intervalles (x_{i-1}, x_i) dont tous les points appartiennent a $\mathcal{E}_\nu$ est supérieure à $b - a - \varepsilon$.

(27) 2⁰ $$\int_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu, m}(x) - \psi_{\nu, m}(x)]^2 dx < \varepsilon\text{ [1]}.$$

Prenons $\varepsilon < \frac{1}{8}(a - b)$, c'est-à-dire, inférieur à la moitié de la longueur de l'intervalle (a', b') défini dans le paragraphe précédent. Comme le nombre $\frac{1}{8}(b - a)$ est la produit d'un nombre entier 2^{N-3} et de la quantité $\frac{1}{2^N}(b-a)$, égale à la longueur de chaque intervalle (x_{i-1}, x_i), on voit immédiatement, de la condition 1⁰, qu'il existe dans l'intervalle (a', b') un ensemble E_ν possédant les propriétés suivantes:

(28) a⁰ $$\text{Mes } E_\nu = \tfrac{1}{8}(b - a)$$

b⁰ E_ν est formé de tous les points x compris dans 2^{N-3} intervalles (x_{i-1}, x_i) convenablement choisis dans (a', b').

c⁰ En tous les points de E_ν subsiste l'inégalité (26), c'est-à-dire, E_ν est une partie de l'ensemble $\mathcal{E}_\nu$.

En tenant compte de la condition 2⁰, il est facile d'obtenir les inégalités donnant les valeurs approchées, par excès des intégrales

$$\int_a^b [\psi_{\nu, m}(x)]^2 dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_{\nu, m}(x) \cdot \psi_{\nu, m'}(x)\, dx, \qquad m \neq m'.$$

[1] La condition 2⁰ peut être vérifiée en vertu d'un théorème de M. F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Functionen*, Mathematische Annalen, t. 69, 1910, pp. 459, 460.

Soit e l'ensemble de tous les points pour lesquels subsiste l'inégalité

$$|\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)| \leqslant 2\,|\psi_{\nu,m}(x)|$$

et soit Ce l'ensemble complémentaire à e par rapport à l'intervalle (a, b). On obtient immédiatement

$$\int\limits_e [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)]^2 dx \leqslant 4 . \int\limits_e [\psi_{\nu,m}(x)]^2 dx,$$

$$0 < \int\limits_{Ce} [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)]^2 dx \leqslant 4 . \int\limits_{Ce} [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) - \psi_{\nu,m}(x)]^2 dx < 4\varepsilon,$$

d'où il vient, en prenant $\varepsilon < \dfrac{(b-a) . C}{\nu(\lg \nu)^2}$ et en tenant compte de l'inégalité (23):

$$(29) \qquad 0 < \int\limits_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)]^2 dx < \frac{8(b-a) . C}{\nu(\lg \nu)^2}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant 2\nu.$$

On a de même, en se servant de l'inégalité de M. Schwarz et en tenant compte de (23), (24), (27) et (29):

$$\left|\int\limits_a^b \widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) . \widetilde{\psi}_{\nu,m'}(x) dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) . \widetilde{\psi}_{\nu,m'}(x) - \psi_{\nu,m}(x) . \psi_{\nu,m'}(x)]\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) - \psi_{\nu,m}(x)]^2 dx . \int\limits_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)]^2 dx} +$$

$$+ \sqrt{\int\limits_a^b [\widetilde{\psi}_{\nu,m'}(x) - \psi_{\nu,m'}(x)]^2 dx . \int\limits_a^b [\psi_{\nu,m}(x)]^2 dx} <$$

$$< \sqrt{\varepsilon . \frac{8(b-a) . C}{\nu(\lg \nu)^2}} + \sqrt{\varepsilon . \frac{(b-a) . C}{\nu(\lg \nu)^2}},$$

c'est-à-dire,

$$(30) \qquad \left|\int\limits_a^b \widetilde{\psi}_{\nu,m}(x) . \widetilde{\psi}_{\nu,m'}(x)\, dx\right| < \varepsilon', \qquad m \neq m',$$

$1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, $1 \leqslant m' \leqslant 2\nu$, où ε' tend vers zéro avec ε. Nous supposons, dans la suite, que ε est inférieur à la plus petite de deux quantités $\frac{1}{8}(b-a)$ et $\frac{(b-a)\,.\,C}{\nu(\lg\nu)^2}$, de sorte que l'ensemble E_ν existe et les inégalités (29) et (30) sont vérifiées.

