Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.

Par

Paul Urysohn †

(Suite) [1].

Ch. III. Les continus indécomposables. Construction de quelques exemples.

1. La construction de plusieurs exemples dont nous aurons à nous servir dans la suite [2], exige l'emploi de continus indécomposables [3]; quelques-uns de ces continus seront essentiellement différents de tous ceux qui ont été construits jusqu'à présent [4].

Or la démonstration de ce qu'un continu donné est inuécomposable est parfois fort difficile. La cause en est que les conditions nécessaires est suffisantes [5]) pour qu'un continu soit indécomposable, sont logiquement simples, mais assèz peu maniables en pratique.

[1]) Voir ce journal T. VII, p. 30—137.

[2]) Voir surtout la seconde partie de ce mémoire.

[3]) Voir pour la théorie des continus indécomposables deux articles des *Fund. Math.* (t. 1):

Z. Janiszewski et C. Kuratowski, Sur les continus indécomposables (p. 210), et

S. Mazurkiewicz, Un théorème sur les continus indécomposables (p. 35).

[4]) De tels continus ont été construits par Brouwer (*Math. Annalen* 68, 1910, pp. 423 sqq.), et ensuite par Janiszewski (Thèse, p. 36), Wada (voir le mémoire de Yoneyama, *Tôhoku Math. Journ.* XII, 1917, p. 60), Knaster (*Fund. Math.* III, p. 247) et Kuratowski (*Fund. Math.* III, pp. 210 et 216).

[5]) On trouvera toutes les conditions connues jusqu'à présent dans le travail cité de Janiszewski et Kuratowski (Théor. II, p. 212; Théor. IV, p. 215; Théor. VII, p. 219). Il est à remaiquer que le mot „composant" y est employé dans un sens entièrenent différent de celui que nous lui attribuons (voir la note suivante).

Nous établirons donc en premier lieu une condition plus maniable; elle sera suivie de quelques applications à la théorie de la dimension. La fin du chapitre est consacrée à quelques questions connexes.

2. Théorème. *Pour qu'un continu irréductible $\overline{ab}$ soit indécomposable il faut et il suffit qu'il contienne un sémicontinu S vérifiant les conditions suivantes:*

1) *S contient l'un des points finaux de $\overline{ab}$;*

2) *S est dense sur $\overline{ab}$;*

3) *son complément, $\overline{ab} - S$, est aussi dense sur $\overline{ab}$.*

La nécessité de cette condition est évidente; l'ensemble $\mathfrak{P}(a, \overline{ab})$ possède, en effet, toutes les propriétés requises [1]).

Démontrons la suffisance. On a, par hypothèse,

$$\overline{S} = \overline{(\overline{ab} - S)} = \overline{ab};$$

supposons, de plus, que ce soit le point a qui est agrégé à S: $a \subset S$. Envisageons l'ensemble $\mathfrak{P}(b, \overline{ab})$. Je dis que

$$S \times \mathfrak{P}(b, \overline{ab}) = 0. \tag{1}$$

Supposons, en effet, que cette égalité n'ait pas lieu, c. à d. qu'il existe un point x tel que

$$x \subset S \times \mathfrak{P}(b, \overline{ab}).$$

S étant un sémicontinu contenant les points a et x, il existe donc un $\overline{ax}$ agrégé à S [2]):

$$\overline{ax} \subset S;$$

on voit de même qu'il existe un $\overline{xb}$ tel que

$$\overline{xb} \subset \mathfrak{P}(b, \overline{ab}).$$

Or [3])

$$\overline{ax} + \overline{xb} = \overline{ab} = S + [(\overline{ab} - S)];$$

[1]) Janiszewski et Kuratowski, l. c. pp. 215, 219 et 221 (Théor. VII et VIII). $\mathfrak{P}(a\ K)$ est, par définition, l'ensemble des points x (du continu K) tels que K n'est pas un $\overline{ax}$ ($a \subset \mathfrak{P}(a, K)$); c'est évidemment un sémicontinu. Ce sont ces ensembles-là qui sont appelés „composants de K" dans le travail cité.

[2]) D'après la définition des sémicontinus et le théorème fondamental de Janiszewski et Mazurkiewicz sur l'existence des continus irréductibles (voir p. ex. la thèse de Janiszewski, p. 31).

[3]) Janiszewski, thèse, p. 40, Théor. III.

$\overline{ax}$ étant agrégé à S, il en résulte que

$$\overline{xb} \supset \overline{ab} - S,$$

$$\overline{xb} \supset \overline{ab - S} = \overline{ab},$$

donc

$$\overline{ab} \subset \overline{xb} \subset \mathfrak{P}(b, \overline{ab}).$$

Cette dernière relation est incompatible avec la définition de l'ensemble $\mathfrak{P}(b, \overline{ab})$: a ne peut appartenir à $\mathfrak{P}(b, \overline{ab})$. On voit ainsi que notre supposition est fausse; la formule (1) est démontrée.

Il en résulte que

$$\overline{ab} - \mathfrak{P}(b, \overline{ab}) \supset S,$$

$$\overline{[\overline{ab} - \mathfrak{P}(b, \overline{ab})]} \supset \overline{S} = \overline{ab} \supset \mathfrak{P}(b, \overline{ab}).$$

Or cette dernière relation entraîne l'indécomposabilité de $\overline{ab}$ [1]),

c. q. f. d.

3. Analyse logique de la condition du § 2. Il est évident que cette condition serait privée d'intérêt si on la considérait comme condition nécessaire; sa nécessité nous montre seulement qu'elle présente un critère d'indécomposabilité toujours appliquable. Par contre, cette même condition envisagée comme suffisante est la plus efficace de toutes les conditions nécesaires et suffisantes possibles. Plus précisément, elle ne contient aucune condition partielle superflue: si l'on supprime l'une quelconque des conditions partielles, la condition totale cesse d'être suffisante; le théorème devient inexact. C'est ce que nous allons montrer par des exemples.

1) Les conditions de densité de S et de son complément sont toutes les deux essentielles.

Soit, en effet, $\overline{ab}$ le continu bien connu composé du segment $S_1 = (-1, 1)$ de l'axe oy (dans E_2) et de l'image S_2 de la courbe $y = \sin\frac{1}{x}$ $\left(0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}\right)$; $a = (0, 0)$, $b = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ [2]). $\overline{ab}$ est irréductible; il est la somme de deux sémicontinus S_1 et S_2 sans points communs dont chacun contient un point final; l'un d'eux (S_2) est dense sur $\overline{ab}$. Néanmoins $\overline{ab}$ est décomposable.

2) La sémicontinuité de S est essentielle: le théorème serait en défaut si l'on remplaçait le mot »sémicontinu« par »ensemble connexe«.

[1]) Janiszewski et Kuratowski, l. c. p. 215, Théor. IV, condition (II).

[2]) Ce continu sera d'un usage perpétuel dans la seconde partie. Nous le désignerons simplement par „continu $\sin\frac{1}{x}$".

Exemple. Soient K et L deux continus indécomposables n'ayant qu'un seul point x en commun. Soit ensuite a un point de $K - \mathfrak{P}(x, K)$; b, un point de $L - \mathfrak{P}(x, L)$. K est un $\overline{\overline{ax}}$, L un $\overline{\overline{xb}}$; $K + L$ est donc un $\overline{\overline{ab}}$ [1]). L'ensemble

$$S = a + \mathfrak{P}(x, K) + \mathfrak{P}(x, L) + b$$

est connexe car $\mathfrak{P}(x, K) + \mathfrak{P}(x, L)$ est un sémicontinu, donc un ensemble connexe, et

$$\mathfrak{P}(x, K) + \mathfrak{P}(x, L) \subset S \subset \overline{\overline{ab}} = K + L = \overline{\mathfrak{P}}(x, K) + \overline{\mathfrak{P}}(x, L)\ ^{2)}.$$

S contient les deux points finaux de $\overline{\overline{ab}}$; S et $\overline{\overline{ab}} - S$ sont denses sur $\overline{\overline{ab}}$, car $S \supset \mathfrak{P}(x, K) + \mathfrak{P}(x, L)$, et $\overline{\overline{ab}} - S$ contient une infinité indénombrable d'autres $\mathfrak{P}(y, k)$ et $\mathfrak{P}(z, L)$ [3]). Cependant $\overline{\overline{ab}}$ est décomposable.

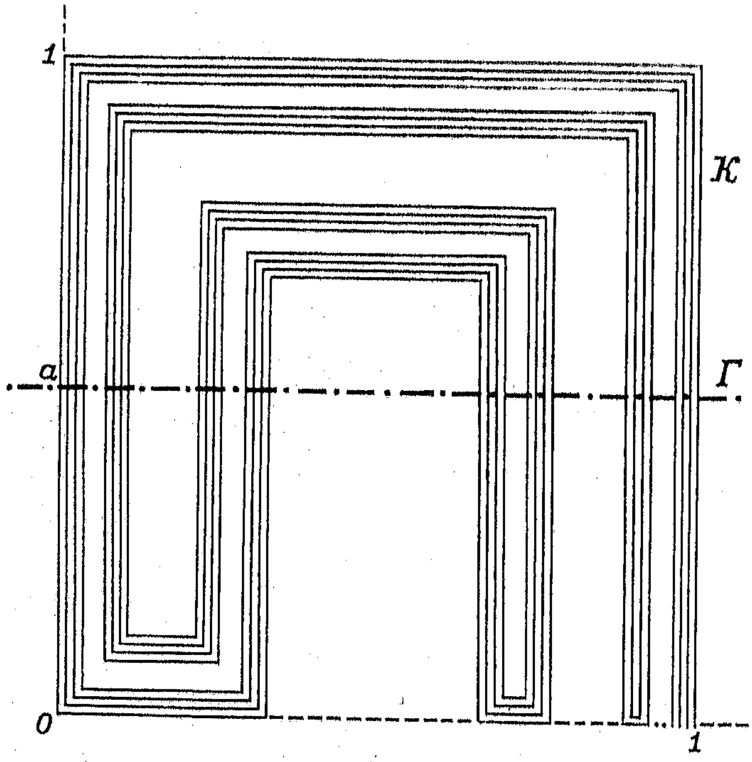

Fig. 6.

3) Le théorème est encore en défaut si l'on ne suppose pas que S contient un point final de $\overline{\overline{ab}}$. Il y a même plus: un continu irréductible décomposable peut contenir une infinité indénombrable de sémicontinus denses sans points communs deux à deux (les compléments de ces sémicontinus sont donc denses eux aussi).

[1]) Janiszewski, thèse, p. 40, Théor. IV.

[2]) Hausdorff, p. 246, IV; Janiszewski et Kuratowski, l. c. p. 221, Théor. VIII (relation $\overline{\mathfrak{P}(x, K)} = K$).

[3]) Ibid. p. 219.

Exemple (dans E_3). Soit K le continu indécomposable de Brouwer—Janiszewski[1]. Supposons-le situé dans le plan $0xy$, son carré fondamental étant le carré $(0, 1)$; la base de ce carré est située sur $0x$. La droite

$$\Gamma = \left(y = \frac{1}{2},\ z = 0\right)$$

possède les propriétés suivantes:

α) $\Gamma \times K$ est l'ensemble parfait discontinu Cantorien;

β) Chacun des ensembles $\Gamma \times \mathfrak{P}(w, K)$ est dénombrable. En particulier l'ensemble $\Gamma \times \mathfrak{P}(a, K)$, $a = \left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ est l'ensemble des points de première espèce de $\Gamma \times K$.

Soit Π un ensemble parfait contenu dans

$$\Gamma \times K - \mathfrak{P}(a, K);$$

l'ensemble des $\mathfrak{P}(w, K)$ qui ont des points communs avec Π, cet ensemble a évidemment la puissance du continu[2]; nous le désignerons par $\mathfrak{M}$.

Soit $p(x, y, 0)$ un point quelconque de K. Envisageons la transformation biunivoque

$$p(x, y, 0) \sim q(x, y, z),$$
$$z = \varrho(p, \Pi).$$

La fonction $\varrho(p, \Pi)$ étant continue, on voit donc que le transformé L de K est homéomorphe à K; c'est un continu indécomposable. On voit d'ailleurs immédiatement que $K \times L = \Pi$.

Soit b le transformé de a: $b = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \varrho(a, \Pi)\right)$. Je dis que $K + L$ est un $\overline{\overline{ab}}$.

Démonstration. Soit C un continu quelconque agrégé à $K + L$ et contenant les points a et b. On a

$$H(K - \Pi,\ L - \Pi) \subset (K - \Pi) \times L + (L - \Pi) \times K = K \times L - \Pi = 0;$$

donc

$$C - \Pi = (C \times K - \Pi) + (C \times L - \Pi), \quad a \subset C \times K - \Pi, \quad b \subset C \times L - \Pi;$$
$$H((C \times K - \Pi),\ (C \times L - \Pi)) = 0.$$

Il en résulte que

$$Comp_a(C - \Pi) \subset K, \quad Comp_b(C - \Pi) \subset L.$$

[1]) Janiszewski, thèse. p. 36; comp. Brouwer, *Math. Ann.* 68, p. 423.

[2]) Cette puissance peut même être rendue effective par un choix convenable de Π. On peut, en effet, s'arranger de façon que Π ne possède aucun couple de points tels que leur distance mutuelle soit rationnelle. En ce cas chaque $\Pi \times \mathfrak{P}(w, K)$ non-vide sera constitué d'un seul point.

Or chacun de ces composants a des points-limites agrégés à Π [1]. Soit donc m un point de

$$\Pi \times \overline{Comp_a}\,(C-\Pi);$$

m est étranger à $\mathfrak{P}(a, K)$, donc K est un $\overline{am}$. Or $\overline{Comp_a}\,(C-\Pi)$ est un continu agrégé à K et contenant les points a et m; par conséquent

$$\overline{Comp_a}\,(C-\Pi) = K.$$

On voit de même que

$$\overline{Comp_b}\,(C-\Pi) = L.$$

Il en résulte que

$$C \supset \overline{C-\Pi} \supset \overline{Comp_a}\,(C-\Pi) + \overline{Comp_b}\,(C-\Pi) = K + L;$$

$K + L$ est donc un $\overline{ab}$, c. q. f. d.

$\overline{ab}$ est décomposable. Il contient cependant une infinité indénombrable de sémicontinus denses sans points communs deux à deux; ce sont notamment les sémicontinus

$$\mathfrak{P}(w, K) + \mathfrak{P}(w, L)$$

tels que $\mathfrak{P}(w, K) \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$

4) Un continu irréductible décomposable peut donc contenir des sémicontinus denses sans points communs deux à deux; il ne peut cependant être une somme de tels sémicontinus (il résulte, en effet, du théorème du § 2 qu'un point final du continu donné doit être étranger à tous ces sémicontinus).

Or même une telle circonstance peut devenir possible dans le cas de continus réductibles. On voit donc à quel point la condition d'irréductibilité est essentielle pour la validité de notre théorème.

Exemple. Soit K un tétraèdre (solide) aux sommets a, b, c, d. C'est un continu réductible entre tout couple de ses points. Je dis qu'il peut être décomposé en une somme de sémicontinus ayant les propriétés tout-à-l'heure annoncées; de plus la puissance $\mathfrak{a}$ de l'ensemble de ces sémicontinus peut être fixée à volonté ($\mathfrak{a} = 2, 3, \ldots, n, \ldots; \aleph_0; \mathfrak{c}$).

Soit, en effet, $\{\xi\}$ un ensemble d'indices de puissance $\mathfrak{a}$; décomposons l'arête $\overline{cd}$ en $\mathfrak{a}$ ensembles C_ξ denses sur cette arête et sans points communs deux à deux [2]; de même, décomposons $\overline{ab}$ en $\mathfrak{a}$ ensembles A_ξ [3]. Soit ensuite x un point quelconque de $\overline{cd}$; désignons par Π_x le plan déterminé par a, b et x. L'ensemble

$$S_\xi = \left[\sum_{x \subset C_\xi} (K \times \Pi_x) - \overline{ab}\right] + A_\xi$$

[1]) D'après le théorème général suivant: C étant un continu, Π un ensemble fermé, tout composant de $C-\Pi$ a des points-limites agrégés à Π. On en trouvera la démonstration dans la seconde partie de ce mémoire.

[2]) Une telle décomposition est triviale quand $\mathfrak{a} \leqslant \aleph_0$; on trouvera une décomposition en $\mathfrak{c}$ ensembles dans le mémoire „Sur les ensembles connexes" de MM. Knaster et Kuratowski (*Fund. Math.* t II, p. 252).

[3]) Les A_ξ ne sont pas nécessairement denses sur $\overline{ab}$.

est un sèmicontinu car tout couple de ses points peut être réuni par une ligne polygonale contenue dans S_ξ et composée de deux segments au plus. Or les S_ξ sont sans points communs deux à deux, et l'on a

$$\overline{S_\xi} = K,$$

$$K = \sum_\xi S_\xi, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. Une première application du théorème du § 2 permet de démontrer que les continus de M. Wada sont, dans des cas étendus, réellement indécomposables [1]). En effet, le „bord"

[1]) Ces continus sont définis comme il suit (Yoneyama, l. c. p. 60):

„Suppose that there is a land surrounded by sea, and that in this land there is a fresh lake. Also suppose that, from these lake and sea, canals are built to introduce the waters of them into the land according to the following scheme.

Let

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} \ldots$$

be a sequence of positive numbers, monotonously converging to zero, namely let

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \ldots$$

and

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

On the first day, a canal is built from the lake, such that it does not meet the sea-water, and the shortest distance from any point of the shore of the sea to that of the lake and canal does not exceed ε_1. The end point of this canal is denoted by L_1.

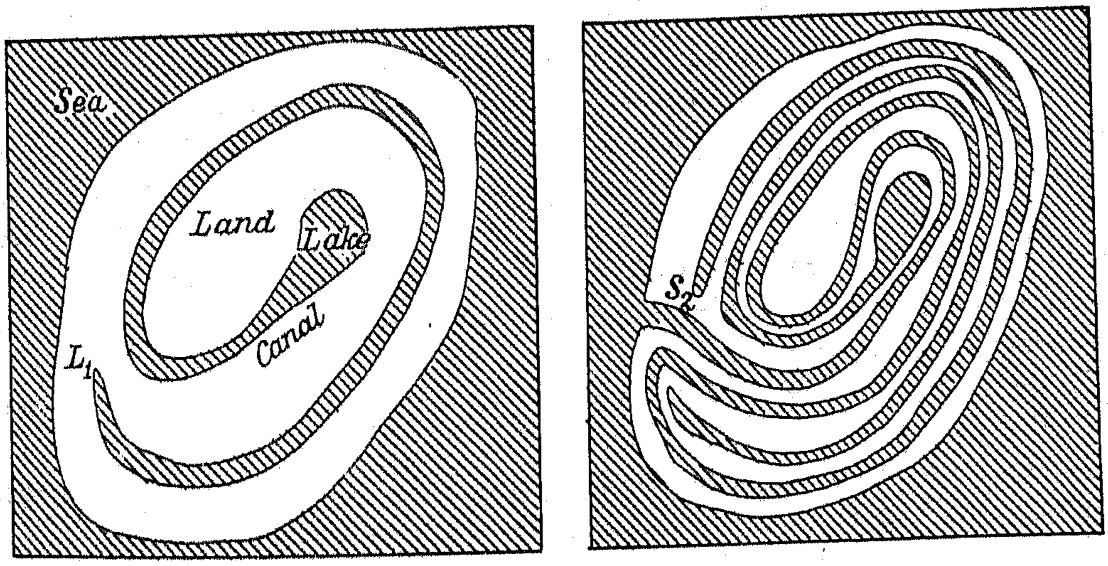

Fig. de M. Wada.

On the second day, a canal is built from the sea, never meeting the fresh water of the lake and canal constructed the day before, and the work is continued until the shortest distance from any point of the shore of the lake and canal total[1]) de la „mer„ et des „canaux maritimes" est évidemment un sémicontinu dense sur le continu K de M. Wada; de même pour chacun des „lacs". Il suffit donc de démontrer que K est irréductible, et que l'un au moins de ses points finaux appartient au „rivage" [2]). Or l'irréductibilité peut être aisément obtenue à l'aide d'une distribution convenable des canaux [3]); je ne précise d'ailleurs ici ni cette distribution, ni la marche de la démonstration, car elles sont entièrement analogues à celles que nous examinerons en détail dans d'autres cas.

Les continus de M. Wada sont très maniables et peuvent être utilisés avec profit comme éléments de construction de continus à propriétés diverses, et surtout dans la théorie des domaines plans.

La première application est basée sur les propriétés suivantes de K:

1) le „rivage" contient des arcs simples entièrement arbitraires;

2) tout point du „rivage" est accessible;

3) ces points accessibles n'appartiennent pas tous à un même $\mathfrak{P}(a, K)$ [4]).

---

filled with fresh water to that of the sea and canal filled with salt water does not exceed ε_2. The end point of this canal is denoted by S_2.

On the third day, the work is begun from L_1, never cutting the canals already built, and the work is continued until the shortest distance from any point on the shore of the sea and canal filled with salt water to that of the lake and canal filled with fresh water does not exceed ε_3. The end point of this canal is denoted by L_3.

Now it is clear that we can continue the work day by day in the alove way, by adequately narrowing the breadth of the canals, since the land is always semicontinuous at the end of the work of every day. If we proceed in this way indefinitely, we get at last an everywhere dense set of waters, fresh and salt, which never mingle together at any place. Now denote by M_l the shore of the lake and canal filled with fresh water, and by M_s that of the sea and canal filled with salt water, and by M_p the set of limiting points of M_l and M_s, not contained in them. Then the sum of M_l, M_s, and M_p forms a continuous set..."

„If we suppose that there are many lakes in the land, we may obtain by the similar method a continuous set..."

[1]) Nous entendons par là l'ensemble des point accessibles du côté de la „mer".

[2]) Ensemble de tous les points accessibles.

[3]) Je ne sais d'ailleurs si la construction de M. Wada fournit toujours (la distribution des canaux étant quelconque) des continus indécomposables.

[4]) On trouvera d'autres continus indécomposables et irréductibles entre deux points *accessibles* dans les travaux cités (note du § 1) de MM. Brouwer, Knaster et Kuratowski. Ces exemples montrent que les continus en question peuvent aussi ne pas découper le plan.

Quant à la seconde application, les complications suivantes qu'on peut apporter à la définition de K, peuvent être utiles dans certains cas:

1) on peut admettre une infinité dénombrable de „lacs", à condition qu'ils convergent p. ex. vers un seul point-limite;

2) certains „lacs" (et même tous) peuvent être privés de „canaux";

3) d'autres „lacs" en peuvent avoir plusieurs ou même une infinité dénombrable;

4) certains „canaux" peuvent avoir une longueur finie.

5. L'application principale du théorème du § 2 que nous avions en vue, est la construction d'un continu indécomposable F qui est une frontière régulière dans E_3. F est donc, selon notre terminologie, une surface Cantorienne.

Cet exemple nous montre la différence essentielle qui subsiste entre les notions „continu irréductible" et „ligne (Cantorienne) irréductible", notions qui coïncident dans le cas des continus plans.

Construction. Rangeons les points rationnels de E_3 en une suite infinie

(2) $$r_1,\ r_2, \ldots,\ r_i, \ldots$$

Remarquons qu'un polyèdre est complètement défini par ses faces; une face, par ses côtés (arêtes du polyèdre); une arête, par ses extrémités (sommets du polyèdre). On voit donc que les polyèdres à sommets rationnels sont en infinité dénombrable; de même, ceux de ces polyèdres qui sont de genre 0 [1]); rangeons donc ces derniers polyèdres en une suite déterminée

(3) $$P_1,\ P_2, \ldots,\ P_k, \ldots,$$

Soit enfin

(4) $$S_1,\ S_2, \ldots,\ S_j, \ldots$$

l'ensemble de toutes les sphères à centre et rayon rationnels.

Nous définissons par induction une suite de solides

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_m \supset \ldots$$

dont chacun est limité par deux polyèdres de genre 0 sans points

[1]) Nous ne nous servirons dans cet exemple (§§ 5—8) que de polyèdres de genre 0. Cette condition sera sous-entendue partout où le contraire n'est pas explicitement mentionné.

communs. V_m est limité par I_m et K_m; il divise l'espace en deux domaines connexes; le domaine intérieur G_m ayant I_m pour frontière, et le domaine extérieur H_m limité par K_m.

V_0 est un solide arbitraire satisfaisant aux conditions ci-dessus.

Supposons V_m défini; considérons d'abord le cas de m pair. Soit S_{j_m} la première sphère de la suite (4) à indice $\geqslant m$ qui a des

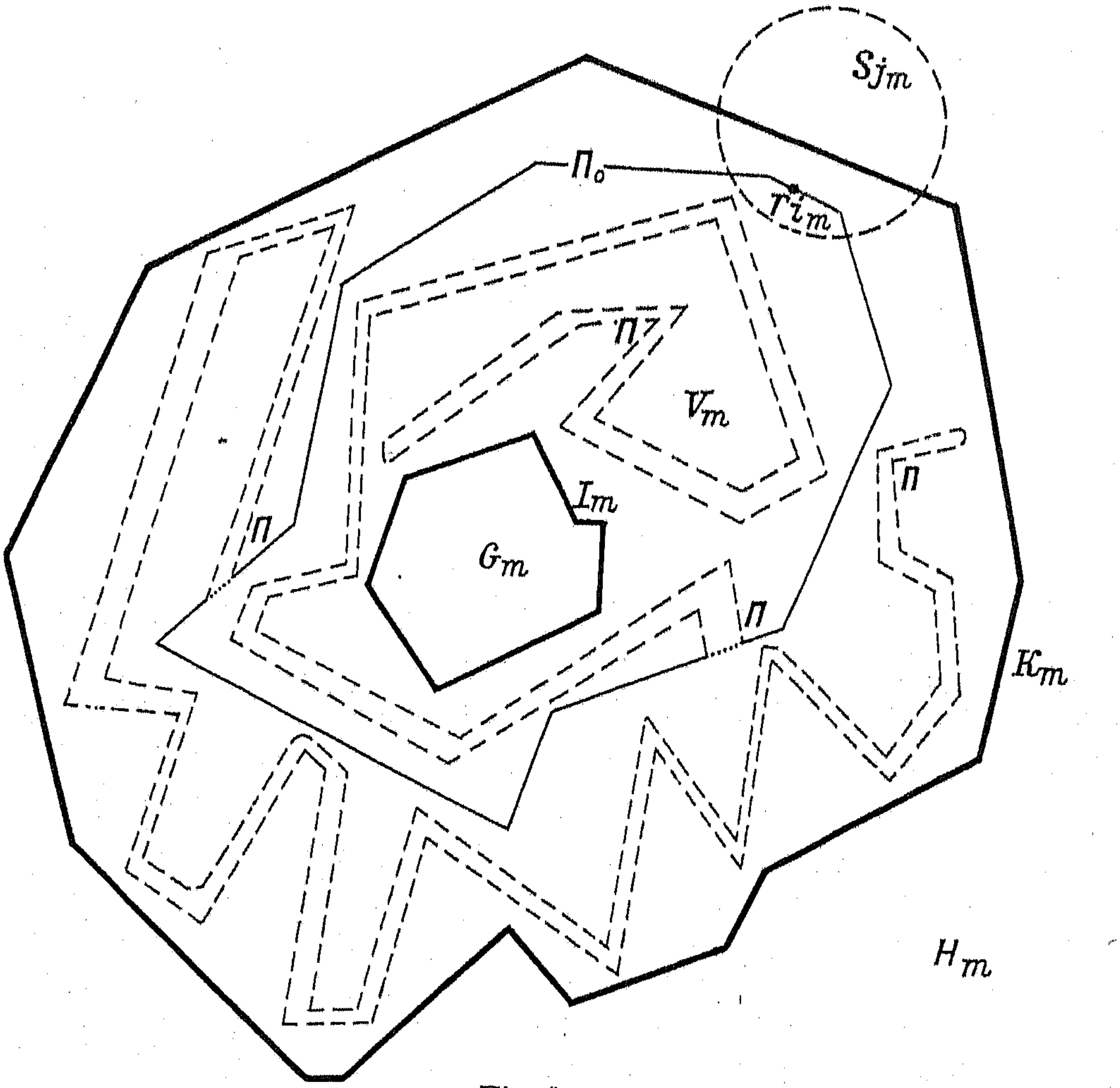

Fig 8.

points communs avec V_m; et soit r_{i_m} le premier point de (2) qui est agrégé à S_{j_m} et intérieur à V_m. Je dis qu'il existe des polyèdres Π satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $\Pi \supset r_{i_m}$, Π est intérieur à V_m;

2) Π sépare I_m de K_m (c. à d. qu'il est situé entre I_m et K_m);

3) Π a *une densité* $\frac{1}{m}$ sur V_m [1]).

[1]) Nous disons que „B a une densité $\frac{1}{m}$ sur A" si $B \subseteq A \subset S\left(B, \frac{1}{m}\right)$, c. à d. si tout point de A est à une distance $< \frac{1}{m}$ de l'ensemble B contenu dans A.

En effet, l'existence de polyèdres satisfaisant aux deux premières conditions est évidente. Soit Π_0 un tel polyèdre. Or, remplaçons deux faces de Π_0 (autres que celles qui contiennent r_{i_m}) par des *tubes* polyédrales dont l'un a une densité $\frac{1}{m}$ entre I_m et Π_0, l'autre, entre Π_0 et K_m. Le polyèdre Π ainsi obtenu satisfait à toutes les trois conditions. Le point r_{i_m} étant rationnel, il est d'ailleurs évident qu'il existe des polyèdres Π à sommets rationnels. Soit donc L_m le premier polyèdre de la suite (3) qui satisfait aux trois conditions ci-dessus.

Soit ensuite $r_{i'_m}$ le premier point de (2) situé entre L_m et K_m et tel que le segment $\overline{r_{i_m} r_{i'_m}}$ satisfasse aux conditions:

1) sa longueur est $< \frac{1}{m}$;

2) $\overline{r_{i_m} r_{i'_m}} \times (L_m + K_m) = r_{i_m}$.

Il existe évidemment des polyèdres à sommets rationnels possédant les propriétés suivantes:

1) ils séparent L_m et K_m (ils n'ont donc aucun point commun avec L_m et K_m);

2) ils contiennent le point $r_{i'_m}$;

3) ils n'ont aucun point commun avec l'intervalle rectiligne $\widehat{r_{i_m} r_{i'_m}}$.

Soit M_m le premier polyèdre de (3) possédant ces propriétés. $\widehat{r_{i_m} r_{i'_m}}$ est situé entre L_m et M_m. Remarquons que la condition 1) entraîne l'inégalité

$$\varrho(M_m, K_m) < \varrho(L_m, K_m);$$

or L_m ayant une densité $\frac{1}{m}$ sur $V_m \supset K_m$, on a donc

$$\varrho(L_m, K_m) < \frac{1}{m},$$

$$\varrho(M_m, K_m) < \frac{1}{m}.$$

M_m et K_m ayant leurs sommets rationnels, les points rationnels sont denses sur chacune de leurs faces. On voit donc aisément qu'on peut choisir deux points $r_{i''_m}$ et $r_{i'''_m}$ de (2) tels que

1) $r_{i_m}'' \subset M_m$, $r_{i_m}'' \neq r_{i_m}'$;

2) $r_{i_m}''' \subset K_m$, r_{i_m}''' ne fait partie d'aucune arête de K_m (il est donc intérieur à une face Φ_m [1]) de K_m);

3) $\overline{r_{i_m}'' r_{i_m}'''} \times (M_m + K_m) = r_{i_m}'' + r_{i_m}'''$

(l'intervalle $\widehat{r_{i_m}'' r_{i_m}'''}$ est donc situé entre M_m et K_m);

4) $\varrho\,(r_{i_m}'', r_{i_m}''') < \frac{1}{m}$.

Il suffit, en effet, que r_{i_m}'' et r_{i_m}''' soient très raprochés des extrémités d'un segment de longueur minimum reliant M_m et K_m, pour que les conditions 3) et 4) soient réalisées.

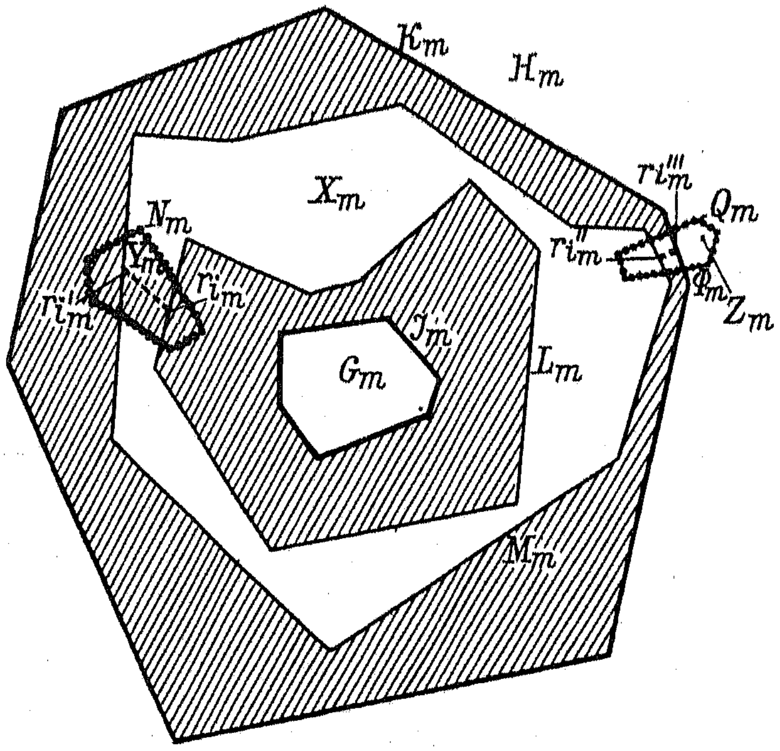

Fig. 9.

Choisissons enfin deux polyèdres N_m et Q_m de (3) tels que:

1) N_m est intérieur à V_m et n'a aucun point commun avec le segment $\overline{r_{i_m}'' r_{i_m}'''}$;

2) $N_m \subset S\left(\overline{r_{i_m} r_{i_m}'}, \frac{1}{m}\right)$;

3) N_m entoure le segment $\overline{r_{i_m} r_{i_m}'}$, c. à d. que ce segment est situé dans le domaine intérieur à N_m;.

[1]) Nous désignons par Φ_m la face en question privée de son contour.

4) $N_m \times L_m$ et $N_m \times M_m$ sont des polygones.

Ensuite,

5) Q_m est extérieur à L_m et à N_m;

6) $Q_m \subset S\left(\overline{r i''_m, r i'''_m}, \frac{1}{m}\right)$;

7) Q_m entoure $\overline{r i''_m\, r i'''_m}$;

8) $Q_m \times M_m$ et $Q_m \times K_m$ sont des polygones;

9) $Q_m \times K_m \subset \Phi_m$.

Désignons encore par X_m le domaine situé entre L_m et M_m; par Y_m, le domaine intérieur à N_m; par Z_m, celui qui est intérieur à Q_m.

Il est à remarquer que I_m et K_m appartiennent à différents composants de $V_m - X_m$.

Posons

$$G_{m+1} = G_m, \quad I_{m+1} = I_m;$$

$$H_{m+1} = H_m + Z_m + (X_m - \overline{Y}_m);$$

$$K_{m+1} = Fr\,(H_{m+1}) =$$

$$= [(L_m + M_m + K_m) - (Y_m + Z_m)] + [N_m \times X_m] + [Q_m \times (V_m - X_m)];$$

$$V_{m+1} = [V_m - (X_m + Z_m)] + \overline{Y}_m.$$

On voit aisément que le polyèdre K_{m+1} est de genre 0, et que le solide V_{m+1} est agrégé à V_m et limité par les polyèdres I_{m+1} et K_{m+1}.

Si m était impair, on n'aurait qu'à échanger les rôles de I_m et de K_m (donc de G_m et de H_m) dans la construction précédente.

La suite des V_m se définit ainsi de proche en proche. Remarquons encore que les G_m sont des domaines connexes croissants; de même, les H_m.

