Sur les correspondances multivoques des ensembles.

par

Dénes König (Budapest).

§ 1. Le problème.

Le but principal de cette Note est la démonstration du théorème suivant:

A) S'il existe une transformation bi-ν-ivoque entre deux ensembles quelconques M et N, il existe aussi une transformation biunivoque telle qu'elle ne fait correspondre deux éléments que si ces éléments se correspondent par la transformation bi-ν-ivoque donnée. (ν est un nombre naturel quelconque).

Quant à la définition du terme „transformation bi-ν-ivoque", nous disons qu'il y a une telle transformation entre les ensembles M et N, si à chaque élément a de M correspondent ν éléments de N et inversement. Mais ces ν éléments ne sont pas forcément des éléments différents: nous associons à la correspondance d'un élément a de M à l'élément b de N une m u l t i p l i c i t é (finie) et en disant qu'à l'élément a de M correspondent ν éléments de N, nous entendrons par cela que les éléments de N qui correspondent à l'élément a de M étant

$$b_1, b_2, \ldots, b_\mu, \qquad (\mu \leqq \nu)$$

et ces correspondances ayant respectivement les multiplicités

$$s_1, s_2, \ldots, s_\mu,$$

on a pour chaque élément a de M la relation:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\mu = \nu.$$

Nous exigeons en outre que, si la multiplicité de la correspondance d'un élément a de N à l'élément b de N est s, alors la multiplicité de la correspondance de b à a soit également s.

Nous allons d'abord formuler un théorème plus général B) et nous démontrerons qu'un cas particulier de ce théorème B) est équivalent au théorème A).

Pour formuler ce théorème B), introduisons quelques notations.

Soient M et N deux ensembles quelconques sans élément commun et $P = MN$ l'ensemble de couples non ordonnés (a, b) tels que des deux éléments a et b un appartienne à M et l'autre à N. On posera $(a, b) = (b, a)$. Soit G un ensemble (d'éléments quelconques) dont chaque élément correspond à un *seul* élément de P. Si l'élément g de G correspond à l'élément (a, b) de P, nous dirons aussi qu'il correspond aux éléments a et b de $M + N$. Nous supposons que le nombre des éléments de G qui correspondent à un élément a quelconque mais fixe de $M + N$, est fini. Alors le nombre des éléments de G correspondant à un élément quelconque (a, b) de P sera également fini pour chaque élément de P. Nous désignerons les éléments de G correspondant à l'élément (a, b) de P, s'il en existe, par

$$(a, b)_1, \ (a, b)_2, \ldots, \ (a, b)_n.$$

Dans la suite nous nous occuperons des ensembles G définis de la façon que nous venons de décrire. Quand nous parlerons d'un sous-ensemble de G, nous supposerons toujours pour ses éléments la même correspondance aux éléments de $M + N$ ou de P que celle qui était donnée pour cet élément en le considérant comme élément de G.

Notre résultat le plus général peut se formuler maintenant de la façon suivante:

B) Si, pour un nombre naturel ν, il y a au plus ν éléments de G correspondant au même élément de $M + N$, alors on peut décomposer[1]) *G en une somme de ν parties*

$$G = G_1 + G_2 + \ldots G_\nu \tag{1}$$

[1]) Nous employons le mot „décomposition" toujours dans le sens que les parties sont, deux à deux, sans élément commun. C'est seulement dans ce cas que nous écrirons des égalités du type (1) et que nous parlerons de sommes (Σ) d'ensembles.

(certaines de ces parties pouvant être vides) de manière que, dans chacun des G_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ il y ait un élément au plus correspondant au même élément de $M + N$.

Avant d'entrer dans la démonstration de ce théorème, considérons un cas particulier, celui où à chaque élément de $M + N$ correspondent *exactement* ν éléments de G. Dans ce cas, le théorème B) exprime qu'à chaque élément de $M + N$ correspond un élément et un seul dans G_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Cette conséquence particulière de B) peut donc être formulée de la façon suivante:

C) *Si à chaque élément de $M + N$ correspondent exactement ν éléments de G, alors G possède un sous-ensemble G_1 tel qu'à chaque élément de $M + N$ correspond un élément et un seul de G_1.*

Le théorème A) est une conséquence immédiate de ce théorème. Soit, en effet, donnée, entre M et N, une correspondance bi-ν-ivoque. Nous définissons l'ensemble G de la façon suivante. Si la multiplicité de la correspondance entre un élément a de M et un élément b de N est $s\ (\geqq 1)$, alors nous introduisons s éléments $(a, b)_1$, $(a, b)_2, \ldots (a, b)_s$ et l'ensemble G soit, par définition, l'ensemble de tous ces éléments $(a, b)_\alpha$ où α prend les valeurs $1, 2, \ldots, s$, le nombre s dépendant des éléments a et b. Si les éléments a et b ne se correspondent pas par la correspondance bi-ν-voque donnée, alors aucun élément de la forme $(a, b)_\alpha$ ne sera introduit. En faisant correspondre un élément $(a, b)_\alpha$ de G à l'élément (a, b) de P, donc à l'élément a de M et à l'élément b de N, on voit que les conditions du théorème C) sont vérifiées. En appliquant ce théorème, on arrive au théorème A).

Ce raisonnement montre aussi que, inversement, le théorème A) implique le théorème C); ainsi l'équivalence des théorèmes A) et C) est établie.

§ 2. Le cas des ensembles finis.

Pour démontrer le théorème B), d'abord pour les ensembles finis, nous aurons à nous servir du théorème suivant:

D) *Soit $(a, b)_\alpha$ un élément quelconque de G, les autres éléments de G formant l'ensemble G' et supposons que le nombre des éléments de G correspondant au même élément de $M + N$ est, au plus, égal à ν. Si on peut décomposer G' en une somme $G' = \sum_{i=1}^{\nu} G'_i$ (certains des G'_i pouvant être vides) de manière que, dans chacun des*

G'_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ il y ait un élément au plus correspondant au même élément de $M + N$, alors une telle décomposition existe également pour G, avec le même nombre ν.

Dans la démonstration de ce théorème, il faut envisager deux possibilités.

α) Un des ν termes, G'_k, jouit de la propriété suivante: aucun élément de G'_k ne correspond à a, ni à b. En adjoignant dans ce cas l'élément $(a, b)_\alpha$ à G'_k, c'est-à-dire en posant

$$G_k = G'_k + \{(a, b)_\alpha\},$$
$$G_i = G'_i \quad (i \neq k),$$

on obtient une décomposition de G:

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu$$

qui est de l'espèce annoncée.