On peut enfin énoncer, pour les fonctions $\psi_{\nu,m}(x)$, une proposition analogue à celle qui à été démontrée pour les fonctions $\psi_{\nu,m}(x)$ à la fin du paragraphe précédent. On voit, en effet, en vertu de cette proposition et de la définition de l'ensemble E_ν, qu'en chaque point x de E_ν subsiste l'inégalité

$$(31) \qquad |\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)+\widetilde{\psi}_{\nu,m+1}(x)+\ldots+\widetilde{\psi}_{\nu,2\nu-1}(x)|>\tfrac{1}{2}$$

pour une au moins de valeurs de m vérifiant la condition $1 \leqslant m \leqslant \nu$ (m ne conserve pas nécessairement une valeur constante, indépendante des points de l'ensemble E_ν).

§ 6. Nous définirons, à l'aide des fonctions $\widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)$, un système de 2ν fonctions $\chi_{\nu,m}(x)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, deux à deux orthogonales dans l'intervalle (a, c) dont étendue est la double longueur de l'intervalle (a, b) et dont le centre est au point b.

Désignons par N' le nombre de tous les systèmes (m, m') de deux indices m et m' vérifiant les conditions: $m < m'$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, $1 \leqslant m' \leqslant 2\nu$, c'est-à-dire, posons $N' = \nu\,.\,(2\nu-1)$ et divisons l'intervalle (b, c) en N' parties egalès. Nous établirons, entre les N' systèmes (m, m'), une correspondance univoque et réciproque et nous désignerons par $\Delta_{m,m'}$ l'intervalle correspondant à (m, m'). Les N' intervalles $\Delta_{m,m'}$ couvrent entièrement l'intervalle (b, c) sans empiéter l'un sur l'autre. Posons

$$(32) \qquad \int_a^b \widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)\,.\,\widetilde{\psi}_{\nu,m'}(x)\,dx = \alpha_{m,m'}$$

et définissons, dans l'intervalle (a, c), les fonctions $\chi_{\nu,m}(x)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, par les conditions suivantes:

1⁰ $\chi_{\nu,m}(x) = \widetilde{\psi}_{\nu,m}(x)$ dans l'intervalle (a, b).

2⁰ $\chi_{\nu,m}(x) = 0$ aux extrémités de tous les N' intervalles $\Delta_{\kappa,\kappa'}$.

3⁰ A l'intérieur de chacun des intervalles $\Delta_{\kappa,\kappa'}$ la fonction $\chi_{\nu,m}(x)$ conserve une des trois valeurs constantes

$$0, \quad \sqrt{\frac{N'}{b-a}\cdot|\alpha_{m,m'}|}, \quad -\operatorname{sign}\alpha_{m,m'}\sqrt{\frac{N'}{b-a}\cdot|\alpha_{m,m'}|}\ [1])$$

[1]) Nous désignons, suivant l'habitude, par sign x la fonction égale à $+1$ pour $x > 0$, à 0 pour $x = 0$ et à -1 pour $x < 0$.

correspondant aux trois cas possibles:

$$(m \neq K, m \neq K'), \quad (m = K, m \neq K'), \quad m \neq K, m = K').$$

Les fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$ sont ainsi définies dans tout intervalle (a, C).

Envisageons les intégrales

$$\int_a^C \chi_{\nu, m}(x) \cdot \chi_{\nu, m'}(x) dx, \quad m < m', \quad 1 \leqslant m \leqslant 2\nu, \quad 1 \leqslant m' \leqslant 2\nu.$$

Il est évident que dans tout intervalle $\Delta_{K, K'}$ différent de $\Delta_{m, m'}$, l'une au moins des deux fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$ et $\chi_{\nu, m'}(x)$ est égale à zéro, de sorte que

$$\chi_{\nu, m}(x) \cdot \chi_{\nu, m'}(x) = 0$$

dans $\Delta_{K, K'}$, sauf le cas où $m = K$, $m' = K'$.

