Sur les voisinages de deux figures homéomorphes.

Par

Louis Antoine (Rennes).

Cette note complète un mémoire paru dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées (1921, pages 221 à 326) sous le titre: *Sur l'homéomorphie de figures et de leurs voisinages* (Thèse, Strasbourg, 9 juillet 1921). J'ai résumé ici les principaux résultats de ce mémoire, renvoyant au texte pour les démonstrations.

1. **Introduction.** Etant données 2 figures homéomorphes F et f, situées dans le même espace ou dans des espaces E et e ayant le même nombre n de dimensions, est-il possible d'étendre la correspondance entre F et f à des points de E et e étrangers à ces figures, et plus spécialement à leurs *voisinages*? Voici, de façon précise, ce que j'entends par là: peut-on déterminer 2 nouvelles figures homéomorphes F_1, f_1, telles que tout point de F (ou de f) soit centre d'une sphère de rayon non nul dont tout l'intérieur appartienne à F_1 (ou f_1), et telles que la correspondance donnée entre F et f résulte (comme cas particulier) de la correspondance entre F_1 et f_1.

A priori, trois cas sont possibles:

Premier cas. On peut prendre pour F_1 la totalité de E et pour f_1 la totalité de e. Dans ce cas, je dis que *la correspondance entre F et f peut s'étendre à tout l'espace.*

Deuxième cas. On peut déterminer F_1 et f_1 sans qu'il soit possible de prendre pour ces figures tout E et tout e. Je dis alors que la *correspondance entre F et f ne s'étend qu'à leurs voisinages.*

Troisième cas. Il est impossible de déterminer F_1 et f_1. Nous disons alors que la *correspondance entre F et f ne s'étend à aucun voisinage.*

J'ai étudié, pour $n=2$ et pour $n=3$, les cas où F et f sont, soit des *courbes de Jordan sans point multiple* (toutes 2 ouvertes ou toutes 2 fermées), soit des *ensembles parfaits partout discontinus bornés.* Les résultats obtenus pour ces figures peuvent se résumer ainsi: *si* $n=2$, *on est toujours dans le premier cas; si* $n=3$, *les trois cas prévus se présentent effectivement.*

Je donnerai ici un *nouvel exemple* du troisième cas *pour les courbes de Jordan* de l'espace à trois dimensions. Je montrerai aussi que la *correspondance entre 2 ensembles parfaits discontinus de l'espace à n dimensions* ($n>2$) *peut s'étendre, en quelque sorte, à la moitié de l'espace*; ceci généralisera en partie la propriété des ensembles plans.

I. Les courbes de Jordan.

2. Je ne reviendrai pas sur les résultats très simples obtenus pour les courbes planes, ni sur leurs conséquences immédiates (Thèse, première partie, chapitre I). Les exemples que j'ai donnés des cas 2 et 3 pour les courbes gauches étaient de 2 sortes. Les uns se déduisent de l'étude des ensembles discontinus; nous en reparlerons plus loin Les autres résultent de l'étude des *courbes fermées tracées sur le tore*. Une telle courbe C, sans point multiple, est caractérisée topologiquement par 2 *nombres entiers* α, β, *qui sont ses coefficients d'enlacement avec l'axe et avec la circonférence lieu des centres des méridiens du tore, ou, si l'on veut, les nombres de tours que fait* C *autour de ces lignes.* J'ai montré que ces nombres sont premiers entre eux et que si l'un d'eux est 0, l'autre est 0 ou 1 *Pour que la correspondance entre* C *et une circonférence puisse s'étendre à tout l'espace, il faut et il suffit que l'un au moins des nombres* α, β *soit* 0 *ou* 1. Si cette condition n'est pas réalisée, on pourra toujours étendre la correspondance entre C et une circonférence à leurs voisinages. J'ai montré aussi que la possibilité d'extension de cette correspondance à tout l'espace est équivalente à l'existence d'une *calotte de surface simplement connexe sans point multiple ayant* C *pour frontière* (thèse, première partie. chap II, article III).

J'ai obtenu un exemple du cas 3 en condensant d'une certaine manière les singularités des courbes tracées sur le tore (thèse, première partie, chap. II, art IV). On se trouvait dans le cas 3 par suite de la présence, sur la courbe obtenue, d'un certain point singulier. En condensant les singularités d'une autre manière, je vais obtenir un nouvel exemple du cas 3. La différence avec l'exemple précédent est que la correspondance entre *tout arc de cette nouvelle courbe et un segment de droite rentre aussi dans le cas* 3.

3. Avant de donner cet exemple, je vais rappeler et généraliser quelques propriétés utilisées dans la démonstration.

Considérons, par exemple, la courbe C_2^3, tracée sur un tore de rayons R et $r (R > r)$, et ayant pour équations, en coordonnées semi-polaires,

$$\varrho = R + r \cos \tfrac{3}{2} \omega \quad z = r \sin \tfrac{3}{2} \omega.$$

Pour cette courbe, $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et, par suite, *elle n'est pas frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple.* Soient C_1 un arc suffisamment petit de C_2^3, d'extrémités $A_1 A_2$ et S_1 la sphère de diamètre $A_1 A_2$. *Si, dans* C_2^3. *on remplace l'arc* C_1 *par un arc quelconque de mêmes extrémités et intérieur à* S_1, *la nouvelle courbe obtenue n'est encore frontière d'aucune calotte simplement connexe sans point multiple,* (thèse, n^{os} 55 à 57) Partageons maintenant C_2^3 en k petits arcs $C_1 C_2 \ldots C_k$ par les points $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_1$, et soit S_i la sphère de diamètre $A_i A_{i+1}$. Remplaçons chaque arc C_i par un de mêmes extrémités et intérieur à S_i. *La nouvelle courbe obtenue n'est encore frontière d'aucune calotte simplement connexe sans point multiple.* La démonstration de cette généralisation se ferait en répétant sur chaque sphère S_i le raisonnement fait, dans ma Thèse, sur la sphère S_1, pour le cas précédent. Les arcs C_i seront suffisamment petits si les sphères S_i n'empiètent pas les unes sur les autres sauf, naturellement, en ce qui concerne 2 sphères consécutives. On pourra d'ailleurs les détormer légèrement au voisinage des points A_i, de manière que, dans le chapelet de surfaces obtenu, 2 surfaces non consécutives ne se touchent pas, et que 2 surfaces consécutives aient un seul point commun situé sur C_2^3.

4. Construisons maintenant l'exemple annoncé. Je pars de l'arc C_0, de l'espace à 3 dimensions, que définissent suffisamment la figure 1 et les indications qui suivent. C_0 est une *ligne polygonale* d'extrémités $A_0 B_0$ et ayant k cotés, tous égaux. C_0 est intérieur à une surface de révolution V_0 obtenue en faisant tourner l'angle $A_0 . \varphi B_0$ autour de $A_0 B_0$. *Si on ferme* C_0 *par une demi-circonférence de diamètre* $A_0 B_0$, *on obtient une courbe qu'on peut faire coïncider avec la courbe* C_2^3 *par déformation homéomorphe*[1]) *d'une portion de l'espace.*

[1]) J'appelle ainsi une déformation continue au cours de laquelle, la figure déformée reste constamment homéomorphe à elle-même.