6. Je dis que le continu

$$F = \prod_{m=0}^{\infty} V_m$$

a les propriétés exigées. On voit tout d'abord que $E_3 - F$ est la somme des deux domaines connexes

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} G_m, \qquad H = \sum_{m=0}^{\infty} H_m.$$

Il s'agit donc de montrer que $Fr(G) = Fr(H) = F$ et que F est indécomposable.

On voit immédiatement d'après la condition 9) imposée à Q_m et la définition de I_{m+1} et K_{m+1} que $I_m \times I_{m+1}$ et $K_m \times K_{m+1}$ sont des continus; $K_m \times K_{m+1}$ p. ex. diffère de K_m tout au plus d'une partie d'une face de K_m. $K_m - K_{m+1}$ est donc un domaine (rel. K_m) dont la frontière (rel. K_m) est formée par des arêtes de K_{m+1}; ce domaine peut d'ailleurs être vide [1]). On voit ainsi de proche en proche que

$$K_m - K_{m+2}, \ldots, \quad K_m - K_{m+h}, \ldots$$

sont des domaines (rel. K_m) sans points communs deux à deux; chacun d'eux est limité (s'il n'est pas vide) par un seul polygone. On voit donc que

$$K_m \times K_{m+1} \times \ldots \times K_{m+h} = K_m - \sum_{s=1}^{h} (K_m - K_{m+s})$$

est un continu (quels que soient m et h).

Il en résulte que

$$\prod_{h=0}^{\infty} K_{m+h}$$

est un continu [2]); donc

$$K_\omega = \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} K_{m+h} = lim\, K_m$$

est un sémicontinu. K_ω contient d'ailleurs toutes les arêtes de tous les K_m. On voit de même que

$$I_\omega = lim\, I_m$$

est un sémicontinu contenant toutes les arêtes de tous les I_m. On démontré d'ailleurs aisément que

$$I_\omega + K_\omega \subset F,$$

$$I_\omega \times K_\omega = 0.$$

[1]) Il est vide quand m est impair et dans ce cas seulement. Le contraire a lieu chez les I_m.

[2]) Janiszewski, thèse, p. 31, lemme I. Cet ensemble ne peut se réduire à un point car il contient toutes les arêtes de K_m.

En effet,

$$I_\omega + K_\omega = \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} I_{m+h} + \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} K_{m+h} \subset \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} V_{m+h} = F;$$

$$I_\omega \times K_\omega = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\prod_{h_1=0}^{\infty} I_{m_1+h_1} \times \prod_{h_2=0}^{\infty} K_{m_2+h_2} \right) \subset$$

$$\subset \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} (I_{m_1+m_2} \times K_{m_1+m_2}) = 0.$$

7. Démontrons maintenant que K_ω est dense sur F. Soit t un point arbitraire de F; t est donc agrégé à V_m quel que soit m. Supposons m pair; on a, d'après la condition 3) imposée à L_m,

$$\varrho(t, L_m) < \frac{1}{m};$$

soit donc u un point de L_m tel que

$$\varrho(t, u) < \frac{1}{m}.$$

Or on a, d'après la définition de K_{m+1} et la condition 5) imposée à Q_m,

$$K_{m+1} \supset L_m - (Y_m + Z_m),$$

$$L_m \times Z_m = 0;$$

donc

$$L_m \subset K_{m+1} + Y_m \subset K_{m+1} + \overline{Y}_m.$$

D'autre part,

$$K_{m+1} \times \overline{Y}_m \supset K_{m+1} \times N_m \supset N_m \times X_m \neq 0;$$

il en résulte que $\varrho(u, K_{m+1})$ est au plus égale au diamètre de $\overline{Y}_m$:

$$\varrho(u, K_{m+1}) \leqslant \delta(\overline{Y}_m) = \delta(N_m).$$

Or les définitions de N_m (condition 2)) et de r_{i_m} (condition 1)) nous montrent immédiatement que

$$\delta(N_m) < \delta(\overline{r_{i_m} r'_{i_m}}) + \frac{2}{m} < \frac{3}{m};$$

on a donc

$$\varrho(t, K_{m+1}) \leqslant \varrho(t, u) + \varrho(u, K_{m+1}) < \frac{4}{m}.$$

Soit w un point de K_{m+1} tel que

$$\varrho'(t, w) \leq \frac{4}{m};$$

deux cas peuvent alors avoir lieu:

1) w appartient à $\prod_{h=1}^{\infty} K_{m+h}$, donc à K_ω; en ce cas $\varrho(w, K_\omega) = 0$;

2) ou bien w fait partie de $K_{m+1} \times K_{m+2} \times \dots \times K_{m+h}$, mais il est étranger à K_{m+h+1} $(h \geqslant 1)$ [1]. Dans ce cas w est agrégé au domaine $K_{m+h} - K_{m+h+1}$ du polyèdre K_{m+h}; la frontière de ce domaine (rel. K_{m+h}) est formée d'arêtes du polyèdre K_{m+h+1}, elle fait donc partie de K_ω.

Par conséquent

$$\varrho(w, K_\omega) \leqslant \delta(K_{m+h} - K_{m+h+1}).$$

Or on voit immédiatement (en remplaçant m par $m+h$) que ce domaine (rel. K_{m+h}) est agrégé au domaine Z_{m+h} intérieur au polyèdre Q_{m+h}; il en résulte, d'après les définitions de Q_m (condition 6)) et de $\overline{r_{i_m}'' \, r_{i_m}'''}$ (condition 4)), que

$$\varrho(w, K_\omega) \leqslant \delta(Q_{m+h}) < \delta(\overline{r_{i_m}'' \, r_{i_m}'''}) + \frac{2}{m+h} < \frac{3}{m+h} < \frac{3}{m}.$$

Cette dernière inégalité est donc toujours satisfaite; donc

$$\varrho(t, K_\omega) \leqslant \varrho(t, w) + \varrho(w, K_\omega) < \frac{7}{m}.$$

m étant un nombre pair arbitraire, et t un point quelconque de F, on voit donc que K_ω est dense sur F, c. q. f. d.

On démontre maintenant sans peine que $Fr(H) = F$. En effet, l'inclusion $Fr(H) \subset F$ est évidente; or

$$K_m = Fr(H_m) \subset \overline{H}_m \subset \overline{H}$$

quel que soit m; on a donc aussi

$$K_\omega \subset \overline{H},$$

$$K_\omega \subset \overline{H} \times F = [H + Fr(H)] \times F = Fr(H);$$

$$F = \overline{K}_\omega \subset Fr(H),$$

$$F = Fr(H), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

[1]) $m+h$ est, d'ailleurs, nécessairement pair; h est donc aussi un nombre pair.

On démontre de la même façon que I_ω est dense sur F, et que F est la frontière de G.

8. F est donc une frontière régulière; il reste à montrer, que c'est un continu indécomposable. Or les sémicontinus I_ω et K_ω sont tous les deux denses sur F, et n'ont pas de points communs. Il suffit donc, d'après le théorème du § 2, de montrer que F est irréductible entre un point a de I_ω et un point b de K_ω.

Soit p. ex. a un sommet de I_0; b, un sommet de K_0 [1]). Supposons que F n'est pas un ab, c. à d. qu'il existe un continu F_0 tel que

$$a + b \subset F_0 \subset F, \quad F_0 \neq F.$$

Soit en ce cas p un point de $F - F_0$,

$$\vartheta = \varrho(p, F_0) > 0.$$

Soit ensuite r_α un point rationnel satisfaisant l'inégalité

$$\varrho(p, r_\alpha) < \frac{\vartheta}{6};$$

envisageons toutes les sphères de centre r_α et de rayon rationnel compris entre $\varrho(p, r_\alpha)$ et $2\varrho(p, r_\alpha)$. Elles sont en infinité dénombrable et rentrent toutes dans la suite (4); il existe donc une sphère

$$S_m = S(r\ .\ \varepsilon_\alpha)$$

de (4) telle que

$$\varrho(p, r_\alpha) < \varepsilon_\alpha < 2\varrho(p, r_\alpha),$$
$$m > \frac{6}{\vartheta};$$

S_m contient évidemment le point $p \subset F \subset V_m$.

Supposons, pour fixer les idées, que m est pair; la définition de S_{j_m} nous montre immédiatement que $j_m = m$; le point r_{i_m} est donc agrégé à S_m, et l'on a

$$\varrho(r_{i_m}, p) \leqq \varrho(r_{i_m}, r_\alpha) + \varrho(r_\alpha, p) <$$
$$< \varepsilon_\alpha + \varrho(r_\alpha, p) < 3\varrho(r_\alpha, p) < \frac{\vartheta}{2}.$$

Or le point r_{i_m} est agrégé au domaine Y_m intérieur à N_m (condition 3) de la définition de N_m); et nous avons déjà vu que le dia-

[1]) Ces points sont donc agrégés, l'un à I_ω, l'autre à K_ω.

mètre de N_m est $< \frac{3}{m}$ (§ 7); par conséquent, q étant un point arbitraire de $\overline{Y}_m$,

$$\varrho(r_{i_m}, q) \leqslant \delta(\overline{Y}_m) = \delta(N_m) < \frac{3}{m} < \frac{\vartheta}{2},$$

$$\varrho(p, q) \leqslant \varrho(p, r_{i_m}) + \varrho(r_{i_m}, q) < \vartheta = \varrho(p, F_0).$$

F_0 n'a donc aucun point commun avec $\overline{Y}$. F_0 étant agrégé à $F \subset V_{m+1}$, il en résulte donc, d'après la définition de V_{m+1} (§ 5), que

$$F_0 \subset V_{m+1} - \overline{Y}_m \subset V_m - X_m.$$

Or I_m et K_m appartiennent à différents composants de $V_m - X_m$ (§ 5); F_0 ne peut donc avoir de points communs qu'avec l'un de ces ensembles. Nous arrivons ainsi à une contradiction, car les points a et b de F_0 sont des sommets de I_0 et K_0; ils appartiennent donc respectivement à tous les I_m et à tous les K_m.

La supposition faite est donc contradictoire; il en résulte que F est un $\overline{ab}$, et qu'il est indécomposable, c. q. f. d.

9. En modifiant convenablement la construction effectuée ci-dessus, on peut obtenir des continus indécomposables qui sont des frontières régulières dans E_n, n étant quelconque; on peut s'arranger de façon qu'un tel continu soit la frontière commune d'un nombre quelconque de domaines connexes, ou même d'une infinité denombrable de tels domaines.

Nous ne nous arrêterons pas sur les détails de ces constructions; nous examinerons, par contre, de plus près une construction analogue qui nous fournira un exemple de nature toute différente, à savoir l'exemple d'une ligne Cantorienne K (dans E_3) qui ne peut être décomposée en une somme finie ou dénombrable de continus homéomorphes à des lignes Cantoriennes planes. Nous réaliserons cet exemple en construisant un continu indécomposable K situé sur une surface Jordanienne J [1]), et qui n'est homéomorphe à au-

[1]) Nous entendrons par là un continu homéomorphe à un polyèdre (de genre quelconque); un tel continu peut être *triangulé* à l'aide d'un réseau fini de *triangles* (on trouvera la définition et les propriétés d'une *triangulation*, ainsi qu'un exposé irréprochable de la théorie des surfaces Jordaniennes dans le livre de M. Weyl „*Die Idee der Riemannschen Fläche*", Leipzig 1913, Ch. I). On ne doit pas d'ailleurs oublier que le polyèdre correspondant n'est pas toujours situé dans E_3 (cas des surfaces unilatérales).

cun continu plan. On démontre, en effet, tout comme dans le cas du plan [1]), qu'un continu irréductible situé sur J est non dense sur J; on voit ensuite en combinant les résultats acquis au chapitre précédent avec le théorème III du Ch. I, qu'un continu non dense sur J est une ligne Cantorienne. Enfin, il résulte de l'indécomposabilité de K que toute décomposition de K en une somme (finie ou dénombrable [2])) de continus fournira au moins un continu identique à K, donc un continu qui n'est homéomorphe à aucun continu plan. On voit ainsi qu'un tel continu indécomposable (nous l'obtiendrons dans les §§ suivants) possède toutes les propriétés exigées.

Cet exemple nous montre que les conditions de Janiszewski (Ch. II, § 15) ne suffisent pas pour caractériser les lignes Cantoriennes de E_3. Il est d'ailleurs évident que ce n'est pas une largeur superflue de nos définitions qui en est la cause; on aurait, en effet, une bien mauvaise définition si l'on n'attribuait pas en l'adoptant, le nom de ligne Cantorienne à tout continu non dense sur une surface Jordanienne. Nous reviendrons, d'ailleurs, prochainement sur ces questions (§ 12).

10. Construction du continu K. Enumérons tous les polygones (dans E_2) à sommets rationnels

$$P_1,\ P_2, \ldots,\ P_i, \ldots \tag{5}$$

et tous les cercles (circonférence exclue) à centre rationnel et à rayon rationnel < 1

$$S_1,\ S_2, \ldots,\ S_j, \ldots \tag{6}$$

Nous désignerons par G_i le domaine intérieur à P_i.

Soit ensuite Π un icosagone de diamètre 2; Γ, son domaine intérieur. Nous désignerons les sommets de Π (rangés dans un ordre cyclique) par les lettres

$$a\,c\,b\,d\,c\,a\,d\,e\,c\,d\,a\,e\,d\,b\,e\,a\,b\,c\,e\,b\,a;$$

on verra un peu plus loin pourquoi nous désignons des sommets différents par une même lettre.

[1]) Janiszewski, thèse, p. 34, Théor. II.
[2]) Janiszewski et Kuratowski, l. c. p. 214, Théor. III.

Nous définissons par induction une suite de domaines fermés

$$H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_m \supset \ldots$$

dont chacun est limité par deux polygones: l'icosagone Π et un polygone L_m contenu dans Γ; les H_m sont donc agrégés à $\overline{\Gamma}$.

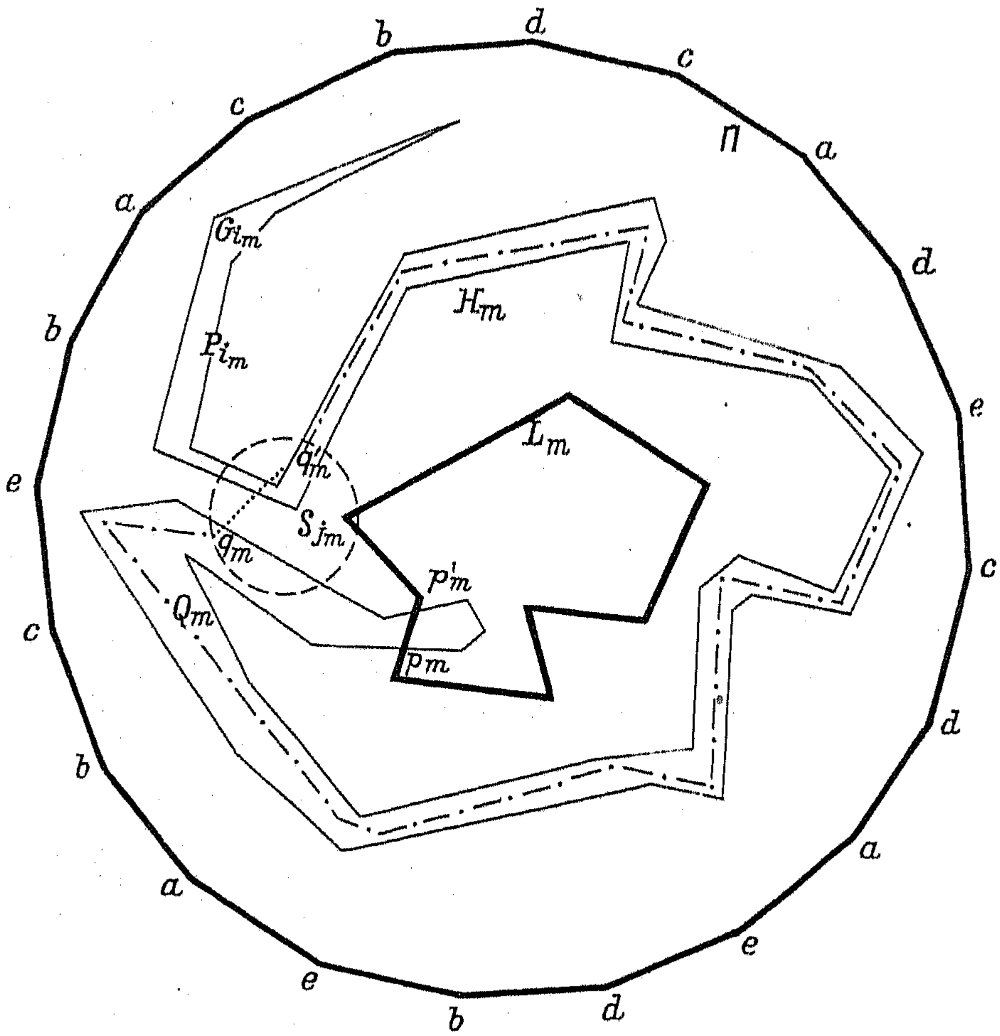

Fig. 10.

L_0 est le premier polygone de la suite (5) qui est contenu dans Γ. Supposons donc L_m défini. Soit alors S_{j_m} le premier cercle de (6) à indice $j_m \geqslant m$ qui a des points communs avec H_m. Nous définissons ensuite un polygone P_{i_m} comme il suit. C'est le premier polygone de (5) qui satisfait aux conditions suivantes:

1) $P_{i_m} \subset \Gamma$, $P_{i_m} \times H_m$ a une densité $\dfrac{1}{m}$ sur H_m;

2) $P_{i_m} \times L_m$ est composé de deux points p_m et p'_m; ces points

appartiennent à un même côté de $L_m - L_{m-1}$ [1]), $\varrho(p_m, p'_m) < \frac{1}{m}$; $G_{i_m} \times L_m$ coïncide avec l'intervalle rectiligne $\widehat{p_m\, p'_m}$;

3) G_{i_m} contient une ligne polygonale Q_m telle que

a) en dehors de ses extrémités elle fait partie de $H_m - (L_m + \bar{S}_{j_m})$,

b) ses extrémités, q_m et q'_m, sont agrégées à $Fr(S_{j_m})$,

c) le polygone $Q_m + \widehat{q'_m\, q_m}$ [2]) sépare L_m de Π.

Posons enfin

$$H_{m+1} = H_m - G_{i_m},$$

$$L_{m+1} = (L_m - G_{i_m}) + (P_{i_m} \times H_m).$$

H_{m+1} est limité par L_{m+1} et Π; tous les H_m sont ainsi définis.

Je dis que le continu

$$K^0 = \prod_{m=0}^{\infty} H_m$$

est indécomposable. On démontre en effet sans peine que

$$L_\omega = \sum_{m=0}^{\infty} L_m \times L_{m+1} \text{ [3])}$$

est un sémicontinu contenu dans K^0 et dense sur K^0; on voit aussi immédiatement que tous les $L_m \times L_{m+1}$ sont non denses, donc $K^0 - L_\omega$ est dense sur K^0. Il suffit, par suite, de montrer que K^0 est irréductible entre un sommet de L_0 et un point de Π [4]). La démonstration n'est qu'une reproduction simplifiée de celle du § 8; X_m (§ 8) est à remplacer par $Q_m + \widehat{q'_m\, q_m}$.

[1]) On voit d'après la définition ci-dessous de L_{m+1} que $L_m - L_{m-1}$ est une ligne polygonale ouverte, $L_m - L_{m-1} \neq 0$.

[2]) On voit aisément que $Q_m \times \widehat{q'_m\, q_m} = q_m + q'_m$; $Q_m + \widehat{q'_m\, q_m}$ est donc un polygone.

[3]) La condition 2) permet de remplacer ici le produit infini $\prod_{h=0}^{\infty} L_{m+h}$ (cf. les $\prod_{h=0}^{\infty} I_{m+h}$ et $\prod_{h=0}^{\infty} K_{m+h}$ de l'exemple précédent) par $L_m \times L_{m+1}$.

[4]) $K^0 \supset \Pi$; K^0 contient aussi tous les sommets de tous les L_m

11. *Identifions* maintenant quatre à quatre les sommets de Π désignés par des lettres identiques; identifions aussi deux à deux les côtés de Π dont les extrémités sont désignées par les mêmes symboles.

$\bar{\Gamma}$ se transforme alors, comme il est facile à voir, en une surface Jordanienne bilatérale de genre 3 [1]). Le transformé K de K^0 est encore indécomposable (même démonstration); je dis qu'il ne peut être homéomorphe à un continu plan Il contient, en effet, le continu (réseau) R transformé de Π; ce réseau étant la somme de 10 arcs simples reliant deux à deux les 5 points a, b, c, d, e, il ne saurait être homéomorphe à un continu plan.

Or K est situé sur une surface Jordanienne; c'est donc l'un des continus que nous avions en vue d'obtenir.

12. Notons encore la modification suivante de l'exemple ci-dessus.

On sait qu'on obtient la surface Jordanienne bilatérale la plus générale en ajoutant p *anses* à la surface d'une sphère (dans E_3) [2]). Or ajoutons à la surface F d'une sphère une infinité dénombrable d'anses convergeant vers un point x de F. Le continu Φ ainsi obtenu n'est plus une surface Jordanienne (il n'est pas localement homéomorphe à E_2 au voisinage du point x). On démontre néanmoins sans peine que tout continu irréductible situé sur Φ, est non dense sur Φ et que tout continu non dense sur Φ est une ligne Cantorienne [3]).

Or on obtient en modifiant convenablement l'exemple précédent, un continu indécomposable K_Φ situé sur Φ, et qui n'est homéomorphe à aucun continu situé sur une surface Jordanienne quelconque [4]).

Ici encore l'existence d'une telle ligne Cantorienne n'est pas due à ce que notre définition fût trop large; je ne crois pas, en effet, qu'on puisse considérer comme satisfaisante une définition selon laquelle un continu non dense sur Φ ne serait pas une ligne Cantorienne

On pourrait obtenir des exemples encore bien plus compliqués; je me contente d'indiquer le problème suivant qui se rattache d'une façon naturelle aux considérations ci-dessus:

Problème β. *Existe-t-il des lignes Cantoriennes qui ne soient homéomorphes à aucun continu situé dans* E_3? [5]).

[1]) Dans ce cas particulier il est facile à montrer (sans recourir à la théorie générale) que la surface obtenue est homéomorphe à un polyèdre situé dans E_3.

[2]) surface de genre p.

[3]) Le seul point qui puisse présenter des difficultés est le point x. Or on n'a qu'à consulter les résultats du chapitre suivant (un point de dimension maximale ne peut être isolé) pour voir cette difficulté s'évanouir.

[4]) K_Φ contient une infinité dénombrable de réseaux semblables à celui du § 11.

[5]) L'existence de telles lignes est bien douteuse; mais s'il y en a, ce sera,

18. Considérons, comme dernière application du théorème du § 2, un problème relatif à la théorie des domaines plans [1]). Il est connu que tout continu indécomposable qui découpe le plan en un nombre fini de domaines connexes, est la frontière de l'un au moins de ces domaines [2]). Cette propriété subsiste-t-elle dans le cas d'une infinité dénombrable de domaines?

La réponse est négative comme le prouve l'exemple suivant:

Nous conservons les notations du début du § 10 (suites (5) et (6), domaines G_i). Nous y adjoignons encore la suite

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k, \ldots \tag{7}$$

de toutes les lignes polygonales à sommets rationnels. Nous définissons par induction une suite

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_m \supset \ldots$$

de domaines fermés. U_0 est limité par deux polygones, Π_i et Π_e, dont le premier est intérieur au second. Désignons par G_i le domaine intérieur à Π_i; par G_e, celui qui est extérieur à Π_e; on a donc

$$E_2 = G_i + U_0 + G_e.$$

Soit encore $N_0 = \overline{ac_0}$ un segment situé dans U_0 et tel que

1) $N_0 \times \Pi_i = a, \quad N_0 \times \Pi_e = 0,$

2) c_0 est un point rationnel.

Supposons que U_m soit déjà défini et qu'il possède les propriétés suivantes:

1) il est limité par les $m+2$ polygones Π_i, Π_e, P_{i_1}, $P_{i_2}, \ldots P_{i_m}$; ces polygones sont deux à deux sans points communs; les P_{i_s} $(1 \leqslant s \leqslant m)$ sont situés entre Π_i et Π_e (c. à d. dans U_0).

2) il contient une ligne polygonale $N_m = \overline{ac_m}$ telle que

a) $N_m \times (\Pi_i + \Pi_e + P_{i_1} + \ldots + P_{i_m}) = a,$

b) c_m est un point rationnel.

Soit alors S_{j_m} le premier cercle de (6) à indice $j_m \geqslant m$ qui a des points communs avec U_m, et $P_{i_{m+1}}$ le premier polygone de (5) qui satisfait aux conditions suivantes:

à ce qu'il semble, le continu K_4 défini ci-dessous qui en fournira un exemple.

Soit C l'ensemble des nombres qu'on peut écrire dans le système triadique sans employer le chiffre 1; K_4 est l'ensemble des points (x, y, z, t) de E_4 tels que trois (au moins) de leurs coordonnées font partie de C, tandis que toutes les quatre coordonnées sont agrégées au segment $(0, 1)$ de l'axe des nombres réels.

[1]) Tout ce qui suit s'applique d'ailleurs à tous les E_n.

[2]) Soit, en effet, K ce continu; $G_1, G_2, \ldots, G_m$, les composants de $E_2 - K$. On a $K = Fr(E_2 - K) = Fr(G_1) + \ldots + Fr(G_m)$. Or tous les $Fr(G_i)$ sont des continus (Hausdorff, p. 345, IX); K étant indécomposable, il coïncide donc avec l'un d'eux.

1) $P_{i_{m+1}} + G_{i_{m+1}} \subset U_m$;

2) $P_{i_{m+1}} \times (N_m + \Pi_i + \Pi_e + P_{i_1} + \ldots + P_{i_m}) = 0$;

3) $G_{i_{m+1}}$ contient une ligne polygonale Q_m aux extrémités q_m et q'_m, et telle que

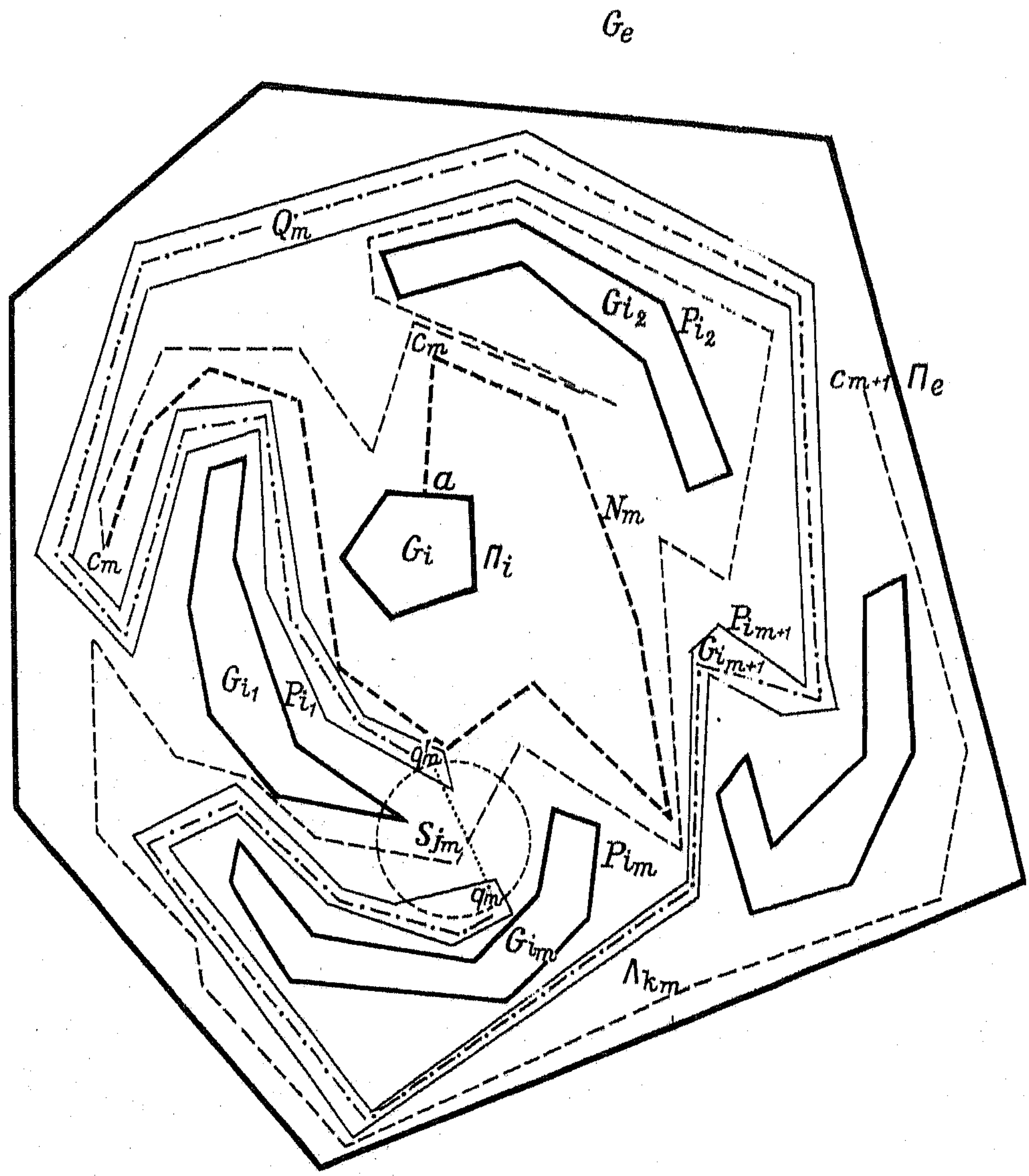

Fig. 11.

a) $Q_m \times S_{j_m} = 0, \quad Q_m \times Fr\,(S_{j_m}) = q_m + q'_m$,

b) le polygone $Q_m + \widehat{q'_m\, q_m}$ sépare Π_i de Π_e.

Soit ensuite Λ_{k_m} la première ligne de (7) telle que

1) $\Lambda_{k_m} \subset U_m - G_{i_{m+1}}$; Λ_{k_m} a une densité $\frac{1}{m}$ sur $U_m - G_{i_{m+1}}$;

2) $\Lambda_{k_m} \times (\Pi_i + \Pi_e + P_{i_1} + \ldots + P_{i_m} + P_{i_{m+1}}) = 0$;

3) $\Lambda_{k_m} \times N_m = c_m$, c_m est l'une des extrémités de Λ_{k_m}. Nous désignerons l'autre extrémité de Λ_{k_m} par c_{m+1}.

Posons enfin

$$U_m - G_{i_{m+1}} = U_{m+1}, \quad N_m + \Lambda_{k_m} = N_{m+1}.$$

On voit immédiatement que U_{m+1} possède des propriétés analogues à celles de U_m.

Le continu $K = \prod_{m=0}^{\infty} U_m$ est indécomposable [1]); or on a évidemment

$$E_2 - K = G_1 + G_2 + \sum_{m=1}^{\infty} G_{i_m}.$$

Le continu indécomposable K découpe donc le plan en une infinité dénombrable de domaines connexes, dont chacun est limité par un polygone.

Sur une classe de continus irréductibles.

14. Nous allons étudier maintenant les propriétés d'une classe particulière de continus irréductibles. Cette classe ne présente en elle-même aucun intérêt spécial; mais nous emprunterons maintes fois nos exemples à cette classe, et il vaut mieux en considérer les propriétés une fois pour toutes. Un seul de ces exemples sera envisagé ici; on trouvera les autres dans la seconde partie.

Nous commençons par le lemme suivant qui nous sera souvent utile dans la suite [2]).

Lemme. *Soient $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ des ensembles fermés tels que*

$$\delta(B_n) \to 0, \qquad \varrho(B_0, B_n) \to 0$$

quand $n \to \infty$; en ce cas

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

est encore un ensemble fermé.

[1]) On voit, en effet, sans peine que le sémicontinu $\Pi_1 + \sum_{m=0}^{\infty} N_m$ est dense sur K et de première catégorie par rapport à K, et que K est un $\overline{\overline{ab}}$, b étant un point quelconque de Π_2.

[2]) Nous avons déjà utilisé ce lemme (d'ailleurs évident) dans l'exemple des §§ 43—46 du chapitre précédent.

Démonstration. Soit x un point quelconque de $\bar{B}$; il suffit de considérer le cas x étranger à B_0. Soit donc

$$\varepsilon = \varrho(x, B_0) > 0.$$

Il existe un indice ν tel que

$$\delta(B_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \varrho(B_0, B_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $n > \nu$; il en résulte que

$$\varrho(x, B_n) > \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (n > \nu)$$

$$\varrho(x, \sum_{n=\nu+1}^{\infty} B_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or on a par supposition

$$\varrho(x, B) = \varrho(x, \sum_{m=1}^{\nu} B_m + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} B_n + B_0) = 0;$$

donc

$$\varrho(x, \sum_{m=1}^{\nu} B_m) = 0.$$

$\sum_{m=1}^{\nu} B_m$ étant un ensemble fermé, on voit que

$$x \subset \sum_{m+1}^{\nu} B_m \subset B, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

15. Définition des continus W. Soit

$$C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$$

une suite de continus indécomposables et tels que

1) $\delta(C_m) \to 0$;

2) $\varrho(a, C_m) \to 0$, a étant un point déterminé étranger à $\sum_{m=1}^{\infty} C_m$ [1]);

3) $C_m \times C_{m+1} \neq 0$ quel que soit m; désignons cet ensemble par Q_m;

[1]) On peut exprimer 1) et 2) en disant que les C_m convergent vers le point a.

4) $C_m \times C_{m+h} = 0$ pour tous les $h \geqslant 2$ et tous les m;

5) soit q_m un point quelconque de Q_m; on doit avoir $Q_m \subset \subset \mathfrak{P}(q_m, C_m) \times \mathfrak{P}(q_m, C_{m+1})$ [1]);

6) $Q_{m-1} \subset C_m - \mathfrak{P}(q_m, C_m)$ [2]).

Posons

$$W = a + \sum_{m=1}^{\infty} C_m;$$

désignons encore par b un point quelconque de

$$C_1 - \mathfrak{P}(q_1, C_1).$$

Le lemme du § précédent nous montre immédiatement que W est fermé. Or on voit de proche en proche que les ensembles

$$C_1 + C_2, \quad C_1 + C_2 + C_3, \ldots, \sum_{m=1}^{k} C_m \ldots$$

sont des continus; il en résulte que

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m$$

est connexe, dont

$$W = a + \sum_{m=1}^{\infty} C_m = \overline{\sum_{m=1}^{\infty} C_m}$$

est un continu [3]).

16. Propriétés des continus W.

I. Soit K un continu agrégé à W et contenant le point a et un point c_m de C_m. En ce cas K contient tous les C_{m+h} $(h \geqslant 1)$.

1) On voit aisément que cette condition étant realisée pour un point de Q_m, elle le sera aussi pour tout autre point de Q_m.

2) On peut exprimer 5) et 6) comme il suit: „soient q et q' deux points de $Q_{m-1} + Q_m$; C_m est un $\overline{q\,q'}$ dans le cas et dans le cas seulement où l'un de ces points est agrégé à Q_{m-1} et l'autre à Q_m". Sous cette forme 5) et 6) sont indépendantes de la condition d'indécomposabilité qui ne sera, d'ailleurs, nulle part utilisée, et pourrait être supprimée. Nous ne le faisons pas car les C_m qu'on trouvera dans les applications, sont tous indécomposables.

3) Hausdorff, p. 245, III et p. 246, IV.