β) Supposons maintenant qu'aucune des parties G'_i ne jouisse de cette propriété. Puisque l'élément $(a, b)_\alpha$ de G n'est pas contenu dans G', il y a au plus $\nu - 1$ éléments de G' correspondant à a. Il existe donc une partie G'_k qui ne contient pas d'élément correspondant à a et de même une partie G'_l qui ne contient pas d'élément correspondant à b. D'autre part, G'_l contient certainement un élément correspondant à a, car, dans le cas contraire, nous serions dans le cas α). On a donc $k \neq l$.

De la décomposition supposée $G' = \sum\limits_{i=1}^{\nu} G'_i$, nous déduirons une autre $G' = \sum\limits_{i=1}^{\nu} G''_i$ qui nous ramènera au cas α).

Nous pouvons supposer que a est un élément de M et b de N. Nous savons qu'il existe un élément (a, b_1) de G'_l correspondant à a. Soit, s'il en existe, (b_1, a_1) l'élément [1]) de G'_k correspondant à b_1; (a_1, b_2) l'élément de G'_l, s'il en existe, correspondant à a_1; (b_2, a_2) l'élément de G'_k, s'il en existe, correspondent à b_2 et ainsi de suite. La suite S

$$(S) \qquad (a, b_1),\ (b_1, a_1),\ (a_1, b_2),\ (b_2, a_2), \ldots$$

est bien déterminée par ce qui précède; elle peut s'arrêter à un

[1]) Il faudrait écrire, à la rigueur, $(a, b_1)_\alpha$, $(b_1, a_1)_\beta, \ldots$ au lieu de (a, b_1), $(b_1, a_1), \ldots$ Mais l'omission des indices n'aura aucun inconvénient, car nous n'aurons pas à parler de *deux* éléments de G correspondant au même élément (a_ρ, b_σ) de P.

certain élément et alors elle est finie. Les a_i appartiennent à M, les b_i à N. Les éléments de cette suite appartiennent alternativement à G'_l et à G'_k. Donc, en posant

$$S_l = \{(a, b_1), (a_1, b_2), \ldots\}, \quad S_k = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\},$$

où on a

$$S = S_l + S_k,$$

S_l et S_k sont des sous-ensembles de G'_l et G'_k respectivement. Soient T_l le sous-ensemble complémentaire de S_l par rapport à G'_l et T_k le sous-ensemble complémentaire de S_k par rapport à G'_k; c'est-à-dire

$$G'_l = S_l + T_l, \quad G'_k = S_k + T_k$$

et posons encore

$$G''_l = S_k + T_l, \quad G''_k = S_l + T_k$$

de façon à avoir

$$G'_l + G'_k = G''_l + G''_k.$$

En remplaçant dans la décomposition supposée

(I) $$G' = G'_1 + \ldots + G'_k + \ldots + G'_l + \ldots + G'_\nu$$

le terme G'_k par G''_k et G'_l par G''_l, on arrive à une nouvelle décomposition de G':

(II) $$G' = G'_1 + \ldots + G''_k + \ldots + G''_l + \ldots + G'_\nu.$$

Cette décomposition remplit également les conditions du théorème D). Pour le prouver, il suffit évidemment de démontrer le fait suivant:

a) *Il n'y a, ni dans G''_k, ni dans G''_l, deux éléments correspondant au même élément x de $M + N$.*

Nous avons à distinguer six cas:

1⁰. x n'est pas un élément de la suite

(1) $$a, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots$$

Si, dans ce cas, il y avait deux éléments g_1 et g_2 de G''_k correspondant à x, alors g_1 et g_2 n'étant pas des éléments de S_l, tous les deux seraient contenus dans T_k, donc dans G'_k, contrairement à l'hypothèse que nous avons faite sur la décomposition (I). Le raisonnement reste le même si on remplace G''_k par G''_l.

2⁰. $x = a$. D'après la définition de G'_k et de G'_l, il y a un élément dans G'_l (c'est le premier élément (a, b_1) de S) correspondant à $x = a$ et aucun dans G'_k. La somme $G'_k + G'_l = G''_k + G''_l$ contient donc exactement un de ces éléments; mais alors ni G_k'' ni G_l'' ne peuvent en contenir deux.

3°. $x = a_\varrho$, a_ϱ n'étant pas le dernier élément de (1). Des deux éléments

$$(b_\varrho, a_\varrho) \text{ et } (a_\varrho, b_{\varrho+1})$$

de S correspondant à a_ϱ, le premier est contenu dans S_k, donc dans G_l'', le second dans S_l, donc dans G_k''. Aucun autre élément de G_l'', ni de G_k'' ne peut correspondre à a_ϱ, car dans le càs contraire, la somme $G_k'' + G_l'' = G_k' + G_l'$ contiendrait trois éléments correspondant à a_ϱ, contrairement à l'hypothèse que G_k' et G_l' en contiennent un seul au plus.

4°. $x = b_\varrho$, b_ϱ n'étant pas le dernier élément de (1). On voit de la même façon que les éléments

$$(a_{\varrho-1}, b_\varrho) \text{ et } (b_\varrho, a_\varrho)$$

sont les seuls éléments de $G_k' + G_l' = G_k'' + G_l''$ correspondant à b_ϱ; le premier appartenant a G_k'', le second à G_l''. (Dans le cas $\varrho = 1$, on doit poser $a_0 = a$).

5°. $x = a_d$, a_d étant le dernier élément de (1). Dans ce cas, S a un dernier élément (b_d, a_d) et aucun élément de G_l' ne correspond à a_d, car, sans cela, la suite S pourrait être prolongée au-delà de (b_d, a_d). Il s'ensuit que $G_k' + G_l' = G_k'' + G_l''$ ne peut contenir plus d'un élément correspondant à a_d. Donc ni G_k'' ni G_l'' ne peuvent en contenir deux.

6°. $x = b_d$, b_d étant le dernier élément de (1). Le raisonnement de 5°. s'applique mot à mot.

Ainsi le théorème *a*) est démontré et nous avons prouvé de cette façon que la décomposition (II) remplit également les conditions du théorème *D*).

Remarquons encore que G_l'' *ne contient pas d'élément correspondant à a*. En effet, nous venons de voir (dans le cas 2° ci-dessus) que $G_k'' + G_l''$ ne contient qu'*un* de ces éléments, notamment (a, b_1), qui appartenant à S_l, est un élément de G_k'' et non pas de G_l''.