On voit alors facilement, en faisant une inversion de pôle intérieur à V_0, que l'extérieur de V_0 joue par rapport à cette courbe fermée le rôle que jouait l'intérieur de la petite sphère S_1 par rapport à C_2^0, c'est à-dire que, si l'on ferme C_0 par un arc quelconque extérieur à V_0, on obtient une courbe *qui n'est la frontière d'aucune calotte simplement connexe sans point multiple.*

Remplaçons chaque coté $A_1 B_1$ de C_0 par un arc C'_1 de mêmes extrémités et déduit de C_0 par une similitude qui amènerait le segment $A_0 B_0$ sur le segment $A_1 B_1$. Cette même similitude transforme V_0 en une surface V_1. Nous obtenons ainsi k surfaces V_1 et C_0 est remplacé par une ligne polygonale C_1 ayant k^2 côtés Moyennant quelques précautions faciles, nous pouvons supposer que les surfaces V_1 sont intérieures au sens strict à V_0 (sauf en ce qui concerne les 2 surfaces V_1 extrêmes qui sont intérieures à V_0 au sens large), que deux surfaces V_1 non consécutives sont extérieures l'une à l'autre au sens strict. et que 2 surfaces V_1 consécutives sont extérieures et n'ont en commun qu'un sommet de C_0.

Remplaçons maintenant chaque côté $A_2 B_2$ de C_1 par un arc C_2^1 déduit de C_0 par une similitude qui amènerait le segment $A_0 B_0$ sur le segment $A_2 B_2$ Cette similitude transforme V_0 en une surface V_2. Nous obtenons ainsi k^2 surfaces V_2 et C_0 est remplacé par un arc polygonal C_2 de mêmes extrémités $A_0 B_0$ et ayant k^3 côtés.

Répétons cette opération indéfiniment. Nous obtenons ainsi une infinité de surfaces V comprenant k surfaces V_1, k^2 surfaces V_2... k^i surfaces V_i... Chaque surface V_i contient à son intérieur k surfaces V_{i+1}

La courbe que je cherche est l'ensemble Γ des points dont chacun est intérieur, au sens large, à une infinité des surfaces V Je vais montrer: 1° que Γ est un arc de Jordan sans point multiple; 2° que la correspondance entre un arc quelconque de Γ et un segment de droite ne peut s'étendre à aucun voisinage.

5. Montrons que Γ est homéomorphe au segment $\gamma(0 \leqq t \leqq 1)$ de l'axe des t Soit M un point de Γ: il est intérieur à une infinité de surfaces V On peut donc lui faire correspondre une suite de surfaces V_i comprenant une surface de chaque indice, la surface ayant l'indice i étant intérieure à celles d'indices inférieurs à i (ceci quel que soit i), M étant intérieur à toutes ces surfaces. Je dirai qu'une telle suite de surfaces V est du *type* S. Chaque suite du type S définit un point M unique de Γ, puisque le diamètre des

surfaces V_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$. A chaque point M de Γ correspondent une ou deux suites du type S, suivant que M n'est pas ou est sommet d'une des courbes C_i.

Affectons chaque surface V d'un numéro compris entre 0 et $k-1$ de la manière suivante: nous numérotons de 0 à $k-1$ les k surfaces V_i intérieures à une même surface V_{i-1} dans l'ordre où on les rencontre en décrivant C_i de A_0 vers B_0. Soit alors M un point de Γ. Considérons la suite du type S (ou l'une d'elles, s'il y en a deux) qui correspond à ce point et soient $p_1 p_2 \ldots p_i \ldots$ les numéros des surfaces $V_1 V_2 \ldots V_i \ldots$ de cette suite. Je fais correspondre à M le point m de γ dont l'abscisse t s'ecrit, dans le système de numération de base k, $t = 0, p_1 p_2 \ldots p_i \ldots$ Il est manifeste que, s'il correspondait à M 2 suites du type S, les 2 valeurs de t qu'on en déduirait seraient égales Inversement, à un point m de γ ayant pour abscisse $t = 0, p_1 p_2 \ldots p_i \ldots$ je fais correspondre le point M de Γ, défini par la suite du type S dont les surfaces $V_1 V_2 \ldots V_i \ldots$ sont numérotées $p_1 p_2 \ldots p_i \ldots$ Si t avait 2 représentations, les 2 suites du type S qu'on en déduirait fourniraient le même point M.

La correspondance ainsi établie entre Γ et γ est biunivoque et réciproque. Je dis qu'elle est continue. Supposons que le point m d'abscisse t tende vers m_0 d'abscisse t_0 et montrons que l'homologue M de m tend vers l'homologue M_0 de m_0. Si t_0 n'a qu'une représentation en fraction illimitée dans le système de base k, t et t_0 ont un certain nombre i de chiffres communs à partir de la virgule et ce nombre i augmente indéfiniment quand m tend vers m . M et M_0 sont alors intérieurs à une même surface V_i et, comme le diamètre des surfaces V_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$, M tend vers M_0 quand m tend vers m_0. Si t_0 avait 2 représentations, il faudrait envisager l'une ou l'autre, suivant que t est supérieur ou inférieur à t_0, mais le résultat subsiste.

Γ est donc bien un arc de Jordan sans point multiple.

On peut encore dire que *Γ est l'ensemble dérivé de l'ensemble des sommets des courbes E_i*, ou d'un ensemble obtenu en prenant un point à l'intérieur (au sens large) de chacune des surfaces V.

Notons encore que, si l'on considère une surface V_i provenant d'un côté $A_i B_i$ de la courbe C_i, *l'arc $A_i B_i$ de Γ est intérieu à V_i*, *et les deux arcs* A_0A_i, B_iB_0 *de* Γ *sont extérieurs à* V_i, l'un de ces deux derniers pouvant d'ailleurs être nul.

6. *Je dis que,* Γ' *étant un arc quelconque de* Γ, *sa correspondance avec un segment de droite* γ' *ne peut s'étendre à aucun voisinage.* Supposons qu'il en soit autrement et soient M et m 2 points homologues intérieurs de Γ' et γ'. Il existe une sphère de centre m, de rayon non nul, dont tout l'intérieur appartient au voisinage auquel la correspondance peut s'étendre. Dans cette sphère, on peut construire un demi-cerle σ (calotte simplement connexe sans point multiple) de centre m, limité par une demi-circonférence γ'' et son diamètre γ''' porté par γ'. Il lui correspond, dans l'espace de Γ une calotte de même nature Σ, dont la frontière G comprend un arc Γ''' de Γ et une courbe Γ'' ayant un écart non nul avec M, donc extérieure à une certaine sphère S de centre M. On peut alors déterminer un indice i assez levé pour que la surface V_i (ou l'une d'elles, s'il y en a deux) qui contient M soit intérieure à S. La frontière G de Σ est partagée par cette surface V_i en 2 parties: un arc A_iB_i intérieur à V_i et un arc extérieur à V_i. Le premier est partagé lui-même par les k surfaces V_{i-1} intérieures à V_i en k tronçons dont chacun est intérieur à une de ces surfaces. Si nous faisons la similitude qui fait passer de V_i à V_0, nous en déduisons une autre calotte Σ dont la frontière G a même disposition relativement à V_0 et aux k surfaces V_1.

Ceci est impossible En effet, l'extérieur de V_0 et les intérieurs des V_1 jouent, par rapport à la courbe C_0 fermée par une demi-circonférence, le rôle que jouaient les intérieurs des petites sphères $S_1 S_2 \ldots$ par rapport à la courbe C_2^3 du n° 3. La courbe G est alors du type de celles qui ont été envisagées au n° 3 et, par suite, elle ne peut pas être la frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple. Cette contradiction démontre la proposition.

7. On peut construire une *courbe fermée* ayant la même propriété. Il suffit de fermer C_0 par une ligne polygonale extérieure à V_0 et d'appliquer aux côtés de la ligne fermée obtenue les procédés de construction précédents. Je reviendrai, au n° 21, sur la courbe fermée Γ ainsi obtenue.

Notons encore *qu'un arc quelconque de* Γ *n'est situé sur aucune surface sans point multiple* (thèse, n° 58).