D é m o n s t r a t i o n. On voit tout d'abord qu'aucun des ensembles

$$K \times Q_m, \quad K \times Q_{m+1}, \ldots, \quad K \times Q_{m+h}, \ldots$$

ne peut être vide. On a en effet

$$K = K \times W = K \times \left[\sum_{s=1}^{m+h-1} C_s + (C_{m+h} - Q_{m+h}) \right] +$$
$$+ K \times Q_{m+h} + K \times \left[(C_{m+h+1} - Q_{m+h}) + \sum_{s=m+h+2}^{\infty} C_s + a \right].$$

Le premier et le troisième terme de cette somme ne sont pas vides, car ils contiennent respectivement les points c_m [1]) et a. Donc, K étant connexe, le deuxième terme ne pourrait être vide que si le premier et le troisième ne satisfaisaient pas à la condition de Lennes-Hausdorff. Or ils satisfont à cette condition car

$$\sum_{s=1}^{m+h-1} C_s + (C_{m+h} - Q_{m+h}) = W - \left[\sum_{s=m+h+1}^{\infty} C_s + a \right]$$

et

$$(C_{m+h+1} - Q_{m+h}) + \sum_{s=m+h+2}^{\infty} + a = W - \sum_{s=1}^{m+h} C_s$$

sont des domaines (rel. W) sans points communs. L'ensemble $K \times Q_{m+h}$ $(h \geqslant 0)$ n'est donc pas vide; soit k_{m+h} un point de cet ensemble (point variable).

Ce premier point établi, supposons qu'un certain C_{m+h} ne soit pas entièrement contenu dans K $(h \geqslant 1)$. Envisageons alors l'ensemble fermé $K \times C_{m+h}$. Il contient les points k_{m+h-1} et k_{m+h}; or C_{m+h} est un $\overline{k_{m+h-1}\, k_{m+h}}$ (condition 6)) et $K \times C_{m+h} \neq C_{m+h}$ (d'après notre supposition). Il en résulte que k_{m+h-1} et k_{m+h} appartiennent à différents composants de $K \times C_{m+h}$; c. à d. que la fonction

$$\Theta\,(k_{m+h-1},\, k_{m+h};\; K \times C_{m+h})$$

que M. H a u s d o r f f appelle *Distanz* [2]), est p o s i t i v e. Or cette

[1]) Pour le seul cas d'exception: $h = 0$, $c_m \subset Q_m$, la propriété que $K \times Q_{m+h}$ n'est pas vide, est triviale.

[2]) H a u s d o r f f, p. 303. $\Theta\,(a, b; F)$ est, par définition, la borne inférieure des nombres ϑ tels que a et b peuvent être réliés par une ϑ-chaîne agrégée à F.

fonction est évidemment continue; $K \times Q_{m+h-1}$ et $K \times Q_{m+h}$ étant fermés, on voit que le minimum de Θ est encore positif. Désignons le par λ:

$$\Theta(k_{m+h-1}, k_{m+h}; K \times C_{m+h}) \geqslant \lambda > 0$$

quels que soient le point k_{m+h-1} de $K \times Q_{m+h-1}$ et le point k_{m+h} de $K \times Q_{m+h}$.

Soit A l'ensemble des points de $K \times C_{m+h}$ qui peuvent être reliés par une $\frac{\lambda}{2}$-chaîne (agrégée à $K \times C_{m+h}$) à un point arbitraire de $K \times Q_{m+h-1}$ (je rappelle pour éviter tout malentendu, qu'une chaîne peut être composée d'u n s e u l p o i n t; $K \times Q_{m+h-1}$ fait donc partie de A). $K \times Q_{m+h}$ est évidemment étranger à A, c. à d. que

$$K \times Q_{m+h} \subset K \times C_{m+h} - A.$$

Désignons ce dernier ensemble par D; on voit aisément que

$$\varrho(A, D) \geqslant \frac{\lambda}{2}.$$

A et D sont donc fermés.

Or on a

$$K = K \times \sum_{s=1}^{m+h-1} C_s + K \times C_{m+h} + K \times \left[\sum_{s=m+h+1}^{\infty} C_s + a\right] =$$

$$= \left[K \times \sum_{s=1}^{m+h-1} C_s + A\right] + \left[D + K \times \sum_{s=m+h+1}^{\infty} C_s + a\right];$$

et l'on voit, d'après les inclusions

$$K \times Q_{m+h-1} \subset A, \quad K \times Q_{m+h} \subset D,$$

que nous avons obtenu une décomposition de K en deux parties fermées sans points communs. K étant connexe, il en résulte que notre supposition ne peut avoir lieu, c. à d. que $C_{m+h} \subset K$ $(h \geqslant 1)$, c. q. f. d.

Θ reste évidemment invariable quand a se déplace sur $\mathrm{Comp}_a(F)$ et b, sur $\mathrm{Comp}_b(F)$; Θ peut donc être envisagée non seulement comme fonction de deux points de F, mais aussi comme fonction de deux composants de F. C'est justement ce que fait M. H a u s d o r f f (l. c.).

Corollaire. Tout continu $K \subset W$ qui contient le point a, contient aussi un certain C_m.

II. W est un continu irréductible.

Soit, en effet, K un continu agrégé à W et contenant les points a et b. Il contient, d'après I, tous les C_m à indice $m \geqslant 2$; or un raisonnement parfaitement analogue au précédent nous montrerait qu'on a aussi

$$K \subset C_1;$$

par conséquent

$$K \supset a + \sum_{m=1}^{\infty} C_m = W.$$

W est donc un $\overline{\overline{ab}}$, c. q. f. d.

III. Soit P un ensemble tel que

1) tous les $C_m - P$ sont connexes (et $\neq 0$) [1]),

2) aucun Q_m n'est entièrement contenu dans P;

alors $W - P$ est encore connexe.

Soit, en effet, t_m un point de $Q_m - P$; on a

$$W - P = \sum_{m=1}^{\infty} (C_m - P) + (a - P),$$

$$(C_m - P) \times (C_{m+1} - P) \supset t_m \neq 0.$$

On voit donc de proche en proche que tous les

$$\sum_{m=1}^{k} (C_m - P)$$

sont connexes; il en est par suite de même pour

$$\sum_{m=1}^{\infty} (C_m - P).$$

Or l'ensemble $a - P$, s'il n'est pas vide, est le point limite de la suite $\{t_m\}$; on a donc toujours

$$a - P \subset \overline{\sum_{m=1}^{\infty} (C_m - P)},$$

d'où il résulte que $W - P$ est connexe.

1) La condition entre parenthèses est une conséquence de 2).

Corollaire. Soit μ le plus petit entier tel que $Q_\mu \subset \subset S(a, \varepsilon)$, et soit B un ensemble ε-séparant le point a de W. En ce cas

ou bien l'un des ensembles $C_m - B$ n'est pas connexe;

ou bien l'un des ensembles $Q_{\mu+h}$ $(h \geqslant 0)$ est contenu dans B.

On voit d'ailleurs aisément que tous les Q_m à indice suffisamment grand sont des ensembles ε-séparant le point a de W.

17. Nous allons considérer une application des propriétés des continus W ci-dessus à un problème relatif aux surfaces Cantoriennes.

Soit S un continu de dimension 2; pour fixer les idées, une surface Cantorienne. S contient nécessairement des lignes Cantoriennes. Tout point x de S peut être, en effet, ε-séparé par un ensemble fermé B de dimension 1; B n'est donc pas punctiforme [1]) et tout continu appartenant à B est une ligne Cantorienne. Or peut-on affirmer qu'il passe de telles lignes par *chaque* point de S? La réponse est négative, comme le montre l'exemple suivant:

Soit a un point quelconque de E_3; K_0, un polyèdre convexe entourant le point a.

Désignons généralement par C^ϱ l'ensemble homothétique à l'ensemble C par rapport au point a, le rayon d'homothétie étant égal à ϱ.

Soit $\varrho < 1$ et $I_0 = K_0{}^\varrho$; I_0 est donc un polyèdre intérieur à K_0. Or les deux premiers polyèdres I_0 et K_0, utilisés dans la construction de la surface Cantorienne indécomposable F (§§ 5—8) étaient arbitraires (§ 5), aux deux conditions suivantes près:

1) I_0 est intérieur à K_0,

2) I_0 et K_0 sont de genre 0.

Ces deux conditions étant réalisées ici (la seconde en vertu de la convexité de K_0), nous pouvons supposer que F est définie à l'aide des polyèdres I_0 et K_0 du présent §. Rappelons les propriétés suivantes de F dont nous aurons à nous servir:

α) F est situé dans le solide limité par I_0 et K_0;

β) F contient toutes les arêtes de I_0 et de K_0;

γ) $F \times I_0$ fait partie du sémicontinu $I_\omega \subset F$; donc, d'un $\mathfrak{P}(x, F)$; de même, $F \times K_0$ est agrégé à un $\mathfrak{P}(y, F)$;

[1]) Voir le § 14 du Ch. I.

δ) F est irréductible entre un point quelconque de l_0 et un point arbitraire de K_0; c. à d. que $\mathfrak{P}(x, F) \neq \mathfrak{P}(y, F)$.

Posons maintenant

$$C_1 = F, \quad C_m = C_{m-1}^{\varrho} = F^{\varrho^{m-1}}$$

Toutes les conditions du § 15 sont réalisées. En effet,

1) $\delta(C_m) = \varrho^{m-1} . \delta(F)$;

2) $\varrho(a, C_m) < \delta(C_m)$;

3) $C_m \times C_{m+1}$ contient toutes les arêtes du polyèdre $K_0^{\varrho^m}$;

4), 5) et 6) résultent respectivement de α), γ) et δ).

Le continu W ainsi obtenu est une surface Cantorienne. En effet, tous les C_m étant non denses dans E_3, W est de première catégorie, donc (étant fermé) également non dense. Il en résulte que $\dim W \stackrel{!}{=} 2$. Or soit P un ensemble punctiforme quelconque. Les C_m étant des surfaces Cantoriennes, tous les $C_m - P$ sont connexes; et aucun $Q_m - P$ n'est vide, car $Q_m = C_m \times \times C_{m+1}$ n'est pas punctiforme (il contient des segments). Il en résulte (§ 16, III) que $W - P$ est connexe, c. q. f. d.

Il n'existe néanmoins aucune ligne Cantorienne agrégée à W et contenant le point a de W. En effet, une telle ligne contiendrait un C_m (§ 16, I, corollaire), c. à d. un ensemble de dimension 2; ce qui est absurde [1]).

Le problème posé au début de ce § est donc résolu négativement.

Ch. IV. Les théorèmes fondamentaux.

1. Nous établirons dans ce chapitre plusieurs théorèmes concernant la dimension des ensembles fermés. Les méthodes que nous utilisons ne s'appliquent pas (à une exception près) aux ensembles non fermés. La cause en est, parfois, que les théorèmes

[1]) Il y a même plus: quel que soit le continu $K \subset W$ contenant le point a, on a $\dim_a K = 2$ (et non seulement $\dim K = 2$). Soit, en effet, m le plus petit entier tel que $K \times C_m \neq 0$; dans ce cas (§ 16, I) $K \supset \sum_{s=m+1}^{\infty} C_s + a$. Or ce dernier ensemble est évidemment identique à W^{ϱ^m}, c. à d. à une surface Cantorienne; donc $\dim_a K \geqslant \dim_a W^{\varrho^m} = 2$.

correspondants cessent d'être vrais dans le cas des ensembles non fermés. Dans d'autres cas une généralisation partielle peut être obtenue par des méthodes différentes des présentes. Dans plusieurs cas, enfin, la question de la validité des résultats obtenus pour des hypothèses moins restrictives, cette question n'est pas résolue. Il en est, d'ailleurs, de même pour plusieurs problèmes relatifs aux ensembles fermés; ces problèmes seront indiqués à la fin du chapitre.

Je rappelle que nous ne considérons que les ensembles de *dimension finie*. La plupart des résultats de ce chapitre ne s'appliquent qu'à de tels ensembles, comme le montrent les exemples qu'on trouvera à la fin du chapitre suivant.

Nous commençons par un lemme général relatif aux ensembles satisfaisant à la condition de Lennes-Hausdorff, lemme dont nous aurons souvent à nous servir dans la suite.

2. Soient A et D deux ensembles satisfaisant à la relation de Lennes-Hausdorff. On sait qu'on peut les enfermer dans deux domaines, G_A et G_D, sans points communs [1]):

$$G_A \supset A, \quad G_D \supset D, \quad G_A \times G_D = 0.$$

Or on peut obtenir en modifiant légèrement la démonstration, une proposition bien plus précise.

Considérons l'ensemble $\overline{G}_A \times \overline{G}_D$. Il n'est pas toujours possible de s'arranger de façon qu'il soit vide; on a, en effet

$$\overline{G}_A \times \overline{G}_D \supset \overline{A} \times \overline{D},$$

et le dernier ensemble n'est pas nécessairement vide. Mais nous allons montrer qu'on peut toujours s'arranger de façon qu'on ait

$$\overline{G}_A \times \overline{G}_D = \overline{A} \times \overline{D}.$$

On a donc le

Lemme. *Soient A et D deux ensembles tels que*

$$H(A, D) = 0.$$

Il existe alors deux domaines, G_A et G_D, tels que

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & G_A \supset A, \quad G_D \supset D, \\ & \overline{G}_A \times \overline{G}_D = \overline{A} \times \overline{D} \text{ [2]}). \end{aligned} \right.$$

[1]) Cette proposition a été démontrée implicitement par M. **Mazurkiewicz** („Sur un ensemble G_δ punctiforme...", *Fund. Math.* I, p. 69). Voir aussi la démonstration du lemme du § 8 (Ch. 1) du présent mémoire.

[2]) La relation $G_A \times G_D = 0$ en résulte immédiatement. On a, en effet,

Démonstration. x étant un point de A, on a, d'après la condition de Lennes-Hausdorff,

$$\varrho(x, D) > 0;$$

de même, $\varrho(y, A) > 0$ si $y \subset D$. Posons

$$G_A = \sum_{x \subset A} S\left(x, \frac{1}{3}\varrho(x, D)\right),$$

$$G_D = \sum_{y \subset D} S\left(y, \frac{1}{3}\varrho(y, A)\right).$$

Il est évident que ce sont des domaines, et que

$$G_A \supset A, \quad G_D \supset D.$$

Ces deux inclusions entraînent la suivante

$$\overline{G_A} \times \overline{G_D} \supset \overline{A} \times \overline{D};$$

il s'agit donc de montrer qu'on a aussi

$$\overline{G_A} \times \overline{G_D} \subset \overline{A} \times \overline{D}.$$

Soit w un point quelconque de $\overline{G_A} \times \overline{G_D}$; h un nombre positif arbitraire. Choisissons un point ξ de G_A et un point η de G_D, ces deux points étant à une distance $< \frac{1}{3}h$ du point w. ξ fait partie d'une certaine sphère $S\left(x, \frac{1}{3}\varrho(x, D)\right)$; on a donc

$$\varrho(\xi, x) < \frac{1}{3}\varrho(x, D), \quad x \subset A.$$

On voit de même qu'il existe un point y tel que

$$\varrho(\eta, y) < \frac{1}{3}\varrho(y, A), \quad y \subset D.$$

Remarquons encore que

$$\varrho(x, D) \leqslant \varrho(x, y), \quad \varrho(y, A) \leqslant \varrho(x, y).$$

$G_A \times G_D \subset \overline{G_A} \times \overline{G_D} = \overline{A} \times \overline{D}$; or ce dernier ensemble est, d'après la condition de Lennes-Hausdorff, non dense sur $\overline{A}$, donc *a fortiori* dans E. $G_A \times G_D$ étant un domaine, il est nécessairement vide.

On voit donc aussi que $G_A \times \overline{G_D} + G_D \times \overline{G_A} = 0$; il en résulte que $\overline{A} \times \overline{D} = \overline{G_A} \times \overline{G_D} = Fr(G_A) \times Fr(G_D)$. Cette relation nous sera utile dans la suite.

Ainsi

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,\xi) + \varrho(\xi,w) + \varrho(w,\eta) + \varrho(\eta,y) <$$
$$< \frac{1}{3}\varrho(x,D) + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}\varrho(y,A) \leqslant \frac{2}{3}h + \frac{2}{3}\varrho(x,y);$$
$$\varrho(x,y) < 2h.$$

Il en résulte que

$$\varrho(w,A) \leqslant \varrho(w,x) \leqslant \varrho(w,\xi) + \varrho(\xi,x) < \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}\varrho(x,y) < h,$$
$$\varrho(w,D) \leqslant \varrho(w,y) \leqslant \varrho(w,\eta) + \varrho(\eta,y) < \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}\varrho(x,y) < h.$$

h étant arbitraire, on voit que

$$w \subset \overline{A}, \quad w \subset \overline{D}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. Supposons qu'on ait donné d'avance deux domaines H_1 et H_2, tels que

$$H_1 \supset A, \quad \overline{H}_1 \times \overline{H}_2 = 0.$$

On peut alors trouver deux domaines G_A^* et G_D^*, satisfaisant aux conditions (1), et, de plus, à la suivante:

$$G_A^* \subset H_1, \quad G_D^* \supset H_2 \tag{2}$$

Soient, en effet, G_A et G_D les domaines définis ci-dessus; posons

$$G_A^* = G_A \times H_1, \quad G_D^* = G_D + H_2.$$

Les inclusions $G_A^* \supset A$, $G_D^* \supset D$ et (2) sont évidemment satisfaites, et l'on a

$$\overline{A} \times \overline{D} \subset \overline{G_A^*} \times \overline{G_D^*} \subset \overline{G}_A \times \overline{H}_1 \times (\overline{G}_D + \overline{H}_2) =$$
$$= \overline{G}_A \times \overline{G}_D \times \overline{H}_1 + \overline{G}_A \times \overline{H}_1 \times \overline{H}_2 \subset \overline{G}_A \times \overline{G}_D = \overline{A} \times \overline{D},$$
$$\overline{G_A^*} \times \overline{G_D^*} = \overline{A} \times \overline{D}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

C'est sous cette forme que nous appliquerons presque toujours le lemme ci-dessus. Ici encore, les deux relations suivantes qu'on déduit immédiatement de la dernière (cf. la note relative aux conditions (1)), nous seront souvent utiles:

$$\left\{\begin{array}{l} G_A^* \times G_D^* = 0, \\ Fr(G_A^*) \times Fr(G_D^*) = \overline{A} \times \overline{D}. \end{array}\right. \tag{3}$$

3. Théorème I. *Un ensemble fermé F de dimension $\geqslant n$ ne peut être décomposé en une somme finie ou dénombrable d'ensembles fermés $F_1, F_2, \ldots$ de dimension $< n$.*

Il est à remarquer qu'on ne suppose nullement que les $F_i \times F_k$ soient vides.

On peut exprimer ce théorème en disant que dans la classe des ensembles fermés on ne peut augmenter la dimension par une addition finie ou dénombrable [1]).

Nous allons démontrer ce théorème par induction en même temps que le

Lemme fondamental. *Soient F et $\Phi \subset F$ deux ensembles fermés tels que*

$$\dim (F - \Phi) < n;$$

dans ce cas, si l'on a

$$\dim_x F \geqslant n,$$

on aura aussi

$$\dim_x \Phi \geqslant n.$$

Le théorème et le lemme sont évidemment vrais dans le cas $n = 0$, le seul ensemble de dimension < 0 étant l'ensemble vide. Supposons-lès donc vrais tous les deux pour un nombre n quelconque, et montrons qu'il en sera encore de même pour le nombre $n + 1$.

4. Démonstration du lemme. Soit x un point tel qu'on ait

$$\dim_x F \geqslant n + 1.$$

On voit tout d'abord que $x \subset \Phi$. En effet, $F - \Phi$ étant un $\mathfrak{G}$ (rel. F), F et $F - \Phi$ coïncident localement au voisinage de tout point y de $F - \Phi$; il en résulte que

$$\dim_y F = \dim_y (F - \Phi) < n + 1. \tag{4}$$

Il s'agit de démontrer que

$$\dim_x \Phi \geqslant n + 1.$$

[1]) La proposition (ch, II, § 15, 2)) affirmant qu'un continu somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de lignes Cantoriennes, est lui-même une ligne Cantorienne, cette proposition est une conséquence immédiate du théorème en question.

Cette relation est évidente quand x est étranger à $\overline{F-\Phi}$, car F et Φ sont alors localement identiques au voisinage de x. Soit donc x un point de

$$\Phi \times \overline{F-\Phi};$$

il suffit de montrer que l'inégalité

(5) $$\dim_x \Phi \leqslant n$$

ne peut subsister sans que l'inégalité

$$\dim_x F \leqslant n$$

soit elle aussi verifiée.

Supposons donc (5) vérifiée; il existe alors une $\frac{\varepsilon}{2}$-séparation [1]) du point x de Φ par un ensemble fermé B_0 de dimension $< n$:

(6) $$\Phi = A_0 + B_0 + D_0;$$

(7) $$B_0 \, \varepsilon \, \mathfrak{F}, \quad \dim B_0 < n;$$

(8) $$A_0 \, \varepsilon \, \mathfrak{G} \text{ (rel. } \Phi), \quad D_0 \, \varepsilon \, \mathfrak{G} \text{ (rel. } \Phi);$$

(9) $$A_0 \supset x, \quad A_0 + B_0 \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On peut appliquer le lemme du § 2 aux ensembles A_0 et D_0; on obtient donc en posant

$$H_i = S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad H_e = 0$$

(voir § 2, remarque) deux domaines, $G^*_{A_0}$ et $G^*_{D_0}$, tels que

$$A_0 \subset G^*_{A_0} \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad D_0 \subset G^*_{D_0},$$

$$G^*_{A_0} \times G^*_{D_0} = 0,$$

$$\overline{G^*_{A_0}} \times \overline{G^*_{D_0}} = \overline{A_0} \times \overline{D_0}.$$

Posons

$$G = G^*_{A_0} - B_0;$$

c'est un domaine, et l'on a

(10) $$A_0 \subset G \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

1) ε est un nombre positif arbitraire.

$$A_0 \subset G \times \Phi = G \times A_0 + G \times B_0 + G \times D_0 \subset A_0 + G^*_{A_0} \times G^*_{D_0} = A_0,$$

(11)
$$G \times \Phi = A_0;$$

ensuite

$$\overline{G} \times \Phi = \overline{G} \times A_0 + \overline{G} \times B_0 + \overline{G} \times D_0,$$
$$\overline{G} \times D_0 \subset \overline{G^*_{A_0}} \times G^*_{D_0} \times D_0 = \overline{A_0} \times D_0 = 0;$$

donc

$$\overline{G} \times \Phi \subset A_0 + B_0,$$

(12)
$$Fr(G) \times \Phi = \overline{G} \times \Phi - G \times \Phi \subset B_0.$$

5. Posons

(13)
$$\begin{cases} Q_1 = Fr(G) \times F - S\left(\Phi, \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ Q_2 = Fr(G) \times F \times \overline{S}\left(\Phi, \frac{\varepsilon}{2}\right) - S\left(\Phi, \frac{\varepsilon}{3}\right), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_m = Fr(G) \times F \times \overline{S}\left(\Phi, \frac{\varepsilon}{m}\right) - S\left(\Phi, \frac{\varepsilon}{m+1}\right), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

On voit immédiatement que les Q_m sont des ensembles fermés et que l'on a

(14)
$$Q_m \subset Fr(G) \times F - \Phi \subset F - \Phi. \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

On voit aussi que tout point de $Fr(G) \times F$ qui est à une distance > 0 de Φ, appartient à l'un au moins des Q_m; Φ étant fermé, on en déduit, en tenant compte de (12), que

$$Fr(G) \times F - \Phi \subset \sum_{m=1}^{\infty} Q_m,$$

(15)
$$Fr(G) \times F \subset \sum_{m=1}^{\infty} Q_m + B_0$$

Soit maintenant y un point arbitraire de Q_1. Il résulte des formules (14) et (4) que

$$\dim_y F \leqslant n;$$

on peut donc décomposer l'ensemble F en trois parties, A_y, B_y et D_y, telles que

$$A_y \times B_y = A_y \times D_y = B_y \times D_y = 0;$$

$$(16) \qquad B_y \, \varepsilon \, \mathfrak{F}, \quad \dim B_y < n;$$

$$(17) \qquad A_y \, \varepsilon \, \mathfrak{G} \text{ (rel. } F\text{)}, \quad D_y \, \varepsilon \, \mathfrak{G} \text{ (rel. } F\text{)};$$

$$(18_1) \qquad y \subset A_y, \quad A_y + B_y \subset S\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Effectuons une telle décomposition relativement à chaque point de Q_1 [1]; on aura alors

$$Q_1 \subset \sum_{y \subset Q_1} A_y.$$

Q_1 étant un ensemble fermé contenu dans F, on voit d'après (17) que le théorème de Borel-Lebesgue est appliquable. Il existe par conséquent une suite finie

$$y_1, y_2, \dots, y_{k_1}$$

de points de Q_1 telle que

$$(19_1) \qquad Q_1 \subset \sum_{s=1}^{k_1} A_{y_s}.$$

Nous effectuons la même opération sur chacun des Q_m en remplaçant seulement la deuxième formule (18_1) par la suivante:

$$(18m) \qquad A_y + B_y \subset S\left(y, \frac{\varepsilon}{m+1}\right). \qquad (y \subset Q_m)$$

On obtient ainsi pour chaque m une suite finie

$$A_{y_{k_{m-1}+1}}, \quad A_{y_{k_{m-1}+2}}, \dots \quad A_{y_{k_m}},$$

telle que

$$(19m) \qquad Q_m \subset \sum_{s=k_{m-1}+1}^{k_m} A_{y_s}.$$

[1]) Cette décomposition n'étant pas univoquement déterminée, on voit que nous sommes obligés de nous appuyer sur l'axiome de Zermelo. Voir d'ailleurs le chapitre suivant.

Voici quelques propriétés de ces A_{y_s} et des B_{y_s} correspondants ($s = 1, 2, \dots, k_1, \dots, k_m, \dots$) dont nous aurons besoin dans la suite:

1) Il résulte de (16), (17) et de l'égalité

$$A_{y_s} + B_{y_s} = F - D_{y_s}$$

que

(20) $$A_{y_s} \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } F), \quad B_{y_s} \varepsilon \mathfrak{F}, \quad A_{y_s} + B_{y_s} \varepsilon \mathfrak{F};$$

(21) $$\dim B_{y_s} < n \quad (s = 1, 2, \dots).$$

2) On a d'après (18m), y_s étant un point de Q_m,

$$\delta(A_{y_s} + B_{y_s}) < \frac{2\varepsilon}{m+1}, \qquad (k_{m-1} < s \leqq k_m)$$

donc

(22) $$\delta(A_{y_s} + B_{y_s}) \to 0 \text{ quand } s \to \infty.$$

Je dis qu'on a aussi

(23) $$\varrho(B_0, A_{y_s} + B_{y_s}) \to 0 \quad (s \to \infty).$$

En effet,

$$\varrho(B_0, A_{y_s} + B_{y_s}) \leqq \varrho(B_0, y_s);$$

donc si la formule (23) était inexacte, l'un au moins des points limites η de la suite

$$y_1, y_2, \dots, y_s, \dots$$

serait étranger à l'ensemble fermé B_0.

D'autre part les formules (13) nous montrent que le point y_s ($k_{m-1} < s \leqq k_m$) est agrégé à l'ensemble fermé $Fr(G)$ et situé à une distance $\leqq \frac{\varepsilon}{m}$ de l'ensemble fermé Φ; il en résulte que

$$\eta \subset Fr(G) \times \Phi,$$

donc, d'après (12),

$$\eta \subset B_0.$$

Nous sommes arrivés à une contradiction, ce qui montre que la formule (23) est exacte.

3) Soit z un point quelconque de $A_{y_s} + B_{y_s}$, $y_s \subset Q_m$. On a

$$\varrho(z, y_s) < \frac{\varepsilon}{m+1}.$$

Or y_s appartient à Q_m; il est donc, d'après (13), étranger à $S\left(\Phi, \frac{\varepsilon}{m+1}\right)$. Le point x étant agrégé à Φ, il en résulte que

$$\varrho(x, y_s) \geqslant \varrho(\Phi, y_s) \geqslant \frac{\varepsilon}{m+1},$$

$$x \neq z$$

(24) $$x \times (A_{y_s} + B_{y_s}) = 0. \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

D'autre part $y_s \subset Fr(G)$; il résulte donc de la formule (10) que

$$\varrho(x, y_s) \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

par conséquent

$$\varrho(z, x) \leqslant \varrho(z, y_s) + \varrho(y_s, x) < \frac{\varepsilon}{m+1} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

(25) $$A_{y_s} + B_{y_s} \subset S(x, \varepsilon). \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

4) On obtient enfin, en comparant (15), (19_1) et $(19\,m)$,

(26) $$Fr(G) \times F \subsetneq B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s}.$$

6. Posons maintenant

$$B = B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} B_{y_s},$$

$$A = \left(G \times F + \sum_{s=1}^{\infty} A_{y_s}\right) - B,$$

$$D = F - (A + B).$$

Les A_{y_s} et B_{y_s} étant agrégés à F, on voit immédiatement que nous avons défini une décomposition de F en trois ensembles sans points communs deux à deux.

Je dis que c'est une ε-séparation du point x de F.

En effet,

1) On voit d'après (9) et (24) que x est étranger à B; or (formule (11))

$$G \times F \supset G \times \Phi = A_0 \supset x;$$

il en résulte que

$$A \supset x.$$

2 b) Les formules (7), (20), (22), (23) montrent qu'on peut appliquer le lemme du § 14 du ch. III aux ensembles B_m; donc

$$B \,\varepsilon\, \mathfrak{F}.$$

2 a) On voit immédiatement, en combinant la formule tout-à-l'heure obtenue avec (20), que

$$A \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \text{ (rel. } F).$$

2 d) Il s'agit de montrer que

$$D \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \text{ (rel. } F),$$

ou bien, ce qui revient au même, que

$$(A + B) \,\varepsilon\, \mathfrak{F}.$$

Or

$$A + B = \left(G \times F + \sum_{s=1}^{\infty} A_{\nu_s}\right) + B = G \times F + B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (A_{\nu_s} + B_{\nu_s}),$$

ce qui entraîne, d'après (26),

$$Fr(G) \times F \subset A + B,$$

$$\overline{A + B} = (A + B) + Fr(G) \times F = [\overline{G} \times F] + \left[B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (A_{\nu_s} + B_{\nu_s})\right]:$$

Le premier terme du dernier membre étant fermé, il suffit de démontrer qu'il en est de même pour le second; or c'est en effet le cas, car on peut, d'après (7), (20), (22) et (23), appliquer le lemme du § 14 (ch. III) aux ensembles

$$B_0,\ A_{\nu_1} + B_{\nu_1},\ A_{\nu_2} + B_{\nu_2}, \ldots,\ A_{\nu_s} + B_{\nu_s}, \ldots$$

3) Enfin, l'inclusion

$$A + B \subset S(x, \varepsilon)$$

est une conséquence immédiate de (9), (10) et (25).

Ainsi, B est un ensemble ε-séparant le point x de F. Or nous avons supposé que le théorème I (§ 3) est vrai pour le nombre n; il résulte donc des formules (7) et (21) que

$$\dim B < n.$$

ε etant arbitraire, il en résulte que

$$\dim_x F \leqslant n, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme fondamental est donc démontré pour le nombre $n+1$.

7. Nous en déduisons sans peine la démonstration du théorème I pour le nombre $n+1$.

Soit, en effet, F un ensemble fermé de dimension $\geqslant n+1$, et supposons qu'on ait

$$F = F_1 + F_2 + \dots$$

(somme finie ou dénombrable), tous les F_i étant des ensembles fermés de dimension $< n+1$.

Soit M l'ensemble des points x de F tels que

$$\dim_x F \geqslant n+1,$$

et soit $\Phi = M$. Chaque point y de $F - \Phi$ est donc de dimension $< n+1$ par rapport à F, et, *a fortiori*, de dimension $< n+1$ par rapport à $F - \Phi$; par conséquent,

$$\dim (F - \Phi) < n+1.$$

On voit donc d'après le lemme tout-à-l'heure démontré que l'inclusion

$$x \subset M$$

entraîne l'inégalité

$$\dim_x \Phi \geqslant n+1.$$

Je dis que tous les ensembles $F_i \times \Phi$ sont non denses sur Φ. En effet, il existe dans tout voisinage d'un point quelconque z de Φ des points x de M; et dans tout voisinage de x, des points de Φ étrangers à $F_i \times \Phi$. Ce dernier point résulte des inégalités

$$\dim_x (F_i \times \Phi) \leqslant \dim_x F_i \leqslant \dim F_i < n+1 \leqslant \dim_x \Phi$$

qui montrent que $F_i \times \Phi$ et Φ ne peuvent être localement identiques au voisinage du point x.

On obtient donc que l'ensemble

$$F_1 \times \Phi + F_2 \times \Phi + \dots = \Phi \times (F_1 + F_2 + \dots) = \Phi \times F = \Phi$$

est de première catégorie par rapport à lui-même, ce qui est absurde. Notre supposition était donc fausse; le théorème I est ainsi établi pour le nombre $n+1$.

La transition de n à $n+1$ étant complètement effectuée, le théorème I et le lemme fondamental sont démontrés tous les deux.

8. Sur les généralisations possibles du théorème I.

1) Ce théorème n'est vrai qu'intégralement, c. à d. pour les *ensembles* eux-mêmes et non pour les *points*; en effet, un point a peut être de dimension $< n$ par rapport à chacun des ensembles fermés $F_1, F_2, \dots$, et, en même temps, de dimension $\geqslant n$ par rapport à leur somme; et cela même dans le cas d'une somme finie.

Exemple Soit (dans E_1)

$$a = (0), \quad F_1 = a + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2m-1}, \frac{1}{2m}\right],$$

$$F_2 = a + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m+1}\right];$$

on a

$$F_1 + F_2 = [0, 1]; \quad \dim_a F_1 = \dim_a F_2 = 0, \quad \dim_a (F_1 + F_2) = 1.$$

2) Soit F un ensemble fermé de dimension n. S'il n'a qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de composants, le théorème I nous permet d'affirmer que l'un au moins de ces composants est lui aussi de dimension n. Mais F peut avoir c composants; cela nous amène à poser le

Problème γ. *Peut-on affirmer que tout ensemble fermé possède un composant de même dimension que l'ensemble total?* [1]).

Il est d'ailleurs à remarquer que la dimension d'un *point* par rapport à un composant peut être inférieure à sa dimension par rapport à l'ensemble total (supposé fermé); et cela même dans le cas d'une infinité dénombrable de composants [2]), et même pour tous les points d'un certain composant.

[1]) La réponse affirmative se déduit facilement dans le cas d'un ensemble de dimension 1.

[2]) Une telle circonstance ne peut évidemment avoir lieu dans le cas d'un nombre fini de composants.

Exemple. Soit (dans E_2)

$$K_0 = \{x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad K(a, b) = \{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\};$$

$$F = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K\left(\frac{1}{2m-1}, \frac{1}{2m}\right);$$

K_0 est un composant de F; or on a, quel que soit le point x de K_0.

$$\dim_x F = 2, \quad \dim_x K_0 = 1\ ^{1}).$$

3) Le théorème I ne peut être généralisé au cas des ensembles non fermés. Il suffit, en effet, d'examiner l'ensemble R des points rationnels d'un segment S, et l'ensemble I des points irrationnels de ce même segment; on a

$$\dim R = \dim I = 0, \ \dim(R + I) = \dim S = 1.$$

Des généralisations de nature plus spéciale sont, néanmoins, possibles; nous verrons, en effet, au ch. VI que le théorème I subsiste pour les ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$. Nous y verrons aussi qu'un théorème d'addition de forme différente est applicable à tous les ensembles.

On voit aussi aisément que la réponse au problème γ ci-dessus serait négative si on le posait pour les ensembles non fermés: il suffit, en effet, d'examiner un ensemble dispersé de dimension > 0 (voir le ch. I).

9. Soit C un ensemble quelconque de dimension n. Ses points se répartissent d'une façon naturelle en $n+1$ classes, la $(k+1)^{\text{ème}}$ classe étant formée des points de dimension k par rapport à C. L'étude des ensembles qu'on obtient ainsi, constitue un des problèmes les plus importants de toute la théorie; nous verrons que cette étude peut être poussée assez loin dans le cas des ensembles fermés. Il est d'ailleurs plus commode d'envisager au lieu des classes définies ci-dessus, les ensembles formés des points de dimension $\geqslant k$; nous posons donc la

Définition. *Nous désignerons par $\mathfrak{N}_k(C)$ l'ensemble des points x de C qui sont de dimension $\geqslant k$ par rapport à C.*

[1]) L'égalité $\dim_x F = 2$ résulte de ce que tout ensemble B ε-séparant $\left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ le point x de F, découpe nécessairement l'un des rectangles $K\left(\frac{1}{2m-1}, \frac{1}{2m}\right)$; on a donc $\dim B > 0$.