Montrons maintenant que G_l'' *ne contient pas d'élément correspondant à b*. Les seuls éléments de N auxquels correspond un élément de S, sont $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Mais b ne peut pas figurer dans cette suite, car à un élément quelconque b_i de cette suite correspond un élément (a_{i-1}, b_i) appartenant à S_l, donc à G_l'. (Dans le cas $i = 1$

on doit poser $a_0 = a$). Or, nous savons qu'aucun élément de G_l' ne correspond à b. Il n'y a donc dans S et, *à fortiori*, dans S_k aucun élément correspondant à b. De même T_l, étant un sous-ensemble de G_l', ne contient pas non plus un tel élément. Comme on a $G_l'' = S_k + T_l$, la même chose est vraie pour G_l'', c. q. f. d.

Ainsi nous avons démontré qu'*aucun élément de G_l'' ne correspond à a, ni à b*. La décomposition (II) de G' rentre donc dans le cas α) étudié en premier lieu et le théorème D) est démontré.

En se servant du théorème D), on peut facilement prouver le théorème B) pour le cas où l'ensemble G est *fini*. Si le nombre γ des éléments de G est $< \nu$, il suffit, pour arriver à une décomposition cherchée, de ranger tous les éléments de G dans des parties G_i différentes de façon que chaque G_i contienne un seul élément au plus. On peût donc se servir de la méthode de l'induction complète et supposer le théorème établi pour les ensembles G à $\gamma - 1$ éléments. Soit G' l'ensemble qu'on obtient en supprimant un élément quelconque de G. Si S possède la propriété que le nombre de ses éléments correspondant au même élément de $M + N$ est, au plus égal a ν, alors l'ensemble G' possède également cette propriété. Puisque G' ne contient que $\gamma - 1$ éléments, le théorème B) est, par hypothèse, vrai pour G'. Mais alors, d'après le théorème D), il est également vrai pour G:

Le théorème B) est dcmontré pour le cas où l'ensemble G est fini.

§ 3. Le cas des ensembles dénombrables.

Pour démontrer le théorème B) dans le cas où l'ensemble G est dénombrable, nous aurons à nous servir du lemme suivant, susceptible de rendre service dans d'autres parties aussi de la théorie des ensembles.

E) Soit $E_1, E_2, E_3, \ldots$ une suite dénombrable d'ensembles finis, non vides, et soit R une relation telle qu'à chaque élément x_{n+1} de chaque ensemble E_{n+1} corresponde au moins un élément x_n de E_n, lié à x_{n+1} par la relation R, c'est ce que nous écrivons sous la forme $x_n R x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Alors on peut choisir dans chaque ensemble E_n un élément a_n de sorte que, pour la suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$, on ait $a_n R a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Dans la démonstration [1]), nous appellerons une suite finie $(a_1, a_2, \ldots,$

[1]) Cette démonstration est fondée sur une idée que je dois à M. St. Valkó.

a_n) à n éléments, dont le premier appartient à E_1, le deuxième à E_2, etc., une „suite S ou S_n" si on a $a_i R a_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. Les m premiers éléments d'une S_n forment évidemment une S_m $(m < n)$ que nous appellerons un „segment" de S_n. Il y a une infinité de suites S, car à chaque élément figurant dans un des E_i correspond, par hypothèse, une suite S_i finissant par cet élément. Tout revient maintenant à démontrer le fait suivant:

b) Soit I un ensemble infini, dont les éléments sont des S et tel qu'une certaine suite S_n:

$$S_n^0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

est segment de chaque élément de I. Alors il existe une suite S_{n+1}, désignons-la par S_{n+1}^0, jouissant des deux propriétés:

1°. S_n^0 est un segment de S_{n+1}^0 et 2°. S_{n+1}^0 est segment d'une infinité de suites S.

Il n'y a évidemment qu'un nombre fini de S_i pour lesquelles $i \leqq n$. I possède donc un sous-ensemble infini I' tel que, S_k étant un élément quelconque de I', on a $k > n$. Cela veut dire que chaque élément de I' possède un segment S_{n+1}. Chacune de ces S_{n+1} doit avoir la forme

$$S_{n+1} = (a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1})$$

x_{n+1} étant un élément de E_{n+1}, car S_n^0 est segment de chaque élément de I. E_{n+1} étant fini, ces S_{n+1} sont en nombre fini. Mais I' est infini, donc une au moins de ces S_{n+1}, mettons

$$S_{n+1}^0 = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$$

est — à elle seule — segment d'une infinité d'éléments de I', et $b)$ est démontré.

L'ensemble vide, 0, peut être regardé comme une S_0 qui est segment de toute S. Alors par la méthode que nous venons de décrire, on arrive de $S_0 = 0$ à une S_1^0, qui est également segment d'une infinité de S. En partant de cette S_1^0, notre méthode récurrente nous fournit une suite infinie:

$$S_1^0, S_2^0, \dots, S_n^0, \dots$$

telle que chaque élément de cette suite est segment de l'élément suivant. Ces S_i^0 ont donc la forme:

$$S_1^0 = (a_1), \quad S_2^0 = (a_1, a_2), \quad S_3^0 = (a_1, a_2, a_3), \dots$$

La suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ainsi définie, possède évidemment la propriété exigée: $a_n R a_{n+1}$ et le théorème E) est démontré [1]).

Revenons maintenant au théorème B) en supposant que G est dénombrable. Dans ce cas, ayant supprimé dans M et N les éléments auxquels ne correspond aucun élément de G (ce qui ne change rien à l'énoncé du théorème B), les ensembles M et N sont également dénombrables et on peut poser

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad N = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$

L'ensemble G contient des éléments de la forme $(a_\varrho, b_\sigma)_i$, où on a

$$\varrho = 1, 2, 3 \ldots, \quad \sigma = 1, 2, 3 \ldots; \quad i \leqq \nu.$$

Soit $G^{(k)}$ le sous-ensemble fini de G formé par tous les éléments $(a_\varrho, b_\sigma)_i$ de G tels que, un au moins des indices ϱ et σ est $\leqslant k$. On voit que le nombre des éléments de $G^{(k)}$ est au moins $2k$ et au plus $2\nu k$. L'ensemble $G^{(k)}$ peut être identique à $G^{(k+1)}$, même à $G^{(k+2)}, G^{(k+3)}, \ldots, G^{(\nu k)}$, mais non à $G^{(\nu k+1)}$, $G^{(\nu k+2)}$, etc. le nombre des éléments de ces derniers ensembles étant au moins $2\nu k + 2$. L'ensemble des $G^{(k)}$ est donc infini.