II. Les ensembles parfaits partout discontinus bornés.

8. L'étude de ces ensembles résulte du procédé de définition suivant.

Soit, dans l'espace à n dimensions, une infinité dénombrable de surfaces V (c'est-à dire de variétés fermées, sans point multiple, à $n-1$ dimensions; courbes pour $n=2$; intervalles pour $n=1$) classées par groupes constituant ce que j'appelle les surfaces d'ordres $1, 2, \ldots \lambda \ldots$ et ayant les propriétés suivantes:

a. *Quel que soit λ, il y a un nombre fini de surfaces d'ordre λ et ces surfaces sont extérieures les unes aux autres.*

b. *A l'intérieur de chaque surface d'ordre λ il y a au moins deux surfaces d'ordre $\lambda+1$, et chaque surface d'ordre $\lambda+1$ est intérieure à une surface d'ordre λ.*

c. *Le maximum du diamètre des surfaces d'ordre λ tend vers zéro avec $\frac{1}{\lambda}$.*

(Dans les conditions a et b, les mots intérieur et extérieur doivent être pris au *sens étroit*).

L'ensemble P *des points dont chacun est intérieur à une infinité des surfaces V est un ensemble parfait partout discontinu.* Les surfaces V, qui donnent ainsi naissance à P, s'appellent les *surfaces de définition de P.*

Ce procédé est *tout-à fait général*, en ce sens qu'il *permet définir tous les ensembles parfaits partout discontinus:* On peut même supposer que les V sont des *surfaces polygonales* dont *chacune a un nombre fini de sommets*, d'où il résulte immédiatement que *tout ensemble parfait partout discontinu est situé sur une courbe de Jordan sans point multiple.* [Pour tout ce numéro, voir Thèse, deuxième Partie, Chapitre I].

Le procédé que je viens de rappeler est particulièrement commode pour définir des ensembles parfaits discontinus ayant certaines propriétés; j'en donnerai des exemples dans les numéros suivants. Si on modifie convenablement les conditions a. b. c., on peut aussi obtenir par cette méthode des ensembles continus et même des lignes de Jordan: c'est ainsi, par exemple, que j'ai obtenu la courbe Γ du n° 4. Des procédés analogues ont été souvent employées par de nombreux Auteurs. On en trouve, en particulier, de fréquents exemples dans ce Journal.

9. Premier exemple: *ensemble discontinu dont toute projection est continue.* Soit, dans un plan, un hexagone régulier C_1 (courbe d'ordre 1). A son intérieur, considérons 13 hexagones réguliers C_2 (courbes d'ordre 2) disposés comme l'indique la figure 2, et tels que la projection de leur ensemble sur toute direction soit un segment. Dans chacun des hexagones C_2, nous construisons de même 13 hexagones C_3 de telle manière que la projection sur toute direction, de l'ensemble des 13^2 C_3 soit un segment de droite. Nous continuons ainsi indéfiniment, ce qu'il est manifestement possible de faire. On vérifie sans peine que l'ensemble parfait discontinu P défini par ces hexagones se projette sur toute direction suivant un segment (au moins égal à la projection de l'hexagone C_2 concentrique à C_1). On peut dire aussi que P est coupé par toute droite qui rencontre cet hexagone C_2. On peut construire 2 arcs de Jordan se coupant suivant P. On a ainsi un exemple de 2 courbes, n'ayant aucun arc en commun, et dont l'intersection se projette sur toute direction suivant un segment.

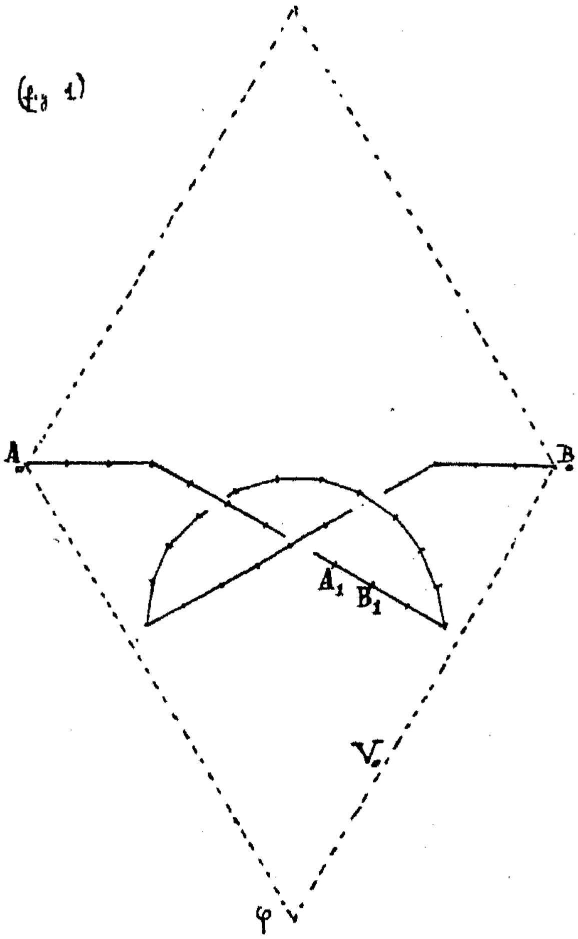
10. Deuxième exemple: *ensemble discontinu d'aire non nulle.* Soit, dans un plan, un carré C_1, courbe d'ordre 1. (fig. 3). A son intérieur, traçons 4 carrés C_2 (ordre 2), égaux entre eux et de cotés parallèles à ceux de C_1. Dans chaque carré C_2, nous construisons de même 4 carrés C_3 (d'ordre 3), et ainsi de suite indéfiniment. Soit P l'ensemble parfait discontinu défini par ces carrés. Nous supposerons que le carré C_1 a pour aire l'unité et nous désignerons par k_λ le rapport, à l'aire d'un carré $C_{\lambda-1}$, de l'aire de l'ensemble des 4 carrés C_λ qu'il contient ($k_\lambda < 1$). L'ensemble des $4^{\lambda-1}$ carrés C_λ a donc pour aire $k_2 k_3 \ldots k_\lambda$. On peut choisir les k_λ de manière que le produit infini $k_2 k_3 \ldots k_\lambda \ldots$ ait une valeur donnée Σ non nulle, inférieure à un. Σ est l'aire de P. En prenant, par exemple, $k_\lambda = 1 - 1/\lambda^2$, on a: $\Sigma = \frac{1}{2}$.

Traçons, entre C_1 et les 4 carrés C_2, les segments de droites indiqués en pointillé sur la figure et faisons de même entre chaque carré C_λ et les 4 carrés $C_{\lambda+1}$ qu'il contient, pour toutes les valeurs de λ. L'ensemble de ces segments et de P constitue un arc de Jordan sans point multiple (thèse, n° 72). En ajoutant à cet arc deux des côtés de C_1, on obtient une courbe fermée limitant un domaine non quarrable. Cet exemple de domaine non quarrable est tout à fait analogue à ceux qui on été donnés par MM. Lebesgue et Osgood.