On a évidemment

$$C = \mathfrak{N}_0(C) \supset \mathfrak{N}_1(C) \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_k(C) \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_n(C) \supset \mathfrak{N}_{n+1}(C) = 0;$$

nous supposerons d'ailleurs toujours que $1 \leqslant k \leqslant n$.

Les classes définies au début de ce § peuvent être représentées par les différences

$$C - \mathfrak{N}_1(C),\quad \mathfrak{N}_1(C) - \mathfrak{N}_2(C), \ldots,\ \mathfrak{N}_k(C) - \mathfrak{N}_{k+1}(C), \ldots,\ \mathfrak{N}_n(C).$$

Dans le cas d'un ensemble fermé F, nous envisagerons encore les ensembles $\overline{\mathfrak{N}}_k(F)$; on a

$$F \supset \overline{\mathfrak{N}}_1(F) \supset \ldots \supset \overline{\mathfrak{N}}_k(F) \supset \ldots \supset \overline{\mathfrak{N}}_n(F). \tag{27}$$

Le dernier de ces ensembles, $\overline{\mathfrak{N}}_n(F)$, sera appelé *le noyau dimensionnel de* F.

10. Les ensembles $\overline{\mathfrak{N}}_k(F)$ possèdent la propriété remarquable suivante:

Théorème II. *Tout point x de $\mathfrak{N}_k(F)$ a même dimension par rapport à F et à $\overline{\mathfrak{N}}_k(F)$.*

Soit, en effet, s la dimension de x par rapport à F; x étant un point de $\mathfrak{N}_k(F)$, on a $s \geqslant k$. Or l'ensemble $\overline{\mathfrak{N}}_s(F)$ est fermé; tout point de

$$F - \overline{\mathfrak{N}}_s(F) \subset F - \mathfrak{N}_s(F)$$

est de dimension $< s$ par rapport à F, donc

$$\dim(F - \overline{\mathfrak{N}}_s(F)) < s.$$

Il en résulte, d'après le lemme fondamental du § 3, que

$$\dim_x \overline{\mathfrak{N}}_s(F) \geqslant s;$$

donc, en vertu des inclusions (27),

$$s \leqslant \dim_x \overline{\mathfrak{N}}_s(F) \leqslant \dim_x \overline{\mathfrak{N}}_k(F) \leqslant \dim_x F = s;$$

$$\dim_x \overline{\mathfrak{N}}_k(F) = \dim_x F, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaires. *L'ensemble des points de $\overline{\mathfrak{N}}_k(F)$ qui sont de dimension $\geqslant k$ par rapport à $\overline{\mathfrak{N}}_k(F)$, cet ensemble est dense sur $\mathfrak{N}_k(F)$.*

En particulier $\overline{\mathfrak{N}}_n(F)$ est dimensionnellement homogène: *le noyau dimensionnel d'un ensemble fermé F est dimensionnellement homogène et de même dimension que F.* Tous les $\overline{\mathfrak{N}}_k(F)$ sont d'ailleurs de même dimension que F.

Il s'ensuit de ce qui précède que la dimension d'un ensemble fermé n'est pas due, pour ainsi dire, à la superposition de parties de dimension inférieure, mais qu'elle est due à la présence d'un sous-ensemble fermé dimensionnellement homogène et de même dimension que l'ensemble total. $\mathfrak{R}_n(F)$ étant le plus grand sous-ensemble de cette espèce, il est bien naturel de l'appeler, comme nous l'avons fait, „noyau dimensionnel de F“.

Remarque. La condition $x \subset \mathfrak{R}_k(F)$ de l'énoncé du théorème II est essentielle; c. à d. l'égalité

$$\dim_y \mathfrak{R}_k(F) = \dim_y F$$

n'a pas nécessairement lieu pour un point y de

$$\overline{\mathfrak{R}_k(F)} - \mathfrak{R}_k(F).$$

Exemple (dans E_3). Soit

$$y = (0, 0, 0); \quad x_n = \left(\frac{3}{2^n}, 0, 0\right); \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{S}\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right);$$

soit ensuite K un cercle (fermé) de centre $(-1, 0, 0)$ et de rayon $=1$; $F = K + C$.

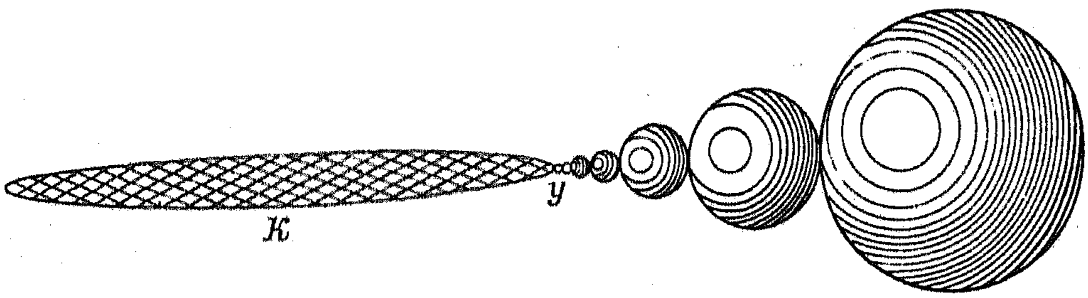

Fig. 12.

F est un continu de dimension 3, et l'on a

$$\mathfrak{R}_3(F) = C; \quad \overline{\mathfrak{R}_3}(F) = C + y;$$

$$\dim_y F = 2; \quad \dim_y \mathfrak{R}_3(F) = 1.$$

11. L'étude des ensembles $\mathfrak{R}_k(F)$ est beaucoup plus intéressante, mais aussi bien plus difficile. Un premier résultat (qui sera beaucoup précisé dans la suite) est le suivant:

Théorème III. *Tous les $\mathfrak{N}_k(F)$ sont denses en eux-mêmes.*

Remarquons tout d'abord qu'un point isolé x d'un ensemble C quelconque est de dimension 0 par rapport à cet ensemble. Si donc x était un point isolé de $\mathfrak{N}_k(F)$, il serait aussi un point isolé de $\mathfrak{N}_k(F)$, et l'on aurait

$$\dim_x \mathfrak{N}_k(F) = 0 < k \leqslant \dim_x F,$$

ce qui est en contradiction avec le théorème II. $\mathfrak{N}_k(F)$ ne possède donc aucun point isolé.

Corollaire. *Les $\mathfrak{N}_k(F)$ sont des ensembles parfaits.*

Le théorème III pourrait peut-être, contrairement au théor. I, se généraliser au cas des ensembles non fermés:

Problème δ. *C étant un ensemble quelconque, $\mathfrak{N}_k(C)$ est-il nécessairement dense en lui-même?*

La réponse est affirmative dans le cas $k=1$, comme le montrent les considérations suivantes:

Lemme. *Soit Q un ensemble de dimension 0; L et M, deux ensembles fermés par rapport à Q et sans point commun. Il existe alors une décomposition $Q = A + D$ telle que*

$$A \supset L, \quad D \supset M, \quad H(A, D) = 0.$$

Démonstration. Q étant homéomorphe à un ensemble linéaire punctiforme (Ch. I, § 16), il suffit d'examiner des ensembles de cette dernière sorte. Supposons donc Q linéaire. L et M étant des $\mathfrak{F}$ (rel. Q), on a

$$\bar{L} \times \bar{M} \times Q = (\bar{L} \times Q) \times (\bar{M} \times Q) = L \times M = 0;$$

il en résulte que Q est situé dans les intervalles

$$\widehat{p_1 q_1},\ \widehat{p_2 q_2}, \dots,\ \widehat{p_\mu q_\mu}, \dots$$

contigus à l'ensemble fermé $\bar{L} \times \bar{M}$ (il y a parmi ces intervalles contigus deux demi-droites). Soit μ un indice quelconque; le domaine linéaire

$$\widehat{p_\mu q_\mu} - (\bar{L} + \bar{M})$$

se compose d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles dont les extrémités appartiennent à $\bar{L} + \bar{M}$. Soient

$$(28) \qquad \dots,\ \widehat{g^\mu_{-2m} h^\mu_{-2m}},\ \widehat{h^\mu_{-2m+1} g^\mu_{-2m+1}}, \dots,\ \widehat{h^\mu_{-1} g^\mu_{-1}},\ \widehat{g^\mu_0 h^\mu_0}, \dots,\ \widehat{g^\mu_{2m} h^\mu_{2m}}, \dots$$

ceux-là de ces intervalles dont les deux extrémités ne font pas partie d'un même ensemble $\bar{L}$ ou $\bar{M}$. On voit aisément, d'après $\widehat{p_\mu q_\mu} \times \bar{L} \times \bar{M} = 0$, que les intervalles (28) ne peuvent s'accumuler que vers les points p_μ et q_μ, donc que l'énumération (28) peut être supposée faite dans l'ordre naturel (de gauche à droite);

que les h_i^μ appartiennent tous à l'un des deux ensembles $\overline{L}$ ou $\overline{M}$, à $\overline{M}$ p. ex., tandis que tous les g_i^μ font partie de $\overline{L}$; enfin que tout segment $\overline{h_{2m}^\mu\, h_{2m+1}^\mu}$ ne contient aucun point de $\overline{L}$, et chaque $\overline{g_{2m-1}^\mu,\, g_{2m}^\mu}$, aucun point de $\overline{M}$. Choisissons dans chaque $\widehat{g_{2m}^\mu\, h_{2m}^\mu}$ un point t_m^μ étranger à Q (ce qui est possible, Q étant punctiforme); dans tout $\widehat{h_{2m+1}^\mu\, g_{2m+1}^\mu}$, un point u_m^μ étranger à Q. On a évidemment

$$Q \times \widehat{p_\mu\, q_\mu} \subset \sum_m \widehat{t_m^\mu\, u_m^\mu} + \sum_m \widehat{u_m^\mu\, t_{m+1}^\mu},$$

$$L \times \widehat{p_\mu\, q_\mu} \subset \sum_m \widehat{u_m^\mu\, t_{m+1}^\mu},$$

$$M \times \widehat{p_\mu\, q_\mu} \subset \sum_m \widehat{t_m^\mu\, u_m^\mu};$$

il en résulte immédiatement que les ensembles

$$A = Q \times \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_m \widehat{u_m^\mu\, t_{m+1}^\mu},$$

$$D = Q \times \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_m \widehat{t_m^\mu\, u_m^\mu}$$

satisfont à toutes les conditions de l'énoncé.

Ce lemme étant établi, supposons que x soit un point isolé de $\mathfrak{R}_1\,(C)$. Il en résulte, ε étant suffisamment petit, que tout point de

$$Q = C \times \overline{S}\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right) - S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

est de dimension 0 par rapport à C; donc dim $Q = 0$. Les ensembles $C \times F\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$ et $C \times F\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right)$ étant des $\mathfrak{F}$ (rel. Q), l'application du lemme ci-dessus nous fournit une décomposition $Q = A + D$ telle que

$$H(A, D) = 0, \quad A \supset C \times F\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right), \quad D \supset C \times F\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right),$$

et l'on voit sans peine que

$$C = \left[C \times S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) + A\right] + \left[D + \left(C - \overline{S}\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right)\right)\right]$$

est une ε-séparation du point x de C par l'ensemble vide. ε étant arbitrairement petit, il en résulterait que $\dim_x C = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $x \subset \mathfrak{R}_1\,(C)$. $\mathfrak{R}_1\,(C)$ ne peut donc avoir des points isolés; $\mathfrak{R}_1(C)$ *est dense en lui-même.*

c. q. f. d.

12. On voit immédiatement d'après la remarque faite au début de la démonstration du théorème III, que ce théorème n'est qu'une conséquence du suivant:

Théorème III'. *Tout point d'un* $\mathfrak{N}_k(F)$ *est de dimension* >0 *par rapport à cet ensemble.*

Supposons qu'on ait, par contre,

$$\dim_x \mathfrak{N}_k(F) = 0.$$

Il existerait alors, ε étant arbitraire, une décomposition

$$\mathfrak{N}_k(F) = A_0 + D_0$$

telle que

$$x \subset A_0 \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad H(A_0, D_0) = 0.$$

Appliquons aux ensembles A_0 et D_0 le lemme du § 2, remarque, en y posant $H_i = S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$; on obtient deux domaines, G_{A_0} et G_{D_0}, tels que

$$G_{A_0} \times G_{D_0} = 0, \quad G_{D_0} \supset D_0,$$

(29)
$$A_0 \subset G_{A_0} \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Nous voyons que

$$Fr(G_{A_0}) \times \mathfrak{N}_k(F) = Fr(G_{A_0}) \times (A_0 + D_0) \subset Fr(G_{A_0}) \times (G_{A_0} + G_{D_0}) = 0,$$

$$Fr(G_{A_0}) \times F \subset F - \mathfrak{N}_k(F);$$

tout point y de l'ensemble fermé $Fr(G_{A_0}) \times F$ est donc de dimension $\leqslant k-1$ par rapport à F:

(30)
$$\dim_y F \leqslant k - 1.$$

Soit σ le plus petit des deux nombres positifs $\frac{1}{2}\varepsilon$ et $\frac{1}{2}\varrho(x, F - G_{A_0})$; on a pour tout $y \subset Fr(G_{A_0}) \times F$,

(31)
$$\varrho(x, y) \geqslant 2\sigma.$$

Or on peut, d'après (30), déterminer relativement à tout point $y \subset Fr(G_{A_0}) \times F$ une décomposition

(32)
$$F = A_y + B_y + D_y,$$

de manière que

$$A_y \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F), \quad D_y \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F), \tag{33}$$

$$B_y \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \quad \dim B_y < k-1, \tag{34}$$

$$A_y \supset y, \quad A_y + B_y \subset S(y, \sigma); \tag{35}$$

et le théorème de Borel-Lebesgue nous permet alors d'obtenir une suite finie

$$y_1, y_2, \ldots y_m,$$

telle que

$$Fr(G_{A_0}) \times F \subset \sum_{i=1}^{m} A_{y_i}. \tag{36}$$

Posons

$$B = \sum_{i=1}^{m} B_{y_i},$$

$$A = \left[G_{A_0} \times F + \sum_{i=1}^{m} A_{y_i}\right] - B,$$

$$D = F - (A + B).$$

On voit immédiatement d'après ces définitions que

$$F = A + B + D$$

est une décomposition de F en trois ensembles sans points communs deux à deux; et il résulte de (34) et (33) que

$$B \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \; A \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel } F).$$

Or on a d'après (36)

$$A + B = G_{A_0} \times F + \sum_{i=1}^{m} (A_{y_i} + B_{y_i}) = \overline{G}_{A_0} \times F + \sum_{i=1}^{m} (A_{y_i} + B_{y_i}),$$

donc

$$(A + B) \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \quad D \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F).$$

D'autre part, il résulte de (29) que

$$\varrho\,(x, y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

si $y \subset Fr(G_{A_0}) \times F$; et l'on obtient en comparant cette inégalité avec (35),

$$A_y + B_y \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2} + \sigma\right) \subset S(x, \varepsilon),$$

donc en vertu de (29),

$$A + B \subset S(x, \varepsilon).$$

Rapprochons enfin les relations (31) et (35); il s'ensuit

$$x \times B_y = 0, \quad x \times B = 0;$$

donc, x étant un point de $G_{A_0} \times F$,

$$x \subset A.$$

Nous voyons ainsi que l'ensemble B ε-sépare le point x de F. Or on a, d'après (34) et le théorème I,

$$\dim B < k - 1;$$

donc, ε étant arbitraire,

$$\dim_x F \leqslant k - 1.$$

Cette inégalité est incompatible avec l'hypothèse $x \subset \mathfrak{N}_k(F)$; il n'existe donc aucun point x tel que

$$\dim_x \mathfrak{N}_k(F) = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. Le théorème III′ ne peut être étendu aux ensembles non fermés, même dans le cas $k = 1$. En effet, soit C l'ensemble $P + Q$ que M. Sierpiński a construit dans sons travail „Sur les ensembles connexes et non connexes" [1]; on voit aisément que

$$\mathfrak{N}_1(C) = Q,$$

Q étant un ensemble dénombrable. Il en résulte (ch. I, § 19) que

$$\dim \mathfrak{N}_1(C) = 0.$$

Il est à remarquer que le théorème III′ ne nous apprend rien sur la connexité des $\mathfrak{N}_k(F)$ [2]. Pour pouvoir résoudre cette question, il faut étudier les $\mathfrak{N}_k(F)$ d'un point de vue tout différent, il s'agit notamment de déterminer la place qu'ils occupent dans la classification de Baire [3].

Le théorème que nous obtiendrons s'applique à *tous* les ensembles; l'hypothèse que les ensembles considérés sont fermés n'entraînerait même pas une simplification de la démonstration.

[1]) *Fund. Math.* II, pp. 82—83. M. Sierpiński désigne cet ensemble par E.

[2]) Voir ch. I, § 13.

[3]) Le terme „classes de Borel" qu'on trouve parfois, me semble assez peu motivé; on doit, en effet, à M. Borel seulement la définition de la *totalité* des ensembles (B), tandis que l'idée de la *classification* est due à M. Baire. C'est d'ailleurs M. Lebesgue qui appliqua, pour la première fois, cette idée aux *ensembles*, et non seulement aux fonctions. Les notations que nous employons sont dues à M. Hausdorff ($\mathfrak{G}_\delta$ et $\mathfrak{F}_\sigma$) et à M. Sierpiński ($\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$).

Relations avec les notions d'ordre descriptif.

13. Théorème IV. *Soit C un ensemble quelconque de dimension $\geqslant k$; l'ensemble des points x de C qui sont de dimension $\leqslant k-1$ par rapport à C, cet ensemble est un $\mathfrak{G}_\delta$ (rel. C)* [1]).

Démonstration. Soit

$$d_1,\ d_2, \ldots,\ d_m, \ldots$$

un ensemble dénombrable dense dans E. Déterminons relativement à toute triade (m, p, q) de nombres naturels, les trois ensembles

$$A^m_{p,q} = C \times S\left(d_m, \frac{1}{p+q}\right),$$

$$B^m_{p,q} = C \times \bar{S}.\left(d_m, \frac{1}{p}\right) - S\left(d_m, \frac{1}{p+q}\right).$$

$$D^m_{p,q} = C - \bar{S}\left(d_m, \frac{1}{p}\right) \text{ [2]}).$$

Il est évident que $A^m_{p,q}$, $B^m_{p,q}$ et $D^m_{p,q}$ sont sans point commun deux à deux, et que l'on a

$$C = A^m_{p,q} + B^m_{p,q} + D^m_{p,q},$$

$$A^m_{p,q}\ \varepsilon\ \mathfrak{G}\ (\text{rel. } C), \quad D^m_{p,q}\ \varepsilon\ \mathfrak{G}\ (\text{rel. } C),$$

$$B^m_{p,q}\ \varepsilon\ \mathfrak{F}\ (\text{rel. } C).$$

Soit (m, p, q) une triade quelconque. Deux cas sont possibles:

1) ou bien il existe au moins une décomposition de C

$$C = A + B + D$$

en trois ensembles sans point commun deux à deux, telle que

α) $A\ \varepsilon\ \mathfrak{G}\ (\text{rel. } C), \quad D\ \varepsilon\ \mathfrak{G}\ (\text{rel. } C),$
(donc $B\ \varepsilon\ \mathfrak{F}\ (\text{rel. } C)$);

β) $A \supset A^m_{p,q}, \quad D \supset D^m_{p,q},$
(donc $B \subset B^m_{p,q}$);

γ) $\dim B < k-1$;

[1]) k est, comme ci-dessus, un entier positif quelconque.

[2]) Nous désignons cet ensemble indépendant de q par $D^m_{p,q}$ parce que les trois ensembles $A^m_{p,q}$, $B^m_{p,q}$, $D^m_{p,q}$ ne seront jamais envisagés séparément.

nous dirons alors que (m, p, q) est une triade canonique et nous poserons

$$G^m_{p,q} = A^m_{p,q};\ ^{1)}.$$

2) ou bien il n'existe aucune décomposition de l'espèce indiquée. Nous dirons dans ce cas que (m, p, q) n'est pas canonique, et nous poserons

$$G^m_{p,q} = 0\ ^{2)}.$$

On voit que $G^m_{p,q}$ est toujours un $\mathfrak{G}$ (rel. C); l'ensemble

$$Q = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G^m_{p,q}$$

est donc un $\mathfrak{G}_\delta$ (rel. C).

14. Je dis que Q coïncide avec l'ensemble des points x de C qui sont de dimension $\leqslant k-1$ par rapport à C.

En effet, nous verrons que la relation $\dim_x C \leqslant k-1$ entraîne $x \subset Q$, et vice versa.

1) Soit $\dim_x C \leqslant \varkappa - 1$, et soit p un entier positif arbitraire. Il existe alors une $\frac{1}{2p}$-séparation

$$C = A + B + D$$

du point x de C par un ensemble B de dimension $< k-1$:

$$\alpha) \qquad A \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } C), \quad D \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } C)$$

$$\gamma) \qquad \dim B < k - 1$$

$$(37) \qquad A \supset x, \quad A + B \subset S\left(x, \frac{1}{2p}\right).$$

[1]) Il est à remarquer que *l'existence* seule d'une telle décomposition nous est essentielle; c. à d. que nous ne sommes pas obligés de choisir *une* décomposition déterminée relativement à chaque triade canonique, l'ensemble $G^m_{p,q}$ étant *indépendant* d'un tel choix. L'axiome de Zermelo n'intervient donc pas dans nos raisonnements, contrairement à ce qui a lieu dans la démonstration du théorème I (voir la note du § 5). Quant au théorème III', on pourrait par un artifice convenable débarrasser sa démonstration de l'emploi direct de l'axiome de Zermelo. Je n'ai pas cru utile de le faire, car un emploi indirect subsisterait quand-même, ce théorème étant basé sur le théorème I.

[2]) $G^m_{p,q}$ peut d'ailleurs être vide même dans le cas d'une triade canonique. C'est ce qui a lieu, p. ex., quand $\varrho(d_m, C) > \frac{1}{p+q}$: alors (m, p, q) est canonique (car il suffit de poser $A=B=0$, $D=C$), et l'on a $G^m_{p,q} = A^m_{p,q} = 0$.

A étant un domaine relatif, on a

$$\varrho(x, B+D) > 0;$$

désignons par ε le plus petit des deux nombres positifs $\frac{1}{2p}$ et $\varrho(x, B+D)$. Choisissons ensuite les entiers positifs m et q de manière qu'on ait

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varrho(d_m, x) < \frac{1}{3}\varepsilon, \\ &\frac{1}{3}\varepsilon < \frac{1}{p+q} < \frac{2}{3}\varepsilon; \end{aligned} \right.$$

un tel choix est évidemment possible, $\{d_m\}$ étant dense dans E, et p étant $\geqslant 1$, tandis que $\frac{1}{p} \geqslant 2\varepsilon$.

La triade (m, p, q) possède alors les propriétés suivantes:

β_a) Soit y un point de $A^m_{p,q}$; on a

$$\varrho(y, d_m) < \frac{1}{p+q} < \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\varrho(x, y) \leqslant \varrho(x, d_m) + \varrho(y, d_m) < \varepsilon \leqslant \varrho(x, B+D);$$

donc, y étant agrégé à $C = A + B + D$,

$$y \subset A, \quad A^m_{p,q} \subset A.$$

β_d) Soit $z \subset D^m_{p,q}$; il vient

$$\varrho(z, d_m) > \frac{1}{p},$$

$$\varrho(x, z) \geqslant \varrho(z, d_m) - \varrho(x, d_m) > \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{3} > \frac{1}{2p};$$

et il résulte de $z \subset C$ et de (37) que

$$z \subset D, \quad D^m_{p,q} \subset D.$$

(m, p, q) est donc une triade canonique, et l'on obtient

$$G^m_{p,q} = A^m_{p,q} = C \times S\left(d_m, \frac{1}{p+q}\right);$$

on voit ainsi d'après les inégalités (38) que

$$x \subset G^m_{p,q}.$$

Il existe donc pour tout p une triade (m, p, q) telle que x est agrégé à $G^m_{p,q}$; il en résulte que

$$x \subset Q, \qquad\qquad \text{c. q. f. d.}$$

2) Soit maintenant x un point de Q, et soit ε un nombre positif arbitraire. Tous les $G^m_{p,q}$ faisant partie de C, x est, bien entendu, un point de C. Or soit p un entier $> \frac{2}{\varepsilon}$; x étant agrégé à Q, il existe deux entiers positifs, m et q, tels que

$$x \subset G^m_{p,q}.$$

(m, p, q) est une triade canonique (car $G^m_{p,q} \neq 0$); il existe donc une décomposition

$$C = A + B + D \tag{39}$$

satisfaisant aux conditions α), β), γ) du § 13. Or remarquons que

$$A \supset A^m_{p,q} = G^m_{p,q} \supset x,$$

et que la relation $D \supset D^m_{p,q}$ entraîne

$$A + B \subset A^m_{p,q} + B^m_{p,q} \subset \bar{S}\left(d_m, \frac{1}{p}\right),$$

$$\delta(A + B) \leqslant \frac{2}{p} < \varepsilon,$$

donc, x étant un point de $A + B$,

$$A + B \subset S(x, \varepsilon).$$

Nous voyons ainsi que la décomposition (39) est une ε-séparation du point x de C par l'ensemble B de dimension $< k - 1$. ε étant arbitraire, il en résulte que

$$\dim_x C \leqslant k - 1, \qquad\qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème IV est complètement démontré.

15. Corollaire I. *Tous les $\mathfrak{N}_k(C)$ sont des $\mathfrak{F}_\sigma$ (rel. C).*

Corollaire II. *L'ensemble des points de C qui sont de dimension k $(1 \leq k < \dim C)$ par rapport à C, est un $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$ (rel. C).*

Cet ensemble est, en effet, égal à $\mathfrak{N}_k(C) - \mathfrak{N}_{k+1}(C)$. L'énoncé subsiste d'ailleurs lorsque $k = 0$ et $k = \dim C$: les ensembles correspondants sont des $\mathfrak{G}_\delta$ (rel. C) et des $\mathfrak{F}_\sigma$ (rel. C), donc des $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$ (rel. C).

Appliquons les résultats acquis à un ensemble fermé F. Il est évident qu'un $\mathfrak{F}_\sigma$ (rel. F) est un $\mathfrak{F}_\sigma$ (absolu); de même, un $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$ (rel. F) est un $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$. Or F est un $\mathfrak{G}_\delta$ [1]); il en résulte que tout $\mathfrak{G}$ (rel. F) est un $\mathfrak{G}_\delta$ (car c'est le produit de F et d'un domaine), et il en est encore de même pour tout $\mathfrak{G}_\delta$ (rel. F), le produit d'une infinité dénombrable de $\mathfrak{G}_\delta$ étant un $\mathfrak{G}_\delta$ lui aussi. Nous obtenons ainsi le

Corollaire III. *Soit F un ensemble fermé. Les ensembles des points de F qui sont*

1) *de dimension $\leqslant k$ par rapport à F,*
2) „ „ $= k$ „ „ „ „,
3) „ „ $\geqslant k$ „ „ „ „,

ces ensembles sont respectivement

1) *un* $\mathfrak{G}_\delta$, 2) *un* $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$, 3) *un* $\mathfrak{F}_\sigma$ [2]).

Corollaire IV. *Si $\mathfrak{N}_k(F)$ et $F - \mathfrak{N}_k(F)$ sont tous les deux denses sur F, ils seront respectivement de 1re et de 2de catégorie par rapport à F* [3]).

[1]) Hausdorff, p. 306.

[2]) Il est à noter que ces classes d'ensembles sont des invariants topologiques, et qu'il en est de même pour la classe $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ dont nous aurons besoin dans la seconde partie de ce mémoire. L'invariance de la classe $\mathfrak{F}_\sigma$ est évidente; quant aux autres, leur invariance est démontrée dans les mémoires suivants: 1) S. Mazurkiewicz, Über Borelsche Mengen, *Bull. Ac. Cracovie*, 1916 (les $\mathfrak{G}_\delta$); 2) W. Sierpiński, Sur quelques invariants d'Analysis Situs, *Fund. Math.* III, p. 120 (les $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$); 3) S. Mazurkiewicz, Sur l'invariance de la notion d'ensemble $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, *Fund. Math.* II, p. 104.

Toutes ces démonstrations s'appliquent sans aucune modification à des espaces métriques compacts quelconques; il en est encore de même du théorème fondamental de M. Sierpiński sur l'invariance des classes de Baire (C. R. t. 171 (1920), p. 24), théorème qui nous apprend l'invariance des $\mathfrak{G}_{\delta\sigma}$, $\mathfrak{G}_{\delta\sigma\delta}$, ... et de toutes les classes $\geqslant \omega$ de la classification de Lebesgue. Enfin, M. Lavrentieff a démontré (*Fund. Math.* VI) l'invariance de toutes les classes de Baire.

Notons qu'on peut démontrer en répétant mot pour mot la démonstration de M. Sierpiński, l'invariance des ensembles (A).

Toutes ces classes d'ensembles sont donc, pour ainsi dire, des *invariants absolus*, contrairement aux domaines, dont l'invariance ne subsiste que lorsque les deux ensembles envisagés sont situés dans deux espaces Euclidiens à un même nombre de dimensions *(invariance relative à un espace déterminé)*.

[3]) En effet, un $\mathfrak{G}_\delta$ dense sur un ensemble fermé est de 2de catégorie sur cet ensemble, tandis que son complémentaire est de 1re catégorie (Hausdorff, p. 328).

C'ést donc l'ensemble des points de dimension *supérieure* qui est de 1re catégorie; nous voyons ainsi que la circonstance notée au début du § 47 du ch. II est générale [1]).

16. Démontrons maintenant qu'on ne peut préciser d'aucune manière les résultats que nous avons acquis relativement à la place des ensembles $\mathfrak{N}_k(C)$ etc. dans la classification de Baire (Théorème IV et corollaires I, II, III). Il suffit évidemment de montrer que

1) $\mathfrak{N}_k(F)$ (qui est un $\mathfrak{F}_\sigma$) n'est pas nécessairement un $\mathfrak{G}_\delta$ (donc, *a fortiori*, un $\mathfrak{F}$, un $\mathfrak{G}$, un $\mathfrak{F}_\varrho$ etc);

2) $F - \mathfrak{N}_k(F)$ (qui est un $\mathfrak{G}_\delta$) n'est pas nécesairement un $\mathfrak{F}_\sigma$);

3) $\mathfrak{N}_k(F) - \mathfrak{N}_{k+1}(F)$ (qui est un $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$, ou bien, ce qui revient au même, un $\mathfrak{G}_{\delta\varrho}$) peut être étranger aux classes $\mathfrak{F}_\sigma$ et $\mathfrak{G}_\delta$.

La démonstration de 1) et 2) est immédiate. Envisageons, en effet, la surface Cantorienne généralisée S des §§ 43—46 du ch. II; nous avons vu (ch. II, § 45) que $\mathfrak{N}_2(S)$ et $S - \mathfrak{N}_2(S)$ sont tous les deux denses sur S. Il en résulte, d'après le corollaire IV du § précédent, que ces ensembles sont respectivement de 1re et de 2de catégorie par rapport à S; donc le premier n'est pas un $\mathfrak{G}_\delta$, et le second n'est pas un F_σ [2]).

La démonstration de la proposition 3) exige la construction d'un nouvel exemple. Nous obtiendrons cet exemple en modifiant légèrement la construction des §§ 43—46 du ch II. Conservons toutes les notations des §§ cités. La modification consiste en ce que

a) le cercle $K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} 1}$ ($m, i_1, i_2, \ldots i_{m-1}$ étant des entiers positifs arbitraires) n'a aucun point commun avec le cercle $K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$ ($K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m}$, $i_m \neq 1$, est, comme auparavant, tangent à $K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$ au point $b_{i_1 i_2 \ldots i_m}$);

b) le „polyèdre" $P_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} 1}$ n'a aucun point commun avec $K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} + K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} 1}$ (si $i_m \neq 1$, on aura, comme auparavant: $P_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m} \times K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} = P_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m} \times K_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m} = b_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m}$).

[1]) Cette circonstance est moins inattendue que l'on serait peut-être tenté de le croire. On voit, en effet, qu'un ensemble H de 2de catégorie par rapport à un ensemble fermé F *quelconque* ne peut aucunement être regardé comme la partie la plus *massive* de F: ainsi, F peut contenir un segment, tandis que H est dénombrable (Hausdorff, p 255, Fig. 8); F peut être un continu contenant un carré, tandis que H est composé d'une infinité dénombrable de segments (Janiszewski, thèse, p. 38—39).

[2]) Hausdorff, p. 328

Dans le cas actuel les ensembles S, K^m, Π^k ne sont plus des continus; ce sont d'ailleurs toujours des ensembles fermés; dim $S = 2$. On voit aisément, en reprenant la demonstration du § 46 (ch. II), que les points de S sont de dimension 2 ou < 2 selon qu'ils appartiennent à K^ω ou à $S - K^\omega$. Or un point x de ce dernier ensemble est univoquement déterminé par la suite des ensembles

$$I(P_{i_1}),\quad \overline{I}(P_{i_1 i_2}), \ldots, \overline{I}(P_{i_1 i_2 \ldots i_m}), \ldots$$

auxquels il est agrégé, et l'on voit sans peine que x sera de dimension 1 ou 0 selon qu'il y aura un nombre fini ou une infinité dénombrable d'indices égaux à 1 dans la suite d'indices

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$$

relative à ce point. Il en résulte que les ensembles $\mathfrak{N}_2(S), \mathfrak{N}_1(S) - \mathfrak{N}_2(S), S - \mathfrak{N}_1(S)$ sont tous les trois denses sur S. Le dernier de ces ensembles est donc de 2de catégorie; $\mathfrak{N}_1(S) - \mathfrak{N}_2(S)$ est de 1re catégorie. Étant dense, il ne peut donc être un $\mathfrak{G}_\delta$.

Or considérons les ensembles

$$\tilde{K}^\omega = K + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots i_m = 2}^{\infty} K_{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

$$\tilde{S} = \overline{\tilde{K}^\omega},$$

$$\tilde{R} = \tilde{S} - \tilde{K}^\omega;$$

les indices égaux à 1 étant exclus, ces ensembles ont évidemment des propriétés analogues aux ensembles K^ω, S, R des §§ 45—46 (ch. II). $\tilde{R}$ n'est donc pas un $\mathfrak{F}_\sigma$; il en résulte que $\mathfrak{N}_1(S) - \mathfrak{N}_2(S)$ ne peut, lui non plus, être un $\mathfrak{F}_\sigma$. En effet, tout point de $\tilde{R}$ étant déterminé par une suite d'indices supérieurs à 1, on a

$$\tilde{R} = \tilde{S} \times [\mathfrak{N}_1(S) - \mathfrak{N}_2(S)];$$

la relation $[\mathfrak{N}_1(S) - \mathfrak{N}_2(S)] \varepsilon \mathfrak{F}_\sigma$ entraînerait donc, $\tilde{S}$ étant fermé, la conséquence inexacte $\tilde{R} \varepsilon \mathfrak{F}_\sigma$.

$\mathfrak{N}_1(S) - \mathfrak{N}_2(S)$ est ainsi ni un $\mathfrak{G}_\delta$ ni un $\mathfrak{F}_\sigma$, c. q. f. d.

17. Application du théorème IV à l'étude des propriétés topologiques des $\mathfrak{N}_k(F)$. Soit x un point de $\mathfrak{N}_k(F)$; on a (théorème III', § 12)

$$\dim_x \mathfrak{N}_k(F) > 0,$$

donc aussi

$$\dim [\mathfrak{N}_k(F) \times S(x, \varepsilon)] > 0,$$

ε étant un nombre positif arbitraire. Or $S(x, \varepsilon)$ étant un $\mathfrak{G}$ (donc un $\mathfrak{F}_\sigma$), il résulte du théorème IV que

$$\mathfrak{N}_k(F) \times S(x, \varepsilon) \tag{40}$$

est un $\mathfrak{F}_\sigma$. Nous pouvons appliquer à cet ensemble le théorème de M. Mazurkiewicz, d'après lequel tout $\mathfrak{F}_\sigma$ punctiforme est homéomorphe à un ensemble linéaire [1]). Un ensemble punctiforme linéaire étant de dimension 0, il en résulte que l'ensemble (40) n'est pas punctiforme. Nous voyons ainsi que $\mathfrak{N}_k(F)$ contient un continu dans tout voisinage de chacun de ses points; c. à d.