Comme le théorème B) est démontré (§ 2) pour les ensembles G finis, il existe pour chaque k une décomposition de $G^{(k)}$:

$$G^{(k)} = \sum_{i=1}^{\nu} G_i^{(k)}$$

telle que dans chacun des ensembles $G_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ il y a au plus un élément correspondant au même élément de $M + N$. Une telle décomposition (de $G^{(k)}$) sera appelée une décomposition $\Delta^{(k)}$. Pour un k quelconque, nous parlerons de décomposition Δ. Nous dirons que deux décompositions Δ:

$$G^{(k)} = \sum_{i=1}^{\nu} G_i^{(k)}, \qquad G^{(l)} = \sum_{i=1}^{\nu} G_i^{(l)}$$

[1]) Au point de vue des principes, il peut être important de ne pas se contenter de l'*existence* d'une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfaisant au théorème E), mais de définir cette suite d'une façon univoque. Cela revient, pour le théorème b), à définir — $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant donnés — le dernier élément a_{n+1} de S^0_{n+1} d'une façon univoque. Et cela est possible si pour *chacun* des ensembles E_i un certain ordre des éléments est donné: il suffit de choisir le premier des éléments de E_{n+1} satisfaisant aux conditions.

a) sont identiques si on a

$$G^{(k)} = G^{(l)} \text{ et } G_i^{(k)} = G_i^{(l)}$$

pour $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ et *b*) nous appellerons la première un „segment" de la seconde si, pour tous les i de 1 à ν, $G_i^{(k)}$ est un sous-ensemble de $G_i^{(l)}$. Étant donné une décomposition $\Delta^{(\alpha+1)}$:

$$G^{(\alpha+1)} = \sum_{i=1}^{\nu} G_i^{(\alpha+1)},$$

désignons par $G_i^{(\alpha)}$ l'ensemble des éléments communs à $G_i^{(\alpha+1)}$ et à $G^{(\alpha)}$. Le décomposition $\Delta^{(\alpha)}$:

$$G^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{\nu} G_i^{(\alpha)}$$

est évidemment un segment de la décomposition $\Delta^{(\alpha+1)}$ ci-dessus. Ainsi chaque $\Delta^{(\alpha+1)}$ a un segment entre les $\Delta^{(\alpha)}$ pour $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$

Soit E_i l'ensemble des décompositions $\Delta^{(i)}$. Les modes de décomposition d'un ensemble fini $G^{(i)}$ en ν parties étant en nombre fini, les ensembles E_i sont finis et, comme nous avons vu, non vides pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ Δ_1 et Δ_2 étant deux décompositions Δ, exprimons, s'il y a lieu, par le symbole

$$\Delta_1 \, R \, \Delta_2$$

que Δ_1 est un segment de Δ_2.

En adoptant la définition des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ ainsi que celle de la relation R, les conditions du lemme E) sont remplies. En appliquant ce lemme, on arrive au résultat suivant:

Il existe une [1]) suite infinie

$$\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, \ldots, \Delta_0^{(i)}, \ldots$$

telle que, $\Delta_0^{(i)}$ étant une décomposition $\Delta^{(i)}$, $\Delta_0^{(i)}$ est segment de $\Delta_0^{(i+1)}$ pour $i = 1, 2, 3 \ldots$ Mais d'après la définition du „segment", le segment d'un segment est également un segment, donc $\Delta_0^{(i)}$ est un segment de $\Delta_0^{(i+1)}, \Delta_0^{(i+2)}, \ldots$

[1]) Nous avons vu dans la note [1]) de la page 122 qu'une telle suite peut être définie sans ambiguïté s'il est possible de fixer un ordre pour chacun des E_i. C'est ici le cas; les ensembles M et N étant supposés ordonnés, il serait facile de donner une loi assignant, d'un seul coup, aux éléments de *chaque* ensemble E_i un ordre déterminé.

Soit $\Delta_0^{(i)}$ (terme général de cette suite) la décomposition suivante:

$$G^{(i)} = G_1^{(i)} + G_2^{(i)} + \ldots + G_\nu^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

et soit G_α l'ensemble des éléments contenus dans un, au moins, des ensembles $G_\alpha^{(1)}, G_\alpha^{(2)}, G_\alpha^{(3)}, \ldots$ Un élément quelconque g de G étant contenu dans un $G^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, il est également contenu dans un $G_k^{(i)}$, *l'indice k étant*, d'après la définition du „segment" d'une décomposition, *indépendant de i* et ne dépendant que de g. Donc G_k est le seul d'entre les ensembles G_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$ qui contient g. On est donc amené à une décomposition

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu$$

de G. Je dis que c'est la décomposition cherchée. Supposons en effet qu'une certaine partie G_α de cette décomposition contienne deux éléments x et y correspondant au même élément de $M + N$, x étant élément de $G^{(i)}$ donc de $G_\alpha^{(i)}$ et y élément de $G^{(j)}$ donc de $G_\alpha^{(j)}$. Si on a par exemple $i \leqslant j$, alors x et y seraient des éléments de $G_\alpha^{(j)}$ car $\Delta_0^{(i)}$ étant un segment de $\Delta_0^{(j)}$, $G_\alpha^{(i)}$ est un sous-ensemble de $G_\alpha^{(j)}$. Et cela est impossible: d'après sa définition, $G_\alpha^{(j)}$ ne peut contenir deux éléments correspondant au même élément de $M + N$.

Le théorème B) est démontré pour le cas où l'ensemble G est dénombrable.

§ 4 Le cas général.

Avant d'entrer dans la démonstration du théorème B) pour un ensemble G de puissance quelconque, introduisons quelques notations.

Si à chacun des éléments de P figurant dans la suite finie

$$(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{\varrho-1}, x_\varrho), (x_\varrho, b)$$

(des deux éléments consécutifs de la suite

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_\varrho, b$$

l'un appartiennent toujours à M, l'autre à N) correspond un élément de G, nous dirons que les éléments a et b de $M + N$ *sont reliés par une chaîne (de longueur ϱ)*. Nous dirons, en outre, que chaque élément de $M + N$ est relié à lui-même par une chaîne (de longueur 0). L'ensemble G sera dit *connexe* si, a et b étant deux éléments quelconques de $M + N$, auxquels correspondent des éléments de G, a et b sont toujours reliés par une chaîne.