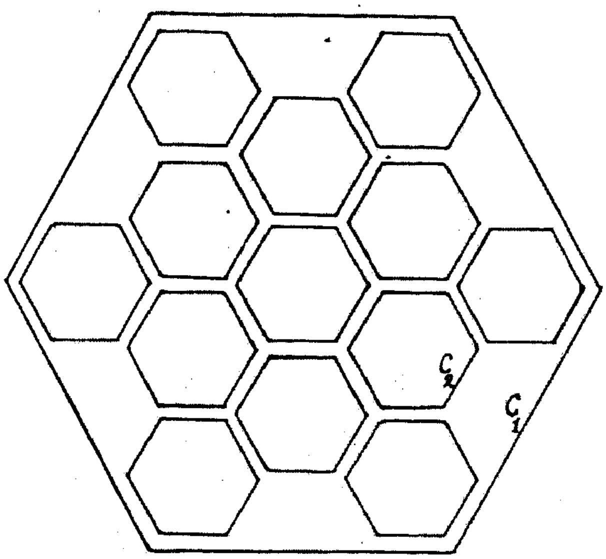
11. Troisième exemple. — Soit P_1 l'ensemble parfait discontinu de l'espace à 3 dimensions, dont les *surfaces de définition sont des*

tores ayant les dispositions suivantes: il y a un seul tore d'ordre 1; *à l'intérieur de chaque tore d'ordre λ, il y a k tores d'ordre $\lambda+1$, ces tores étant enlacés comme les anneaux d'une chaîne fermée qui ferait le tour de l'axe du tore d'ordre λ.* J'ai étudié cet ensemble

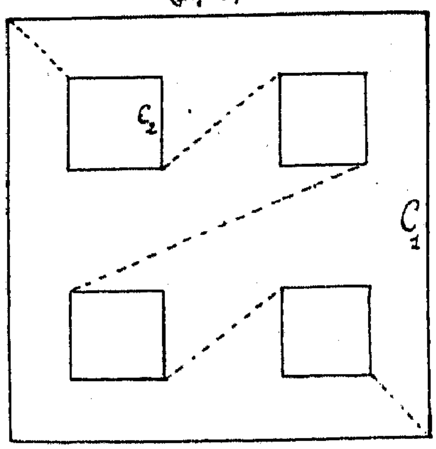
(fig. 1)



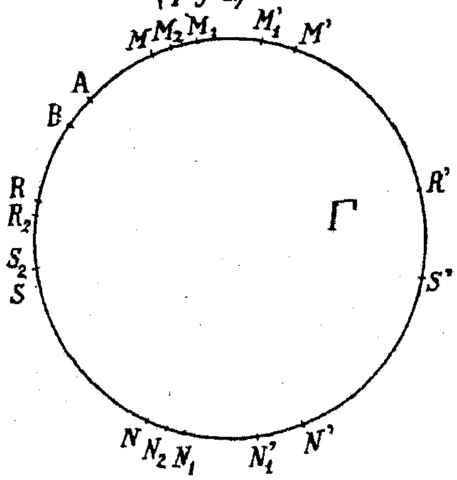
(fig. 2)



(fig. 3)



(fig. 4)



P_1 dans ma thèse (2[me] partie, chap. III) et j'ai montré qu'il avait les 2 propriétés suivantes, d'allure paradoxale:

1°. *si tous les points de P_1 ne sont pas dans une même région d'une surface simplement connexe sans point multiple, il y a des points* *de P_1 sur cette surface* (P_1 se comporte comme un continu vis-à-vis des surfaces simplement connexes);

2°. *toute calotte simplement connexe sans point multiple, dont la frontière est un méridien d'un des tores de définition de P_1, coupe P_1 suivant un ensemble ayant la puissance du continu.*

12. La considération des surfaces de définition des ensembles parfaits partout discontinus permet de prouver *que 2 tels ensembles, P et p sont homéomorphes* (thèse, n° 74). Voici un résumé de la démonstration.

Nous supposerons p rectiligne (le cas général s'en déduit immédiatement) et P donné par ses surfaces de définition V. Je construis pour p des intervalles de définition v et j'établis entre les V et les v, une correspondance telle que: 1° une surface V et un intervalle v homologues soient du même ordre; 2° deux surfaces quelconque, V, V', et les intervalles homologues, v, v' aient la *même disposition*, c'est-à-dire que si, par exemple, V est intérieur à V', v sera intérieur á v'. J'appelle *suite du type S*, une suite de surfaces V (ou d'intervalles v) comprenant une surface et une seule de chaque ordre et telles que chacune d'elles soit intérieures à celles dont l'ordre est moins élevé. Chaque suite du type S définit un point et un seul de l'ensemble, point qui est intérieur à toutes les surfaces de la suite. Inversement, à tout point d'un des ensembles, correspond une suite unique du type S. Or, il est manifeste que les intervalles homologues des surfaces V d'une suite du type S, forment aussi une suite du même type. *Je fais correspondre les points de P et p qui sont donnés par des suites homologues du type S, de surfaces V et d'intervalles v.* Cette correspondance réalise l'homéomorphie de P et p.

13. La méthode qui vient d'être résumée réalise une homéomorphie particulière entre p et P. Elle permet d'ailleurs d'en réaliser une infinité. Mais il n'est pas évident que, même en changeant de surfaces V et v, on puisse ainsi réaliser toutes les correspondances possibles entre P et p. *Je vais prouver qu'il en est cependant bien ainsi, sous la réserve que l'un au moins des ensembles soit considéré comme appartenant à un espace ayant au moins 2 dimensions.*

Soient donc P et p deux ensembles parfaits discontinus quelconques, l'espace de P ayant au moins 2 dimensions, et supposons que nous connaissons une correspondance biunivoque et continue (H) entre P et p. Je vais prouver qu'on peut déterminer pour ces ensembles des surfaces de définition polygonales V et v, se correspondant de façon que tout couple, M, m, de points de ces ensembles, obtenu par des suites homologues du type S des surfaces V et v, se corresponde par (H).

Nous supposerons les ensembles donnés par des surfaces de définition provisoires, U et u, polygonales. Sans diminuer la géneralité, nous pouvons admettre qu'il y a pour chacun des ensembles, une seule surface d'ordre 1, et nous les prendrons comme surfaces V et v d'ordre 1.

Construction des surfaces d'ordre 2. Supposons qu'il y ait α surfaces U d'ordre 2 que nous désignerons par $U_1, U_2, \ldots U_i \ldots U_\alpha$. Elles partagent P en α ensembles parfaits discontinus que nous désignerons de même $P_1, P_2 \ldots$ (P_i intérieur à U_i). A ces ensembles, (H) fait correspondre α ensembles de même nature p_i qui ont un écart mutuel non nul ε. Soit λ_2 un entier tel que les surfaces u d'ordre λ_2 aient un diamètre inférieur à ε. Les points de p intérieurs à une de ces surfaces ne pourront donc appartenir qu'à un même p_i. Ces surfaces décomposant p en ensembles partiels que nous pouvons noter p_i^k, l'indice k servant à distinguer les ensembles partiels appartenant à un même p_i. Nous appellerons u_i^k celle des surfaces u d'ordre λ_2 qui contient p_i^k et P_i^k l'homologue de p_i^k dans (H).

Nous pouvons de même déterminer un entier λ_2' tel que chaque surface U d'ordre λ_2' contienne des points de P appartenant à un seul des P_i^k. Considérons l'un particulier de ces ensembles P_i^k et supposons par exemple, qu'il soit contenu dans 3 surfaces U d'ordre λ_2' que j'appelle $U' U'' U'''$, surfaces qui sont intérieures à U_i. Joignons U' à U'', U'' à U''', par 2 lignes: polygonales, intérieures à U_i, extérieures à toutes les surfaces U d'ordre λ_2' et ne se coupant pas. Faisons de même pour toutes les valeurs de i et de k, en ayant soin d'éviter les lignes déjà tracées. Ces constructions sont possibles, même si l'espace de P n'a que 2 dimensions, ces lignes ne partageant pas en regions l'intérieur des U_i. Il n'en est pas de même si l'espace de P n'a qu'une dimension. Considérons la figure formée par les 3 surfaces $U' U'' U'''$ et les 2 lignes polygonales qui les joignent, et remplaçons ces lignes polygonales par des surfaces polygonales assez minces et très voisines d'elles. Moyennant quelques précautions très simples, on remplace ainsi cette figure par une surface polygonale sans point multiple que j'appellerai V_i^k, qui contient P_i^k et seulement cette portion de P, et qui est intérieure à U_i.