En remarquant que la longueur de l'intervalle $\Delta_{m, m'}$ est égale à $\dfrac{b-a}{N'}$, on obtient alors, en vertu de (32) et de la définition des fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$:

$$\int_a^C \chi_{\nu, m}(x) \cdot \chi_{\nu, m'}(x) dx = \int_a^b \psi_{\nu, m}(x) \cdot \psi_{\nu, m'}(x) dx +$$

$$+ \int_{\Delta_{m, m'}} \chi_{\nu, m}(x) \cdot \chi_{\nu, m'}(x) dx = \alpha_{m, m'} - \operatorname{sign} \alpha_{m, m'} \cdot |\alpha_{m, m'}| = 0.$$

Cette identité prouve que les 2ν fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, sont deux à deux orthogonales dans l'intervalle (a, C).

Considérons l'intégrale

$$\int_a^C [\chi_{\nu, m}(x)]^2 dx.$$

En tenant compte de la définition des fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$, on obtient, en vertu de (32) et (23):

$$|\chi_{\nu, m}(x)| \leqslant \sqrt{\frac{N'}{b-a}} \; \varepsilon'$$

pour tous les points x de l'intervalle (b, C). Comme ε' tend vers zéro avec ε et l'entier N' est indépendant de ε, on peut choisir ε

assez petit, pour que l'intégrale

$$\int_b^c [\chi_{\nu, m}(x)]^2 dx$$

soit inférieure à

$$\frac{(b-a) \cdot C}{\nu (\lg \nu)^2}.$$

On obtient ainsi, en vertu de l'inégalité (29) et de la relation $c-a=2(b-a)$:

(33) $$0 < \int [\chi_{\nu, m}(x)]^2 dx < \frac{9(b-a) \cdot C}{\nu \lg \nu)^2} = \frac{(c-a) \cdot C'}{\nu (\lg \nu)^2},$$

$1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, où $C' = \frac{9 \cdot C}{2}$.

Numérotons les 2^N intervalles (x_{i-1}, x_i), $1 \leqslant i \leqslant 2^N$, définis dans le paragraphe précédent, et les N' intervalles $\Delta_{m, m'}$, $1 \leqslant m < m' \leqslant 2\nu$, dans l'ordre de croissance de leurs distances du points a et désignons les par $\delta_\nu^{(1)}, \delta_\nu^{(2)}, \delta_\nu^{(3)}, \ldots, \delta_\nu^{(s)}, \ldots$, $s \leqslant 2^N + N'$. On voit immédiatement que les 2ν fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, sont simultanément constantes dans chacun de ces intervalles.

Il est clair que l'ensemble E_ν, défini dans le paragraphe précédent, est formé de tous les points x compris dans certain nombre des intervalles $\delta_\nu^{(s)}$, et l'on voit, en vertu de l'inégalité (28) et de la relation $c-a=2(b-a)$, que

(34) $$\text{Mes } E_\nu = \tfrac{1}{16}(c-a).$$

Comme les fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$ coïncident, dans l'intervale (a, b), avec les fonctions $\widetilde{\psi}_{\nu, m}(x)$, il résulte, d'après la proposition démontrée à la fin du paragraphe précédent, que ces fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$ possèdent la propriété suivante:

En chaque point x de l'ensemble E_ν subsiste l'inégalité

(35) $$|\chi_{\nu, m}(x) + \chi_{\nu, m+1}(x) + \ldots + \chi_{\nu, 2\nu-1}(x)| > \tfrac{1}{2},$$

où m est un entier dépendant de x et vérifiant la condition: $1 \leqslant m \leqslant \nu$.