Un ensemble G connexe est fini ou dénombrable.

Ce théorème est la conséquence immédiate du fait qu'à chaque élément de $M+N$ ne correspondent qu'un nombre fini d'éléments de G. En effet, les éléments de $M+N$, réliés à l'élément a de $M+N$ par une chaîne de longueur 1, sont en nombre fini; les éléments reliés à a par une chaîne de longueur 2, sont reliés par une chaîne de longueur 1 à un élément relié, lui, à a par une chaîne de longueur 1; leur nombre est donc également fini, et ainsi de suite. La somme de ces ensembles finis — en nombre fini ou dénombrable — sera donc également fini ou dénombrable. Mais cette somme — si on y fait encore entrer l'élément a — n'est autre que le sous-ensemble M^*+N^* de $M+N$ qu'on obtient par la suppression, dans $M+N$, des éléments auxquels ne correspond aucun élément de G. Mais si M^*+N^* est fini ou dénombrable, évidemment G l'est aussi.

Soient x et y des éléments de G. Si, x correspondant à l'élément (a_1, b_1) et y à l'élément (a_2, b_2) de P, a_1 et a_2 sont reliés par une chaîne (dans ce cas, évidemment, a_1. et b_2 sont aussi reliés par une chaîne, ainsi que b_1 et a_2, et aussi b_1 et b_2), nous poserons xRy. La relation ainsi définie possède les trois propriétés suivantes:

1° xRx.

2° Si xRy, alors yRx.

3° Si xRy et yRz, alors xRz. ;

(la dernière propriété est une conséquence du fait que, a et b étant reliés par une chaîne, ainsi que b et C, les éléments a et C le sont aussi). On sait que ces trois propriétés impliquent la possibilité de décomposer G de façon que deux éléments x et y de G soient compris dans la même partie de cette décomposition dans le cas, et seulement dans le cas, où xRy. On sait aussi que cette décomposition est unique.

Soit

$$G = \sum_{(\alpha)} G^{(\alpha)} \tag{Δ}$$

cette décomposition où α parcourt les éléments d'un certain ensemble A. *Chacune des parties $G^{(\alpha)}$ est connexe.* Soient, en effet, a et b deux éléments de $M+N$ auxquels correspondent respectivement les éléments x et y de $G^{(\alpha)}$. Comme on a xRy, nous savons que a et b sont reliés par une chaîne, c. q. f. d.

$G^{(\alpha)}$ et $G^{(\beta)}$ étant deux parties différentes quelconques de la décomposition Δ, l'ensemble $G^{(\alpha)} + G^{(\beta)}$ n'est pas connexe. Soient, en effet, x un élément de $G^{(\alpha)}$ correspondant à un élément a et y un élément de $G^{(\beta)}$ correspondant à un élément b de $M+N$. Si $G^{(\alpha)} + G^{(\beta)}$ était connexe, les éléments a et b seraient reliés par une chaîne et alors, contrairement à la définition de la décomposition Δ, on aurait $x\,R\,y$.

Ainsi nous sommes conduits au résultat suivant:

Il existe une décomposition de G:

$$G = \sum_{(\alpha)} G^{(\alpha)}$$

telle que chacune des parties $G^{(\alpha)}$ est connexe et, $G^{(\alpha)}$ et $G^{(\beta)}$ étant deux parties différentes quelconques, $G^{(\alpha)} + G^{(\beta)}$ ne l'est pas.

Les $G^{(\alpha)}$ étant connexes, sont finis ou dénombrables. On peut donc leur appliquer le théorème B), en disant qu'il existe pour chacune d'elles une décomposition

$$G^{(\alpha)} = G_1^{(\alpha)} + G_2^{(\alpha)} + \ldots + G_\nu^{(\alpha)},$$

dont chaque partie $G_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ contient au plus un élément correspondant au même élément de $M+N$. En posant

$$G_i = \sum_{(\alpha)} G_i^{(\alpha)} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

(où la sommation s'étend à tous les éléments de Δ), on obtient une décomposition de G:

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_\nu$$

possédant la même propriété. Si, en effet, deux éléments x et y de G_i correspondaient au même élément de $M+N$, l'un devrait figurer dans $G_i^{(\alpha)}$ donc dans $G^{(\alpha)}$, et l'autre dans $G_i^{(\beta)}$ donc dans $G^{(\beta)}$ où on a $\beta \neq \alpha$, car $G_i^{(\alpha)}$ ne peut pas contenir deux éléments correspondants au même élément de $M+N$. D'autre part, d'après la définition de la relation R, si x et y correspondent au même élément de $M+N$, on a $x\,R\,y$ et alors x et y devraient être des éléments de la *même* partie $G^{(\alpha)}$ dans la décomposition de G, ce qui implique une contradiction.

Ainsi le théorème B) est démontré dans toute sa généralité.

§ 5. Rapports avec d'autres travaux.

J'ai été amené aux recherches précédentes en cherchant à adapter une idée de mon père (qui l'avait appliquée dans sa démonstion[1]) du théorème d'équivalence) à la démonstration du théorème suivant de M. F. Bernstein[2]): „Si, pour deux nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$, on a $\nu\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{n}$, ν étant un nombre fini quelconque, alors on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$" [3]). Ce théorême peut être formulé de la façon suivante: „S'il existe une transformation bi-ν-ivoque (ν fini) entre deux ensembles, ceux-ci sont équivalents". On voit donc que le théorème *A*) représente une généralisation du théorème de M. Bernstein.

J'ai énoncé la première fois ce théorème *A*) (disant, avec la terminologie de la théorie des graphes, qu'un graphe régulier à circuits pairs possède un facteur du premier degré) dans une communication faite, le 7 avril 1914, au congrès de Philosophie mathématique à Paris[4]). Plus tard[5]), j'ai prouvé l'équivalence des théorèmes *A*) et *B*); je les ai démontrés pour le cas des ensembles finis; et j'ai réduit les deux problèmes à la démonstration du théorème *A*) pour le cas des ensembles dénombrables. Grâce à la collaboration de M. St. Valkó, nous sommes arrivés récemment[6]) à vaincre cette dernière difficulté.

