„La teoria dei funzionali analitici nell'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali di qualsiasi ordine" Rend. Lincei, Vol. 4°, S. 6, 2° sem. 1926.

„I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse" Rend. Lincei, Vol. 5°, S. 6, I° sem. 1927.

(Reçu par la Rédaction le 14. XII. 1928).

Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen

von

Z. W. BIRNBAUM (Lwów).

Eine in einem Bereiche B der komplexen Zahlenebene regulär analytische Funktion $w = f(z)$ heisst schlicht in diesem Bereiche, wenn sie in B jeden Wert höchstens einmal annimmt, d. h. wenn der Bildbereich jeden Punkt der w-Ebene höchstens einmal überdeckt.

Der erste, der sich mit den schlichten Funktionen befasste, war Koebe, dem dann Plemelj, Pick, Bieberbach, Faber, Löwner u. a. folgten. Ihre Untersuchungen förderten die Tatsache zu Tage, dass die Forderung der Schlichtheit eine starke Einschränkung für die Funktionen bedeutet. Der erste grundlegende Satz auf diesem Gebiete war der „Verzerrungssatz" des Herrn Koebe[1]), welcher in seiner endgiltigen, von den Herren Pick[2]) und Bieberbach[3]) stammenden Fassung folgendermassen ausgesprochen werden kann:

(I) *Wenn* $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *eine im Einheitskreise* $|z| < 1$ *schlichte Funktion ist, so gilt die folgende Ungleichung:*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

---

[1]) P. Koebe: Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe, Gött. Nachr. 1909 p. 68—76.

[2]) G. Pick: Über den Koebe'schen Verzerrungssatz, Leipz. Ber. 1916 p. 58—64.

[3]) L. Bieberbach: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzber. d. kgl. Akad. Berlin 1916, p. 940—955.

Dieser Satz wurde durch den folgenden, von Herrn Bieberbach[4]) bewiesenen „Drehungssatz" ergänzt:

(II) *Unter denselben Voraussetzungen wie in* (I) *gilt auch*

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Weitere Untersuchungen ergaben, dass diese Sätze in gewissen Eigenschaften der im Äusseren des Einheitskreises d. h. im Bereiche $|z|>1$ regulären und schlichten Funktionen ihren Ursprung haben. Grundlegend ist hier der folgende „Flächensatz" des Herrn Bieberbach[5]).

(III) *Wenn* $f(z)=z+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu}$ *eine in* $|z|>1$ *schlichte Funktion ist, so gilt die Ungleichung*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|a_\nu|^2 \leqq 1.$$

Aus diesem Satze leitete Herr Bieberbach[6]) unter Verwendung eines Faberschen Kunstgriffes den folgenden Satz her:

(IV) *Ist* $f(z)=z+\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu$ *eine im Innern des Einheitskreises reguläre und schlichte Funktion, so gilt*

$$|a_2| \leqq 2.$$

Aus dieser Ungleichung können nach einer von Herrn R. Nevanlinna[7]) angegebenen Methode die Sätze (I), (II) sehr einfach abgeleitet werden. Aus dem Vorangehenden ist schon die grosse Bedeutung der Eigenschaften der im Äusseren des Einheitskreises schlichten Funktionen für die allgemeine Theorie der schlichten Funktionen zu ersehen. Mit dieser besonderen Funktionenklasse befasste sich eingehender Herr Löwner[8]) und bewies u. a. den folgenden „Verzerrungssatz":

---

[4]) L. Bieberbach: Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen, Math. Ztschr. 4 (1919) p. 295—305.

[5]) l. c. [3]).

[6]) l. c. [3]).

[7]) R. Nevanlinna: Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises Övers. av Finska Vet. Förh. 62 (1919/20) Avd. A Nr. 7.

[8]) K. Löwner: Über die Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äusseren des Einheitskreises, Math. Ztschr. 3 (1919) p. 65—77.

(V) *Ist* $f(z)=z+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu}$ *für* $|z|>1$ *regulär und schlicht, so gilt die Ungleichung*

$$1-\frac{1}{|z|^2} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1}{1-\frac{1}{|z|^2}}.$$

Die vorliegende Arbeit ist in fünf §§ gegliedert. Die in § 1 angestellten Untersuchungen gehen in der von Herrn Löwner eingeschlagenen Richtung weiter, d. h. es werden dort für $|z|>1$ den bereits für $|z|<1$ bekannten Sätzen analoge Sätze bewiesen, wobei sich auch einige neuartige Eigenschaften der schlichten Funktionen ergeben. In § 2 werden einige weitere Sätze über die im Äusseren des Einheitskreises schlichten Funktionen hergeleitet, deren Beweise sich auf einen geometrischen Hilfssatz stützen. Den langwierigen Beweis dieses Hilfssatzes, welcher den Gedankengang in § 2 zu sehr unterbrechen würde, verlegen wir auf § 5.