Je prendrai les surfaces V_i^k et les surfaces u_i^k comme surfaces V

et v d'ordre 2. Je ferai correspondre les surfaces V et v d'ordre 2 qui sont des surfaces V_i^k et u_i^k ayant mêmes indices. Deux surfaces V et v d'ordre 2 homologues contiendront donc des portions de P et p homologues dans (H).

Pour définir les V et v d'ordre 3, je pars des surfaces U d'ordre λ'_2 et je fais, à partir de ces surfaces, les constructions qui viennent d'être faites à partir des surfaces U d'ordre 2. Je continue ainsi indéfiniment.

Les surfaces v se déduisent des surfaces u par suppression de certains ordres. On conserve néanmoins une infinité de ces ordres et ceci suffit à prouver que les surfaces v définissent encore l'ensemble p. On peut dire de même que l'ensemble P est défini par les surfaces U des seuls ordres $1, 2, \lambda'_2, \lambda'_3 \ldots$ Remarquons qu'une surface V d'ordre $\varkappa$ est, par construction, intérieure à une surface U d'ordre $\lambda'_{\varkappa-1}$ et contient une surface U d'ordre $\lambda'_\varkappa$. Il en résulte que les V satisfont à la condition (c) du numéro 8 et, comme elles satisfont, par construction, aux conditions (a) et (b), elles définissent un ensemble parfait discontinu, P'. Cet ensemble P' coïncide avec P. En effet, par construction, tout point de P est intérieur à une infinité de surfaces V, donc appartient à P'; tout point de P' étant intérieur à une infinité de surfaces V, est, d'après la remarque faite plus haut, intérieur à une infinité de surfaces U, donc appartient à P.

Les V est v sont donc bien des surfaces de définition de P et p. Or, il est manifeste que la correspondance établie entre ces surfaces réalise (par le procédé du n° 12) la correspondance (H) entre P et p, puisque, ainsi que nous l'avons remarqué, une surface V et une surface v homologues contiennent des parties de P et p homologues dans (H). La proposition est donc établie.

Voici une conséquence immédiate de cette propriété. *Si P et p sont 2 ensembles plans, on peut étendre à tout le plan toute correspondance biunivoque et continue entre P et p* (cf thèse n° 75) et on peut réaliser cette extension par déformation homéomorphe d'une région bornée du plan (thèse n° 76). *Il en est de même, dans l'espace à 3 dimensions, pour toute correspondance entre 2 ensembles plans ou entre 2 ensembles sphériques, ou entre un ensemble plan et un ensemble sphèrique* (Cette dernière propriété se démontrerait en appliquant à ces ensembles les méthodes indiquées aux numéros 36, 37 et 38 de ma thèse).

14. J'ai montré (thèse, 2me partie, chap. III) qu'aucune correspondance entre l'ensemble P_1 du nº 11 et un ensemble rectiligne, ne peut être étendue à leurs voisinages. En combinant de deux manières différentes, 2 ensembles égaux à P_1, j'ai obtenu 2 ensembles dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace (thèse n_0 84).

Ces exemples montrent qu'il est inutile de chercher, pour un espace quelconque, une généralisation complète de la propriété simple des ensembles parfaits discontinus plans. On peut cependant généraliser en partie cette propriété au moyen de l'énoncé suivant:

15. **Théorème.** *Soient P et p 2 ensembles parfaits discontinus des espaces E et e à n dimensions ($n \geqq 2$). Etant donnée une correspondance biunivoque et continue entre P et p, on peut l'étendre à des régions non bornées E', e', limitées par des variétés W, w, contenant respectivement P et p, dont chacune est homéomorphe à un plan à $n-1$ dimensions.*

Je ferai la démonstration en supposant que p est un ensemble rectiligne, situé sur l'axe des x_1. Je prendrai pour w la variété $x_n=0$ et pour e' la: région $x_n \geqq 0$. L'intermédiaire de ce cas particulier donnerait immédiatement la démonstration du cas général.

16. Démonstration. Soit (H) une correspondance donnée entre P et p. Soient V et v les surfaces et intervalles de définition de ces ensembles (les V étant polygonales), construits comme il a été dit au numéro 13, et se correspondant de manière à realiser l'homéomorphie (H) entre P et p. Je supposerai qu'il y a une seule surface V_1 et un seul intervalle v_1 d'ordre 1.

Je décompose ainsi qu'il suit la région e'. A partir de chaque intervalle v, je construis un cube u, à n dimensions, de côtés parallèles aux axes de coordonnées, situé dans e', ayant une face τ à $n-1$ dimensions dans w, les extrémités de v étant les centres de 2 arêtes opposées, à $n-2$ dimensions, de cette face τ. La frontière de u comprend le cube τ et $2n-1$ autres cubes à $n-1$ dimensions, dont je désigne l'ensemble par σ. Je construis aussi un cube u', à $n-1$ dimensions, homothétique à u, un peu plus grand que u, ayant encore une face τ' dans w; j'appele σ' le reste de sa frontière. Je supposerai les cubes u' assez voisins des cubes u (u est intérieur à u') pour que l'ensemble des u' ait même disposition que l'ensemble des u.

La région e' est formée de 4 parties:

1°. L'ensemble p.

2°. Les portions telles que la région g comprise entre 2 cubes u et u' provenant du même intervalle v.

3°. Les portions telles que la région g' intérieure à un cube u (provenant d'un intervalle v d'ordre λ) et extérieure aux cubes u' fournis par les intervalles d'ordre $\lambda+1$ intérieurs à cet intervalle v.

4°. La portion g_1 de e' extérieure au cube u_1 fourni par l'intervalle unique v_1 d'ordre 1 (il n'y a pas lieu d'adjoindre un cube u' à cet intervalle).

Je vais maintenant construire dans E les homéomorphes de ces parties. A p, je fais naturellement correspondre P, les points homologues étant donnés par (H).

Pour le reste, je fait dans E les constructions suivantes. Soit V une surface de définition de P. Je lui fais correspondre un cube U, à n dimensions, extérieur à V, ayant une face à $n-1$ dimensions T intérieure à une face de V, assez petit pour que le reste Σ de sa frontière ne touche ni V (en dehors des points communs à T et Σ) ni aucune des autres surfaces de définition de P. Je fais en sorte aussi que tous les cubes U ainsi construits ne se touchent pas 2 à 2.

Soient alors V et v une surface et un intervalle homologues de l'ordre λ. Pour fixer les idées, supposons que V contienne à son intérieur 3 surfaces V^1, V^2, V^3 de l'ordre $\lambda+1$. v contiendra donc les trois intervalles v^1, v^2, v^3 et le cube u attaché à v contiendra les cubes $u^1, u^2, u^3, u'^1, u'^2, u'^3$ attachés à ces intervalles. Faisons correspondre U et u par une similitude donnant des orientations concordantes, T et τ, et par suite Σ et σ, se correspondant. J'appelle G' la région qui, dans cette similitude, correspond à la région g' comprise entre u, u'^1, u'^2, u'^3. G' sera donc fermé du cube U, diminué de 3 cubes que j'appelle $U'^1 U'^2 U'^3$; sa frontière sera formée de $\Sigma, \Sigma'^1, \Sigma'^2, \Sigma'^3$ et de T moins les 3 cubes à $n-1$ dimensions $T'^1 T'^2 T'^3$. Je détermine ainsi toutes les régions G' homéomorphes des régions g'.