Toutes ces recherches sont fondées, quant à leur terminologie, sur la théorie des graphes. Cette théorie, quoiqu'elle remonte jusqu'à Euler (1741), n'est aujourd'hui certainement qu'au commencement de son développement et pourra rendre encore beaucoup de services dans différentes branches des Mathématiques. En particulier, certaines notations contenues dans le grand travail de Petersen[7]) auxquelles il a été amené par certains théorèmes de

[1]) Jules König: „Sur la théorie des ensembles", Comptes Rendus, t. 143 (1906), p. 110.

[2]) „Untersuchungen aus der Mengenlehre", Dissertation Göttingen, 1901, p. 18; réimprimée dans les Mathematische Annalen, t. 61 (1905) p. 122.

[3]) Ma Note „Zur Theorie der Mächtigkeiten", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 26 (1908), p. 339, où j'ai réduit les égalités $\mathfrak{m} = \nu\,\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m} = \aleph_0\,\mathfrak{m}$ à une certaine hypothèse, rentre déjà dans cet ordre d'idées.

[4]) „Sur un problème de la théorie générale des ensembles et de la théorie des graphes", paru neuf ans plus tard dans la Revue de Métaphysique et de Morale, t. 30 (1923), p. 443 (Je citerai cette note par *K*1).

[5]) »Ueber Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre«, Mathematische Annalen, t. 77 (1916), p. 453 (Cité par *K*2).

[6]) D. König und St. Valkó: »Ueber mehrdeutige Abbildungen von Mengen«, Mathematische Annalen, t. 95 (1925), p. 135, (cité par *KV*).

[7]) „Die Theorie der regulären Graphs", Acta Mathematica, t. 15 (1891), p. 193. On trouve certaines simplifications de cette théorie dans les deux ouvrages suivants:

Gordan et de M. Hilbert, concernant la théorie des invariants, pouvaient être appliquées, pour le cas des ensembles finis, dans les recherches dont je viens de parler. C'est certainement le travail le plus remarquable qui ait été publié jusqu'ici sur les graphes [1]). En introduisant en outre ($K1$) la notion des graphes „à circuits pairs" ($K2$ „Paare Graphen"), j'ai pu me servir de certaines idées de ce travail, une de ces idées remontant au mathématicien anglais A. B. Kempe qui l'avait appliquée dans sa démonstration — d'ailleurs erronée — du théorème des quatre couleurs [2]). C'est cette ingénieuse idée qui, au § 2, a permis le passage de la décomposition (I) à la décomposition (II). Le théorème célèbre des quatre couleurs est en liaison avec le théorème A) appliqué aux ensembles finis. Pour s'en rendre compte, il suffit de l'énoncer sous la forme que lui a donnée Tait [3]): „Si le système des frontières d'une carte plane forme un graphe du troisième degré, il est le produit de trois facteurs du premier degré".

Les recherches sur les correspondances multivoques des ensembles *finis* sont aussi intimement liées à la théorie des déterminants. J'ai, en effet, montré ($K2$) que le théorème A) (pour les ensembles finis) est équivalent au théorème suivant:

A^*) Si les éléments d'un déterminant sont des entiers non négatifs et si la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est le même nombre positif, alors un au moins des termes du développement du déterminant est différent de zéro.

La première application de la théorie des graphes que j'ai donnée à la théorie des déterminants était une nouvelle démonstration [4]) du théorème suivant de Frobenius [5]): „Soit donné un détermi-

Brahana: »A proof of Petersen's theorem«, Annals of Mathematics (2), t. 19 (1917), p. 59, et Errera: »Du coloriage des cartes, etc«. thèse, Bruxelles (1921), (v. encore: Mathesis t. 36, 1922, p. 56.

[1]) On peut trouver la bibliographie de la théorie des graphes (Liniensysteme) jusqu'au commencement de ce siècle, dans l'article „Analysis Situs" de MM. Dehn et Heegaard, Encyclopädie der Math. Wissenschaften, t. III. 1_1, p. 171—178 (1907).

[2]) »On the Geographical Problem of the Four Colours«, American Journal of Mathematics, t. 2 (1879), p. 193.

[3]) V. p. ex. »Listing's Topologie«, Philosophical Magazine (5), t. 17 (1884), p. 30.

[4]) »Vonalrendszerek és determinánsok« (Graphes et déterminants), Mathematikai és Természettudományi Ertesitő, t. 32 (1915), p. 221 (en hongrois).

[5]) »Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen«, Sitzungsberichte der kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1912, p. 456.

nant d'ordre n, dont les éléments différents de zéro sont des variables indépendantes; ce déterminant ne peut être réductible qu'au cas où il possède α lignes et $n-\alpha$ colonnes dont les éléments communs sont égaux à zéro". La démonstration originale de Frobenius [1]) est très longue et compliquée. Après lui avoir communiqué ma démonstration, Frobenius a publié sa deuxième démonstration [2]) en y ajoutant celle que mon théorème A^*) est une conséquence du théorème de Frobenius. Ainsi ce travail de Frobenius peut être considéré comme contenant une nouvelle démonstration du théorème A) pour les ensembles finis. Un autre mathématicien aussi s'est occupé de ce théorème (également pour le seul cas des ensembles finis). Sans connaître alors ma Note $K\,2$, M. Sainte-Laguë a retrouvé le théorème d'après lequel un graphe (fini) régulier, à circuits pairs, possède un facteur de premier degré [3]), et en a donné une démonstration dans un grand travail sur les graphes [4]).

En passant au cas des ensembles infinis, il faut mentionner une note de M. Kuratowski [5]) où il donne une généralisation du théorème de M. Bernstein. Cette généralisation est une conséquence immédiate de mon théorème A) pour le cas $\nu=2$ (démontré déjà dans $K\,2$). Pour le montrer, je me servirai des notations de M. Kuratowski. Soient, en outre,

$$E' \sim E,\ E \times E' = 0,\ E' = \chi(E).$$

En étendant la signification de la fonction φ, posons $b' = \varphi(a')$ si on a

$$a' = \chi(a),\ \ b' = \chi(b);\ \ b = \varphi(a)$$

et de même pour la fonction ψ. Posons encore $\chi(P) = P'$, $\chi(Q) = Q'$ de sorte qu'on a

$$E' = \chi(P+Q) = P' + Q',\ \ P' \times Q' = 0.$$

[1]) »Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen«, Sitzungsberichte der kgl. Preussichen Akademie der Wissenschaften, 1912, p. 456.

[2]) »Über zerlegbare Determinanten«, Sitzungsberichte der kgl. Preussischen Akademie der Wiss. 1917, p. 274.

[3]) »Les réseaux«, Comptes Rendus, t. 176 (1923), p. 1202.