Die in § 3 behandelte Fragestellung ergibt sich auf Grund der folgenden Bemerkung: Die meisten bisher angeführten Sätze enthalten scharfe Ungleichungen. So gilt z. B. in (I) und (IV) das Gleichheitszeichen für $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$, in (III) und (V) für $f(z)=z+\frac{1}{z}$. Es ist bemerkenswert, dass diese besonderen Funktionen eine in einem Randpunkte des Schlichtheitsbereiches verschwindende Ableitung haben, also in der Umgebung dieses Punktes schlicht zu sein aufhören. Man kann nun fragen, ob die bekannten Ungleichungen verschärft werden können, wenn man den Funktionen ausser der Bedingung der Schlichtheit noch andere Regularitätsbedingungen auferlegt. In § 3 wird von diesem Standpunkt die Klasse derjenigen Funktionen behandelt, welche sowohl im Innern als auch auf dem Rande des Schlichtheitsbereiches, also für $|z|\leqq 1$ resp. für $|z|\geqq 1$ regulär und schlicht sind. Solche Funktionen bilden $|z|=1$ auf analytische Jordan-Kurven ab. Man kann nun von zweierlei Voraussetzungen ausgehen: Entweder man setzt von der Gestalt dieser Jordan-Kurven etwas voraus und leitet daraus Folgerungen über die Eigenschaften der abbildenden Funktionen her — bei einer solchen Formulierung wollen wir von „Sätzen geometrischen Charakters“ sprechen —, oder es werden gewisse Voraussetzungen über das numerische Verhalten von $f(z)$ auf dem Rande gemacht und daraus über $f(z)$ im Innern des Bereiches gefolgert — wir sprechen dann von „Sätzen von numerischem Charakter“. Besonders bei der „geometrischen“ Fragestellung sind bisher nur wenige Ergebnisse bekannt, trotzdem gerade diese Fragestellung für die ebenen Probleme der Hydrodynamik und Aerodynamik von Bedeutung ist[9]. In § 4 werden einige Eigenschaften derjenigen in $|z|<1$ regulären Funktionen hervorgehoben, deren Ableitung nicht beliebig nahe an Null herankommt.

§ 1.

Wir wollen zunächst den als (V) angeführten „Drehungssatz“ auf das Äussere des Einheitskreises übertragen. Dabei wollen wir uns einer von Herrn Koebe[10]) angegebenen Methode bedienen.

Satz 1.

Voraussetzung: $f(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu}$ *ist im Bereiche* $|z|>1$ *regulär und schlicht.*

Behauptung: *Es gibt für* $\varrho>1$ *definierte Funktionen* $\Phi(\varrho)$ *mit den folgenden Eigenschaften:* 1° *es ist* $\lim\limits_{\varrho\to\infty}\Phi(\varrho)=0$, 2° *für jedes der Voraussetzung genügende* $f(z)$ *und* $|z|\geqq\varrho>1$ *gilt die Ungleichung*

$$|\arg f'(z)|\leqq\Phi(\varrho).$$

Insbesondere kann

$$\Phi(\varrho)=\frac{2}{\pi}\log\frac{\sqrt{\varrho}+1}{\sqrt{\varrho}-1}\log\frac{\varrho}{\varrho-1}$$

gesetzt werden.

Beweis: Aus dem Löwnerschen Verzerrungssatze (V) wissen wir, dass für $|z|\geqq\varrho>1$ die Ungleichung

[9]) vgl. z. B. Bieberbach l. c. p. 89—106 i. f. — Die einzigen mir bekannten allgemeinen Sätze geometrischen Charakters befinden sich in der Arbeit von Löwner: Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z|<1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, Leipz. Ber. 1917. p. 89—106.

[10]) P. Koebe: Zum Verzerrungssatze der konformen Abbildung, Math. Ztschr. 6 (1920) p. 311—313.

$$1-\frac{1}{\varrho^2}\leqq|f'(z)|\leqq\frac{1}{1-\frac{1}{\varrho^2}} \tag{1}$$

gilt. Wir setzen $z=\frac{1}{\zeta}$. Die Funktion $g(\zeta)=f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ ist für $0<|\zeta|<1$ regulär und da sie nach (1) beschränkt ist, so ist sie auch in $\zeta=0$ regulär und nimmt in diesem Punkt den Wert $g(\zeta)=1$ an. Wir wenden nun den folgenden Satz an[11]):

Ist $\varphi(\zeta)$ für $|\zeta|<1$ regulär und ist $|\Re\varphi(\zeta)|<a$, ist ferner $\varphi(0)=0$, so gilt für den Imaginärteil die Ungleichung

$$|\Im\varphi(\zeta)|\leqq\frac{2a}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}$$

im Kreise $|\zeta|\leqq r<1$.