Considérons maintenant la région g^1, comprise entre u'^1 et u^1. On décrit cette région en faisant une homothétie continue aménant σ'^1 sur σ^1. Faisons une transformation de même nature dans E. Les constructions précédentes ont établi une correspondance entre Σ'^1 et σ'^1, entre Σ^1 et σ^1. L'homothétie continue établit une correspondance entre Σ'^1 et Σ^1 qui, d'ailleurs, donne des orientations concordantes sur ces deux surfaces. On peut alors passer de Σ'^1 et Σ^1 (chaque point de Σ'^1 venant sur son homologue de Σ^1) par une déformation très simple de Σ'^1, en restant dans le domaine formé par l'intérieur de V, augmenté du cube U'^1 diminué des cubes U^1, U^2, U^3 et de l'intérieur des surfaces $V^1 V^2 V^3$. Dans cette déformation, Σ'^1 décrit un domaine G^1, homéomorphe de g^1, la correspondance entre G^1 et g^1 résultant de la comparaison de la déformation continue de Σ'^1 et de l'homothétie continue qui amène σ'^1 sur σ^1. Je définis de même G^2, en ayant soin dans sa construction, de ne pas rencontrer G^1, et G^3 en évitant G^1 et G^2. Je construis ainsi toutes les régions G correspondant aux régions g.

Il reste à construire la région G_1 homéomorphe de la région g_1 partie de e' extérieure à u_1. La surface V_1, d'ordre 1, comprend beaucoup d'arbitraire, nous pouvons supposer que le plan à $n-1$ dimensions qui contient T_1 n'a, en commun avec V_1, que la face qui contient T_1. Nous supposerons aussi que le cube U_1 est égal au cube u_1. La correspondance qui a été établie précédemment entre ces cubes, peut alors être réalisée par application. Dans cette application, la région g_1 vient sur une région qui ne contient aucun point ni de P, ni des régions G et G'. C'est cette région qui constituera G_1, les points homologues de G_1 et g_1 étant ceux qui coïncident dans l'application de u_1 sur U_1.

Nous avons ainsi construit une région E' et établi en même temps une correspondance biunivoque entre E' et e' *Il reste à montrer que cette correspondance est continue.* Elle l'est, manifestement, sauf, peut-être, sur P et p. Soient donc M_0, m_0 deux points homologues de P et p et M, m deux points homologues quelconques de E' et e'. Il suffit de prouver que, si m tend vers m_0, M tend vers M_0 et réciproquement. Des que m est assez voisin de m_0, il existe un ordre λ tel que cube u déduit de l'intervalle v d'ordre λ qui contient m_0, contienne aussi m. D'après les hypothèses et les constructions faites. M_0 est intérieur à la surface V correspondant à v, et M est intérieur à l'ensemble de la surface V et du cube U qui lui est attaché. Ces deux points sont donc intérieurs à une même surface d'ordre $\lambda - 1$. Si nous prenons pour λ la plus grande valeur possible, λ augmente indéfiniment quand m tend vers m_0, et, par suite, le diamètre de la surface d'ordre $\lambda - 1$ qui contient M et M_0 tend vers zéro. donc M tend vers M_0. La réciproque se démontre de manière analogue.

Le théorème est donc établi. La variété W sera l'homologue de w et elle contient naturellement P.

17. *Faisons quelques remarques sur la démonstration précédente*

On voit sans peine qu'elle est encore valable si $n=2$. Mais, dans ce cas, elle ne présente aucun intérêt, puisque nous savons qu'on peut étendre à tout le plan la correspondance (H) entre P et p. Le procédé ne s'applique plus pour $n=1$. Dans ce cas, la correspondance (H) pourra s'étendre à toute la droite si elle respecte l'ordre de succession des points de P et p, et seulement dans ce cas.

On peut donner une forme un peu différente à l'énoncé du n⁰ 15, en prenant pour E' et e' soit les intérieurs, soit les extérieurs de deux surfaces simplement connexes passant respectivement par P et p. Le cube u_1 et le domaine qui lui correspond dans E, donnent un exemple du premier cas. Pour donner un exemple du second cas, considérons, dans e, un cube u_0, situé dans la région $x_n \leqslant 0$, ayant une face à $n-1$ dimensions dans $x_n=0$ et ayant une grandeur et une disposition telles que, aprés l'application de u_1 sur U_1, il coïncide avec un cube U_0 contenant V_1 à son intérieur. Il suffira d'ajouter à e' la région e'_0 de $x_n<0$ extérieure à u_0, et, à E', la région sur laquelle vient s'appliquer e'_0 quand on applique u_1 sur U_1.

18. Voici quelques conséquences immédiates du théorème du n⁰ 15. Dans tout ce numéro, W_i et w_i désignent des variétés homéomorphes à un plan à i dimensions, S_i et s_i désignent des variétés homéomorphes à une sphère à i dimensions. Les ensembles P et e sont toujours supposés dans des espaces à n dimensions.

Théorème. *Etant donnée une correspondance (H) entre P et p, on peut faire passer par P une W_i, par p une w_i, telles qu'il soit possible d'étendre la correspondance (H) à la totalité de ces variétés, à la condition que $1 \leqq i \leqq n-1$ (ce qui exige $n \geqq 2$).*

Il suffira encore de démontrer ce théorème dans le cas particulier où p est un ensemble rectiligne, celui qui a été utilisé au n⁰ 16. On prendra alors pour w_i le plan $x_n=0, x_{n-1}=0, \dots x_{i+1}=0$. Pour construire les s_i, on envisage un cube à n dimensions, situé dans e' et dont une arête à une dimension contient p; on prendra pour s_i la frontière d'une face à $i+1$ dimensions de ce cube, la face en question contenant p. Les W_i et S_i seront les variétés homologues de la région E' définie au n⁰ 16.

Examinons quelques cas particuliers.

1⁰ $i=1$. Les variétés en question sont des courbes de Jordan, illimitées ou fermées. Etant donnée une correspondance (H) entre P et p, il existe donc de telles courbes, contenant respectivement P et p, à la totalité desquelles on peut étendre (H). Mais il peut exister d'autres courbes contenant ces ensembles; pour qu'on puisse étendre à leur totalité la correspondre (H), il faut et il suffit que cette correspondance respecte l'ordre de succession, sur ces courbes, des points de P et p.

2°. $i=2$. *Supposons qu'on ait par un procédé quelconque, construit une W_2 contenant P et une w_2 contenant p; on pourra toujours étendre à la totalité de ces variétés toute correspondance (H) entre P et p.* En effet, W_2 et w_2 sont, par définition, homéomorphe à un plan W'_2. Ces homéomorphies font correspondre à P et p, deux ensembles P' p' de W'_2. Les mêmes homéomorphies et (H) établissent une correspondance (H') entre P' et p'. Or (H') s'étend à la totalité de W'_2 (n° 13). Il en résulte entre W_2 et w_2 une correspondance qui est l'extension de (H). On aurait une démonstration analogue pour des S_2 et s_2.

3°. $3 \leqq i \leqq n-1$. Nous n'avons plus de propriété analogue pour des W_i, w_i (ou S_i, s_i) construites par des procédés quelconques. Il faut alors se borner aux variétés particulières du théorème précédent.

4°. $i=n$. Les S_i et s_i n'existent plus et W_i et w_i ne peuvent être que la totalité des espaces E et e. La correspondance (H) pourra s'étendre á la totalité de ces espaces si $n=2$. Elle pourra aussi s'étendre pour $n=1$ si elle respecte l'ordre de succession des points de P et p. Pour $n>2$, elle ne pourra pas, en général, s'étendre à tout l'espace, ni même aux voisinages des ensembles; mais nous savons, par l'énoncé du n° 15, à quelles régions on peut faire cette extension.