[4]) »Les réseaux«, Toulouse, 1924. — Voir aussi l'analyse de ce mémoire, par M. Sainte-Laguë lui-même, dans le Bulletin des Sciences Mathématiques (2), t. 48 (1924), p. 385.

[5]) »Une propriéte des correspondances biunivoques«, Fundamenta Mathematicae, t. 6 (1924), p. 240.

On a évidemment $\chi\varphi = \varphi\chi$, $\chi\psi = \psi\chi$. Soit H le graphe du premier degré, composé par les éléments de $E + E'$, comme points et par les arêtes $[e, \chi(e)]$, où e parcourt les éléments de E (donc $\chi(e)$ ceux de E'). En cofondant, pour un moment, les éléments e et $\varphi(e)$ dans E et en même temps les éléments e' et $\psi(e')$ dans E', H devient un graphe G du *second* degré à circuits pairs qui, d'après le théorème en question ($\nu = 2$), possède un facteur G_1 du premier degré. L'ensemble des arêtes de G_1 est un sous-ensemble de ceux de H. D'après la définition du „facteur de premier degré", à chaque élément m de M correspond un élément et un seul, q, de Q de manière que des quatre couples

$$\{m, q'\}, \ \{m, \psi(q')\}, \ \{\varphi(m), q'\}, \ \{\varphi(m), \psi(q')\}$$

(où on a posé $q' = \chi(q)$), il y a un, et un seul, relié par une arête de G_1. Comme chaque arête de G_1 est de la forme $[e, \chi(e)]$, on a dans les quatre cas respectivement

$$1)\ \chi(m) = \chi(q), \qquad 2)\ \chi(m) = \psi\chi(q) = \chi\psi(q),$$
$$3)\ \chi\varphi(m) = \chi(q), \qquad 4)\ \chi\varphi(m) = \psi\chi(q) = \chi\psi(q)$$

c'est-à-dire

$$1)\ q = m, \qquad 2)\ q = \psi(m), \qquad 3)\ q = \varphi(m), \qquad 4)\ q = \psi\varphi(m).$$

En rangeant m dans M_1, M_2, M_3, M_4, suivant le cas, on a exactement la décomposition de M. Kuratowski.

Mais non seulement le théorème de M. Kuratowski est une conséquence immédiate du théorème A) pour $\nu = 2$ — comme nous venons de le voir — les raisonnements mêmes de M. Kuratowski, par lesquels il arrive à sa décomposition, sont — en principe — les raisonnements de ma démonstration dans $K1$ et $K2$. Pour s'en rendre compte, il suffirait de ramener les deux démonstrations à la même terminologie.

[Je saisis cette occasion pour dire que le théorème 2 et sa démonstration contenus dans une note de M. Banach [1]) sont, à peu près dans le même rapport à la note de Jules König, citée plus haut, que la note de M. Kuratowski à quelques raisonnements du travail $K2$. La note des Comptes Rendus contient, en effet, sans le formuler explicitement, le théorème établi par M. Banach et

[1]) »Un théorème sur les transformations biunivoques«, Fundamenta Mathematicae, t. 6. (1924), p. 236.

la démonstration de M. Banach est, en principe, la même que celle de mon père].

Ma note $K2$ contient la démonstration des théorèmes A), B) et C) non seulement pour $\nu=2$, mais aussi pour $\nu=2^n$, n étant un nombre naturel quelconque; tandis que pour d'autres valeurs de ν la démonstration présente de nouvelles difficultés que je n'avais pas réussi à vaincre pendant bien des années. En raison de ces difficultés, MM. Banach et Tarski, dans leur beau travail sur certaines décompositions des ensembles [1]) (où ils appliquent mon théorème A) pour $\nu=2$ sous la forme que lui a donnée M. Kuratowski) ont généralisé leurs théorèmes 11 et 11′ et leur lemme 27 (qui correspond au cas de $\nu=2$) seulement pour le cas où le nombre des ensembles y figurant est une puissance de 2. Le théorème A) étant maintenant démontré pour ν quelconque, *on peut remplacer dans les corollaires 12, 12′ et dans le lemme 29 de MM. Banach et Tarski le nombre 2^n par un nombre naturel quelconque.*

Nous avons vu plus haut comment on peut déduire le théorème formulé par M. Kuratowski du théorème A (ou C), considéré pour $\nu=2$. Du théorème général A (ou C) on déduit absolument de la même manière le théorème suivant qui, pour $\nu=2$, donne l'énoncé de M. Kuratowski (je le formule dans la terminologie adoptée par M. Kuratowski):

Si on décompose un ensemble E de deux manières différentes:

$$E=M_1+M_2+\ldots+M_\nu=N_1+N_2+\ldots+N_\nu,$$
$$M_i\times M_j=0,\ N_i\times N_j=0\quad (i,j=1,2,\ldots,\nu;\ i\neq j)$$

et s'il existe des transformations biunivoques $\varphi_i(x)$ de M_1 en M_i et des transformations biunivoques $\psi_i(x)$ de N_1 en N_i pour $i=1,2,\ldots,\nu$, φ_1 et ψ_1 étant les transformations identiques, alors les ensembles M_1 et N_1 se décomposent en ν^2 parties disjointes

$$M_1=\sum_{\alpha=1}^{\nu^2}M_1^{(\alpha)},\quad N_1=\sum_{\alpha=1}^{\nu^2}N_1^{(\alpha)}$$

de façon qu'on ait

$$N_1^{(\alpha)}=\psi_i\varphi_j(M_1^{(\alpha)}),\quad (\alpha=1,2,\ldots,\nu^2)$$

[1]) „Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes", Fundamenta Mathematicae, t. 6. (1924), p. 244.

en désignant par $\alpha = (i-1)\nu + j$ *le rang qu'occupe le couple* (i, j) *dans la suite*

$$(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, \nu), (2, 1), \ldots, (2, \nu), \ldots, (\nu, 1), \ldots, (\nu, \nu).$$

Peut-être pourra-t-on se servir de cette forme du théorème *A*) ou *C*) pour étendre encore d'autres résultats de MM. Banach et Tarski.

Comme je l'ai dit, j'avais déjà énoncé les résultats des paragraphes précédents; les démonstrations dans les §§ 2 à 4 sont, quant à leur principe, les mêmes que celles des notes *K*2 et *KV*. Il y a cependant certaines différences.