Wir setzen

$$\log g(\zeta r)=\varphi(\zeta),$$

worin r eine beliebige Zahl <1 ist. Es ist

$$\varphi(0)=0$$

und

$$|\Re\varphi(\zeta)|=|\Re\log g(\zeta r)|=|\log|g(\zeta r)||=$$

$$=\left|\log\left|f'\left(\frac{1}{\zeta r}\right)\right|\right|\leqq\log\frac{1}{1-r^2}$$

für $|\zeta|\leqq 1$.

Es kann also auf $\varphi(\zeta)$ der soeben angeführte Satz mit $a=\log\frac{1}{1-r^2}$ angewendet werden. Man findet

$$|\Im\varphi(\zeta)|\leqq\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{1-r^2}\log\frac{1+\varrho'}{1-\varrho'}$$

für $|\zeta|\leqq\varrho'<1$. Da $\Im\varphi(\zeta)=\Im\log f'\left(\frac{1}{\zeta r}\right)=\arg f'\left(\frac{1}{\zeta r}\right)$, so ist

$$\left|\arg f'\left(\frac{1}{\zeta r}\right)\right|\leqq\frac{2}{\pi}\log\frac{1+\varrho'}{1-\varrho'}\log\frac{1}{1-r^2}$$

für beliebige $r<1$, $\varrho'<1$, $|\zeta|\leqq\varrho'$. Für $\varrho'=r$ findet man

[11]) P. Koebe: Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie, Math. Ztschr. 6 (1920) p. 52—84, insbes. p. 61, II.

$$\left|\arg f'\left(\frac{1}{\zeta r}\right)\right| \leq \frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}\cdot\log\frac{1}{1-r^2}, \quad |\zeta|\leq r.$$

Indem man $\frac{1}{r\zeta}=z$ und $\frac{1}{r^2}=\varrho$ setzt, erhält man die Behauptung.

Auf Grund dieses Satzes beweisen wir den folgenden

Satz 2.

Voraussetzung: $f(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *ist in* $|z|<1$ *regulär und schlicht.*

Behauptung: *Es gibt für* $0<r<1$ *definierte Funktionen* $\Psi(r)$ *mit den folgenden Eigenschaften:* 1° *es ist* $\lim_{r\to 0}\Psi(r)=0$, 2° *für jedes* $f(z)$, *welches der Voraussetzung genügt, gilt im Kreise* $|z|\leq r$ *die Ungleichung*

$$|\arg f(z) - \arg z| \leq \Psi(r).$$

Insbesondere kann

$$\Psi(r)=\frac{1}{\pi}\log\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\log\frac{1}{1-r}+\log\frac{1+r}{1-r}$$

gesetzt werden.

Beweis: Wenn $f(z)$ in $|z|<1$ schlicht ist, so ist auch $\varphi(\zeta)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}+a_2$ in $|\zeta|>1$ regulär und schlicht und erfüllt die Voraussetzung des Satzes 1. Es ist also

(2) $$|\arg\varphi'(\zeta)|\leq\frac{2}{\pi}\log\frac{\sqrt{\varrho}+1}{\sqrt{\varrho}-1}\cdot\log\frac{\varrho}{\varrho-1}$$

für $|\zeta|\geq\varrho>1$. Wir schreiben $\zeta=\frac{1}{z}$, $\varrho=\frac{1}{r}$ und berechnen

$$\varphi'(\zeta)=\frac{f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{f^2\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\zeta^2}$$

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2=\frac{f'(z)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

(3) $$2\arg\frac{f(z)}{z}=\arg f'(z)-\arg\varphi'\left(\frac{1}{z}\right).$$

Die in dieser Beziehung vorkommenden Argumente, welche doch nur modulo 2π erklärt sind, bestimmen wir so, dass sie für $z=\frac{1}{\zeta}=0$ alle gleich Null gesetzt und für andere Werte von z durch stetige Fortsetzung erklärt werden. Aus (3) folgt

$$|\arg f(z)-\arg z|\leq\frac{1}{2}|\arg f'(z)|+\frac{1}{2}\left|\arg\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

Nach dem Bieberbachschen Drehungssatz ist

$$|\arg f'(z)|\leq 2\log\frac{1+r}{1-r}$$

für $|z|\leq r$. Daraus und aus (2) ergibt sich

$$|\arg f(z)-\arg z|\leq\frac{1}{\pi}\log\frac{\sqrt{\varrho}+1}{\sqrt{\varrho}-1}\cdot\log\frac{1}{1-r}+\log\frac{1+r}{1-r}$$

für $|z|\leq\frac{1}{\varrho}<1$. Da $\frac{1}{\varrho}=r$ ist, erhalten wir

$$|\arg f(z)-\arg z|\leq\frac{1}{\pi}\log\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\log\frac{1}{1-r}+\log\frac{1+r}{1-r}$$

für $|z|\leq r<1$.