L'intervalle (a, b) étant arbitraire, (a, c) l'est aussi. Désignons ce dernier intervalle par Δ et soient $\chi_{\nu, m}(x, \Delta)$, $\delta_\nu^{(s)}(\Delta)$ et $E_\nu(\Delta)$ les fonctions $\chi_{\nu, m}(x)$, les intervalles $\delta_\nu^{(s)}$ et l'ensemble E_ν correspondant à cet intervalle Δ. En résumant les résultats de ce paragraphe, on voit qu'à chaque nombre entier et positif ν, $\nu \geqslant 2$, et à un intervalle arbitraire Δ correspondent les intervalles $\delta_\nu^{(s)}(\Delta)$, $s=1, 2, 3, \ldots$, l'ensemble $E_\nu(\Delta)$ et les 2ν fonctions $\chi_{\nu,m}(x, \Delta)$, $1 \leqslant m \leqslant 2\nu$, qui possèdent les propriétés:

(A) Les intervalles $\delta_\nu^{(s)}(\Delta)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, couvrent entièrement l'intervalle Δ sans empiéter l'un sur l'autre.

(B) L'ensemble $E_\nu(\Delta)$ est formé de tous les points x dans certain nombre d'intervalles $\delta_\nu^{(s)}(\Delta)$.

(34′) (C) $$\text{Mes } E_\nu(\Delta) = \tfrac{1}{16} \cdot \Delta\ ^{1)}.$$

(D) Les fonctions $\chi_{\nu,m}(x, \Delta)$ sont deux à deux orthogonales dans l'intervalle Δ.

(E) Les fonctions $\chi_{\nu,m}(x, \Delta)$ sont simultanément constantes dans chacun des intervalles $\delta_\nu^{(s)}(\delta)$.

(33′) (F) $$0 < \int_\Delta [\chi_{\nu,m}(x, \Delta)]^2 dx < \frac{\Delta \cdot C'}{\nu(\lg \nu)^2}, \quad 1 \leqslant m \leqslant 2\nu,$$

où C' est une constante absolue.

(G) En chaque point x de l'ensemble $E_\nu(\nu)$ subsiste l'inégalité

(35′) $$|\chi_{\nu,m}(x, \Delta) + \chi_{\nu,m+1}(x, \Delta) + \ldots + \chi_{\nu,2\nu-1}(x, \Delta)| < \tfrac{1}{2},$$

où m est un entier dépendant de x et vérifiant la condition: $1 \leqslant m \leqslant \nu$.

§ 7 A l'aide des fonctions $\chi_{\nu,m}(x, \Delta)$, définies dans le paragraphe précédent, on peut démontrer le théorème 2 dont l'énoncé a été donné dans § 3.

Démonstration. Soit $W(n)$ la fonction qui figure dans l'énoncé du théorème considérée, c'est-à-dire, une fonction positive arbitraire, assujetie à une seule condition:

(36) $$W(n) = o[(\lg n)^2].$$

En vertu de (36), on peut déterminer une suite de nombres entiers

$$\nu_1 = 0 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k < \ldots$$

vérifiant la condition:

(37) $$1 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_{k-1}) < \nu_k, \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

et tels que, pour $n \geqslant \nu_k$,

(38) $$\frac{W(n)}{(\lg n)^2} < \frac{1}{k^2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

[1]) Nous désignons aussi par Δ la longueur de l'intervalle Δ.

Nous commençons par définir, pour la fonction considérée $W(n)$, une série

(39) $$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qui diverge presque partout dans $(0, 1)$ et dont les termes sont deux à deux orthogonaux dans cet intervalle. Posons

$$N_0 = 0, \quad N_k = 1 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où $N_1 - N_0 = 1$, $N_k - N_{k-1} = 2\nu_k$, $k \geqslant 2$, et par suite, en vertu de (37):

(40) $$N_{k-1} < \nu_k, \quad N_k < 3\nu_k, \quad k \geqslant 2.$$

Répartissons les indices $n = 1, 2, 3, \ldots$ par groupes Γ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, dont chacun consiste de tous les indices n vérifiant l'inégalité

$$N_{k-1} < n \leqslant N_k.$$

Il est clair que le premier groupe Γ_1 est formé d'un seul indice 1.

Posons $\psi_1(x) = 1$, identiquement dans l'intervalle $(0, 1)$, ce qui définit le premier terme de la série (39) correspondant à l'indice appartenant au groupe Γ_1. Pour définir les fonctions correspondant aux indices n du groupe Γ_k, $k \geqslant 2$, nous supposons que les N_{k-1} fonctions $\psi_n(x)$, qui correspondent à N_{k-1} premiers indices appartenant aux groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{k-1}$, sont déjà définies et conservent des valeurs constates dans chacun des intervalles d'un système Σ_k obtenu par une subdivision convenable de l'intervalle $(0, 1)$.