En résumé, le cas le plus favorable est celui de $i=2$. Dans ce cas, en effet, quelles que soient les W_2 et w_2 contenant respectivement P et p, on pourra étendre à leur totalité une correspondance (H) arbitraire entre P et p. Pour les autres valeurs de i ($i=1, 3, 4 \ldots n-1$) cette extension ne sera possible que pour des W_i et w_i spéciales et ces variétés dépendront même de la correspondance (H) qu'on se propose d'étendre. J'ai montré ceci pour $i=1$; en voici un exemple pour $i=3$. Soient, dans l'espace à 4 dimensions E_4, un plan à 3 dimensions W_3, et dans ce plan, un ensemble parfait discontinu P, somme de l'ensemble P_1 du n° 11 et d'un ensemble rectiligne P_2. Considérons de même dans e_4 un plan w_3 et, dans ce plan, un ensemble p égal à P et dont je désigne les 2 parties par p_1, p_2. La correspondance entre P et p résultant de leur égalité s'étend immédiatement à la totalité de W_3 et w_3. Soit (H) une autre correspondance entre P et p, dans laquelle P_1

a pour homologue p_2. Dans W_8 et w_8, cette correspondance (H) ne peut pas s'étendre (n° 14). Ces variétés W_8, w_8 valables pour une correspondance particulière entre P et p, ne sont donc pas valables pour toutes les correspondances possibles.

19. Nous allons appliquer les résultats généraux qui précèdent, à l'ensemble P_1, de l'espace à 3 dimensions, défini au n° 11. Les singularités de cet ensemble vont nous fournir quelques figures curieuses.

Soit S_1 une surface homéomorphe à une sphère et contenant P_1. Nous savons qu'il existe de telles surfaces. Or, en reprenant les constructions du n° 16, on constate immédiatement qu'on peut déterminer une telle surface S_1, intérieure au tore unique T_1 d'ordre 1 de P_1. En utilisant la propriété 2° de P_1, rappelée au n° 11, nous voyons que nous avons *une surface S_1, homéomorphe à une sphère, intérieure au tore T_1 et qui est coupée par toute calotte simplement connexe sans point multiple dont la frontière est un méridien de T_1.*

20. Utilisons maintenant le fait qu'aucune correspondance entre P_1 et un ensemble rectiligne p, ne peut etre étendue aux voisinages de ces ensembles. Il en sera d'ailleurs de même si p est un ensemble sphérique, puisque toute correspondance entre un ensemble rectiligne et un ensemble sphérique s'étend à tout l'espace (n° 18). Soient alors p un ensemble parfait discontinu situé sur une sphère s, et une correspondance biunivoque et continue (H) entre P_1 et p. On peut construire une surface S_1, homéomorphe à s, contenant P_1, telle que la correspondance (H) puisse s'étendre à la totalité de S_1 s et de leurs intérieurs (ou de leurs extérieurs). Mais cette correspondance ne pourra pas s'étendre aux voisinages de ces surfaces, au moins aux environs des points de P_1 et p.

On peut même dire que, S_1 étant une surface, construite de manière quelconque, homéomorphe à la sphère s, et contenant P_1, aucune correspondance (H) entre S_1 et s ne pourra etre étendue aux voisinages de ces surfaces. S'il en était autrement, on réaliserait ainsi, en particulier, l'extension à leurs voisinages, d'une correspondance entre P_1 et l'ensemble parfait discontinu sphérique que (H) fait correspondance à P_1. Cette extension est impossible, d'après ce qui a été dit au début de ce numéro.

Nous voyons donc *qu'il existe, dans l'espace à 3 dimensions, des surfaces homéomorphes (même simplement connexes), telles qu'aucune correspondance entre ces surfaces ne peut être étendue à leurs voisi-*

nages. Il est donc inutile de chercher, pour les surfaces de l'espace à 3 dimensions, une généralisation de la propriété des courbes planes. Remarquons que cette propriété des courbes planes a été obtenue (thèse, première partie, chap. I) à l'aide de très légères modifications de la démonstration que M. de Vallée-Poussin a donnée au théorème de Jordan sur les courbes planes fermées sans point multiple. Il est même probable que la plupart des nombreuses méthodes de démonstration données pour ce théorème, pourraient conduire au même résultat. Si on pouvait appliquer avec succés l'une ou l'autre de ces méthodes à la démonstration du théorème de Jordan pour les surfaces, on serait en droit d'espérer qu'elle prouverait aussi que toute correspondance entre surfaces homéomorphes (ou au moins l'une d'elles) peut être étendue aux voisinages de ces surfaces. Or, nous venons de voir que ceci n'est pas toujours possible. *Cette remarque explique, dans une certaine mesure, pourquoi la plupart des méthodes de démonstration du théorème de Jordan ont échoué quand on a essayé de les appliquer à un espace quelconque.*

21. Considérons de nouveau une surface S_1, homéomorphe à une sphère, contenant P_1 et sur cette surface une courbe fermée, sans point multiple, Γ_1, contenant P_1. Nos théorèmes généraux prouvent qu'on peut construire une telle figure. Puisque Γ_1 contient P_1, sa correspondance avec une circonférence ne peut s'étendre à aucun voisinage. A ce point de vue, la courbe Γ_1 est donc analogue à la courbe fermée Γ du n⁰ 7. Nous allons voir que cette analogie n'est qu'apparente et que cette propriété commune de Γ_1 et Γ tient, en réalité, à des propriétés très différentes de ces courbes.

D'après sa construction même, Γ_1 a les 2 propriétés:

(a). *Γ_1 est frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple* (par exemple, une des 2 régions que Γ_1 découpe dans S_1).

(b). *Il existe sur Γ_1 un ensemble parfait discontinu P_1 dont aucune correspondance avec un ensemble rectiligne ne peut être étendue à leurs voisinages.*

Nous avons déjà vu (n⁰ 7) que Γ a la propriété:

(c). *Il n'y a sur Γ aucun arc faisant partie de la frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple.*

Je vais maintenant prouver que Γ possède en outre la propriété:

(d). *On peut étendre à tout l'espace toute correspondace entre un ensemble parfait discontinu rectiligne p et un ensemble parfait discontinu quelconque P porté par Γ.*

Pour établir cette propriété, il me suffira de la prouver pour une correspondance particulière entre P et un ensemble rectiligne particulier p, puisque toute correspondance entre 2 ensembles rectilignes s'étend à tout l'espace (nº 13). *Voici alors en quoi consiste essentiellement la démonstration.*

La courbe Γ est obtenue en appliquant aux côtés d'une ligne polygonale fermée les constructions du nº 4. Ces constructions fournissent des surfaces V affectées d'indices $0\ 1\ 2 \ldots i \ldots$ ainsi qu'il a été dit à ce numéro. Je construirai, à partir de ces surfaces V, des surfaces de définition U pour l'ensemble donné P. Il y aura deux surfaces d'ordre 1 et, à l'intérieur de chaque surface d'ordre λ, deux surfaces d'ordre $\lambda+1$. L'ensemble p sera défini par des surfaces de définition u, qui seront des sphères ayant leurs centres en ligne droite. Il y aura 2 surfaces u d'ordre 1 et, à l'intérieur de chaque sphère u d'ordre λ, 2 sphères d'ordre $\lambda+1$. Je supposerai que les sphères d'un même ordre λ sont égales, de manière que le diamètre des sphères d'ordre λ tende vers zéro avec $1/\lambda$. J'établis entre les U et les u une correspondance telle que 2 surfaces homologues soient du même ordre et que 2 surfaces U aient même disposition que les 2 surfaces u homologues. Les u définissent un ensemble parfait discontinu rectiligne p; la correspondance établie entre les U et les u réalise une certaine homéomorphie (H) entre P et p, par le procédé indiqué au nº 12. C'est cette correspondance (H) qu'il s'agit d'étendre à tout l'espace. Cette extension se fera en utilisant les régions que les U et les u découpent dans les espaces de P et p. La démonstration que je vais donner ne sera qu'ébauchée. Sa mise au point ne présenterait aucune difficulté théorique, mais exigerait des explications qui allongeraient cette Note bien inutilement, à mon avis.