Théorème III″. *$\mathfrak{N}_k(F)$ est nulle part punctiforme.*

Voici un problème qui s'y rattache immédiatement:

Problème ε. *Un point x de $\mathfrak{N}_k(F)$ est-il nécessairement agrégé à un continu contenu dans $\mathfrak{N}_k(F)$?*

La réponse affirmative (qui me semble très probable) préciserait de beaucoup le théorème III′. Il est d'ailleurs à remarquer que la méthode que nous avons suivie, ne nous apprend rien là-dessus, car un $\mathfrak{F}_\sigma$ dont tous les points sont de dimension > 0, ne possède pas toujours la propriété en question. C. à d. que L étant un tel $\mathfrak{F}_\sigma$ $(L = \mathfrak{N}_1(L))$, et x, l'un de ses points, il peut arriver que

$$\mathrm{Const}_x\, L = x,$$

et même que

$$\mathrm{Comp}_x\, L = x,$$

Exemple (dans E_2). Soit

$$a = (0, 0),$$

$$L = a + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{x = \frac{1}{m},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

Tout point de L est de dimension 1 par rapport à L; L est un $\mathfrak{F}_\sigma$; cependant

$$\mathrm{Const}_a\, L = \mathrm{Comp}_a\, L = a.$$

[1]) *Fund. Math.* III, p. 70, théor. II. Ce théorème sera obtenu dans le ch. VI comme cas particulier du théorème général suivant: „un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n contient un ensemble fermé de même dimension“.

18. Problèmes. Les résultats concernant la structure (topologique) des $\mathfrak{N}_k(F)$ que nous avons obtenus, sont bien loin d'être définitifs. Ainsi, nous savons seulement que

$$\dim \mathfrak{N}_k(F) > 0;$$

il est cependant bien probable que

$$\dim \mathfrak{N}_k(F) = \dim F$$

quel que soit k [1]). La résolution de cette question paraît être très difficile; à plus forte raison, il en est de même des deux problèmes suivants:

Problème ξ. *Tout point d'un $\mathfrak{N}_k(F)$ est-il nécessairement de dimension $\geqslant k$ par rapport à $\mathfrak{N}_k(F)$?*

Problème η. *Peut-on démontrer que tout ensemble fermé de dimension n contient une multiplicité Cantorienne de même dimension?*

Ces deux problèmes sont étroitement liés entre eux (la question ci-dessus p. ex. n'est qu'un cas particulier de chacun d'eux); leur résolution constitue à mon avis le but principal de la présente branche de la théorie.

On pourrait décomposer le problème η en plusieurs problèmes partiels; je me dispense de le faire, en remarquant seulement qu'on trouverait parmi ces problèmes partiels le problème γ du § 8; et cela même dans le cas où l'on aurait remplacé préalablement dans l'énoncé du problème η les mots „ensemble fermé" par le mot „continu" [2]).

Notons enfin que la réponse au problème η serait en tout cas négative si l'on exigeait que la multiplicité dont il y est question, contînt un point de dimension n *donné d'avance*; c. à d. que F étant un ensemble fermé de dimension n, et x, un point de $\mathfrak{N}_n(F)$, il n'existe pas toujours une multiplicité Cantorienne K telle que

$$\dim K = n, \quad x \subset K \subset F;$$

[1]) Remarquons qu'on a (d'après le théorème II, § 10)

$$\dim \overline{\mathfrak{N}_k(F)} = \dim F.$$

[2]) La cause en est que la continuité de K n'entraîne nullement celle de $\overline{\mathfrak{N}}_n(K)$, tandis que la multiplicité en question (supposée existante) doit être agrégée à $\overline{\mathfrak{N}}_n(K)$.

et cela même lorsque F est un continu dont tous les points sont de dimension n.

Exemple (dans E_2). Désignons par

$$T(a, b)$$

le domaine (fermé) limité par le triangle aux sommets

$$(a, 0), (b, 0), (b, 1)$$

et posons

$$K_0 = \{x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

$$F = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} T\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right).$$

F est un continu ne possédant que des points de dimension 2. Or soit c un point quelconque de K_0, je dis qu'il n'existe aucune surface Cantorienne K telle que

$$c \subset K \subset F. \tag{41}$$

Soit, en effet, K un continu satisfaisant à la relation (41); deux cas sont alors possibles:

1) ou bien $K \subset K_0$, ce qui entraîne dim $K = 1$;

2) ou bien K a un point commun avec l'un des $T\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right)$; dans ce cas K cesse d'être connexe aprés la suppression de l'unique point $\left(\frac{1}{m+2}, 0\right)$.

Dans les deux cas K n'est pas une surface Cantorienne, c.q.f.d.

Ch. V. Les espaces Euclidiens.

1. Revenons à l'étude de la dimension des ensembles situés dans des espaces Euclidiens E_n à un nombre quelconque de dimensions Nous avons seulement effleuré l'étude du cas général au ch. II; seul le cas $n = 3$ y a été considéré d'une manière détaillée, et ce n'est que dans ce cas particulier que nous avons obtenu des résultats en quelque sorte définitifs. Dans le présent chapitre nous nous proposons de généraliser au cas de n quelconque les principaux résultats (relatifs à $n = 3$) du ch. II. La mé-

thode que nous suivrons est tout à fait différente de celle du ch II; elle est basée sur le remarquable théorème de M. Lebesgue, théorème qui s'énonce comme il suit [1]:

„*Si chaque point d'un „domaine" $\overline{G}$ à n dimensions appartient à l'un au moins des ensembles fermés $F_1, F_2, \dots, F_\nu$ en nombre fini et si ces ensembles sont suffisamment petits, il y a des points communs au moins à $n+1$ de ces ensembles.*

D'ailleurs, quel que soit $\overline{G}$ et quel que soit le degré de petitesse auquel on assujettit les F_i, il est toujours possible de décomposer $\overline{G}$ en ensembles fermés F_i tels qu'aucun point ne soit commun à plus de $n+1$ d'entre eux".

Nous démontrerons notamment que tout ensemble fermé de dimension n possède une propriété analogue; il en résultera que tout domaine (fermé) de E_n est un ensemble de dimension n; et tous les théorèmes que nous nous proposons d'établir se déduisent de ce résultat sans aucune difficulté.

2. Nous introduisons pour faciliter le langage les définitions suivantes:

Déf. 1. *Soit $\mathfrak{S}$ un système (fini) d'ensembles fermés*

$$F_1, F_2, \dots, F_p; \text{ [2]}$$

et supposons qu'il existe une suite de n indices différents

$$i_1, i_2, \dots, i_n,$$

telle que

$$\prod_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq 0,$$

[1]) H. Lebesgue, Sur les correspondances entre les points de deux espaces, *Fund. Math.* II, p. 257. Le théorème fut d'ailleurs énoncé par M. Lebesgue dès 1911 (voir *Math. Annalen*, t. 70, p. 166—168). La démonstration du théorème se trouve pour la première fois dans le mémoire de M. Brouwer du *Journ. de Crelle* (t. 142 (1913), p. 150—152).

Il est à remarquer que les »domaines« $\overline{G}$ dont il est question dans l'énoncé ci-dessus, sont des domaines *fermés*.

[2]) Ces ensembles ne sont pas nécessairement différents; quelques-uns d'entre eux (ou même tous) peuvent être vides.

tandis qu'il n'existe aucune suite analogue de $n+1$ indices [1]); *nous dirons alors que $\mathfrak{S}$ est un système d'ordre n* [2]).

Il est évident que tout système de p ensembles fermés possède un ordre déterminé, cet ordre étant $\leqslant p$ [3]).

Déf. 2. Nous dirons que l'ensemble fermé Φ est d'ordre n par rapport à ε s'il existe un système

$$\mathfrak{S} = \{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$$

d'ordre n tel que

1) $\sum_{i=1}^{p} F_i = \Phi$,

2) $\delta(F_i) < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$.

On voit d'ailleurs que l'ordre d'un ensemble fermé (par rapport à un ε déterminé) n'est pas univoquement défini.

Déf. 3. *n sera dit le vrai ordre de Φ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

1) *Φ est d'ordre n par rapport à ε quel que soit $\varepsilon > 0$;*

2) *Il existe un certain nombre positif ε_1 tel que Φ n'est pas d'ordre inférieur à n par rapport à ε_1* [4]).

Ces définitions posées, le théorème de M. Lebesgue s'énonce comme il suit:

„*Le vrai ordre d'un domaine fermé de E_n est égal à $n+1$*".

3. Voici quelques propositions (dont nous aurons besoin dans la suite) relatives à l'ordre des systèmes et des ensembles.

[1]) C. à d. qu'on a $\prod_{k=1}^{n+1} F_{i_k} = 0$ pour toute de suite $n+1$ indices différents $i_1, i_2, \ldots i_{n+1}$ (Cette remarque est d'ailleurs illusoire lorsque $n = p$).

[2]) Voici un énoncé équivalent: »Désignons par ord x le nombre des F_i à indices différents (ces F_i ne sont pas nécessairement différents eux-mêmes) auxquels le point x est agrégé; le maximum (dans E) de la fonction ord x sera appelé l'ordre du système $\mathfrak{S}$«.

[3]) L'ordre d'un système est égal à 0 dans le cas et dans le cas seulement où tous ses ensembles sont vides; l'ordre est $=1$ lorsque les F_i sont sans points communs deux à deux.

[4]) Ou bien, ce qui revient au même: »si le nombre positif ε est suffisamment petit, Φ n'est pas d'ordre $< n$ par rapport à ε«. L'équivalence des deux énoncés résulte de la remarque évidente que Φ étant d'ordre n par rapport à ε, il le sera encore par rapport à tout nombre $> \varepsilon$.

Lemme I. *Soient* $\mathfrak{S}=\{F_1,\ldots,F_p\}$ et $\mathfrak{S}_1=\{\overline{F}_1,\ldots,\overline{F}_q\}$ *deux systèmes tels que*

$$q\leqslant p,\ \overline{F}_i\subset F_i; \qquad (i=1,2,\ldots,q)$$

dans ce cas l'ordre de $\mathfrak{S}_1$ *ne surpasse pas celui de* $\mathfrak{S}$.

La démonstration est immédiate.

Lemme II. *Soit* $\mathfrak{S}=\{F_1,\ldots,F_p\}$ *un système d'ordre n, et soit* $\mathfrak{S}_\varepsilon$ *le système*

$$\overline{S}(F_1,\varepsilon),\ \overline{S}(F_2,\varepsilon),\ldots,\ \overline{S}(F_p,\varepsilon);$$

pour tout ε *suffisamment petit le système* $\mathfrak{S}_\varepsilon$ *sera encore d'ordre*

Démonstration. — D'après le lemme I, l'ordre de $\mathfrak{S}_\varepsilon$ est $\geqslant n$ et ne peut que diminuer quand ε diminue. Il s'agit donc de démontrer que cet ordre est $\leqslant n$ pour une valeur de ε (d'ailleurs quelconque).

Or soit

(1) $$i_1,\, i_2,\ldots,\, i_{n+1} \qquad (i_k\neq i_l,\ 1\leqslant i_k\leqslant p)\ [2]$$

une suite quelconque de $n+1$ indices différents; l'ensemble fermé

$$F^{\varepsilon}_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}}=\prod_{k=1}^{n+1}\overline{S}(F_{i_k},\varepsilon)$$

diminue avec ε, et l'on a

$$\prod_{j=1}^{\infty}F^{j^{-1}}_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}}=\prod_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n+1}\overline{S}\left(F_{i_k},\frac{1}{j}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{\infty}\overline{S}\left(F_{i_k},\frac{1}{j}\right)=\prod_{k=1}^{n+1}F_{i_k}=0$$

d'après la définition d'un système d'ordre n. Il existe donc un nombre positif (inverse d'un entier)

(2) $$\varepsilon\,(i_1,\, i_2,\ldots,\, i_{n+1})$$

tel que $F^{\varepsilon}_{i_1 i_2\ldots i_{n+1}}=0$ pour tout $\varepsilon\leqslant\varepsilon\,(i_1,\, i_2,\ldots\, i_{n+1})$ [3].

[1]) On trouvera un lemme à peu près équivalent dans le mémoire cité de M. Lebesgue (p. 259—261).

[2]) Je laisse de côté le cas trivial $n=p$.

[3]) D'après le théorème de Cantor („*Durchschnittssatz*“; voir p. ex. Hausdorff p. 230, I).

Comme il n'y a qu'un nombre fini de suites telles que (1), la borne inférieure des nombres (2) sera positive; désignons-la par ε_0. Dans ce cas

$$F^{\varepsilon_0}_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} = \prod_{k=1}^{n+1} S(F_{i_k}, \varepsilon_0) = 0$$

pour toute suite de $n+1$ indices différents; c. à d. que l'ordre du système $\mathfrak{S}_{\varepsilon_0}$ est $< n+1$,

c. q. f. d.

Lemme III. *Soit $\{F_1, F_2, \dots, F_p\}$ un système d'ordre n, et $\{F_{p+1}, \dots F_{p+q}\}$ un système d'ordre m; l'ordre du système $\{F_1, \dots, F_p, F_{p+1}, \dots, F_{p+q}\}$ est alors $\leqslant n+m$.*

Ce lemme est une conséquence immédiate de la deuxième définition de l'ordre d'un système (§ 2, note).

4. Lemme IV. *Si l'ensemble fermé Φ est d'ordre n par rapport à ε, il sera aussi d'ordre $n+h$ par rapport à ε* [1]).

Soit, en effet, $\{F_1, \dots, F_p\}$ un système d'ordre n satisfaisant aux conditions de la définition 2, et soit

$$i_1, i_2, \dots, i_n$$

une suite de n indices différents telle que

$$\prod_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq 0.$$

Posons

$$F_{p+1} = F_{p+2} = \dots = F_{p+h} = F_{i_1};$$

on voit aisément que le système $\{F_1, \dots, F_p, F_{p+1}, \dots, F_{p+h}\}$ est un système d'ordre $n+h$ qui satisfait encore aux conditions de la définition 2.

Lemme V. *Soit Φ un ensemble fermé, et $\{F_1, \dots, F_p\}$, un système d'ordre n tel que*

$$\Phi \subset \sum_{i=1}^{p} F_i,$$

[1]) Ce lemme est en défaut quand $n=0$ (c. à d. $\Phi = 0$).

$$\delta(F_i) < \varepsilon; \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

dans ce cas Φ est d'ordre n par rapport à ε [1].

Le système

$$\{F_1 \times \Phi,\ F_2 \times \Phi, \dots,\ F_p \times \Phi\}$$

est d'ordre $\leqslant n$ (lemme I) et il satisfait aux conditions de la définition 2; il ne reste donc qu'à appliquer le lemme précédent.

Lemme VI. *Soit Φ un ensemble fermé d'ordre n par rapport à ε; dans ce cas tout ensemble fermé Φ_1 contenu dans Φ est aussi d'ordre n par rapport à ε* [2].

C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Lemme VII. *Φ étant d'ordre n par rapport à ε, l'ensemble $\overline{S}(\Phi, \vartheta)$ sera encore d'ordre n par rapport à ε à condition que ϑ soit suffisamment petit.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{S} = \{F_1, \dots, F_p\}$ un système d'ordre n vérifiant les conditions de la définition 2, et soit ϑ_0 un nombre positif tel que le système

$$\mathfrak{S}_\vartheta = \{\overline{S}(F_1, \vartheta), \dots, \overline{S}(F_p, \vartheta)\}$$

soit d'ordre n quand $\vartheta < \vartheta_0$ (lemme II). Désignon par ϑ_1 le plus petit des $p+1$ nombres positifs

$$\vartheta_0, \frac{1}{2}[\varepsilon - \delta(F_1)], \dots, \frac{1}{2}[\varepsilon - \delta(F_p)];$$

dans ce cas $\overline{S}(\Phi, \vartheta)$ sera d'ordre n par rapport à ε pour toute valeur de ϑ inférieure à ϑ_1. En effet, le système $\mathfrak{S}_\vartheta$ est alors d'ordre n, et l'on a

$$1) \quad \sum_{i=1}^{p} \overline{S}(F_i, \vartheta) = \overline{S}\left(\sum_{i=1}^{p} F_i, \vartheta\right) = \overline{S}(\Phi, \vartheta),$$

$$2) \quad \delta(\overline{S}(F_i, \vartheta)) \leqslant \delta(F_i) + 2\vartheta < \delta(F_i) + 2\vartheta_1 \leqslant \varepsilon.$$

$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

[1]) Ce lemme est en défaut quand $\Phi = 0$.

[2]) A condition que Φ_1 ne soit pas vide.

Lemme VIII. *Φ et Φ_1 étant respectivement d'ordre n et m par rapport à ε, l'ensemble $\Phi+\Phi_1$ sera d'ordre $n+m$ par rapport à ε.*

On n'a qu'à rapprocher les lemmes III et IV [1]).

5. Ces lemmes formels établis, nous arrivons à la démonstration du Théorème. *Quels que soient l'ensemble fermé F de dimension n et le nombre positif ε, F est toujours d'ordre $n+1$ par rapport à ε.*

Le théorème est évidemment vrai lorsque $n=-1$. Supposons qu'il en soit de même pour tous les entiers inférieurs à un certain entier n (non négatif); il s'agit de démontrer que le théoréme subsiste pour les ensembles fermés de dimension n. Soit donc F un tel ensemble; ε un nombre positif quelconque. x étant un point arbitraire de F, il existe une décomposition de F en trois ensembles sans points communs deux à deux

$$F=A_x+B_x+D_x,$$

telle qu'on ait

(3) $$A_x\,\varepsilon\,\mathfrak{G}\,(\text{rel. }F),\quad D_x\,\varepsilon\,\mathfrak{G}\,(\text{rel. }F),$$

(4) $$B_x\,\varepsilon\,\mathfrak{F},\quad \dim B_x \leq n-1,$$

(5) $$A_x\supset x,\quad A_x+B_x\subset S\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right);$$

et il résulte du théorème de Borel-Lebesgue qu'il existe une suite finie de points

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_p$$

telle que $F=\sum\limits_{i=1}^{p}A_{x_i}$.

Posons

(6) $$\sum_{i=1}^{p}B_{x_i}=\Phi;$$

le théorème I du chapitre précédent nous apprend, en vertu de (4), que Φ est un ensemble fermé de dimension $\leq n-1$; d'après notre supposition l'ordre de Φ par rapport à ε est donc $\leqslant n$; et il en est encore de même (lemmes VII et VI) des ensembles

[1]) Ce lemme est valable dans tous les cas. La chose est évidente quand $n=m=0$; or si l'un au moins des entiers n ou m est >0, $\Phi+\Phi_1$ n'est pas vide, et le lemme IV peut être appliqué.

$\overline{S}(\Phi, \vartheta)$ et $F \times S(\Phi, \vartheta)$, ϑ étant un nombre positif convenablement choisi [1]).

Ceci fait, posons

$$(7)\quad \begin{cases} L_1 = \overline{A}_{x_1} - [F \times S(\Phi, \vartheta)], \\ L_i = A_{x_i} - [A_{x_1} + \ldots + A_{x_{i-1}} + F \times S(\Phi, \vartheta)]; \quad (i = 2, 3, \ldots, p) \end{cases}$$

Les ensembles entre crochets étant des $\mathfrak{G}$ (rel. F), les L_i sont des ensembles fermés. Ils possèdent les propriétés suivantes:

1) $\delta(L_i) \leqslant \delta(\overline{A}_{x_i}) = \delta(A_{x_i}) \leqslant \delta(A_{x_i} + B_{x_i})$;

or d'après (5),

$$\delta(A_{x_i} + B_{x_i}) < \varepsilon,$$

$$(8)\qquad \delta(L_i) < \varepsilon. \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

2) Ils sont sans points communs deux à deux. En effet, soit $i < k$; on a

$$L_i \times L_k \subset \overline{A}_{x_i} \times L_k = \overline{A}_{x_i} \times \{A_{x_k} - [A_{x_1} + \ldots + A_{x_{k-1}} + F \times S(\Phi, \vartheta)]\},$$

$$L_i \times L_k \subset \overline{A}_{x_i} - [A_{x_i} + F \times S(\Phi, \vartheta)].$$

Or il résulte de (6) et de l'inclusion $B_{x_i} \subset F$ que

$$\overline{A}_{x_i} \subset (\overline{A_{x_i} + B_{x_i}}) = A_{x_i} + B_{x_i} \subset A_{x_i} + F \times S(\Phi, \vartheta);$$

par conséquent, en vertu de (7)

$$L_i \times L_k = 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On voit en rapprochant ce dernier résultat de l'inégalité (8) que l'ensemble fermé

$$\sum_{i=1}^{p} L_i$$

est d'ordre $\leqslant 1$ par rapport à ε [2]). Le lemme VIII nous ap-

[1]) La conclusion subsiste évidemment dans le cas où le lemme VI cesse d'être appliquable, à savoir lorsque $F \times S(\Phi, \vartheta) = 0$.

[2]) Cet ordre sera < 1 dans le cas où tous les L_i sont vides, et dans ce cas seulement.

prend alors que l'ensemble

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{\nu} L_i + [F \times S(\Phi, \vartheta)]$$

est d'ordre $\leqslant n+1$ par rapport à ε. Or je dis qu'il coïncide avec F. Il est, en effet, évident qu'il fait partie de F. Soit d'autre part y un point quelconque de F. F étant égal à la somme des ensembles

$$A_{x_1}, \ A_{x_2}, \ldots, \ A_{x_\nu},$$

soit A_{x_i} le *premier* de ces ensembles qui contient y. Il résulte alors de la définition de L_i que y appartient soit à L_i, soit à $F \times S(\Phi, \vartheta) \subset F \times \overline{S}(\Phi, \vartheta)$; donc ce point appartient en tout cas à l'ensemble (9).

Ce dernier ensemble coïncide donc avec F, il en résulte que F est d'ordre $\leqslant n+1$ par rapport à ε. Il ne reste qu'à consulter le lemme IV [1]) pour voir que notre théorème est complètement démontré.

Remarque. Le théorème que nous venons d'établir, suffit, à lui seul (sans sa réciproque), pour pouvoir faire l'étude de la dimension des ensembles situés dans un E_n. On obtient, en effet, en le combinant avec le théorème de M. Lebesgue et le théorème du § 3 du ch. II, le résultat annoncé au § 1, à savoir: tout domaine fermé de E_n est de dimension n; et tous les théorèmes relatifs aux espaces Euclidiens qu'on trouvera dans ce chapitre, ne sont que de simples conséquences de ce résultat. Le théorème réciproque n'est donc nullement nécessaire au but que nous avions en vue; j'en donne néanmoins une démonstration dans les §§ suivants, car ce théorème présente, à mon avis, un certain intérêt intrinsèque.

6. Théorème inverse. *Soit F un ensemble fermé qui est d'ordre n par rapport à tout nombre positif η. Dans ce cas*

$$\dim F \leqslant n-1.$$

La démonstration est basée sur le

[1]) F étant de dimension $\geqslant 0$, donc non vide, ce lemme ne peut être en défaut.

Lemme. *Soit F un ensemble fermé qui est d'ordre n par rapport à tout nombre positif; soit ensuite*

$$F = A + B + D$$

une ε-séparation d'un point x de F telle que

$$\varrho(A, D) > 0\ ^{1)}.$$

Quel que soit le nombre positif τ, il existe alors une ε-séparation

$$F = A_1 + B_1 + D_1$$

de ce même point x qui satisfait aux conditions suivantes:

1) $B_1 \varepsilon \mathfrak{F}$ *(A_1 et D_1 sont donc des* $\mathfrak{G}$ (rel. F));
2) $A_1 \supset A$, $D_1 \supset D$ *(donc $B_1 \subset B$)*;
3) $\varrho(A_1, D_1) > 0$;
4) B_1 *est d'ordre $\leqslant n-1$ par rapport à τ* [2]).

Désignons par σ le plus petit des deux nombres positifs: τ et $\varrho(A, D)$. Il existe d'après l'hypothèse faite sur F, un système d'ordre n

$$\mathfrak{S} = \{L_1, \ldots, L_p\}$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{p} L_i = F, \qquad \delta(L_i) < \sigma. \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

Envisageons ceux des L_i qui ont des points communs avec A. Nous pouvons évidemment numéroter les L_i de manière que ce soient

$$L_1, L_2, \ldots, L_m$$

(et ceux-là seulement) qui possèdent de tels points. Posons

$$\sum_{i=1}^{m} L_i = Q;$$

on a évidemment

$$A \subset Q \subset F.$$

[1]) Cette ε-séparation est donc, en général, d'une nature toute différente de celle des ε-séparations définissant la dimension.

[2]) Nous supposons dans ce lemme que $n > 0$.

Or il résulte de la relation

$$\delta(L_i) < \sigma \leqslant \varrho(A, D)$$

que l'on a

(10) $$\varrho(L_i, D) > 0$$

pour tout indice i ne surpassant pas m. Désignons par μ le plus petit des m nombres positifs (10) $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Il vient alors

(11) $$\varrho(Q, D) \geqslant \mu.$$

Envisageons le système

$$\mathfrak{S}^0 = \{Q \times L_{m+1}, \; Q \times L_{m+2}, \ldots, \; Q \times L_p\};$$

je dis que c'est un système d'ordre $\leqslant n-1$; en effet, s'il était d'ordre $\geqslant n$, on aurait

$$\prod_{k=1}^{n}(Q \times L_{m+i_k}) \neq 0$$

pour une certaine suite

$$i_1, i_2, \ldots, i_n$$

de n indices différents; donc, d'après la définition de Q,

$$L_{i_0} \times L_{m+i_1} \times \ldots \times L_{m+i_n} \neq 0$$

pour une suite de $n+1$ indices différents (i_0 étant $\leqslant m$); ce qui est en contradiction avec la définition du système $\mathfrak{S}$.

Tous les ensembles constituant le système $\mathfrak{S}^0$ ayant des diamètres inférieurs à σ, il en résulte que l'ensemble

$$R = \sum_{i=m+1}^{p}(Q \times L_i) = Q \times \sum_{i=m+1}^{p} L_i$$

est d'ordre $\leqslant n-1$ par rapport à σ; donc aussi par rapport à τ (qui est $\geqslant \sigma$). Choisissons (lemme VII) un nombre positif ϑ inférieur à μ de manière que l'ensemble

$$\overline{S}(R, \vartheta)$$

soit encore d'ordre $\leqslant n-1$ par rapport à τ. Il en sera de même (lemme VI) de l'ensemble fermé

$$B_1 = \overline{S}(R, \vartheta) \times \sum_{i=m+1}^{p} L_i - S\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right)$$

qui fait partie de $\overline{S}(R, \vartheta)$.

Posons

$$A_1 = Q + S\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right) \times \sum_{i=m+1}^{p} L_i,$$

$$D_1 = \sum_{i=m+1}^{p} L_i - \overline{S}(R, \vartheta).$$

On a

$$A_1 + B_1 + D_1 = Q + \sum_{i=m+1}^{p} L_i = \sum_{i=1}^{p} L_i = F;$$

B_1 et D_1 sont évidemment sans points communs, tandis que

$$(B_1 + D_1) \times A_1 = \left[\sum_{i=m+1}^{p} L_i - S\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right)\right] \times A_1 =$$

$$= \left[\sum_{i=m+1}^{p} L_i - S\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right)\right] \times Q = Q \times \sum_{i=m+1}^{p} L_i - S\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right) =$$

$$= R - S\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right) = 0.$$

On voit donc que

$$F = A_1 + B_1 + D_1 \tag{12}$$

constitue une décomposition en trois ensembles sans points communs deux à deux. Je dis que *c'est une ε-séparation du point x de F satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé de notre lemme.*

Nous avons déjà vu que la *condition* 4) est réalisée [1]).

Condition 3). On a

$$\overline{A}_1 = Q + \overline{S}\left(R, \frac{\vartheta}{2}\right) \times \sum_{i=m+1}^{p} L_i,$$

$$\overline{D}_1 = \sum_{i=m+1}^{p} L_i - S(R, \vartheta);$$

[1]) B_1 étant fermé, on serait tenté de croire qu'il en est de même de la condition 1). Il n'en est rien: en effet, nous n'avons pas encore démontré que (12) est une ε-séparation; par conséquent, il ne résulte pas de $B_1 \varepsilon \mathfrak{F}$ que $A_1 \varepsilon \mathfrak{G}$ (rel F) et $D_1 \varepsilon \mathfrak{G}$ (rel F); or ces relations forment une partie essentielle de la condition 1).

donc

$$A_1 \times \overline{D}_1 = Q \times \left[\sum_{i=m+1}^{p} L_i - S(R, \vartheta) \right] = R - S(R, \vartheta) = 0,$$

$$\varrho(A_1, \overline{D}_1) > 0,$$

(13) $$\varrho(A_1, D_1) > 0.$$

Condition 1). B_1 est fermé; il résulte donc de (12) que

$$(A_1 + D_1) \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel. } F),$$

et l'on voit, en vertu de (13), que

$$A_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel. } F), \quad D_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel. } F).$$

Condition 2) On a

$$A_1 \supset Q \supset A;$$

il s'agit donc de montrer que $D_1 \supset D$. Or

$$D \subset F = D_1 + (A_1 + B_1) \subset D_1 + [Q + S(R, \vartheta)] \subset D_1 + \\ + S(Q, \vartheta) \subset D_1 + S(Q, \mu),$$

R étant contenu dans Q, et ϑ étant $< \mu$. On n'a qu'à consulter l'inégalité (11) pour voir que $D \subset D_1$.

Reste donc à montrer que (12) est une ε-séparation du point x. Or $F = A + B + D$ étant une telle séparation, on a

$$A \supset x, \quad A + B \subset S(x, \varepsilon);$$

il résulte donc de la condition 2) que

$$A_1 \supset A \supset x, \quad A_1 + B_1 = F - D_1 \subset F - D = A + B \subset S(x, \varepsilon).$$

La relation $H(A_1, D_1) = 0$ étant une conséquence immédiate de (13), nous voyons que notre lemme est complètement démontré.

7. Revenons à la démonstration du théorème énoncé au début du § précédent. Le seul ensemble d'ordre 0 étant l'ensemble vide, ce théorème est vrai quand $n = 0$. Supposons qu'il en soit de même pour tous les entiers inférieurs à un certain entier positif n. Il s'agit de démontrer que tout point x d'un ensemble F satisfaisant à l'énoncé du théorème, peut être, quel que soit ε, ε-séparé par un ensemble B_ω de dimension $\leqslant n - 2$.

Soit

$$F = A + B + D$$

une ε-séparation quelconque du point x de F satisfaisant à la relation

(14) $$\varrho(A, D) > 0;$$

p. ex. la suivante:

$$A = F \times S\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right), \quad B = F \times \overline{S}\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right) - S\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right),$$
$$D = F - \overline{S}\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right).$$

Appliquons le lemme du § précédent [1]), et remarquons que l'ε-séparation (12) ainsi obtenue satisfait à la relation (13) analogue à (14); on peut donc appliquer le même lemme à la séparation (12), et ainsi de suite. L'application répétée de ce lemme nous fournit une suite d'ε-séparations

(15_k) $$F = A_k + B_k + D_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

du point x de F: la séparation (15_k) s'obtient de la précédente quand on applique à cette dernière le lemme cité en y posant $\tau = \frac{1}{k}$.

On a donc les relations:

1) $B_k \varepsilon \mathfrak{F}$, $A_k \varepsilon \mathfrak{G}$ (rel. F), $D_k \varepsilon \mathfrak{G}$ (rel. F);

2) $A \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots,$
$B \supset B_1 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots,$
$D \subset D_1 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots,$

3) $\varrho(A_k, D_k) > 0;$

4) B_k est d'ordre $\leqslant n - 1$ par rapport à $\frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Posons maintenant

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A_\omega, \quad \sum_{k=1}^{\infty} D_k = D_\omega,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} B_k = B_\omega.$$

[1]) Ce qui est permis, n étant > 0.

Les ensembles A_ω, B_ω et D_ω font évidemment partie de F, et l'on a

(16) $$A_\omega \times D_\omega = 0$$

car

$$A_k \times D_l \subset A_{k+l} \times D_{k+l} = 0;$$

puis

$$B_\omega = \prod_{k=1}^{\infty} B_k = \prod_{k=1}^{\infty} [F - (A_k + D_k)] = F - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + D_k) =$$
$$= F - (A_\omega + D_\omega),$$

donc

(17) $$A_\omega \times B_\omega = B_\omega \times D_\omega = 0,$$

(18) $$A_\omega + B_\omega + D_\omega = F.$$

Il résulte, d'autre part, des relations 1) et 2) ci-dessus que

$$B_\omega \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \quad A_\omega \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F), \quad D_\omega \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F);$$

$$A_\omega \supset A_1 \supset A \supset x;$$

$$A_\omega + B_\omega = F - D_\omega \subset F - D_1 \subset F - D = F \times \bar{S}\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right) \subset S\,(x, \varepsilon);$$

et l'on voit en combinant ces formules avec (16), (17) et (18) que l'ensemble B_ω ε-sépare le point x de F.

Or soit η un nombre positif arbitrairement petit, et k un entier supérieur à $\frac{1}{\eta}$. B_k est d'ordre $\leqq n-1$ par rapport à $\frac{1}{k}$, donc aussi par rapport à $\eta > \frac{1}{k}$; et il en est de même (lemme VI) de $B_\omega \subset B_k$. Il résulte donc de la supposition faite au début de ce § que

$$\dim B_\omega \leqq n - 2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaires. Le théorème du § 6 que nous venons de démontrer par induction, peut être énoncé comme il suit:

F étant un ensemble fermé de dimension n, il existe un ε positif tel que F n'est pas d'ordre $\leqq n$ par rapport à ε.

Rapprochons cet énoncé du théorème du § 5 et de la définition 3 (§ 2); il vient:

Le vrai ordre d'un ensemble fermé de dimension n est égal à $n+1$.

Le vrai ordre étant univoquement déterminé, il en résulte que

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble fermé soit de dimension n, est que son vrai ordre soit égal à $n+1$ [1]).

Nous terminerons ce paragraphe en donnant une application des résultats précédents au cas très important des continus localement connexes (au sens bien connu de M. M. Hahn et Mazurkiewicz).

A cet effet nous devons légèrement modifier les définitions précédentes.

Déf. 2'. Nous dirons que l'ensemble fermé Φ est d'ordre *continu* n par rapport à ε s'il existe un système $\mathfrak{S}$ formé de *continus* et vérifiant toutes les conditions de la définition 2.

Il s'ensuit une définition du *vrai ordre continu* tout à fait analogue à la définition 3.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Pour qu'un continu C soit en même temps localement connexe et n-dimensionnel, il faut et il suffit que $n+1$ soit son vrai ordre continu.

1°. La condition est nécessaire. Soit, en effet, C un continu n-dimensionnel et localement connexe. Son vrai ordre continu ne saurait être inférieur à $n+1$, car évidemment il n'est pas inférieur au vrai ordre (général). Reste donc à montrer qu'on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, un système d'ordre $n+1$ de continus

$$C_1, \ C_2, \dots \ C_r,$$

tel que $\delta(C_i) < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ et

$$\sum_{i=1}^{r} C_i = C.$$

Soit $\mathfrak{S} = \{F_1, F_2, \dots, F_p\}$ un système d'ordre $n+1$ d'ensembles fermés recouvrant C et tel que $\delta(F_i) < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

[1]) On pourrait donc définir la dimension des ensembles fermés à l'aide de l'ordre. Une telle définition aurait l'avantage de ne pas être *inductive*, mais elle présenterait l'inconvénient de ne s'appliquer qu'aux ensembles fermés.

On pourrait, d'ailleurs, de ce dernier point de départ, définir la dimension des points, comme ci-devant, à l'aide des ensembles ε-séparants (ce qui n'est pas un retour à la définition primitive: en effet, la dimension des ensembles ε-séparants ayant été définie indépendamment, on a encore une définition non inductive). Si l'on procédait de la sorte, ce serait le *théorème* suivant qu'on aurait démontré dans les §§ précédents: la dimension d'un ensemble fermé est égale au maximum de la dimension de ses points.