La première de ces différences est d'ordre formel. Dans *K*2 et *KV*, la démonstration est fondée sur la théorie des graphes (finis et infinis) qui fournit une méthode et une terminologie commodes et faciles pour ces genres de problèmes. La méthode des graphes est en même temps absolument rigoureuse, ce qui me semble suffisamment prouvé par les remarques du § 3, premier alinéa, du travail *K*2. J'ai cependant voulu montrer une fois qu'on pouvait s'interdire toute expression qui pourrait éveiller le soupçon de s'être appuyé sur certaines intuitions géométriques. Ainsi les paragraphes précédents font uniquement usage des notions de la théorie générale des ensembles.

Une autre différence est relative au théorème *D*) du § 2 qui n'est appliqué dans la suite que dans le cas d'ensembles finis. Comme ce théorème reste vrai sans que sa démonstration se complique pour les ensembles infinis, je l'ai formulé et démontré ici pour des ensembles quelconques.

En ce qui concerne enfin les rapports du § 3 du présent travail avec la note *KV*, j'ai jugé utile de dégager des raisonnement de cette note le lemme très général *E*), en faisant ainsi ressortir une des idées principales (trouvée par M. Valkó) sur lesquelles repose la démonstration des théorèmes *A*), *B*) et *C*) pour les ensembles dénombrables. L'équivalence des théorèmes *B*) et *C*), formulés pour des ensembles quelconques étant déjà démontrée (dans *K*2), il aurait naturellement suffi dans le § 3 de se borner au théorème particulier *B*). Mais, le lemme *E*) une fois formulé et démontré, la démonstration du théorème général *B*) ne prend pas plus de place que celle du théorème *C*). C'est la raison pour laquelle dans le § 3 j'ai déduit directement ce théorème *B*) pour les ensembles dénombrables, tandis que KV contient une démonstration, fondée sur les mêmes principes, du théorème C) ou A).

Je dois encore dire un mot sur l'axiome du choix de M. Zermelo. Au § 4, il joue un rôle important et je ne vois pas le moyen de l'éviter si on ne fait pas d'hypothèses spéciales concernant les ensembles M et N. D'ailleurs, même le théorème de M. Bernstein a été démontré jusqu'ici, sans le recours à cet axiome, seulement pour le cas de $\nu = 2$ [1]).

§ 6. Une application.

Pour donner une application du théorème A), je démontre le théorème suivant:

Soit E un ensemble de points dans un plan tel que chaque droite, parallèle à un des deux axes de coordonnées, contenant un point de E, en contienne exactement ν; il existe alors un sous-ensemble E_1 de E tel que chacune de ces droites contienne un point et un seul de E_1.

Soient, en effet, X et Y les projections de E sur les deux axes de coordonnées; x étant un élément quelconque de X et y de Y, faisons correspondre x à y lorsque le point (x, y) appartient à E. On a ainsi défini une correspondance bi-ν-ivoque entre X et Y. En appliquant le théorème A), on arrive à une correspondance biunivoque entre X et Y. L'ensemble E_1 des points (x, y), où x et y se correspondent par cette correspondance biunivoque, jouit évidemment des propriétés désirées.

Si, au lieu d'appliquer le théorème A (ou C), on applique le théorème B), on arrive de la même manière au résultat suivant:

Soit E un ensemble de points dans un plan, tel que chaque droite parallèle à un des deux axes de coordonnées, contienne, au plus, ν points de E; on peut alors décomposer E en ν parties telles que chacune de ces droites contienne un point, au plus, d'une quelconque de ces parties.

En remplaçant les termes „plan", „droite" par des notions plus générales, on peut évidemment généraliser ces théorèmes.

Ici, la question se pose: peut-on étendre ces théorèmes à l'espace? La réponse est négative, même pour $\nu = 2$ et même en se bornant

[1]) Sierpiński: »Sur l'égalité $2\mathfrak{m} = 2\mathfrak{n}$ pour les nombres cardinaux«, Fundamenta Mathematicae, t. 3. (1922), p. 1. — M. Sierpiński a ainsi réussi à trouver une démonstration qui (dans K I) me semblait impossible.

aux ensembles finis. Pour démontrer ce fait, considérons l'ensemble E des 32 points de l'espace à trois dimensions:

$$\begin{array}{llll}
(1,1,1), & (1,1,2), & (1,3,3), & (1,2,4),\\
(1,2,1), & (1,4,2), & (1,4,3), & (1,3,4),\\
(2,2,1), & (2,3,2), & (2,1,3), & (2,1,4),\\
(2,3,1), & (2,4,2), & (2,2,3), & (2,4,4),\\
(3,3,1), & (3,2,2), & (3,1,3), & (3,1,4),\\
(3,4,1), & (3,3,2), & (3,2,3), & (3,4,4),\\
(4,1,1), & (4,1,2), & (4,3,3), & (4,2,4),\\
(4,4,1), & (4,2,2), & (4,4,3), & (4,3,4).
\end{array}$$

Les droites

$$\text{(I)} \qquad \left.\begin{matrix} x=\varrho \\ y=\sigma \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y=\varrho \\ z=\sigma \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} z=\varrho \\ x=\sigma \end{matrix}\right\} \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3, 4)$$

sont les seules qui, parallèles à un des axes de coordonnées, contiennent un point de E, et ces droites en contiennent exactement deux. En envisageant toutes les possibilités, on peut vérifier assez facilement qu'aucun sous-ensemble E_1 de E n'a la propriété que chacune des 48 droites (I) contienne un point et un seul de E_1.

Dans une note [1]), j'ai rattaché cette question concernant l'espace à trois dimensions, à la théorie des matrices cubiques et à la théorie des surfaces unilatères. Ce genre de questions ouvre un chemin menant à une généralisation des questions traitées aux §§ 1 à 4, où la généralisation consiste dans le fait que, au lieu des ensembles M et N, on considère plus de deux ensembles. Ces problèmes généraux deviennent très compliqués si on veut les formuler dans le langage de la théorie des ensembles, mais, dans une interprétation géométrique, ils ont peut-être, du moins pour le cas des ensembles finis, un certain intérêt pour l'Analysis Situs combinatoire des variétés à deux et à plusieurs dimensions. Dans le cas le plus simple de cette généralisation, on aura affaire — au lieu des graphes linéaires — à certains complexes de surfaces.

[1]) „Sur les rapports topologiques d'un problème d'Analyse combinatoire", Acta Litterarum ac Scientiarum (de l'Université de Szeged, Hongrie), t. 2. (1924), p. 32.

Budapest, le 22 Mai 1925.