Désignons respectivement par Δ' et Δ'' la moitié gauche et droite d'un intervalle arbitraire Δ du système Σ_k. Posons, pour les indices n du groupe Γ_k, $m = n - N_{k-1}$, d'où $0 < m \leqslant 2\nu_k$, et définissons, dans $(0, 1)$, les $2\nu_k$ fonctions $\psi_n(x)$, $N_{k-1} < n \leqslant N_k$, par les conditions suivantes:

1° $\psi_n(x) = +\chi_{\nu_k, m}(x, \Delta')$ à l'intérieur de chaque intervalle Δ'.

2° $\psi_n(x) = -\chi_{\nu_k, m}(x, \Delta'')$ à l'intérieur de chaque intervalle Δ''.

3° $\psi_n(x) = 0$ aux extrémités de tous les intervalles Δ' et Δ''.

En tenant compte de la propriété (E) des fonctions $\chi_{\nu, m}(x, \Delta)$ (§ 6), on voit immédiatement que les N_k fonctions $\psi_n(x)$, définies pour les indices n appartenant à k groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_k$, conservent simultanément des valeurs constantes dans chacun des intervalles d'un système Σ_{k+1}, obtenu de la même manière que Σ_k, et l'on peut évidemment supposer que chacun des intervalles du système Σ_{k+1} est compris dans l'un des intervalles $\delta^{(s)}_{\nu_k}(\Delta')$ ou $\delta^{(s)}_{\nu_k}(\Delta'')$ définis à la fin du § 6. A l'aide du système Σ_{k+1}, on obtient les fonctions $\psi_n(x)$ pour les indices du groupe Γ_{k+1} et ainsi de suite. En partant de la fonction $\psi_1(x)$ on définit ainsi les fonctions $\psi_n(x)$ pour tous les indices $n=1, 2, 3, \ldots$

Démontrons que toutes les fonctions $\psi_n(x)$ sont deux à deux orthogonales dans l'intervalle $(0, 1)$. Soit n et n' deux indices quelconques, $n \neq n'$; nous considérons séparément deux cas possibles:

1° n et n' appartient à un seul groupe Γ_k.

2° n et n' sont des indices de deux groupes différents Γ_k et $\Gamma_{k'}$, $k \neq k'$.

Posons, dans le cas 1°, $m=n-N_{k-1}$, $m'=n'-N_{k-1}$, d'où $m \neq m'$, $0<m \leqslant 2\nu_k$, $0<m' \leqslant 2\nu_k$. Il vient immédiatement, de la définition des fonctions $\psi_n(x)$,

$$\int_0^1 \psi_n(x)\,.\,\psi_{n'}(x)dx =$$

$$=\sum\Big[\int_{\Delta'} \chi_{\nu_k, m}(x, \Delta')\,.\,\chi_{\nu_k, m'}(x, \Delta')dx + \int_{\Delta''} \chi_{\nu_k, m}(x, \Delta'')\,.\,\chi_{\nu_k, m'}(x, \Delta'')dx\Big],$$

où la sommation doit être étendue à tous les intervalles Δ du système Σ_k et Δ', Δ'' sont les intervalles définis plus haut pour chaque intervalle Δ. Comme $m \neq m'$, on voit, en vertu de la propriété (D) des fonctions $\chi_{\nu, m}(x, \Delta)$, que chaque terme de la dernière somme est égal à zéro, d'où

$$\int_0^1 \psi_n(x)\,.\,\psi_{n'}(x)dx = 0, \tag{41}$$

c'est-à-dire, les deux fonctions $\psi_n(x)$ et $\psi_{n'}(x)$ sont orthogonales dans l'intervalle $(0, 1)$.