22. **Construction des U.** Marquons sur Γ deux arcs MM', NN' dont les extrémités seules appartiennent à P (figure schématique 4). On peut déterminer un indice i_1 assez élevé pour que, parmi les surfaces V de cet indice i_1, il y en ait 1º un qui contienne à son intérieur une partie de l'arc MM', les points M et M' lui étant extérieurs; 2º une qui ait la même propriété relativement à l'arc NN'. Conservons les surfaces V de cet indice i_1 qui touchent, soit l'arc MN, soit l'arc $M'N'$. Elles forment 2 chaînes séparées contenant respectivement des arcs M_1N_1, $M'_1N'_1$ de Γ. Dans une même chaîne, deux surfaces consécutives ont un seul point commun: je modifie légèrement ces surfaces aux environs de ces points, de manière que

chaque chaîne devienne une surface simplement connexe sans point multiple. Les 2 surfaces ainsi obtenues $U_1 U_1'$, contiendront respectivement à leurs intérieurs les arcs M_1N_1, $M_1'N_1'$, les extrémités de ces arcs étant seuls sur l'une, ou l'autre de ces surfaces. Ces 2 surfaces U_1, U_1' serons les 2 surfaces U d'ordre 1: leur ensemble contient P à son intérieur (au sens strict) et chacune contient effectivement des points de P.

Sur l'arc MN, je marque un arc RS dont les extrémités seules appartiennent à P. Je peux déterminer un indice $i_2 > i_1$ tel que, parmi les surfaces V de cet indice, il y en ait 1° une qui contienne à son intérieur une partie de l'arc $M_1 M$, les extrémités de cet arc lui étant extérieurs; 2° une ayant même propriété relativement à l'arc RS; 3° une ayant même propriété relativement à l'arc NN_1. Je conserve celles des surfaces V d'indice i_2 qui touchent, soit l'arc MR, soit l'arc SN. Elles forment deux chaînes séparées, contenant respectivement à leur intérieur, des arcs M_2R_2 et S_2N_2 de Γ. De ces chaînes, je déduis, comme plus haut, 2 surfaces simplement connexes sans point multiple, U_2, U_2' auxquelles j'impose la condition supplémentaire d'être intérieures, au sens strict, à U_1. Je construis de même 2 surfaces à partir de l'arc $M'N'$, d'un arc auxiliaire $R'S'$ et d'un indice i_2'. Ces quatre surfaces seront les surfaces U d'ordre 2: il y en a 2 à l'intérieur de chacune des surfaces U d'ordre 1; leur ensemble contient P à son intérieur et chacune contient effectivement des points de P.

Pour déterminer des surfaces U d'ordre 3, je pars de l'arc MR sur lequel je marque un arc AB dont les extrémités seules appartiennent à P. Je détermine l'indice i_3 par des conditions analogues aux précédentes où les arcs M_1M, RS, NN_1 seront remplacés par les arcs M_2M, AB, RR_2. Je continue ainsi indéfiniment.

Pour que les surfaces U ainsi construites constituent bien des surfaces de définition de P, il suffit que le diamètre maximum des surfaces U d'ordre λ tende vers zéro avec $1/\lambda$, les autres conditions étant réalisées par construction. Or, au premier stade de la construction. la partie de Γ qui contient P est décomposée en 2 arcs MN, $M'N'$; au deuxième stade, elle est décomposée en 4 arcs MR, SN, $M'R'$, $S'N'$; au troisième stade nous avons 8-arcs MA, BR,... Pour réaliser la condition précédente, il suffit que le diamètre maximum des 2 arcs obtenus au stade λ tende vers zéro avec $1/\lambda$, condition facile à remplir et que nous supposerons vérifiée.

L'ensemble p, les sphères u et la correspondance (H) entre P et p sont définis comme il a été dit plus haut (nº 21)

23. Extension de la correspondance (H) à tout l'espace. Les 2 surfaces d'ordre 1, U_1, U'_1 peuvent avoir une forme très compliquée, si l'indice i_1 qui servi à les construire, est assez élevé. Néanmoins, ces 2 surfaces sont la réunion d'un nombre fini de surfaces simples. On voit alors facilement qu'on peut faire une déformation homéomorphe de l'espace, déformation n'altérant qu'une région bornée, à la fin de laquelle ces 2 surfaces seront devenues des sphères. Il en résulte qu'il existe une correspondance (que nous pourrons choisir très simple) entre U_1 et son homologue u_1, entre U'_1 et son homologue u_1, qui s'étend, d'une part à toute la région extérieure à U_1 et U'_1, d'autre part à toute la région extérieure à u_1 et u'_1.

Envisageons maintenant les 2 surfaces d'ordre 2, U_2, U'_2, intérieures à U_1 et leurs homologues u_2, u'_2. On peut faire une déformation homéomorphe n'altérant que l'intérieur de U_1 et à la fin de laquelle U_2 et U'_2 seront des sphères Σ_2, Σ'_2. On peut ensuite faire une déformation homéomorphe, n'altérant qu'une région bornée extérieure à Σ_2 et Σ'_2 [1]), et à la fin de laquelle U_1 sera devenue une sphère. Il en résulte que la correspondance précédemment établie entre U_1 et u_1 s'étend, d'une part à toute la région comprise entre U_1, U_2 et U'_2, d'autre part à toute la région comprise entre u_1, u_2 et u'_2 (y compris les surfaces). Nous opérons de même à partir des 2 surfaces d'ordre 2 intérieures à U'_1.

Nous continuons ces opérations indéfiniment. Nous déformons chaque fois: 1º l'intérieur d'une surface d'ordre λ de manière que les 2 surfaces d'ordre $\lambda+1$ qu'elle contient deviennent des sphères Σ, Σ'; 2º une région bornée extérieure à Σ et Σ' de façon que la surface envisagée d'ordre λ devienne aussi un sphère. En adjoignant aux correspondances ainsi établies la correspondance (H) entre P et p, nous avons réalisé une correspondance biunivoque entre l'espace de P et celui de p. Cette correspondance est manifestement continue, sauf peut être aux points de P et p. Elles restent encore continues en ces points, parce que le diamètre maximum des surfaces U et u d'ordre λ tend vers zéro avec $1/\lambda$: le raisonnement a déjà été fait dans des circonstances analogues aux numéros 5 et 16.

[1]) Sous la réserve que Σ_2 et Σ'_2 soient convenablement placés dans P_1.

La propriété (d) *est ainsi démontrée.*

24. **Conclusion.** Il résulte de ceci que les courbes Γ et Γ_1 sont tout à fait différentes. Γ_1 a la propriété (a) et Γ la propriété contraire (c); Γ a la propriété (d) et Γ_1 a la propriété contraire (b). Ce sont d'ailleurs les propriétés (b) et (c) qui, dans chaque cas, ont servi à prouver que la correspondance entre la courbe considérée et une circonférence ne pouvait pas être étendue à leurs voisinages. Mais il semble peu probable que l'une ou l'autre de ces deux propriétés [ou une propriété moins restrictive que (c), mais de même nature] soit indispensable pour que la correspondance entre une courbe fermée et une circonférence ne puisse s'étendre à aucun voisinage. A défaut de condition nécessaire et suffisante, et pour faciliter la recherche de cette condition, il serait alors intéressant d'avoir un exemple d'une courbe possédant les propriétés (a) et (d) et dont la correspondance avec une circonférence ne peut s'étendre à aucun voisinage.