On peut déterminer le nombre positif ϑ de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

1⁰. $2\vartheta < \varepsilon - \max \delta(F_i)$;

2⁰. Les $G_i = C \cdot S(F_i, \vartheta)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ forment un système d'ordre $\nu + 1$

Considérons l'ensemble (non nécessairement fini) de ceux-là parmi les composants des ensembles $\overline{G}_i$, qui contiennent plus d'un point. Les ensembles $\overline{G}_i$ étant fermés, ces composants sont nécessairement des continus de diamètre $\leqslant \delta(\overline{S}(F_i, \vartheta)) \leqslant \delta(F_i) + 2\vartheta < \varepsilon$.

Je dis qu'il existe un nombre fini de ces composants recouvrant l'ensemble C tout entier.

En effet, considérons les composants Γ des domaines (rel. C) $G_i = C \cdot S(F_i, \vartheta)$. Le continu C étant localement connexe, les ensembles Γ sont, d'après un résultat bien connu de M. Hahn, des domaines (rel C) nécessairement connexes (et contenant, évidemment, chacun plus d'un point) C est recouvert par les domaines Γ; on peut donc trouver un nombre fini de ces domaines, à savoir

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$$

recouvrant encore le continu C.

Un composant de G_i fait nécessairement partie d'un composant de $\overline{G}_i$. En désignant par $\{K\}$ l'ensemble de ces derniers composants (de tous les $\overline{G}_i$), on voit que tout Γ_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ est agrégé à un K déterminé. Nous avons donc un ensemble fini de continus K, à savoir

$$K_1, K_2, \ldots, K_r,$$

recouvrant C et possédant des diamètres inférieurs à ε. Nous supposerons de plus que parmi les K_h les ensembles coïncidant ne figurent qu'une seule fois, de sorte que les continus $K_1, K_2, \ldots, K_r$ sont deux à deux différents.

Reste à montrer que le système de tous les K_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ est d'ordre $\leqslant n + 1$. S'il y avait un point x appartenant à plus de $n+1$ parmi les ensembles K_h, tous ces K_h ne pourraient appartenir à des $\overline{G}_i$ différents (car les $\overline{G}_i$ forment un système d'ordre $n+1$); le point x serait donc agrégé à deux composants non identiques d'un même ensemble $\overline{G}_i$, ce qui est évidemment absurde.

2°. La condition est suffisante. Supposons, en effet, qu'elle soit vérifiée. D'après un théorème de M. Sierpiński [1]), C est alors localement connexe; d'après les résultats du présent chapitre, la dimension de C est non supérieure à n. Si dim C était inférieure à n, le vrai ordre continu de C serait, d'après ce que nous venons de montrer, non supérieur à $n-1$, c. q. f. d.

Corollaire. *Pour qu'un continu C soit en même temps une courbe Cantorienne et une courbe Jordanienne, il faut et il suffit que le vrai ordre continu de C soit égal à 2.*

8. Les développements des §§ 5—7 nous fournissent un moyen d'affranchir de l'emploi de l'axiome de Zermelo les démonstrations de tous les théorèmes des deux derniers chapitres. J'indique brièvement la marche à suivre.

Nous commençons par le lemme suivant qui peut être énoncé (en suivant le langage de M. Sierpiński) comme il suit:

Tout ensemble fermé d'ordre n par rapport à ε, est *effectivement* d'ordre n par rapport à ε.

C. à d. qu'on peut indiquer une loi qui fait correspondre à tout ensemble fermé d'ordre n par rapport à ε, un système *unique* satisfaisant aux conditions de la définition 2 (§ 2).

Démonstration. Soit

$$d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots$$

un ensemble dénombrable dense dans E, et

$$r_1, r_2, \ldots, r_j, \ldots,$$

l'ensemble des nombres rationnels positifs. Les ensembles

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \sum_{t=1}^{k} \bar{S}(d_{i_t}, r_{j_t}) \qquad (k, i_t, j_t = 1, 2, \ldots)$$

sont évidemment en infinité dénombrable; rangeons les donc en une suite simple

$$T_1, T_2, \ldots, T_s, \ldots$$

Envisageons maintenant un ensemble fermé L quelconque. Je dis qu'il existe un T_s tel que

$$L \subset T_s \subset S(L, \vartheta),$$

ϑ étant un nombre positif arbitraire donné d'avance. En effet, chaque point x de L est agrégé à une sphère $S(d_i, r_j)$ de rayon $r_j < \frac{\vartheta}{2}$; et le théorème de Borel-Lebesgue nous fournit une suite finie de ces sphères, telle que leur somme recouvre L complètement. La somme des sphères fermées correspondantes est le T_s en question.

[1]) *Fund. Math.*, t. I, p. 44.

Soit F un ensemble d'ordre n par rapport à ε. Il existe un système $\{L_1, L_2, \ldots, L_p\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(19) \quad \begin{cases} 1) \text{ il est d'ordre } n; \\ 2) \quad \sum_{t=1}^{p} L_t = F; \\ 3) \quad \delta(L_t) < \varepsilon, \qquad (t = 1, 2, \ldots, p) \end{cases}$$

Soit alors ϑ une constante positive telle que le système $\{F \times S(L_1, \vartheta), \ldots F \times \overline{S}(L_p, \vartheta)\}$ satisfasse encore à ces conditions (lemmes II et I); si l'on choisit, les T_{s_t} de façon qu'on ait

$$L_t \subset T_{s_t} \subset \overline{S}(L_t, \vartheta)$$

le système

$$(20) \qquad \{F \times T_{s_1}, \ldots, F \times T_{s_p}\}$$

satisfera, lui aussi, aux conditions (19).

L'existence d'un tel système ayant été établie, le système unique exigé peut être obtenu comme il suit:

Designons par

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots$$

la suite des nombres premiers. Il existe (nous venons de le voir) des systèmes de la forme (20) qui satisfont aux conditions (19); nous choisissons celui d'entre eux qui donne au produit

$$\pi_1^{s_1} \pi_2^{s_2} \ldots \pi_p^{s_p}$$

sa valeur minimum.

9. Le seul choix arbitraire qu'on trouve dans les §§ 6 et 7, est celui du système $\mathfrak{S}$ (au début de la démonstration du lemme du § 6) [1]. Si l'on choisit ce système d'apres la loi tout-à-l'heure énoncée, on obtient le résultat suivant:

Soit F un ensemble fermé qui est d'ordre $n+1$ par rapport à tout nombre positif; soient ensuite x un point de F, et ε un nombre positif;

on peut indiquer une loi qui fait correspondre à F, x et ε un ensemble unique

$$B(F, x, \varepsilon)$$

de dimension $\leqslant n-1$ et ε-séparant le point x de F.

On n'a qu'à suivre la construction effectuée dans les §§ 6 et 7.

Ceci fait, nous allons indiquer un moyen de démontrer le théorème I du chap. IV, le lemme fondamental qui s'y rattache et le théorème du § 5 du présent chapitre, sans faire usage de l'axiome de Zermelo.

[1]) Ce choix étant unique, le lemme avait donc été démontré sans faire appel à l'axiome de Zermelo; il n'en était pas ainsi de la démonstration du théorème, où l'application du lemme avait été répétée une infinité dénombrable de fois.

La démonstration est inductive et *simultanée*. Désignons par T_n, L_n, S_n ces trois propositions (sous la forme que nous leur avons donnée au § 3 du ch. IV et au § 5 du présent chapitre). Le cas initial (T_0, L_0, S_{-1}) ne présentant aucune difficulté, supposons que les propositions T_n, L_n, S_{n-1} aient déjà été démontrées; il s'agit de démontrer S_n, L_{n+1} et T_{n+1}.

10. Démonstration de S_n. La démonstration du § 5 est basée sur S_{n-1} et T_n; on y fait, d'ailleurs, une infinité indénombrable de choix arbitraires quand on choisit les décompositions

(21)
$$F = A_x + B_x + D_x$$

Nous allons remplacer cette infinité par un nombre *fini* de choix en nous servant de l'artifice suivant. Rangeons en une suite simple

(22)
$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

les sphères $S(d_i, r_j)$, d_i et r_j ayant même signification qu'au § 8. x étant un point de F, soit $S_{u(x)}$ la première sphère de (22) qui contient le point x et telle qu'il existe *au moins une* décomposition (21) satisfaisant aux conditions (3), (4), (5) du § 5 et à la suivante:

$$F \times S_{u(x)} \subset A_x.$$

Il est à remarquer qu'il peut exister *plusieurs* décompositions de cette espèce: dans ce cas nous ne sommes nullement obligés d'en choisir *une*. Il est, d'ailleurs, évident que $S_{u(x)}$ existe.

La somme de toutes les $S_{u(x)}$ recouvre complètement F; on peut donc, d'après le théorème de Heine-Borel, indiquer (d'une manière effective) une suite finie

$$S_{u_1}, S_{u_2}, \ldots, S_{u_p}$$

de telles sphères de façon que l'on ait

$$F \subset \sum_{i=1}^{p} S_{u_i};$$

Ceci fait nous *choisissons* p décompositions

(21$_i$)
$$F = A_{x_i} + B_{x_i} + D_{x_i}; \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

la décomposition (21$_i$) satisfaisant à des conditions analogues à (3), (4), (5) et à l'inclusion

$$F \times S_{u_i} \subset A_{x_i},$$

on a

$$\sum_{i=1}^{p} A_{x_i} = F.$$

Ces p choix arbitraires effectués, la démonstration s'achève tout comme au § 5.

11. En rapprochant la proposition S_n démontrée tout-à-l'heure du résultat énoncé au début du § 9, on obtient le corollaire suivant:

On peut indiquer une loi faisant correspondre à tout ensemble *fermé* F de dimension n, à tout point x de F, et à tout ε positif, un ensemble *unique*

$$B(F, x, \varepsilon)$$

de dimension $\leqslant n-1$ qui ε-sépare le point x de F.

Ou bien, dans le langage de M. Sierpiński,

Tout point d'un ensemble *fermé* de dimension n est *effectivement* de dimension $\leqslant n$ [1]).

Ce résultat s'étend immédiatement aux $\mathfrak{F}_\varrho$, un $\mathfrak{F}_\varrho$ étant, comme il est facile à voir, localement identique à un ensemble fermé au voisinage de chacun de ses points [2]).

On remarquera, d'ailleurs, que la loi en question, étant basée sur les développements des §§ 6—8, fournit non seulement l'ensemble ε-séparant $B(F, x, \varepsilon)$, mais aussi les ensembles $A(F, x, \varepsilon)$ et $D(F, x, \varepsilon)$ correspondants.

12. Revenons à la démonstration de L_{n+1}. Reprenons celle du Chap. IV (§§ 4—6). Elle est basée sur T_n, et les seuls choix arbitraires qu'on y trouve sont les choix des séparations relatives aux différents points de $\sum\limits_{m=1}^{\infty} Q_m$ (Ch. IV, § 5) [3]). Or je dis qu'on peut choisir ces séparations d'après la loi mentionnée ci-dessus. On ne peut l'appliquer directement, la dimension de F étant $> n$; mais il suffit de remarquer qu'au voisinage de tout point y de $\sum\limits_{m=1}^{\infty} Q_m$ les ensembles F et $F-\Phi$ sont localement identiques, et que $F-\Phi$ est un $\mathfrak{F}_\varrho$ de dimension $\leqslant n$. On obtient de la sorte une démonstration de L_{n+1} ne faisant aucun appel à l'axiome de Zermelo.

Quant à la démonstration de T_{n+1}, on n'a qu'à remarquer que celle qu'on trouve dans le chapitre IV (§ 7) convient parfaitement à notre but. Elle est, en effet, basée sur L_{n+1} et l'on n'y fait aucun choix arbitraire.

La démonstration désirée est donc terminée.

Notons enfin qu'on rend effective la démonstration du théorème III' du Ch. IV (§ 12) à l'aide d'un artifice analogue à celui du § 10 [4]).

[1]) Il est d'ailleurs à remarquer que la méthode employée ici ne nous permet pas d'affirmer qu'un point de dimension $k <$ dim F est effectivement de dimension k.

[2]) Cette propriété des $\mathfrak{F}_\varrho$ à été indiquée par M. M. Kuratowski et Sierpiński („Sur les différences de deux ensembles fermés“, *Tôhoku Math. Journ.*, 1921).

[3]) Il y a encore *un seul* choix arbitraire: celui de la décomposition (6) du § 4 (Ch. IV); ce qui est, bien entendu, sans importance.

[4]) C'est cet artifice que nous avions en vue dans l'avant-dernière note du § 13 (Ch. IV); le théorème I du Ch. IV ayant été démontré d'une façon effective, cet artifice atteint maintenant son but.

13. Appliquons maintenant les résultats précédents aux ensembles situés dans un E_n [1]).

En comparant le dernier corollaire du § 6 avec le théorème de Lebesgue (sous la forme que nous lui avons donnée à la fin du § 2), on obtient immédiatement le résultat suivant:

Tout domaine fermé de E_n est un ensemble de dimension n [2]).

Ce résultat subsiste pour tous les ensembles possédant des points intérieurs; en effet, un tel ensemble contient toujours un domaine fermé (une sphère fermée suffisamment petite), et il ne peut être de dimension $> n$ d'après le théorème du § 3 du Ch. II. En particulier, tout domaine de E_n est de dimension n.

Or il résulte de *l'identité locale* des ensembles (dans E_n) au voisinage de leurs points intérieurs que

1) tous les points d'un domaine sont de même dimension, donc de dimension n par rapport à ce domaine;

2) ce résultat subsiste pour les points intérieurs d'un ensemble quelconque:

Tout point intérieur x d'un ensemble C (dans E_n) est de dimension n (par rapport à C).

Il en résulte que *l'espace E_n ne peut être découpé par un ensemble fermé F de dimension $< n-1$*; ou bien, ce qui revient au même, $E_n - F$ est connexe quand $\dim F < n-1$ [3]). Soit, en effet, F un ensemble fermé tel que $E_n - F$ ne soit pas connexe [4]); x étant un point quelconque de E_n, et ε, un nombre positif arbitraire, on obtient par une contraction homothétique convenable de l'ensemble F, un ensemble F_1 ε-séparant le point x de E_n. Il résulte donc de

$$\dim_x E_n = n$$

que

$$\dim F = \dim F_1 \geqslant n-1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

[1]) Nous supposons, dans tout ce qui suit, $n > 1$ (le cas $n = 1$ présente certaines anomalies).

[2]) Ce résultat peut, d'ailleurs, être obtenu d'une façon plus directe (voir § 5, remarque).

[3]) L'identité des deux énoncés est une conséquence de la propriété bien connue suivante des domaines connexes Euclidiens: tout couple de points d'un tel domaine peut être relié par une ligne polygonale située dans ce domaine.

[4]) Nous supposons, comme toujours, que F est borné. Le résultat subsiste, d'ailleurs, sans cette restriction.

14. Nous terminons ces préliminaires par le

Lemme. *Une sphère fermée de E_n est une multiplicité Cantorienne de dimension n.*

C. à d. que B étant un ensemble fermé et $S(x, \varepsilon) - B$ n'étant pas connexe, on aura

$$\dim B \geqslant n - 1.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que le centre x de la sphère considérée soit étranger à B.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, nous serions ramenés à ce cas par une transformation biunivoque et bicontinue de $\overline{S}(x, \varepsilon)$ en elle-même (une telle transformation faisant correspondre à B un ensemble de la même dimension). Soit donc

$$(23) \qquad \overline{S}(x, \varepsilon) = A + B + D, \quad A \times B = A \times D = B \times D = 0;$$

$$(24) \qquad A \supset x, \quad H(A, D) = 0.$$

Effectuons maintenant une transformation par rayons-vecteurs réciproques; cette transformation laisse invariables tous les points de $F(x, \varepsilon)$; elle transforme $S(x, \varepsilon) - x$ en $E_n - \overline{S}(x, \varepsilon)$, et vice versa. Elle est d'ailleurs biunivoque et bicontinue dans le domaine où elle est définie (c. à d. dans $E_n - x$).

Désignons respectivement par A_1, B_1 et D_1 les transformés de $A - x$, B, D. Il résulte des propriétés indiquées de la transformation que

1) B_1 est fermé et borné, $\dim B_1 = \dim B$; on a donc aussi (théorème I du Ch. IV)

$$(25) \qquad \dim (B + B_1) = \dim B;$$

$$(26) \qquad 2)\ A_1 + B_1 + D_1 = E_n - S(x, \varepsilon); \ A_1 \times B_1 = A_1 \times D_1 = B_1 \times D_1 = 0;$$

$$(27) \qquad 3)\ H(A_1, D_1) = 0.$$

Or soient M et N deux quelconques des ensembles A, B, D; M_1 et N_1, leurs transformés [1]). $F(x, \varepsilon)$ étant invariable, il vient [2]):

$$M \times F(x, \varepsilon) = M_1 \times F(x, \varepsilon);$$

[1]) C'est, bien entendu, le transformé A_1 de $A - x$ que nous appelons ici „transformé de A".

[2]) On s'appuie dans les calculs qui suivent sur les relations (23) et (26).

$$M_1 \times N = [M_1 \times (E_n - S(x,\varepsilon))] \times [N \times \bar{S}(x,\varepsilon)] =$$
$$= M_1 \times F(x,\varepsilon) \times N = M \times F(x,\varepsilon) \times N = 0;$$

de même,

$$M \times N_1 = 0;$$

$$(M + M_1) \times (N + N_1) = M \times N + M_1 \times N_1 + M_1 \times N + M \times N_1 = 0.$$

La formule

$$(A + A_1) + (B + B_1) + (D + D_1) = \bar{S}(x,\varepsilon) + [E_n - S(x,\varepsilon)] = E_n$$

représente donc une décomposition de E_n en trois ensembles sans points communs deux à deux.

Or les transformés de $A - x$ et D étant respectivement égaux à $\bar{A}_1$ et D_1, on démontre de la même façon (en s'appuyant sur les relations (24) et (27) [1]) que

$$H(A + A_1,\ D + D_1) = 0$$

Nous voyons ainsi que l'ensemble fermé $B + B_1$ découpe E_n; il en résulte, d'après le dernier résultat du § précédent, que

$$\dim(B + B_1) \geqslant n - 1,$$

donc aussi (formule (25))

$$\dim B \geqslant n - 1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire. *Tout point d'une sphère fermée (dans E_n) est de dimension n* (par rapport à cette sphère).

15. Théorème A_n. *Soit C un ensemble de E_n. Tout point intérieur de C est de dimension n (par rapport à C); un point-frontière non limite de points intérieurs, de dimension* $0, 1, \ldots, n-2$ *ou* $n-1$; *enfin, un point-frontière limite de points intérieurs peut être d'une dimension quelconque $\leqslant n$.*

Nous avons déjà obtenu deux cas particuliers (A_2 et A_3) de ce théorème dans le Ch. II; le but principal du présent chapitre consiste à démontrer le théorème général. Or sa démonstration est à peu près contenue dans les développements précédents:

1) La partie relative aux points intérieurs a été démontrée au § 13.

[1]) On remarquera que $H(A, D) = A \times \bar{D} + \bar{A} \times D$, etc.

2) Cas des points-frontière non limites de points intérieurs. L'impossibilité de la dimension n résulte d'un théorème du Ch. II (§ 4); on obtient un point de dimension 0 en considérant un ensemble C composé d'un seul point; on obtient, enfin, un point de dimension k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ comme il suit: Envisageons un E_k situé dans l'espace E_n donné et un domaine G_k de cet E_k; G_k est, par rapport à E_n, un ensemble-frontière, et tous les points de G_k sont de dimension k (§ 13).

3) Cas des points-frontière limites de points intérieurs. Un point-frontière d'une sphère fermée est de dimension n (§ 14, corollaire); on obtient un point x de dimension 0 en considérant un ensemble C composé de ce point et d'une suite dénombrable de sphères, ces sphères étant sans points communs deux à deux et convergeant vers le point x qui n'appartient à aucune d'elles [1]).

On obtient, enfin, un point de dimension k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ en ajoutant à l'ensemble C construit tout-à-l'heure, un G_k (domaine d'un E_k contenu dans E_n) passant par le point x de C; on a, en effet,

$$\dim_x (C + G_k) = k.$$

J'omets la démonstration qui ne présente aucune difficulté.

16. Nous allons maintenant généraliser les autres résultats établis au chapitre II dans le cas particulier $n=3$.

Lemme. *Toute sphère de E_n reste connexe quand on en supprime les points d'un ensemble fermé quelconque de dimension $\leqslant n-2$.*

Soit $S(x, \varepsilon)$ une sphère de E_n, F, un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-2$. On a

$$S(x, \varepsilon) - F = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\overline{S}\left(x, \frac{m\varepsilon}{m+1}\right) - F \right];$$

or les termes du second membre étant des ensembles connexes (§ 14) formant une suite croissante, leur somme est elle aussi connexe, c. q. f. d.

Ce lemme établi, on obtient en répétant mot pour mot la démonstration du § 49 du Ch. II, le

[1]) Voir un exemple du Ch. II (§ 14).

Théorème. *Soit G un domaine connexe (dans E_n); F, un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-2$. Dans ce cas $G-F$ est encore connexe.*

Corollaire. *G étant un domaine connexe de E_n, $\overline{G}$ est une multiplicité Cantorienne de dimension n.*

On consultera, pour la démonstration, le Ch. II (§ 50, corollaire II).

Théorème B_n. *La frontière d'un domaine (borné) de E_n est un ensemble de dimension $n-1$.*

Une telle frontière ne possède, en effet, aucun point de dimension n (théorème A_n), et ne saurait être, d'après le dernier résultat du § 13, de dimension $< n-1$.

Théorème B'_n. *Toute frontière double de E_n est un ensemble dimensionnellement homogène (de dimension $n-1$).*

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle du théorème B'_3 (Ch. II, § 51).

Corollaire. *Tout continu de E_n qui est la frontière commune de deux domaines (non nécessairement connexes) est une multiplicité Cantorienne généralisée de dimension $n-1$.*

17. Ainsi, le seul résultat du Ch. II que nous n'avons pas généralisé, est le théorème B''_3 (Ch. II, § 41). Il semble d'ailleurs que le théorème B''_n correspondant ne peut être obtenu par les méthodes du présent chapitre. Ces méthodes sont, en effet, basées sur le théorème de Lebesgue; or c'est là un théorème de nature intégrale, ne se rapportant qu'aux *ensembles* et non aux *points* de ces ensembles, tandis que le théorème B''_n comprend, comme corollaire, ce résultat que *tout* point d'une frontière regulière de E_n, est un point de dimension $n-1$. En d'autres termes, on peut espérer de démontrer en s'appuyant sur le théorème de Lebesgue qu'un ensemble F de E_n possède p. ex. un sous-ensemble dense de points de dimension $n-1$ (par rapport à F), c. à d. que toute portion de F est de dimension $n-1$: c'est le cas du théorème B'_n; mais on ne peut espérer de démontrer en s'appuyant sur ce théorème, que *tous* les points de F sont de dimension $n-1$ [1]). Nous avons là un exemple de la différence, trop souvent (et à tort) méconnue, qui existe entre deux espèces de propriétés locales: les propriétés *en* un point et les propriétés *autour* d'un point [2]); il n'y a que ces dernières qu'on puisse étudier à l'aide d'un théorème de nature intégrale; les premières exigent des considérations plus subtiles.

[1]) Pour la dimension n il y a une exception: la cause en est que les points intérieurs sont localement identiques entre eux; ou bien encore que la propriété d'un point d'être intérieur à un ensemble, est une propriété *autour* de ce point (voir la note suivante).

[2]) Les propriétés autour d'un point sont celles qui ne sont vérifiées en un point x que si elles le sont dans un certain voisinage de x. Il en résulte que l'en-

18. C'est par une généralisation convenable de la méthode du Ch. II qu'on peut obtenir la démonstration du théorème B_n'' (qui s'énonce comme il suit: »toute frontière régulière de E_n est une multiplicité Cantorienne de dimension $n-1$«). En effet, les raisonnements des §§ 26—37 du Ch. II peuvent être répétés presque sans modification dans le cas d'un E_n quelconque: on n'a qu'à remplacer l'ensemble punctiforme fermé B_0 par un ensemble fermé de dimension $n-3$, et la propriété des ensembles punctiformes fermés envisagée au § 33 du Ch. II (première note) [1], par la propriété des ensembles fermés de dimension $n-3$ d'être d'ordre $n-2$ par rapport à tout nombre positif. On obtient ainsi le résultat suivant: Pour démontrer le théorème B_n'' il suffit de démontrer le

Lemme [2]. Soit Π une multiplicité polyédrale à $n-1$ dimensions [3] formée de cubes $(n-1)$-dimensionnels appartenant à un certain réseau dyadique [4]. Supposons que Π divise E_n en deux domaines connexes: le domaine intérieur G_i et le domaine extérieur G_e. Soit $\overline{\Pi}$ un »domaine fermé« (rel. Π), non nécessairement connexe, constitué de certains des cubes dyadiques $(n-1)$-dimensionnels formant Π. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_k$ les multiplicités polyédrales à $n-2$ dimensions [3] formant la frontière de $\overline{\Pi}$ et supposons choisi un nombre positif α tel que chacun des ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_k$ soit d'ordre $\leqslant n-2$ par rapport à α.

Soit enfin

$$A = \overline{h\, a_i\, h_1\, a_e\, h}$$

---

semble des points vérifiant une telle propriété, est toujours un domaine (ou, du moins, un domaine relatif). Par contre, la plupart des propriétés en un point sont telles que l'ensemble des points possédant la même propriété est de la première ou de la seconde classe de Baire (un $\mathfrak{G}_\delta$, un $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$, etc.). En voici quelques exemples:

1) Propriétés en un point: convergence d'une série; continuité, continuité asymptotique (ou approximative: Khintchine, Denjoy), dérivabilité etc. d'une fonction; dimension d'un point par rapport à un ensemble; propriété d'être un point-frontière d'un ensemble.

2) Propriétés autour d'un point: convergence uniforme d'une série; sommabilité d'une fonction; continuité d'une fonction autour d'un point (c. à d. dans un certain intervalle entourant ce point); propriété d'une fonction d'être de 1^{re} classe autour d'un point (M. Lebesgue, qui a introduit cette notion, dit: „en un point"); propriété d'un ensemble d'être épais autour d'un point (Denjoy); propriété d'un point d'être intérieur à un ensemble.

[1]) Cette propriété équivaut à celle d'être d'ordre 1 par rapport à tout nombre positif.

[2]) En formulant ce lemme, nous tenons compte de la Remarque faite au § 24 du Ch. II (*Fund. Math.* VII, p. 102).

[3]) »geschlossene zweiseitige (polyedrale) Pseudomannigfaltigkeit« au sens de M. Brouwer (voir p. ex. *Math. Ann.* 71, pp. 305—306).

[4]) Voir Ch. II, § 26 (*Fund. Math.* VII, p. 104).

un polygone tel que *le point h appartienne à l'intérieur d'un des cubes $(n-1)$-dimensionnels formant* H, tandis que

1) $h_1 \subset \Pi - \bar{H}$,

2) $\widehat{h\,a_i\,h_1} \subset G_i$, $\widehat{h_1\,a_s\,h} \subset G_s$.

Si toutes ces hypothèses sont vérifiées, on aura

$$\varrho\left(\Lambda, \sum_{i=1}^{k} P_i\right) < \alpha \text{ [1]}.$$

19. Si l'on veut démontrer ce lemme par les méthodes du Ch. II, on devra généraliser convenablement l'intégrale de Gauss (Ch. II, § 20). Pour les détails de cette généralisation je renvoie au mémoire de M. Brouwer sur les „coëfficients d'enlacement" [2].

La généralisation se rapporte, dans E_n, à deux multiplicités fermées bilatérales, respectivement à p et à

$$q = n - p - 1$$

dimensions [3]; on suppose de plus qu'elles n'ont aucun point commun. C'est le cas $p = n-2$, $q = 1$ qu'on utilisera pour démontrer le lemme du § précédent.

Car on voit facilement (en se servant des méthodes des §§ 24, 25 du Ch. II) que, dans les conditions du lemme, le polygone Λ est *enlacé* (au sens du mémoire cité de M. Brouwer) avec l'une au moins des multiplicités P_ν. Tout revient donc à démontrer la proposition suivante, assez intuitive:

Soit P une multiplicité polyédrale à $n-2$ dimensions, formée de cubes dyadiques et située dans E_n; soit Λ un polygone simple fermé enlacé avec P. Soit enfin α un nombre positif tel que P soit d'ordre $\leqslant n-2$ par rapport à α. Sous ces conditions, $\varrho(P, \Lambda)$ est nécessairement inférieur à α [4].

20. Nous terminons ce chapitre par quelques considérations relatives aux espaces et aux ensembles de dimension infinie. Il s'agit, en premier lieu, de se procurer un espace compact à une infinité dénombrable de dimensions. L'espace Hilbertien [5]) n'est pas compact; mais il contient des parties possédant toutes les propriétés requises.

[1]) Le lemme du § 23 du Ch. II n'est qu'un cas particulier de ce lemme.

[2]) Voir *Proceedings* de l'Académie Royale d'Amsterdam, t. 15 (1912), p. 113.

[3]) $0 \leqslant p \leqslant n-1$; L peut donc être un *couple de points* $(p=0)$, une ligne simple fermée $(p=1)$, une surface fermée $(p=2)$, etc.

[4]) Je ne prétends nullement avoir démontré le théorème B_n'' par les brèves indications des deux derniers §§: je ne les considère que comme un plan de démonstration.

[5]) Voir p. ex. Hausdorff, p. 287, IV.

Envisageons, en effet, l'ensemble des suites

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de nombres réels telles que

(28) $$|x_n| \leqq \frac{1}{n}; \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

l'espace E_ω qu'on obtient en posant

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$$

est une partie *compacte en elle-même* de l'espace Hilbertien.

Sa compacticité se démontre comme il suit. Soit

$$x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots$$

$$[x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i, \ldots), \; (i = 1, 2, \ldots)]$$

une suite de points de E_ω. L'application du procédé bien connu de Cantor („*Diagonalverfahren*") nous permet d'en extraire une suite partielle

(29) $$x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_k}, \ldots$$

possédant la propriété suivante:

quel que soit n, la suite des nombres

(30_n) $$x_n^{i_1}, x_n^{i_2}, \ldots, x_n^{i_k}, \ldots$$

est convergente. Désignons par x_n^ω la limite de la suite (30_n).

Je dis que la suite de points (29) converge vers le point

$$x^\omega = (x_1^\omega, x_2^\omega, \ldots, x_n^\omega, \ldots)$$

(ce qui démontre la compacticité de E_ω). Soit, en effet, ε un nombre positif arbitraire. Choisissons un entier N supérieur à $\frac{8}{\varepsilon^2}$, et des entiers

(31) $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$$

tels q'on ait

(32) $$|x_n^{i_k} - x_n^\omega| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$$

quand $k \geqq \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Désignons enfin par l le plus grand des entiers (31), et soit k un entier $\geqq l$; on a

$$[\varrho(x^{i_k} x^\omega)]^2 = \sum_{n=1}^{N} (x_n^{i_k} - x_n^\omega)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} (x_n^{i_k} - x_n^\omega)^2,$$

donc, d'après (28) et (32),

$$[\varrho(x^{i_k}, x^\omega)]^2 < \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon^2}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{4}{N} < \varepsilon^2,$$

$$\varrho(x^{i_k}, x^\omega) < \varepsilon, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

21. Nous allons maintenant construire deux exemples d'ensembles de dimension infinie possédant des propriétés qui ne peuvent se présenter dans le cas des ensembles de dimension finie.

1) Exemple d'un ensemble fermé de dimension infinie ne possédant aucun point de dimension infinie [1]).

Désignons par K_n la partie de E_ω définie par les égalités

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{n+k} = \ldots = 0;$$

c'est un continu homéomorphe à un cube n-dimensionnel. Il en résulte que

$$\dim K_n = n \;{}^{2)},$$

et l'on voit sans peine que

$$K_n \times \overline{S}(a, \varepsilon)$$

est lui aussi un ensemble fermé de dimension n (quels que soient le point a de E_ω et le nombre positif ε).

Désignons par a_n le point

$$a_n = \left(\frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\right),$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

et par a_0, le point

$$a_0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots);$$

ceci fait, posons

$$F = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_n \times \overline{S}\left(a_n, \frac{1}{2^{n+2}}\right)\right]$$

F est un ensemble fermé (Ch. III, § 14, lemme) de dimension infinie: il contient, en effet, l'ensemble

$$K_n \times \overline{S}\left(a_n, \frac{1}{2^{n+2}}\right) \tag{33}$$

de dimension n. Or tout point ξ de F est de dimension finie (par rapport à F): il est de dimension n s'il appartient à l'ensemble (33), et il est de dimension 0 s'il coïncide avec a_0.

2) Exemple d'un ensemble fermé ne possédant qu'un seul point de dimension infinie [3]).

Tel est l'ensemble

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_n \times S\left(a_0, \frac{1}{2^n}\right)\right];$$

on voit, en effet, aisément que a_0 est le seul point de Φ qui soit de dimension infinie (par rapport à Φ).

[1]) Voir le § 2 du Ch. I.
[2]) Il résulte donc de l'inclusion $E_\omega \supset K_n$ (vérifiée pour tout n) que $\dim E_\omega = \infty$.
[3]) Voir le Chap. IV, §§ 1 et 11 (théorème III).

22. Problèmes. Soit

$$x = (x_1, x_2, \ldots)$$

un point de E_ω; les nombres $x_1, x_2, \ldots$ sont les coordonnées de ce point. Désignons par M_n l'ensemble des points x de E_ω tels que n au plus de leurs coordonnées soient rationnelles. On a

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots,$$

et il est facile de montrer que

$$\dim M_n = n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(M_n contient des ensembles homéomorphes à des cubes n-dimensionnels, et tout point de M_n peut être ε-séparé par un ensemble localement homéomorphe à M_{n-1} au voisinage de chacun de ses points). M_0 est d'ailleurs homéomorphe à l'espace de Baire („à 0 dimensions").

Problème ϑ. *Tout ensemble situé dans un espace métrique compact, est-il nécessairement homéomorphe à un ensemble appartenant à E_ω?* [1]).

Problème ι. *En particulier, si cet ensemble est de dimension n, est-il nécessairement homéomorphe à une partie de M_n?*

La réponse est affirmative quand $n = 0$: c'est une conséquence immédiate d'un théorème de M. Sierpiński (voir le § 16 du Ch. I).

Ces deux problèmes peuvent être généralisés au cas d'un espace métrique quelconque admettant un sous-ensemble dénombrable dense.

Le problème ι est encore résolu dans le cas particulier $n = 0$: on voit en effet sans peine que la seule propriété des espaces métriques *compacts* que nous avons utilisée dans la démonstration du théorème tout-à-l'heure cité (Ch. I, §§ 17—18), est celle qu'ils admettent des sous-ensembles dénombrables denses [2]).

Ch. VI. La décomposition des ensembles en ensembles de dimension 0.

1. Le problème de la décomposition des ensembles en ensembles de dimension 0 que nous nous proposons d'étudier dans ce dernier chapitre de la première partie, est étroitement lié aux théorèmes d'addition plus généraux que celui du Ch. IV (Théor. I, § 3); c'est donc par ces derniers que nous commençons le présent chapitre.

[1]) Après l'achèvement de ce mémoire j'ai donné une solution affirmative du problème ci-dessus dans ma Note: „Les classes ($\mathfrak{D}$) séparables et l'espace Hilbertien", *Comptes Rendus*, t. 178 (1924). Voir aussi: „Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume", *Math. Annalen*, t. 92 (1924). Dans ces travaux je démontre le théorème plus général que tout espace métrique admettant un sous-ensemble dénombrable dense, est homéomorphe à un ensemble situé dans E_ω.

[2]) Cette propriété est équivalente, dans le cas des espaces métriques, au second axiome de dénombrabilité („II. Abzählbarkeitsaxiom") de M. Hausdorff (p. 262, (4)).