En passant au cas 2°, nous supposerons, pour fixer les idées, que $n > n'$ c'est-à-dire, $k > k'$. Comme l'indice n' appartient au groupe $\Gamma_{n'}$, on voit, de l'inégalité $k > k'$, que la fonction $\psi_{n'}(x)$ conserve une valeur constante, soit $\mu(\Delta)$, dans chacun des intervalles Δ du système Σ_k. On a donc, en vertu de la définition des fonctions $\psi_n(x)$:

$$\int_0^1 \psi_n(x) \cdot \psi_{n'}(x) dx =$$

$$= \sum \mu(\Delta) \cdot \Big[\int_{\Delta'} \chi_{\nu_k, m}(x, \Delta) dx - \int_{\Delta''} \chi_{\nu_k, m}(x, \Delta'') \, dx \Big],$$

où le signe de sommation Σ a la même signification que plus haut. Comme les intervalles Δ' et Δ'' ont la même longueur, chaque terme de la dernière somme est égal à zéro et, par suite, on obtient aussi dans le cas 2⁰ la relation (41). On voit ainsi que les fonctions $\psi_n(x)$ et $\psi_{n'}(x)$ sont orthogonales, quels que soient les deux indices différents n et n'.

Évaluons la valeur approchée, par excès, de l'intégrale

$$\int_0^1 [\psi_n(x)]^2 \, dx.$$

On peut écrire, en supposant que l'indice n appartient au groupe Γ_k, $k \geqslant 2$,

$$\int_0^1 [\psi_n(x)]^2 \, dx = \sum \Big\{ \int_{\Delta'} [\chi_{\nu, m}(x, \Delta')]^2 dx + \int_{\Delta''} [\chi_{\nu, m}(x, \Delta'')]^2 \, dx \Big\},$$

$m = n - N_{k-1}$, la sommation étant étendue à tous les intervalles Δ du système Σ_k. En désignant les longueurs des intervalles Δ' et Δ'' par les mêmes lettres, on obtient, en vertu de (33′), § 6,

$$0 < \int_{\Delta'} [\chi_{\nu_k, m}(x, \Delta')]^2 dx \leqslant \frac{\Delta' \cdot C'}{\nu_k (\lg \nu_k)^2},$$

$$0 < \int_{\Delta''} [\chi_{\nu_k, m}(x, \Delta'')]^2 dx \leqslant \frac{\Delta'' \cdot C'}{\nu_k (\lg \nu_k)^2}, \quad 1 \leqslant m \leqslant 2\nu_k,$$

et, par suite,

$$0 < \int_0^1 [\psi_n(x)]^2 \, dx \leqslant \frac{C'}{\nu_k (\lg \nu_k)^2}, \quad N_{k-1} < n \leqslant N_k, \quad k \geqslant 2, \tag{42}$$

puisque $\Delta' + \Delta'' = \Delta$ et $\Sigma \Delta = 1$, où $\Sigma \Delta$ est la somme des longueurs de tous les intervalles Δ du système Σ_k. On a de plus, en vertu de la définition de $\psi_1(x)$,

$$\int_0^1 [\psi_1(x)]^2 dx = 1. \tag{43}$$

Désignons par E_k la somme de tous les ensembles $E_{\nu_k}(\Delta')$ et $E_{\nu_k}(\Delta'')$ définis pour les intervalles Δ' et Δ'' correspondant aux intervalles Δ du système Σ_k. En vertu de (34'), § 6,

(44) $$\text{Mes}\, E_{\nu_k}(\Delta') = \tfrac{1}{16}\Delta', \quad \text{Mes}\, E_{\nu_k}(\Delta'') = \tfrac{1}{16}\Delta'',$$

et par suite, d'après les relations $\Delta' + \Delta'' = \Delta$, $\Sigma\Delta = 1$,

$$\text{Mes}\, E_k = \tfrac{1}{16}.$$

En vertu de la définition du système Σ_k, chaque intervalle Δ de ce système est une partie de l'un des intervalles $\delta^{(s)}_{\nu_{k-1}}(\Delta')$ ou $\delta^{(s)}_{\nu_{k-1}}(\Delta'')$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ En tenant compte de (44), on obtient facilement de cette dernière propriété des intervalles Δ et de la propriété (B) des ensemble $E_\nu(\Delta)$:

$$\text{Mes}\,(E_k + E_{k+1} + E_{k+2} + \ldots + E_{k+p}) = 1 - (1 - \tfrac{1}{16})^{p+1}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On a donc, en désignans par E l'ensemble limite complet des ensembles E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$:

(45) $$\text{Mes}\, E = 1.$$

En supposant que les indices n appartiennent au groupe Γ_k, considérons les valeurs des fonctions $\psi_n(x)$ aux points de l'ensemble E_k. Chaque point de cet ensemble doit appartenir à l'un des ensembles $E_{\nu_k}(\Delta')$ ou $E_{\nu_k}(\Delta'')$. Quand le point x considéré appartient à l'ensemble $E_{\nu_k}(\Delta')$, on a, en vertu de la propriété (G) des fonctions $\chi_{\nu, m}(x, \Delta)$,

$$|\chi_{\nu_k, m}(x, \Delta') + \chi_{\nu_k, m+1}(x, \Delta') + \ldots + \chi_{\nu_k, 2\nu_k - 1}(x, \Delta')| > \tfrac{1}{2},$$

où m est un entier convenablement choisi, compris entre 1 et ν_k. En tenant compte de la définition des fonctions $\psi_n(x)$, on obtient donc

$$|\psi_n(x) + \psi_{n+1}(x) + \ldots + \psi_{N_{k-1}+2\nu_k-1}(x)| > \tfrac{1}{2},$$

où $n = N_{k-1} + m$. Comme la même inégalité subsiste en tous les points des ensembles $E_{\nu_k}(\Delta'')$, on arrive à la conclusion suivante:

En chaque point de l'ensemble E_k subsiste l'inégalité

$$|\psi_n(x) + \psi_{n+1}(x) + \ldots + \psi_{n'}(x)| > \tfrac{1}{2}$$

pour les indices n et n' convenablement choisis qui vérifient la condition: $N_{k-1} < n < n'$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} N_{k-1} = \infty$, on en conclut facilement que la série (39) diverge en chaque point de l'ensemble E et, par suite, en vertu de (45), presque partout dans (0, 1).

On peut maintenant définir la série

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x)$$

qui figure dans l'énoncé du théorème 2. Soit

$$(46) \qquad a_n = \sqrt{\int_0^1 [\psi_n(x)]^2 dx};$$

en vertu de (42) et (43), $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Posons

$$\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{a_n}$$

dans l'ensemble E et

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}$$

en déhors de E. Il est clair que les fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, forment un système normé de fonctions orthogonales. La série (2), ainsi définie, diverge *partout* dans (0, 1), puisque elle est identique à la série (39), quand le point x appartient à l'ensemble E, et se réduit à la série

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots,$$

quand le point x est en dehors de cet ensemble.

Démontrons que la série à termes positifs

$$(13) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \cdot W(n)$$

converge, ou $W(n)$ est la fonction figurant dans l'énoncé du théorème 2. Il résulte, de (38), (40), (42) et (46).

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} a_n^2 \cdot W(n) = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} a_n^2 \cdot \frac{W(n)}{(\lg n)^2} \cdot (\lg n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (N_k - N_{k-1}) \cdot \frac{C'}{\nu_k \cdot (\lg \nu_k)^2} \cdot (\lg N_k)^2 \cdot \frac{1}{(k-1)^2} < \frac{C''}{(k-1)^2}, \quad k \geqslant 3,$$

où C'' est une constante absolue. On a, par suite,

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} a_n^2 \,.\, W(n) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} a_n^2 \,.\, W(n) < C'' \,.\, \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2}$$

ce qui prouve la convergence de la série (13). Le théorème 2 et, par suite, le théorème 3 se trouvent donc complètement démontrés.

Appelons *la fonction de M. Weyl* toute fonction positive $W(n)$ de l'argument entier n telle que la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \,.\, W(n)$$

implique la convergence presque partout de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \varphi_n(x),$$

quel que soit le système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ En rapprochant les théorèmes 1 et 2, on arrive a la conclusion suivante:

La fonction $W(n)$ est une fonction de M. Weyl, si

$$(\lg n)^2 = O[W(n)];$$

au contraire, *$W(n)$ n'est pas une fonction de M. Weyl, si*

$$W(n) = o[(\lg n)^2].$$