Théorème. *Quels que soient les ensembles L et M, on a toujours*

(1) $$\dim(L+M) \leqslant \dim L + \dim M + 1.$$

Démonstration. Nous procédons par induction. Le théorème est évidemment vrai lorsque

$$\dim L + \dim M = -2;$$

en effet, la dimension de tout ensemble non vide étant $\geqslant 0$ tandis que celle de l'ensemble vide est égale à -1, on a dans ce cas

$$\dim L = \dim M = -1, \quad L = M = 0;$$

$$L+M=0, \quad \dim(L+M) = -1 = \dim L + \dim M + 1.$$

Soit maintenant n un entier quelconque $\geqslant -1$; supposons que la formule (1) est réalisée dans tous les cas où

$$\dim L + \dim M < n.$$

Il s'agit de montrer qu'il en sera encore de même lorsque

(2) $$\dim L + \dim M = n.$$

Soient donc L et M deux ensembles vérifiant la relation (2). Soit ensuite x un point quelconque de $L+M$; ε, un nombre positif arbitraire. Supposons que x fait partie de L (le cas $x \subset M$ étant symétrique [1])). Il existe alors une décomposition

$$L = A + B + D$$

en trois ensembles sans points communs deux à deux, telle que

(3) $$x \subset A,$$

(4) $$H(A, D) = 0,$$

(5) $$A + B \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

(6) $$\dim B \leqslant \dim_x L - 1 \leqslant \dim L - 1.$$

On peut, en vertu de (4) et (5), appliquer aux ensembles A et D le lemme du Ch. IV, § 2 (*remarque*) en y posant $H_1 = S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $H_2 = E - \overline{S}\left(x, \frac{3}{4}\varepsilon\right)$. On obtient ainsi deux domaines, G_A^* et G_D^*,

[1]) Les deux cas peuvent, d'ailleurs, avoir lieu en même temps ($x \subset L \times M$).

vérifiant les relations (Ch. IV, § 2, formules (1), (2) et (3)):

$$A \subset G_A^* \subset S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{7}$$

$$D \subset G_D^*, \quad G_D^* \supset E - \bar{S}\left(x, \frac{3}{4}\varepsilon\right), \tag{8}$$

$$G_A^* \times G_D^* = 0. \tag{9}$$

Ceci fait, posons

$$A_1 = G_A^* \times (L + M),$$
$$D_1 = G_D^* \times (L + M),$$
$$B_1 = (L + M) - (A_1 + D_1);$$

il est évident que ces ensembles sont sans points communs deux à deux, et que l'on a

$$L + M = A_1 + B_1 + D_1. \tag{10}$$

Je dis que (10) est une ε-séparation du point x de $L + M$. On a, en effet,

1) $x \subset A \subset G_A^*$ (d'après (3) et (7));

donc, x étant un point de $L + M$,

$$x \subset A_1.$$

2) $H(A_1, D_1) \subset H(G_A^*, G_D^*) = 0$,

car G_A^* et G_D^* sont des domaines sans points communs (formule (9)).

3) On a

$$A_1 + B_1 = (L + M) - D_1 = (L + M) - G_D^*;$$

or G_D^* contient, d'après (8), tous les points étrangers à $\bar{S}\left(x, \frac{3}{4}\varepsilon\right)$; par conséquent,

$$A_1 + B_1 \subset \bar{S}\left(x, \frac{3}{4}\varepsilon\right) \subset S(x, \varepsilon).$$

Quant à la dimension de B_1, nous allons montrer qu'elle ne peut surpasser n. En effet,

$$B_1 = B_1 \times L + B_1 \times M;$$

$$\dim (B_1 \times M) \leqslant \dim M.$$

Or il résulte de la définition de B_1 et des relations (7) et (8) que

$$B_1 \times L = L - (A_1 + D_1) = L - (G_A^* + G_D^*) \subset L - (A + D) = B;$$

donc, en vertu de (6) et (2),

$$\dim (B_1 \times L) \leqslant \dim B \leqslant \dim L - 1,$$

$$\dim (B_1 \times L) + \dim (B_1 \times M) \leqslant \dim L + \dim M - 1 = n - 1.$$

Il en résulte, d'après notre supposition, qu'on peut appliquer la formule (1) aux ensembles $B_1 \times L$ et $B_1 \times M$; il vient

$$\dim B_1 = \dim (B_1 \times L + B_1 \times M) \leqslant \dim (B_1 \times L) + \\ + \dim (B_1 \times M) + 1 \leqslant \dim L + \dim M = n.$$

Nous voyons ainsi que le point x de $L + M$ peut être ε-séparé par un ensemble B_1 de dimension $\leqslant n$. x et ε étant arbitraires, il en résulte que

$$\dim (L + M) \leqslant n + 1 = \dim L + \dim M + 1,$$

c. q. f. d.

Remarque I. On serait peut-être tenté de croire que la formule (1) ne donne qu'un résultat très incomplet, et que la borne supérieure qu'elle assigne à l'ensemble $L + M$, n'est atteinte que dans des cas triviaux. Il n'en est rien: nous verrons, en effet, dans ce chapitre que tout ensemble fermé de dimension $l + m + 1$ peut être décomposé en deux ensembles, L et M, tels que

$$\dim L = l, \quad \dim M = m.$$

Remarque II. On voit sans peine, en reprenant la démonstration ci-dessus, que le théorème de ce § peut être précisé comme il suit:

Quels que soient les ensembles L, M et le point x de L, on a toujours

$$(1_x) \qquad \dim_x (L + M) \leqslant \dim_x L + \dim M + 1.$$

Par contre, l'inégalité [1])

$$\dim_x (L + M) \leqslant \dim_x L + \dim_x M + 1$$

peut être en défaut même dans le cas des ensembles fermés.

Exemple. Soit, dans E_n,

$$L = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{S}\left(x, \frac{1}{2n-1}\right) - S\left(x, \frac{1}{2n}\right) \right],$$

[1]) On y suppose, bien entendu, que $x \subset L \times M$.

$$M = x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{S}\left(x, \frac{1}{2n}\right) - S\left(x, \frac{1}{2n+1}\right) \right].$$

L en M sont des ensembles fermés, et l'on a

$$\dim_x L = \dim_x M = 0,$$
$$\dim_x (L + M) = \dim_x \bar{S}(x, 1) = n.$$

2. Le théorème du § précédent nous permet d'obtenir facilement des exemples d'ensembles punctiformes de dimension arbitrairement grande. Il suffit, en effet, de décomposer un ensemble de dimension $2n$, un cube Q_{2n} de E_{2n} p. ex., en deux ensembles punctiformes L et M: l'un de ces ensembles sera de dimension $\geqslant n$ en vertu de l'inégalité

$$2n = \dim Q_{2n} \leqslant \dim L + \dim M + 1.$$

Or si l'on a $\dim L > n$, L contiendra nécessairement un ensemble L_1 de dimension n, et cet ensemble sera encore punctiforme.

Quant à la décomposition d'un cube n-dimensionnel Q_n en deux ensembles punctiformes, on l'obtient immédiatement en utilisant le théorème de Zermelo [1]). On peut d'ailleurs obtenir des exemples *effectifs* d'une telle décomposition [2]); celui que nous allons construire est basé sur un procédé utilisé, dans d'autres buts, par M. M. Mazurkiewicz [3]), Knastor et Kuratowski [4])

La décomposition désirée de Q_1 est immédiate (points rationnels et irrationnels). Supposons donc que nous avons déjà obtenu une décomposition (effective) de Q_{n-1} en deux ensembles punctiformes, L_{n-1} et M_{n-1}, sans points communs.

Désignons par

$$x,\ t_1,\ t_2, \ldots,\ t_{n-1}$$

les coordonnées d'un point de E_n. Q_n est défini par les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t_i \leqslant 1. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Désignons ensuite par X l'axe Ox; par Π^a, le »plan« (à $n-1$ dimensions) $\{x = a\}$. L'ensemble

$$Q_{n-1}^x = Q_n \times \Pi^x$$

est un cube $(n-1)$-dimensionnel; nous pouvons donc poser

$$Q_{n-1}^x = L_{n-1}^x + M_{n-1}^x,$$

[1]) Voir la note de M. Sierpiński »Sur un ensemble punctiforme connexe«, *Fund. Math.* I, p. 7.

[2]) Le cas d'un carré a été traité dans les travaux suivants: Mazurkiewicz. Bull. Acad. Cracovie, janv. 1913; Sierpiński, ibid. févr. 1913; Mazurkiewicz, *Fund. Math.* III, p. 65; Kuratowski et Sierpiński, ibid. p. 309.

[3]) »Sur l'existence d'un ensemble...«, *Fund. Math.* II, p. 96.

[4]) *Fund. Math.* II, p. 245.

les deux derniers ensembles étant punctiformes et sans points communs. On s'arrangera p. ex. de façon que la projection de tout L^x_{n-1} sur Π^0 coïncide avec L^0_{n-1}.

Envisageons maintenant un continu quelconque K faisant partie de Q_n. Désignons par K_x sa projection sur X: deux cas seulement sont possibles:

1) K_x se réduit à un point a_K; nous dirons alors que K fait partie de la famille $\mathfrak{P}$: $K \varepsilon \mathfrak{P}$;

2) Ou bien K_x est un segment $[b_K, c_K]$; les continus de cette sorte forment la famille $\mathfrak{S}$.

On voit aisément d'après le théorème de Cantor-Bernstein que la famille $\mathfrak{S}$ a la puissance du continu; et il résulte d'une remarque de M. Sierpiński [1]) qu'on peut obtenir *effectivement* une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathfrak{S}$ et les nombres réels; ou bien, ce qui revient au même, entre les éléments de $\mathfrak{S}$ et les suites d'entiers (positifs) [2]). Soit donc

$$(11) \qquad m_1^K,\ m_2^K, \dots,\ m_i^K, \dots$$

la suite d'entiers qui correspond au continu K ($K \varepsilon \mathfrak{S}$).

Désignons ensuite par

$$I[s_1, s_2, \dots s_j] \qquad (j, s_1, \dots, s_j = 1, 2, \dots)$$

l'ensemble des points de X dont l'abscisse est de la forme

$$x = \frac{1|}{|s_1} + \frac{1|}{|s_2} + \dots + \frac{1|}{|s_j} + \dots \text{ [3]});$$

et rangeons en une suite simple

$$(12) \qquad I_1, I_2, \dots, I_h, \dots$$

les différents ensembles de cette sorte.

K étant toujours un continu de la famille $\mathfrak{S}$, soit

$$I_{h(K)} = I[s_1^K, s_2^K, \dots, s_{j(K)}^K]$$

le premier ensemble de la suite (12) qui vérifie l'inclusion

$$I_{h(K)} \subset K_x = [b_K, c_K].$$

Ces conventions faites, posons [4])

$$y_K = \frac{1|}{|s_1^K} + \dots + \frac{1|}{|s_{j(K)}^K} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2m_1^K} + \dots + \frac{1|}{|2m_i^K} + \dots$$

$$z_K = \frac{1|}{|s_1^K} + \dots + \frac{1|}{|s_{j(K)}^K} + \frac{1|}{|3} + \frac{1|}{|2m_1^K} + \dots + \frac{1|}{|2m_i^K} + \dots$$

Nous désignerons par ces mêmes symboles (y_K et z_K) les points de X d'abscisses y_K et z_K.

1) »Les exemples effectifs et l'axiome du choix«, *Fund. Math.* II, p. 113.

2) Il n'est pas difficile, en effet, d'indiquer une correspondance biunivoque entre les nombres réels et les suites d'entiers.

3) fraction continue ordinaire.

4) $m_1^K, \dots, m_i^K, \dots$ est la suite (11) tout-à-l'heure définie.

On a évidemment

(13) $$y_K + z_K \subset K_x, \quad y_K \neq z_K;$$

et l'on démontre sans peine que

(14) $$y_K \neq y_{K^*} \neq z_K, \quad y_K \neq z_{K^*} \neq z_K,$$

K^* étant un continu (de la famille $\mathfrak{S}$) distinct de K. Nous désignons par Y l'ensemble de tous les points y_K (relatifs à tous les K appartenant à $\mathfrak{S}$):

$$Y = \sum_{K \varepsilon \mathfrak{S}} y_K;$$

nous posons de même

$$Z = \sum_{K \varepsilon \mathfrak{S}} z_K.$$

On a

$$Y \times Z = 0, \quad Y + Z \subset X \times Q_n.$$

Nous allons maintenant décomposer chaque Q^x_{n-1} en deux ensembles punctiformes, U^x et V^x. Cette décomposition sera déduite de celle que nous connaissons déjà, à savoir

$$Q^x_{n-1} = L^x_{n-1} + M^x_{n-1},$$

et cela de la manière suivante:

Premier cas: $x \subset Y$. On a donc $x = y_K$, K étant un continu de $\mathfrak{S}$ univoquement déterminé par le point x [1]. $x = y_K$ étant, d'après (13), agrégé à la projection K_x de K sur X, on a $K \times \Pi^x \neq 0$; or

$$K \times \Pi^x = K \times Q_n \times \Pi_x = K \times Q^x_{n-1} = (K \times L^x_{n-1}) + (K \times M^x_{n-1});$$

on a donc l'une des deux inégalités

(15₁) $$K \times L^x_{n-1} \neq 0$$

ou

(15₂) $$K \times M^x_{n-1} \neq 0.$$

Nous allons déterminer U^x de façon qu'on ait

(16) $$K \times U^x = K \times U^{y_K} \neq 0;$$

nous posons à cet effet

(17₁) $$U^x = L^x_{n-1}, \quad V^x = M^x_{n-1}$$

lorsque (15_1) est vérifiée, et

(17₂) $$U^x = M^x_{n-1}, \quad V^x = L^x_{n-1}$$

dans le cas contraire [2].

[1]) Cela résulte des inégalités (14).

[2]) La relation (15_2) est donc nécessairement vérifiée dans ce dernier cas; elle peut, d'ailleurs, être vérifiée en même temps que (15_1), auquel cas nous aurons, par définition, les égalités (17_1).

Deuxième cas: $x \subset Z$. On a $x = z_K$ $(K \varepsilon \mathfrak{S})$; nous procédons de la même façon, en échangeant seulement les rôles de U^x et de V^x. On aura donc toujours

(18) $$K \times V^{z_K} \neq 0.$$

Troisième cas: $x \subset X \times Q_n - (Y + Z)$. Nous posons alors

$$U^x = L^x_{n-1}, \quad V^x = M^x_{n-1}.$$

La décomposition

$$Q^x_{n-1} = U^x + V^x$$

est ainsi définie dans tous les cas. Posons

$$L_n = \sum_{0 \leqslant x \leqslant 1} U^x,$$

$$M_n = \sum_{0 \leqslant x \leqslant 1} V^x;$$

on a évidemment

(19) $$Q_n = L_n + M_n, \quad L_n \times M_n = 0.$$

Reste donc à montrer que les ensembles L_n et M_n ainsi définis sont, tous les deux, punctiformes; ou bien, ce qui revient au même (d'après (19)), que tout continu situé dans Q_n a des points communs avec chacun d'eux. La chose est évidente, d'après (16) et (18), pour tous les continus de la famille $\mathfrak{S}$. Soit donc K un continu de $\mathfrak{P}$; on a $K_x = a_K$, donc

$$K \subset Q^a_{n-1} = U^a + V^a.$$

Or, les deux derniers ensembles étant punctiformes, K a des points communs avec chacun d'eux; par suite,

$$K \times L_n \neq 0, \quad K \times M_n \neq 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous obtenons ainsi par induction la décomposition désirée de tout Q_n en deux ensembles punctiformes.

3. On obtient aisément des ensembles punctiformes de dimension infinie. On posera p. ex., dans l'espace E_ω défini dans le chapitre précédent (§ 20),

$$L_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} L_n,$$

les L_n étant des ensembles punctiformes satisfaisant les relations:

$$\dim L_n = n,$$

$$L_n \times L_m = 0. \quad (n \neq m; \; n, m = 1, 2, \ldots)$$

Par contre, la méthode ci-dessus ne nous donne aucun moyen de résoudre les deux problèmes suivants:

Problème $\varkappa$. *Existe-t-il des ensembles dispersés de dimension arbitrairement grande?*

Problème λ. *S'il y en a, peuvent-ils être séparés entre tout couple de leurs points?*

La réponse est affirmative dans le cas de la dimension 1, comme le prouvent les exemples cités au Ch. I (§ 13). La question reste ouverte dans tous les autres cas.

4. Revenons au théorème du § 1. Une application répétée de la formule (1) nous permet d'obtenir le résultat suivant:

On a toujours

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\dim L_i) + n - 1. \tag{1*}$$

En particulier, si tous les L_i sont de dimension 0, il vient

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) \leqslant n - 1;$$

par conséquent,

Théorème I. *Si un ensemble (quelconque) de dimension n est décomposé en une somme d'ensembles de dimension* 0, *cette somme est constituée d'au moins $n+1$ termes.*

Il serait intéressant d'établir le théoréme *inverse*, à savoir que $n+1$ termes *suffisent*; c. à d. que tout ensemble de dimension n peut être décomposé en une somme de $n+1$ ensembles de dimension 0.

Je ne suis arrivé à démontrer ce théorème inverse dans le cas général; je l'établirai dans le cas particulier des ensembles fermés [1]) et, plus généralement, des ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$. La démonstration repose sur la généralisation du théorème I du Ch. IV au cas des ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$; c'est donc par cette généralisation que nous allons commencer.

[1]) C'est, bien entendu, l'ensemble somme (et non les ensembles composant cette somme) qui est fermé: si, en effet, les termes de la somme (qui sont de dimension 0) étaient fermés, l'ensemble somme serait, lui aussi, de dimension 0 (Théor. I, Ch. IV).

Nous traiterons à la fin de ce chapitre un autre cas particulier, à savoir celui de tous les ensembles plans.

Je tiens, d'ailleurs, à noter que la généralisation indiquée est indispensable même pour le théorème inverse relatif aux ensembles *fermés*: en effet, le cas des ensembles fermés de dimension n se réduit, comme nous allons voir, au cas des $\mathfrak{F}_\sigma$ (et non des $\mathfrak{F}$) de dimension $n-1$. C'est donc pour les ensembles *fermés* que nous entreprenons la longue et pénible généralisation qui va suivre.

5. Lemme I. *Soit F un ensemble fermé de dimension $\leqslant n$; P et Q, deux parties fermées de F sans points communs:*

$$P \varepsilon \mathfrak{F}, \quad Q \varepsilon \mathfrak{F},$$

$$P+Q \subset F, \quad P \times Q = 0.$$

On peut alors décomposer F en trois ensembles, A, B et D, sans points communs deux à deux, de manière qu'on ait:

(20) $$A \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } F), \quad D \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } F),$$

(21) $$A \supset P, \quad D \supset Q,$$

(22) $$B \varepsilon \mathfrak{F}, \quad \dim B \leqslant n-1.$$

On peut donc séparer l'ensemble P de l'ensemble Q par l'ensemble fermé B de dimension $\leqslant n-1$.

Démonstration. Désignons par σ le nombre positif

$$\varrho(P, Q);$$

la dimension de F étant, par hypothèse, $\leqslant n$, il en résulte que tout point x de F peut être σ-séparé par un ensemble fermé B_x de dimension $\leqslant n-1$. Effectuons une telle σ-séparation relativement à tout point x du sous-ensemble P de F [1]):

(23) $$F = A_x + B_x + D_x$$

(24) $$A_x \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } F), \quad D_x \varepsilon \mathfrak{G} \text{ (rel. } F),$$

(25) $$B_x \varepsilon \mathfrak{F}, \quad \dim B_x \leqslant n-1,$$

(26) $$A_x \supset x, \quad A_x + B_x \subset S(x, \sigma).$$

On a

$$P \subset \sum_{x \subset P} A_x;$$

[1]) Le choix de ces séparations peut être fait d'une manière effective: voir le § 11 du Ch. V.

on peut donc, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, choisir une suite finie

$$x_1,\ x_2, \dots,\ x_k$$

de points de P, de façon qu'on ait

$$P \subset \sum_{i=1}^{k} A_{x_i}. \tag{27}$$

Posons

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_{x_i},$$

$$B = \sum_{i=1}^{k} B_{x_i} - A,$$

$$D = F - (A + B).$$

Nous obtenons ainsi une décomposition de F en trois ensembles sans points communs deux à deux; je dis qu'elle satisfait à toutes les conditions désirées.

Le première formule (20) et la première des relations (22) résultent immédiatement de (24), (25) et de la définition des ensembles A et B. Le première formule (21) est une conséquence de (27). Quant aux trois autres relations, elles se démontrent comme il suit:

1) On a

$$D = F - (A + B) = F - \sum_{i=1}^{k} (A_{x_i} + B_{x_i}) = F - \sum_{i=1}^{k} (F - D_{x_i});$$

il vient donc, d'après (24),

$$D \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \text{ (rel. } F).$$

2) Il résulte de (26) et des inclusions

$$x_i \subset P \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

que

$$A + B = \sum_{i=1}^{k} (A_{x_i} + B_{x_i}) \subset \sum_{i=1}^{k} S(x_i, \sigma) \subset S(P, \sigma);$$

donc, σ étant par définition égal à $\varrho(P, Q)$,

$$Q \times (A + B) \subset Q \times S(P, \sigma) = 0,$$

$$Q \subset D.$$

3) Le théorème I du Ch. IV nous apprend, en vertu de (25), que

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{k} B_{x_i}\right) \leqslant n-1;$$

à fortiori

$$\dim B \leqslant n-1, \qquad\qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque I. *On peut s'arranger de façon que la décomposition*

$$F = A + B + D$$

satisfasse à la condition supplémentaire

(28) $$A + B \subset S(P, \varepsilon)$$

(ε étant un nombre positif arbitraire donné d'avance).

En effet, les deux ensembles fermés

$$P \text{ et } Q_1 = Q + [F - S(P, \varepsilon)]$$

n'ont aucun point commun; on peut donc leur appliquer le lemme que nous venons de démontrer. La décomposition $F = A + B + D$ qu'on obtient ainsi, satisfait évidemment aux conditions (20), (21), (22); et l'on a, de plus,

$$D \supset Q_1 \supset F - S(P, \varepsilon),$$

donc

$$A + B = F - D \subset S(P, \varepsilon),$$

c. à d. la relation (28).

Remarque II. Notre lemme peut être interverti comme il suit:

Soit F un ensemble fermé tel que tout couple de ses parties fermées (sans points communs) puisse être séparé par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$ [1]; dans ce cas la dimension de F est $\leqslant n$.

Il suffit, en effet, d'appliquer l'énoncé aux ensembles fermés

$$x \text{ et } F - S(x, \varepsilon)$$

pour obtenir un ensemble de dimension $\leqslant n-1$ qui ε-sépare le point x de F.

On voit ainsi qu'on peut définir comme il suit par induction la dimension des ensembles *fermés*:

[1]) Le sens précis de cette expression résulte de l'énoncé du lemme.

Déf. *La dimension de l'ensemble vide est égale à* -1. *Les ensembles (fermés) de dimension* $< n$ *ayant déjà été définis, soit* F *un ensemble fermé qui n'est pas de dimension* $< n$; *si tout couple de ses parties fermées (sans point communs) peut être séparé par un ensemble fermé de dimension* $< n$, F *sera dit un ensemble de dimension* n.

Autrement dit, *pour le cas des ensembles fermés* notre définition *locale* de la dimension est équivalente à la définition *intégrale* due à M. Brouwer [1]); dans cette dernière la dimension des *points* ne joue aucun rôle.

6. Nous aurons besoin de la généralisation suivante du lemme précédent:

Lemme II. *Soit* F *un ensemble fermé de dimension* $\leqslant n$; *soient ensuite* P, Q *et* B_0 *trois parties fermées de* F *satisfaisant aux relations:*

$$P \times Q \subset B_0, \tag{29}$$

$$\dim B_0 \leqslant n-1. \tag{30}$$

Il existe alors une decomposition de F

$$F = A + B + D$$

en trois ensembles (sans points communs deux à deux) telle que

$$A \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel.}\, F), \quad D \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel.}\, F), \tag{31}$$

$$B \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \tag{32}$$

$$A \supset P - B_0, \quad D \supset Q - B_0, \tag{33}$$

$$B \supset B_0, \tag{34}$$

$$\dim B \leqslant n-1 \text{ [2]}). \tag{35}$$

Démonstration. Il résulte de l'inclusion (29) que

$$P - B_0 = P - (B_0 + Q);$$

$B_0 + Q$ étant fermé, nous voyons que tout point de $P - B_0$ est à une distance > 0 de l'ensemble $B_0 + Q$. Par conséquent

$$P - B_0 = \sum_{i=1}^{\infty} P_i, \tag{36}$$

[1]) Voir le mémoire cité du *Journ. de Crelle* (t. 142 (1913), p. 146—152).

[2]) Le lemme précédent correspond au cas $B_0 = 0$.

où

$$(37)\quad \begin{cases} P_1 = P - S(B_0 + Q, 1), \\ P_i = P \times S\left(B_0 + Q, \frac{1}{i-1}\right) - S\left(B_0 + Q, \frac{1}{i}\right). \\ (i = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Tous les P_i sont fermés, et l'on a

$$P_i \times (B_0 + Q) = 0;$$

nous pouvons donc appliquer le lemme précédent aux deux ensembles P_i et $B_0 + Q$. Nous nous arrangeons de façon que la décomposition $F = A_i + B_i + D_i$ qu'on obtient ainsi, satisfasse à la *condition supplémentaire* (28) (première remarque du § précédent) lorsqu'on y pose $\varepsilon = \frac{1}{i}$.

Nous obtenons, en définitive, une suite de décompositions

$$F = A_i + B_i + D_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(20_i)\qquad A_i \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F), \quad D_i \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\,(\text{rel. } F),$$

$$(21_i)\qquad A_i \supset P_i, \quad D_i \supset B_0 + Q,$$

$$(22_i)\qquad B_i \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \quad \dim B_i \leqslant n - 1,$$

$$(28_i)\qquad A_i + B_i \subset S\left(P_i, \frac{1}{i}\right).$$

Ceci fait, posons

$$(38)\qquad A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,$$

$$(39)\qquad B = \left(B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) - A,$$

$$(40)\qquad D = F - (A + B).$$

On a évidemment

$$F = A + B + D,$$

$$A \times B = A \times D = B \times D = 0;$$

nous allons voir que cette décomposition possède toutes les propriétés requises.

Envisageons tout d'abord l'ensemble

$$(41)\qquad A+B=B_0+\sum_{i=1}^{\infty}(A_i+B_i);$$

montrons qu'il est fermé. Il résulte de la deuxième formule (20_i) que

$$(A_i+B_i)\,\varepsilon\,\mathfrak{F};$$

par conséquent,

$$(42_k)\qquad \overline{(A+B)}=B_0+\sum_{j=1}^{k}(A_j+B_j)+\overline{\left[\sum_{i=k+1}^{\infty}(A_i+B_i)\right]}\subset$$

$$\subset(A+B)+\overline{\left[\sum_{i=k+1}^{\infty}(A_i+B_i)\right]},$$

k étant un entier positif quelconque.

Or soit i un entier $>k$; on a, d'après (28_i) et (36),

$$A_i+B_i\subset S\left(P_i,\frac{1}{i}\right)\subset\overline{S}\left(P_i,\frac{1}{k}\right)\subset\overline{S}\left(P,\frac{1}{k}\right);$$

et l'on obtient en vertu de (37),

$$P_i\subset\overline{S}\left(B_0+Q,\frac{1}{i-1}\right)\subset\overline{S}\left(B_0+Q,\frac{1}{k}\right),$$

$$A_i+B_i\subset\overline{S}\left(P_i,\frac{1}{k}\right)\subset S\left(B_0+Q,\frac{2}{k}\right),$$

donc

$$A_i+B_i\subset\overline{S}\left(P,\frac{1}{k}\right)\times\overline{S}\left(B_0+Q,\frac{2}{k}\right),$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}(A_i+B_i)\subset\overline{S}\left(P,\frac{1}{k}\right)\times\overline{S}\left(B_0+Q,\frac{2}{k}\right),$$

$$(43)\qquad \overline{\left[\sum_{i=k+1}^{\infty}(A_i+B_i)\right]}\subset\overline{S}\left(P,\frac{1}{k}\right)\times\overline{S}\left(B_0+Q,\frac{2}{k}\right).$$

La formule (42_k) devient

$$\overline{(A+B)}\subset(A+B)+\overline{S}\left(P,\frac{1}{k}\right)\times\overline{S}\left(B_0+Q,\frac{2}{k}\right);$$

ainsi

$$\overline{(A+B)}-(A+B) \subset \overline{S}\left(P, \frac{1}{k}\right) \times \overline{S}\left(B_0+Q, \frac{2}{k}\right)$$

quel que soit k; par suite

$$\overline{(A+B)}-(A+B) \subset \prod_{k=1}^{\infty} \overline{S}\left(P, \frac{1}{k}\right) \times \prod_{k=1}^{\infty} \overline{S}\left(B_0+Q, \frac{2}{k}\right).$$

Or les ensembles P et B_0+Q sont fermés; on a donc

$$\prod_{k=1}^{\infty} S\left(P, \frac{1}{k}\right) = P,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} S\left(B_0+Q, \frac{2}{k}\right) = B_0+Q;$$

et l'on obtient en tenant compte de (29),

$$\overline{(A+B)}-(A+B) \subset P \times (B_0+Q) \subset B_0 \subset A+B,$$

$$\overline{(A+B)} \subset A+B,$$

(44) $$(A+B)\, \varepsilon\, \mathfrak{F}.$$

On démontre de la même manière que l'ensemble

$$B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

est fermé. Désignons-le, en effet, par B_ω; on a, d'après (22$_i$) et (43),

$$B_\omega = B_0 + \sum_{j=1}^{k} B_j + \overline{\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} B_i\right)},$$

$$\overline{B}_\omega - B_\omega \subset \overline{\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} B_i\right)} \subset \overline{\left[\sum_{i=k+1}^{\infty} (A_i+B_i)\right]} \subset \overline{S}\left(P, \frac{1}{k}\right) \times S\left(B_0+Q, \frac{2}{k}\right);$$

et l'on obtient comme ci-dessus,

$$\overline{B}_\omega - B_\omega \subset B_0 \subset B_\omega, \quad B_\omega\, \varepsilon\, \mathfrak{F},$$

(45) $$\left(B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) \varepsilon\, \mathfrak{F}.$$

Ces préliminaires terminés, nous allons montrer que les condition (31) — (35) sont réalisées.

1) La première relation (31) résulte immédiatement de (38) et (20_i); la deuxième, de (44).

On obtient (32) en rapprochant entre elles les relations (39), (45) et (31).

2) On a, d'après (38), (21_i) et (36),

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \supset \sum_{i=1}^{\infty} P_i = P - B_0:$$

c'est la première formule (33). Nous établissons la seconde comme il suit: on a d'après (41),

$$D = F - (A + B) = F - \left[B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i)\right] =$$

$$= \left[F - \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i)\right] - B_0 = \prod_{i=1}^{\infty} [F - (A_i + B_i)] - B_0 =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} D_i - B_0;$$

donc, en vertu de la seconde inclusion (21_i),

$$D \supset (B_0 + Q) - B_0 = Q - B_0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

3) A_i et D_i n'ayant aucun point commun, il résulte de (21_i) et (38) que

$$A_i \times B_0 = 0, \quad A \times B_0 = 0;$$

la relation (34) est donc une conséquence immédiate de (39).

4) Appliquons le théorème I du Ch. IV a l'ensemble $B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i$; il vient en vertu de (30), (22_i) et (45),

$$\dim \left(B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq n - 1.$$

A fortiori

$$\dim B \leq n - 1.$$

Le lemme II est complètement démontré.

7. L'espace E étant un ensemble fermé, tout point x de E peut être ε-séparé par un ensemble fermé R.

Convenons de dire que l'ε-séparation correspondante

$$E = G + R + H$$

est *une ε-séparation complète du point x.* Une telle séparation est donc définie par les relations

$$G \times R = G \times H = R \times H = 0, \tag{46}$$

$$G \,\varepsilon\, \mathfrak{G}; \quad R \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \quad H \,\varepsilon\, \mathfrak{G}\ \text{[1]}, \tag{47}$$

$$G \supset x, \tag{48}$$

$$G + R \subset S(x, \varepsilon). \tag{49}$$

Lemme III. *Soient F_1 et F_2 deux ensembles fermés de dimension $\leqslant n$ dont le second contient le premier:*

$$F_1 \subset F_2, \tag{50_1}$$

$$\dim F_1 \leqslant \dim F_2 \leqslant n; \tag{51_1}$$

et soit

$$E = G_1 + R_1 + H_1$$

une ε-séparation complète d'un point x de F_1 qui satisfait aux conditions

$$\overline{G_1} \times \overline{H_1} \subset F_1, \tag{52_1}$$

$$\dim (R_1 \times F_1) \leqslant n - 1. \tag{53_1}$$

Il existe alors une ε-séparation complète du point x

$$E = G_2 + R_2 + H_2$$

qui satisfait à des conditions analogues

$$\overline{G_2} \times \overline{H_2} \subset F_2, \tag{52_2}$$

$$\dim (R_2 \times F_2) \leqslant n - 1, \tag{53_2}$$

et, de plus, aux suivantes:

$$G_1 \subset G_2, \quad H_1 \subset H_2, \tag{54_1}$$

$$R_1 \times F_1 \subset R_2 \times F_2. \tag{55_1}$$

[1]) Ch. I, § 10.

Démonstration. Posons

$$(56)\quad \left\{ \begin{array}{c} F = F_2 \times R_1, \\ P = G_1 \times F, \quad Q = H_1 \times F, \\ B_0 = F_1 \times R_1. \end{array} \right.$$

Ces ensembles satisfont à toutes les conditions du lemme précédent: ils sont, en effet, fermés (en vertu de $R_1 \varepsilon \mathfrak{F}$); P, Q et B_0 sont des sous-ensembles de F, la dernière de ces inclusions résultant immédiatement de (50_1). Puis, la relation (30) coïncide avec (53_1), et (29) résulte de (52_1):

$$P \times Q = G_1 \times H_1 \times F \subset F_1 \times F \subset F_1 \times R_1 = B_0;$$

on a enfin, en vertu de (51_1),

$$\dim F \leqslant n.$$

Il existe donc, d'après le lemme II, une décomposition

$$(57)\quad F = A + B + D,$$

$$(58)\quad A \times B = B \times D = A \times D = 0,$$

satisfaisant aux relations (31) — (35):

$$(31)\quad A\, \varepsilon\, \mathfrak{G}\ (\text{rel. } F), \quad D\, \varepsilon\, \mathfrak{G}\ (\text{rel. } F),$$

$$(32)\quad B\, \varepsilon\, \mathfrak{F},$$

$$(33)\quad A \supset P - B_0, \quad D \supset Q - B_0,$$

$$(34)\quad B \supset B_0,$$

$$(35)\quad \dim B \leqslant n - 1.$$

Démontrons maintenant que les deux ensembles $G_1 + A$ et $H_1 + D$ satisfont à la condition de Lennes-Hausdorff. On a

$$H(G_1 + A, H_1 + D) = H(G_1, H_1) + H(A, D) + H(G_1, D) + H(H_1, A);$$

le premier terme du second nombre est vide en vertu de (46_1) et (47_1) [1]; le second terme, en vertu de (58) et (31). Il s'agit donc

[1] Je désigne généralement par (46_i) — (49_i) les formules analogues à (46) — — (49) et relatives à l'ε-séparation

$$E = G_i + R_i + H_i.$$

de montrer qu'il en est de même des deux autres termes, c. à d. qu'on a

$$(59) \quad \begin{cases} G_1 \times \overline{D} + \overline{G_1} \times D = 0, \\ H_1 \times \overline{A} + \overline{H_1} \times A = 0. \end{cases}$$

Or il vient, d'après (57) et (56),

$$\overline{A} \subset F \subset R_1,$$
$$\overline{D} \subset F \subset R_1;$$

on obtient donc, en vertu de (46_1) et (56), les identités

$$G_1 \times \overline{D} + \overline{G_1} \times D = G_1 \times R_1 \times \overline{D} + \overline{G_1} \times F \times D = P \times D,$$
$$H_1 \times A + \overline{H_1} \times A = H_1 \times R_1 \times \overline{A} + \overline{H_1} \times F \times A = Q \times A.$$

Il résulte, d'autre part, de (33) et (34) que

$$P \subset A + B_0 \subset A + B,$$
$$Q \subset D + B_0 \subset D + B,$$

et les formules (58) nous montrent alors que

$$P \times D = Q \times A = 0.$$

Nous voyons ainsi que les égalités (59) sont vérifiées, et que l'on a

$$(60) \quad H(G_1 + A,\ H_1 + D) = 0.$$

La relation (60) nous permet d'appliquer aux ensembles $G_1 + A$ et $H_1 + D$ le lemme du Ch. IV, § 2. Nous obtenons ainsi deux domaines, G_A et G_D, tels que

$$(61) \quad G_A \supset G_1 + A, \quad G_D \supset H_1 + D,$$

$$(62) \quad G_A \times G_D = 0,$$

$$(63) \quad G_A \times G_D = \overline{(G_1 + A)} \times \overline{(H_1 + D)}$$ [1].

Ceci fait, posons

$$(64) \quad \begin{cases} G_2 = G_A - B, \\ H_2 = G_D - B, \\ R_2 = E - (G_2 + H_2); \end{cases}$$

[1]) Voir Ch. IV, formules (1) et la note qui s'y rattache.

je dis que la décomposition

$$E = G_2 + R_2 + H_2$$

est l'ε-séparation complète que nous nous étions proposé d'obtenir. En d'autres termes, nous allons montrer que les ensembles G_2, R_2 et H_2 satisfont aux relations (46_2)—(49_2) [1]), (52_2), (53_2), (54_1) et (55_1).

1) (46_2) est une conséquence immédiate des définitions (64) et de la formule (62); (47_2), de la relation (32).

2) On a, d'après (46_1), (58) et (56),

$$B \times (G_1 + A) = B \times G_1 \subset F \times G_1 \subset R_1 \times G_1 = 0,$$
$$B \times (H_1 + D) = 0;$$

donc, en vertu de (61),

$$(65) \qquad \begin{cases} G_2 = G_A - B \supset (G_1 + A) - B = G_1 + A, \\ H_2 = G_D - B \supset (H_1 + D) - B = H_1 + D. \end{cases}$$

Les relations (54_1) en résultent comme cas particulier.

3) On obtient (48_2) et (49_2) en s'appuyant sur (48_1), (49_1) et les formules (54_1) que nous venons de démontrer:

$$(48_2) \qquad G_2 \supset G_1 \supset x,$$

$$(49_2) \qquad G_2 + R_2 = E - H_2 \subset E - H_1 = G_1 + R_1 \subset S(x, \varepsilon).$$

4) Il résulte de (63) que

$$\overline{G_2} \times \overline{H_2} \subset \overline{G_A} \times \overline{G_D} = \overline{G_1} \times \overline{H_1} + \overline{G_1} \times \overline{D} + \overline{H_1} \times \overline{A} + \overline{A} \times \overline{D};$$

or tous les termes du dernier membre sont contenus dans F_2: le premier en vertu de (52_1) et (50_1), les autres, d'après

$$\overline{A} \subset F \subset F_2, \quad \overline{D} \subset F \subset F_2.$$

Par conséquent

$$\overline{G_2} \times \overline{H_2} \subset F_2:$$

c'est la formule (52_2).

5) On a, en vertu de (56), (57) et (65),

$$F_2 = F_2 \times G_1 + F_2 \times H_1 + F_2 \times R_1 \subset G_1 + H_1 + F =$$
$$= G_1 + H_1 + A + B + D \subset G_2 + H_2 + B,$$

donc

$$F_2 \times R_2 = F_2 - (G_2 + H_2) \subset B;$$

[1]) Voir l'avant-dernière note.

il résulte, d'autre part, de (64) que

$$(G_2 + H_2) \times B = 0,$$

$$F_2 \times R_2 \supset F \times R_2 \supset B \times R_2 = B - (G_2 + H_2) = B.$$

Par conséquent

$$F_2 \times R_2 = B,$$

et l'on voit en tenant compte de (56), que les relations (53_2) et (55_1) coïncident avec (35) et (34).

Notre lemme est complètement démontré.

Je tiens à noter que le lemme III fournit (nous le verrons dans un moment) un résultat immédiatement utilisable: c'est ce qui justifie, à mon avis, l'emploi de ce lemme dont l'énoncé est tellement compliqué.

8. Lemme IV. *L'ensemble-somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de dimension $\leqslant n$, est lui-même de dimension $\leqslant n$.*

Ce lemme est, d'après son énoncé [1]), une généralisation immédiate du théorème I du Ch. IV qui correspond au cas où l'ensemble-somme est fermé lui aussi. Cette restriction n'intervient plus dans le cas actuel: l'ensemble-somme sera donc en général un $\mathfrak{F}_\sigma$.

Nous allons démontrer ce lemme par induction. Sa validité est évidente lorsque $n = -1$; supposons donc que l'énoncé est exact pour tous les entiers inférieurs à un entier (non négatif) n donné. Il s'agit de montrer qu'il en sera encore de même pour cet entier n.

Soit donc

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, \ldots \tag{66}$$

une suite infinie d'ensembles fermés de dimension $\leqslant n$:

$$\Phi_m \varepsilon \mathfrak{F}, \ \dim \Phi_m \leqslant n. \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Nous désignerons par Φ l'ensemble-somme:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m.$$

Il s'agit de montrer que $\dim \Phi \leqslant n$, c. à d. que tout point x de Φ peut être, quel que soit ε, ε-séparé par un ensemble B_ω de dimension $\leqslant n-1$.

1) La démonstration est, par contre, toute différente.

Soit donc x un point quelconque de Φ; ε, un nombre positif arbitraire. Soit ensuite Φ_m le premier ensemble de la suite (66) qui contient x. Posons

(67)
$$\begin{cases} F_1 = x, \\ F_k = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_m + \ldots + \Phi_{m+k-2}; \\ (k = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

il est évident que les F_k sont fermés et que l'on a

(50)
$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots,$$

(68)
$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Il résulte, de plus, du théorème I du Ch. IV que

(51_k)
$$\dim F_k \leqslant n. \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Posons ensuite

(69_1^*)
$$\begin{cases} G_1 = S\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right), \\ R_1 = \overline{S}\left(x, \frac{2}{3}\varepsilon\right) - S\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right), \\ H_1 = E - \overline{S}\left(x, \frac{2}{3}\right); \end{cases}$$

on voit immédiatement que

(69_1)
$$E = G_1 + R_1 + H_1$$

est une ε-séparation complète du point x, et que les ensembles

$$F_1, \ F_2, \ G_1, \ R_1, \ H_1$$

satisfont à toutes les conditions du lemme précédent. On obtient donc, en vertu de ce lemme, une ε-séparation complète

(69_2)
$$E = G_2 + R_2 + H_2$$

satisfaisant aux relations (52_2), (53_2), (54_1), (55_1); et l'on voit sans peine qu'on peut maintenant appliquer le même lemme III aux ensembles

$$F_2, \ F_3, \ G_2, \ R_2, \ H_2.$$

On obtient ainsi l'ε-séparation complète

(69_3)
$$E = G_3 + R_3 + H_3$$

satisfaisant à des conditions analogues, et ainsi de suite: nous définissons de proche en proche en nous appuyant toujours sur le lemme III, une suite d'ε-séparations complètes

(69$_k$) $$E = G_k + R_k + H_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$
vérifiant les relations
(52$_k$) $$\overline{G_k} \times \overline{H_k} \subset F_k,$$
(53$_k$) $$\dim(R_k \times F_k) \leqslant n - 1,$$
(54$_k$) $$G_k \subset G_{k+1}, \quad H_k \subset H_{k+1},$$
(55$_k$) $$R_k \times F_k \subset R_{k+1} \times F_{k+1}.$$

Notons encore que l'on a, (69$_k$) étant une ε-séparation complète,
(46$_k$) $$G_k \times R_k = G_k \times H_k = R_k \times H_k = 0,$$
(47$_k$) $$G_k \,\varepsilon\, \mathfrak{G}, \quad R_k \,\varepsilon\, \mathfrak{F}, \quad H_k \,\varepsilon\, \mathfrak{G},$$
(49$_k$) $$G_k + R_k \subset S(x, \varepsilon).$$

Ces préliminaires terminés, envisageons la décomposition de F_k
$$F_k = (G_k \times F_k) + (R_k \times F_k) + (H_k \times F_k)$$
en trois ensembles sans points communs deux à deux. Chaque terme du second membre est un ensemble croissant avec k (formules (50), (54$_k$), (55$_k$)); nous voyons donc que la décomposition
$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} F_k = \left[\sum_{k=1}^{\infty}(G_k \times F_k)\right] + \left[\sum_{k=1}^{\infty}(R_k \times F_k)\right] + \left[\sum_{k=1}^{\infty}(H_k \times F_k)\right]$$
nous fournit, elle aussi, trois ensembles sans points communs deux à deux, à savoir les ensembles

(70) $$\left\{\begin{aligned} A_\omega &= \sum_{k=1}^{\infty}(G_k \times F_k), \\ B_\omega &= \sum_{k=1}^{\infty}(R_k \times F_k), \\ D_\omega &= \sum_{k=1}^{\infty}(H_k \times F_k)\ ^{1)}. \end{aligned}\right.$$

[1]) Nous nous appuyons sur la proposition générale suivante: »Si l'on a $L_k \subset L_{k+1}$, $M_k \subset M_{k+1}$, $L_k \times M_k = 0$ quel que soit k, les ensembles $\sum\limits_{k=1}^{\infty} L_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ n'ont aucun point commun«.

La démonstration est immédiate:
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} L_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \sum_{i,k=1}^{\infty}(L_k \times M_i) \subset \sum_{i,k=1}^{\infty}(L_{k+i} \times M_{k+i}) = 0.$$

Je dis que cette décomposition

$$\Phi = A_\omega + B_\omega + D_\omega$$

est une ε-séparation du point x de Φ.

On a, en effet,

$$A_\omega \supset G_1 \times F_1 = x,$$

(formules (70), (69_1^*), (67));
puis, en vertu de (49_k),

$$A_\omega + B_\omega \subset \sum_{k=1}^{\infty} (G_k + R_k) \subset S(x, \varepsilon);$$

reste donc à montrer que

$$H(A_\omega, \bar{D}_\omega) = 0.$$

Or on a, d'après (70),

$$A_\omega \subset \sum_{k=1}^{\infty} G_k, \quad D_\omega \subset \sum_{k=1}^{\infty} H_k,$$

et les ensembles $\sum\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k$ sont, en vertu de (46_k) et (47_k), des *domaines* sans points communs [1]); il satisfont donc à la condition de Lennes-Hausdorff, et il en est de même pour les ensembles A_ω et D_ω.

Nous voyons ainsi que l'ensemble

$$B_\omega = \sum_{k=1}^{\infty} (R_k \times F_k)$$

ε-sépare le point x de Φ. Or, les ensembles $R_k \times F_k$ étant fermés, il résulte de (53_k) et de l'hypothèse faite au début de ce § que

$$\dim B_\omega \leqslant n - 1:$$

c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

Corollaires. *Tout $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n contient un ensemble fermé de même dimension.*

Il suffit, en effet, de décomposer cet $\mathfrak{F}_\sigma$ en une infinité dénombrable d'ensembles fermés [2]) et d'appliquer le lemme que nous venons de démontrer.

[1]) Voir la note précédente.

[2]) Ces ensembles-là peuvent, bien entendu, avoir des points communs.

En particulier, tout $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension >0 contient un $\mathfrak{F}$ de dimension >0; il contient donc un continu [1]). Ainsi, *tout $\mathfrak{F}_\sigma$ punctiforme est de dimension* 0; il est donc homéomorphe à un ensemble linéaire [2]): c'est un résultat dû à M. Mazurkiewicz [3]).

9. Nous arrivons maintenant à la généralisation définitive du théorème I du Ch. IV que nous avions en vue (§ 4):

Théorème II. *L'ensemble-somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension $\leqslant n$, est, lui aussi, un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension $\leqslant n$.*

Démonstration. Désignons par Φ l'ensemble-somme en question; on a, par hypothèse,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots,$$

$$\Phi_i \,\varepsilon\, \mathfrak{F}_\sigma, \quad \dim \Phi_i \leqslant n. \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

Φ_i étant un $\mathfrak{F}_\sigma$, on a

$$(71_i) \qquad \Phi_i = \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik}, \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

les F_{ik} étant des ensembles fermés [4]); par conséquent

$$\Phi = \sum_i \sum_{k=1}^{\infty} F_{ik},$$

est un $\mathfrak{F}_\sigma$. Or il résulte de l'inclusion $F_{ik} \subset \Phi_i$ que

$$\dim F_{ik} \leqslant \dim \Phi_i \leqslant n; \quad (i, k = 1, 2, \dots)$$

on obtient donc, d'après le lemme du § précédent,

$$\dim \Phi \leqslant n, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

[1]) Ch. I, § 14.

[2]) Ch. I, § 16.

[3]) *Fund. Math.* III, p. 70. Nous avons déjà utilisé ce résultat dans le § 17 du Ch. IV.

[4]) La décomposition (71_i) n'étant pas *unique*, nous sommes obligés, en général, d'avoir recours à l'axiome de Zermelo: cf. le mémoire de M. Sierpiński „L'axiome de M. Zermelo...“ (*Bull. Acad. Sc. Cracovie*, 1918). L'emploi de cet axiome devient superflu lorsque nous connaissons *a priori* une décomposition déterminée de chaque Φ_i en ensembles fermés; ce sera le cas, p. ex., dans tous les développements du § suivant.

Remarque. Désignons par $\mathfrak{F}_\sigma^n$ la classe des $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension $\leqslant n$. Notre théorème s'énonce alors comme il suit:

La classe des ensembles $\mathfrak{F}_\sigma^n$ est invariante par rapport à la sommation finie ou dénombrable;

ou bien, en termes de M. Hausdorff,

la classe $\mathfrak{F}_\sigma^n$ est un σ-système [1]).

Elle est, d'ailleurs, un σ-Ring [2]) car le produit d'un nombre *fini* d'ensembles de cette classe, appartient évidemment encore à la même classe.

6. Nous revenons maintenant au *théorème inverse* mentionné au § 4. Soit Φ un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n:

$$(72) \qquad \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} F_k, \quad F_k \,\varepsilon\, \mathfrak{F} \text{ [3])}.$$

m étant un entier positif arbitraire, tout point x de Φ peut être $\frac{1}{m}$-séparé par un ensemble B_x^m de dimension $< n$ fermé par rapport à Φ; c. à d. qu'il existe une décomposition de Φ

$$\Phi = A_x^m + B_x^m + D_x^m$$

en trois ensembles sans points communs deux à deux, telle que

$$(73) \qquad A_x^m \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel. } \Phi), \quad D_x^m \,\varepsilon\, \mathfrak{G} \,(\text{rel. } \Phi),$$

$$(74) \qquad B_x^m \,\varepsilon\, \mathfrak{F} \,(\text{rel. } \Phi), \quad \dim B_x^m \leqslant n-1,$$

$$(75) \qquad A_x^m \supset x, \quad A_x^m + B_x^m \subset S\left(x, \frac{1}{m}\right) \text{ [4])}.$$

Remarquons qu'on a, d'après (74),

$$B_x^m = \overline{B_x^m} \times \Phi \text{ [5])};$$

[1]) Hausdorff, p. 23.

[2]) Ibid., p. 14 et 23.

[3]) Le choix de la décomposition (72) est arbitraire; par contre, les décompositions de tous les autres $\mathfrak{F}_\sigma$ que nous rencontrerons dans ce §, seront déduites *univoquement* de cette décomposition (72).

[4]) On obtient cette décomposition d'une manière univoque en se servant du procédé indiqué au § 8 (construction des ensembles A_ω, B_ω et D_ω).

[5]) Hausdorff, p. 240, (2).

donc

(76) $$B_x^m = \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{B_x^m} \times F_k),$$

(74*) $$B_x^m \,\varepsilon\, \mathfrak{F}_\sigma.$$

On a, d'autre part,

$$\Phi \subset \sum_{x \subset \Phi} A_x^m,$$

par suite

$$F_k \subset \sum_{x \subset \Phi} (A_x^m \times F_k). \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Or l'ensemble $A_x^m \times F_k$ est évidemment un domaine relatif (par rapport à F_k); il résulte donc du théorème de Borel-Lebesgue qu'il existe une suite finie de points

$$x(k, 1), \quad x(k, 2), \ldots, \quad x(k, j_k),$$

telle que

$$F_k \subset \sum_{i=1}^{j_k} (A_{x(k,i)}^m \times F_k).$$

A fortiori

$$F_k \subset \sum_{i=1}^{j_k} A_{x(k,i)}^m,$$

donc

(77) $$\Phi \subset \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j_k} A_{x(k,i)}^m.$$

La formule (77) est valable quel que soit l'entier positif m. Posons maintenant:

(78) $$\left\{ \begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{j_k} B_{x(k,i)}^m, \\ Q_1 &= \Phi - \Phi_1; \end{aligned} \right.$$

la décomposition

$$\Phi = \Phi_1 + Q_1, \quad \Phi_1 \times Q_1 = 0$$

ainsi obtenue possède les propriétés suivantes:

1) Φ_1 est un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension $\leqslant n-1$. Cela résulte du théorème II (§ 9) en vertu des relations (78), (74*), (74) [1];

2) Q_1 est un ensemble de dimension 0. Montrons, en effet, que tout point y de Q_1 peut être, quel que soit ε, ε-séparé par l'ensemble vide.

Soit m un entier supérieur à $\frac{2}{\varepsilon}$; le point y appartient, en vertu de $Q_1 \subset \Phi$ et de (77), à un certain $A^m_{x(k,l)}$:

(79) $$Q_1 \times A^m_{x(k,l)} \supset y.$$

Je dis que

$$Q_1 = (Q_1 \times A^m_{x(k,l)}) + (Q_1 \times B^m_{x(k,l)}) + (Q_1 \times D^m_{x(k,l)})$$

est l'ε-séparation exigée. En effet, le premier terme contient le point y; le second est *vide* en vertu de (78); il résulte de (73) que le premier et le troisième satisfont à la condition de Lennes-Hausdorff; enfin on a, d'après (75)

$$Q_1 \times A^m_{x(k,l)} \subset S\left(x, \frac{1}{m}\right),$$

$$\delta(Q_1 \times A^m_{x(k,l)}) \leqslant \frac{2}{m} < \varepsilon,$$

donc, en vertu de (79),

$$Q_1 \times A^m_{x(k,l)} \subset S(y, \varepsilon).$$

Ainsi, dim $Q_1 = 0$. Remarquons encore que la dimension de Φ_1 ne peut être $< n-1$, car on a, d'après le théorème du § 1,

$$n = \dim \Phi \leqslant \dim \Phi_1 + \dim Q_1 + 1 = \dim \Phi_1 + 1.$$

On voit de même que Q_1 ne peut être vide.

Nous avons donc obtenu le résultat suivant:

Tout $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n peut être décomposé en une somme de deux ensembles dont l'un est de dimension 0, et l'autre, un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension $n-1$ [2].

[1]) Cette conclusion est indépendante de l'axiome de Zermelo, car les décompositions (76) des B^m_x ne dépendent que d'un choix arbitraire unique, à savoir celui de la décomposition (72). On remarquera, d'ailleurs, qu'on obtient sans peine une décomposition déterminée de Φ_1 en rapprochant (76) et (78).

[2]) On remarquera que le second ensemble (Φ_1) est un $\mathfrak{F}_\sigma$ (et non un $\mathfrak{F}$) même lorsque l'ensemble primitif (Φ) était fermé (cf. le § 4).

Nous pouvons appliquer ce même résultat à l'ensemble Φ_1 ainsi obtenu; il vient

$$\Phi_1 = \Phi_2 + Q_2; \quad \Phi_2 \times Q_2 = 0,$$
$$\Phi_2 \,\varepsilon\, \mathfrak{F}_\sigma, \quad \dim \Phi_2 = n-2,$$
$$\dim Q_2 = 0;$$

et ainsi de suite. Nous obtenons, en définitive, une décomposition de Φ

(80) $$\Phi = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n + \Phi_n$$

en $n+1$ ensembles de dimension 0 (sans points communs deux à deux); le dernier de ces ensembles est un $\mathfrak{F}_\sigma$ [1]). Par conséquent,

Théorème III. *Tout $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n est la somme de $n+1$ ensembles de dimension 0.*

C'est bien le théorème inverse que nous avions en vue.

Corollaire. Rapprochons les théorèmes I (§ 4) et III; il vient: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble fermé (ou un $\mathfrak{F}_\sigma$) soit de dimension n, consiste en ce qu'on puisse le décomposer en $n+1$ ensembles de dimension 0 et qu'on ne puisse pas le décomposer en n ensembles de cette sorte.*

Ce résultat nous permet (tout comme celui du Ch. V, § 7, corollaire) d'obtenir une définition *non-inductive* de la dimension des ensembles fermés (et des $\mathfrak{F}_\sigma$) [2]).

11. Relations avec les classes de Baire. Un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n peut être décomposé (nous venons de le voir) en $n+1$ ensembles de dimension 0; quelle place occupent ces ensembles composants [3]) dans la classification de Baire?

Dans la décomposition (80) obtenue ci-dessus, les ensembles composants sont des $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$: on le voit immédiatement d'après les deux formules (78) et les formules analogues

$$Q_i = \Phi_{i-1} - \Phi_i; \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

Φ_n est, d'ailleurs, un $\mathfrak{F}_\sigma$.

[1]) Cette décomposition dépend d'un choix arbitraire (celui de (72)); nous n'avons besoin d'aucun choix arbitraire lorsque Φ est fermé.

[2]) Cf. à ce sujet p. 301, note [1]). Une autre définition non-inductive de la dimension a été donnée par M. Brouwer dans son mémoire cité du *Journ. de Crelle* (t. 142, p. 148).

[3]) On ne confondra pas, bien entendu, cette expression avec la notion des composants d'un ensemble.

Dans le cas particulier d'un ensemble Φ *fermé*, Q_1 sera un $\mathfrak{G}_\delta$ [1]); les autres Q_i sont d'ailleurs encore des $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$ (car Φ_1 n'est pas nécessairement fermé [2])).

Bornons-nous à ce cas particulier. Un ensemble fermé de dimension n peut donc être décomposé en $n+1$ ensembles de dimension 0 parmi lesquels il y a un $\mathfrak{F}_\sigma$, un $\mathfrak{G}_\delta$ et $n-1$ $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$.

Je dis que *cette décomposition est la plus avantageuse au point de vue des classes de Baire.* En effet, soit

$$\Phi = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n+1}$$

une décomposition de l'ensemble fermé Φ de dimension n en $n+1$ ensembles de dimension 0. En ce cas,

1) Aucun des ensembles T_i ne peut être à la fois un $\mathfrak{F}_\sigma$ et un $\mathfrak{G}_\delta$. Si l'on avait p. ex.

$$T_1 \varepsilon \mathfrak{F}_\sigma, \quad T_1 \varepsilon \mathfrak{G}_\delta,$$

l'ensemble

$$L_1 = T_1 + T_3 + \ldots + T_n$$

serait, lui aussi, un $\mathfrak{F}_\sigma$ [3]); or on aurait, d'après le théorème I,

$$\dim L_1 \leqslant n-1;$$

donc, d'après le théorème II,

$$\dim \Phi = \dim (T_1 \quad L_1) \leqslant n-1,$$

contrairement à l'hypothèse $\dim \Phi = n$ [4]).

2) Il y a parmi les T_i tout au plus un $\mathfrak{F}_\sigma$.

Supposons qu'on ait, par contre

$$T_1 \varepsilon \mathfrak{F}_\sigma, \quad T_2 \varepsilon \mathfrak{F}_\sigma.$$

Dans ce cas on aurait (Théor. II)

$$\dim (T_1 + T_2) = 0,$$

donc (Théor. I)

$$\dim \Phi = \dim [(T_1 + T_2) + T_3 + \ldots + T_n] \leqslant n-1,$$

ce qui est faux.

3) Il ne peut exister plus d'un $\mathfrak{G}_\delta$ parmi les T_i.

Si l'on avait p. ex.

$$T_1 \varepsilon \mathfrak{G}_\delta, \quad T_2 \varepsilon \mathfrak{G}_\delta,$$

[1]) C'est un $\mathfrak{G}_\delta$ par rapport à Φ, donc un $\mathfrak{G}_\delta$ absolu: voir le § 15 du Ch. IV.

[2]) On pourrait aisément démontrer qu'il ne peut être fermé.

[3]) Le complémentaire (par rapport à un ensemble fermé) d'un $\mathfrak{F}_\sigma$ est un $\mathfrak{G}_\delta$ et *vice versa*: voir l'avant-dernière note.

[4]) On voit donc, en particulier, qu'un T_i ne peut être un domaine ou un ensemble fermé.

les ensembles

$$L_1 = T_2 + T_3 + \ldots + T_n$$

et

$$L_2 = T_1 + T_3 + \ldots + T_n$$

seraient des $\mathfrak{F}_\sigma$; or comme on a (Théor. I),

$$\dim L_1 \leqslant n-1; \quad \dim L_2 \leqslant n-1,$$

on aurait aussi (Théor. II)

$$\dim \Phi = \dim (L_1 + L_2) \leqslant n-1,$$

ce qui n'a pas lieu.

Pour voir que notre assertion (en italiques) est exacte, il ne reste donc qu'à observer que les $\mathfrak{F}_{\sigma\varrho}$ sont les plus simples parmi les ensembles qui ne sont ni des $\mathfrak{F}_\sigma$, ni des $\mathfrak{G}_\delta$.

12. Remarques diverses.

1) Nous avons mentionné au § 1 la proposition suivante: *tout ensemble fermé Φ de dimension $l+m+1$ peut être décomposé en deux ensembles, L et M, tels que*

$$\dim L = l, \quad \dim M = m.$$

Elle se démontre comme il suit: Φ peut être décomposé (Théor. III) en $l+m+2$ ensembles de dimension 0:

$$\Phi = T_1 + \ldots + T_{l+m+2},$$

$$\dim T_i = 0;$$

posons

$$L = T_1 + \ldots + T_{l+1}, \quad M = T_{l+2} + \ldots + T_{l+m+2}.$$

On a, d'après le théorème I et la formule (1) du § 1,

$$\dim L \leqslant l, \quad \dim M \leqslant m,$$

$$l + m + 1 = \dim \Phi = \dim (L+M) \leqslant \dim L + \dim M + 1;$$

donc

$$\dim L = l, \quad \dim M = m, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2) *Le plan Euclidien E_2 étant un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension 2, il peut être décomposé en trois ensembles de dimension 0, mais il ne peut être décomposé en deux ensembles de cette espèce.* Cet énoncé est à rapprocher du théorème suivant de M. Sierpiński [1]):

E_2 peut être décomposé en trois ensembles homéomorphes à des ensembles linéaires, mais il ne peut être décomposé en deux ensembles de cette sorte.

Les deux énoncés ne sont pas équivalents: en effet, tout ensemble de dimension 0 est homéomorphe à un ensemble linéaire, mais la réciproque n'a lieu que pour

[1]) »Sur quelques propriétés topologiques du plan«, *Fund. Math.* IV, p. 1.

les ensembles punctiformes. Ainsi, la seconde partie du théorème de M. Sierpiński ne résulte pas de nos raisonnements. Il se pose d'ailleurs le problème de généraliser le théorème de M. Sierpiński au cas d'un ensemble fermé (ou d'un $\mathfrak{F}_\sigma$) de dimension n, c. à d. de montrer qu'un tel ensemble ne peut être décomposé en une somme de n ensembles homéomorphes à des ensembles linéaires (en supposant, bien entendu, que $n > 1$). C'est ce que nous allons faire.

Un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n contenant toujours un ensemble fermé de dimension n (§ 8, corollaire), et un $\mathfrak{F}$ de dimension n contenant un ensemble fermé dimensionnellement homogène de même dimension [1]), il suffit d'envisager les ensembles de cette dernières classe. Soit F un tel ensemble:

$$\dim F = n > 1, \quad F = \mathfrak{N}_n(F);$$

et supposons qu'on le puisse décomposer en n ensembles $L_1, L_2, \dots, L_n$ homéomorphes à des ensembles linéaires $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$:

$$(81) \qquad F = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad L_i \sim \Lambda_i, \quad \Lambda_i \subset E_1.$$

Désignons par Γ_i l'ensemble des points intérieurs (par rapport à E_1) de l'ensemble linéaire Λ_i; c'est un domaine linéaire [2]). L'ensemble linéaire

$$\Pi_i = \Lambda_i - \Gamma_i$$

ne contient aucun intervalle; il est donc de dimension 0. Soient ensuite G_i et P_i les ensembles correspondant à Γ_i et Π_i d'après $L_i \sim \Lambda_i$; on a encore

$$\dim G_i = 1, \quad \dim P_i = 0,$$

puis

$$(82) \qquad L_i = G_i + P_i, \quad F = \sum_{i=1}^{n} G_i + \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Or Γ_i étant évidemment un $\mathfrak{F}_\varrho$, il en est de même pour G_i [3]); il en résulte que chacun des ensembles

$$M_i = \overline{G}_i - G_i$$

est un ensemble fermé [4]). On a

$$F - M_i \supset \overline{G}_i - M_i = G_i,$$

$$\overline{F - M_i} \supset \overline{G}_i \supset M_i;$$

[1]) Ch. IV, § 10.

[2]) Hausdorff, p. 215 („*Iteration*"). Une domaine linéaire est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles.

[3]) La classe des $\mathfrak{F}_\varrho$ est un invariant absolu: voir Kuratowski et Sierpiński, *Tôhoku Math. Journ.*, 1921.

[4]) G_i étant la différence de deux ensembles fermés, Φ_1 et Φ_2, c'est donc un $\mathfrak{G}$ (rel. Φ_1); M_i est, par conséquent, la frontière relative de G_i (par rapport à Φ_1); par suite $M_i \varepsilon \mathfrak{F}$.

donc

$$\overline{F - M_i} \supset (F - M_i) + M_i = F,$$

$$\overline{F - M_i} = F;$$

$F - M_i$ est dense sur F. Il en est de même pour $F - G_i$, car l'ensemble G_i de dimension 1 ne peut contenir aucun domaine relatif de F: il résulte, en effet, de la définition des ensembles dimensionnellement homogènes que tout domaine relatif de F est de dimension $n > 1$.

On voit aisément que chacun des ensembles $F - M_i$ et $F - G_i$ est un $\mathfrak{G}_\delta$: M_i est, en effet, fermé, et G_i est un $\mathfrak{F}_\varrho$. Comme tous ces ensembles sont denses sur F, il en résulte que leur produit

$$\prod_{i=1}^{n} [(F - M_i) \times (F - G_i)]$$

est encore dense sur F [1]). Or ce produit est égal à

$$F - \sum_{i=1}^{n} (M_i + G_i) = F - \sum_{i=1}^{n} \overline{G}_i;$$

nous voyons ainsi que l'ensemble fermé $\sum_{i=1}^{n} \overline{G}_i$ est non dense sur F [2]): il en est a fortiori de même pour $\sum_{i=1}^{n} G_i$. Soit donc H un domaine relatif de F n'ayant aucun point commun avec $\sum_{i=1}^{n} G_i$; c'est un ensemble de dimension n, il ne peut donc être décomposé en n ensembles de dimension 0. On a cependant en vertu de (82),

$$H = H \times F = H \times \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} (H \times P_i),$$

$$\dim (H \times P_i) \leqslant \dim P_i = 0.$$

Cette contradiction nous montre que la décomposition (81) est impossible; un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension n ne peut donc être décomposé en n ensembles homéomorphes à des ensembles linéaires, c. q. f. d.

3) Nous avons établi le *théorème inverse* (§ 4) pour tous les $\mathfrak{F}_\sigma$: c'est le théorème III. On obtient aisément un autre cas particulier, celui de *tous* les ensembles plans: nous allons montrer que tout ensemble plan de dimension n ($n = 0, 1, 2$) peut être décomposé en $n+1$ ensembles de dimension 0.

Le cas $n = 0$ est immédiat. Quant aux deux autres cas, ils peuvent être généralisés comme il suit:

[1]) Hausdorff, p. 326, VI.

[2]) Un $\mathfrak{F}$ est non dense lorsque son complémentaire est dense: Hausdorff, p. 252.

α) Un ensemble C_m de dimension m situé dans E_m, peut être décomposé en $m+1$ ensembles de dimension 0 [1]).

Soit, en effet,

$$E_m = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{m+1}$$

une décomposition de E_m en $m+1$ ensembles de dimension 0 (une telle décomposition existe, E_m étant un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension m); dans ce cas

$$C_m = (C_m \times Q_1) + (C_m \times Q_2) + \ldots + (C_m \times Q_{m+1})$$

est la décomposition requise de C_m.

β) Un ensemble C_{m-1} de dimension $m-1$ situé dans E_m, peut être décomposé en m ensembles de dimension 0 [2]).

C_{m-1} ne peut, en effet, contenir de points intérieurs (Ch. V, § 13); il est donc, d'après un théorème de M. Sierpiński [3]), homéomorphe à un ensemble L non dense dans E_m. $\bar{L}$ est encore non dense; c'est donc un ensemble fermé ou bien (lorsqu'il n'est pas borné) un $\mathfrak{F}_\sigma$ de dimension $m-1$. Il existe, par conséquent, une décomposition de $\bar{L}$ en m ensembles de dimension 0; on en déduit immédiatement une décomposition analogue de L et ensuite de C_{m-1}.

13. Il est très probable, d'après ce que nous avons vu, que le *théorème inverse* est général, c. à d. que tout ensemble de dimension n peut être décomposé en $n+1$ ensembles de dimension 0. Cette question est, d'ailleurs, intimement liée au problème suivant:

Problème μ. *Soit C un ensemble quelconque, et*

$$F_1, F_2, \ldots$$

une suite (finie ou dénombrable) d'ensembles de dimension $\leqslant n$ fermés par rapport à C; l'ensemble-somme $\sum F_i$ est-il nécessairement de dimension $\leqslant n$?

En d'autres termes, le lemme IV (§ 8) peut-il être appliqué aux ensembles *relativement* fermés (par rapport à un même ensemble C)?

Si, en effet, la réponse était affirmative, on en déduirait sans peine le théorème inverse: on n'aurait qu'à reprendre les raisonnements des §§ 9—10 [4]).

Or, bien que cette réponse affirmative me semble assez probable, je ne crois pas qu'on la puisse obtenir par les méthodes du présent chapitre.

[1]) On obtient le cas $n=2$ lorsque $m=2$.

[2]) On obtient le cas $n=1$ lorsque $m=2$.

[3]) „Sur une propriété des ensembles frontières", *Fund. Math.* III, p. 7.

[4]) Le théorème de Borel-Lebesgue étant inapplicable dans le cas actuel, on se servirait de la proposition suivante (Hausdorff, p. 272, V): de tout système de domaines on peut extraire une suite finie ou dénombrable (de domaines) ayant même somme que le système entier.

Une autre question connexe est celle de savoir si l'équivalence des deux définitions de la dimension: celle de M. Brouwer et celle qui a été adoptée dans le présent mémoire (voir le § 5), subsiste dans le cas général des ensembles quelconques.

14. Nous terminons ce chapitre par quelques remarques relatives aux ensembles de dimension infinie. Un tel ensemble ne peut être, bien entendu, décomposé en un nombre fini d'ensembles de dimension 0. Or il se pose le problème suivant:

Problème ν. *Un ensemble de dimension infinie peut-il toujours être décomposé en une somme dénombrable d'ensembles de dimension 0?*

Une telle décomposition est évidemment possible lorsque l'ensemble envisagé est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de dimension finie (tels sont p. ex. les ensembles F et Φ du § 21 du chapitre précédent).

Il paraît cependant que la réponse au problème ν est négative même dans le cas des ensembles fermés [1]). Ce problème est, d'ailleurs, étroitement lié à une question que nous avons signalée au § 2 du Ch. I, celle de l'existence d'ensembles ne rentrant pas dans une classification transfinie (voir Ch. I, § 2, remarque).

[1]) Ainsi, l'espace E_ω (Ch. V, § 20) ne peut, à ce qu'il semble, être décomposé de la sorte.