Ähnlich beweisen wir den

Satz 2'.

Voraussetzung: $f(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu}$ *ist für* $|z|>1$ *regulär und schlicht.*

Behauptung: *Es gibt Funktionen* $\overline{\Psi}(r)$ *mit den folgenden Eigenschaften:* 1° *es ist* $\lim_{r\to\infty}\overline{\Psi}(r)=0$, 2° *für jedes der Voraussetzung genügende* $f(z)$ *gilt*

$$|\arg f(z)-\arg z|\leq\overline{\Psi}(r),\quad |z|\geq r\geq 4.$$

Beweis: Der Beweis von Satz 2. kann hier nicht unmittelbar übertragen werden. Es kann nämlich nicht ohne weiteres die Funktion $\varphi(\zeta)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ definiert werden, da wir doch nicht wissen, ob $f(z)$ nicht für ein z, $|z|>1$ verschwindet. Diese Schwierigkeit kann auf folgende Weise umgangen werden: Herr Löwner[12]) hat den folgenden Satz bewiesen:

Genügt $f(z)$ der Voraussetzung von Satz 2', so gilt für die Entfernung δ des Punktes $w=f(z)$ vom nächsten Randpunkte des Bildbereiches von $|z|>1$ die Ungleichung

$$|z|+\frac{1}{|z|}-2\leqq\delta\leqq|z|.$$

Herr Bieberbach zeigte, dass kein Randpunkt des Bildbereiches ausserhalb des Kreises $|w|\leqq 2$ liegen kann. Aus diesen beiden Sätzen folgt unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f(z)|=|w|\geqq\delta-2\geqq|z|+\frac{1}{|z|}-4.$$

Die Funktion $f(z)$ verschwindet also gewiss nicht für solche z, dass $|z|+\frac{1}{|z|}-4>0$, also z. B. für $|z|\geqq 4$. Die Funktion $g(z)=\frac{f(4z)}{4}$ ist regulär und schlicht im Bereiche $|z|>1$, hat eine Entwicklung von der Form $z+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu}{z^\nu}$ und es ist $g(z)\neq 0$ für $|z|>1$. Jetzt erst erklären wir $\varphi(z)=\frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$ und führen den Beweis beinahe wörtlich wie in Satz 2 zu Ende. Zunächst erhalten wir die Abschätzung

$$|\arg g(z)-\arg z|\leqq\log\frac{r+1}{r-1}+\frac{1}{\pi}\log\frac{r}{r-1}\log\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}$$

für $|z|\geqq r>1$, was mit der Ungleichung

$$|\arg f(4z)-\arg z|\leqq\log\frac{r+1}{r-1}+\frac{1}{\pi}\log\frac{r}{r-1}\log\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}$$

gleichbedeutend ist. Daraus ergibt sich schon leicht

$$|\arg f(z)-\arg z|\leqq\log\frac{r+4}{r-4}+\frac{1}{\pi}\log\frac{r}{r-4}\log\frac{\sqrt{r}+2}{\sqrt{r}-2}$$

für $|z|\geqq r>4$.

---

[12]) l. c. [8]).

Herr Bieberbach[13]) hat für besondere Klassen schlichter Funktionen, nämlich für die konvexen und sternigen Funktionen seinen Drehungssatz bedeutend verschärft. Wir wollen auch diese Verschärfungen auf das Äussere des Einheitskreises übertragen.

Eine in $|z|>1$ reguläre und schlichte Funktion wollen wir konvex nennen, wenn das Komplement des Bildereiches eine konvexe Menge ist, d. h. mit je zwei Punkten immer auch ihre Verbindungsstrecke enthält.

Wir betrachten zunächst nur diejenigen konvexen Funktionen, welche das Äussere des Einheitskreises auf das Äussere eines konvexen Polygons abbilden. Jede solche Funktion, welche ausserdem noch so normiert ist, dass sie eine Entwicklung von der Form $f(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^\nu}$ besitzt, kann, wie leicht nachzuweisen, mit Hilfe der folgenden Formel dargestellt werden:

$$f(z)=\int_1^z\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)^{\alpha_k}\cdot\frac{1}{z^2}\,dz+\text{constans}.$$

Dabei sind die Punkte z_k auf der Peripherie des Einheitskreises gelegen, d. h. $|z_k|=1$ und die Exponenten α_k genügen den Bedingungen 1° $1>\alpha_k>0$ 2° $\Sigma\alpha_k=2$. Diese Formel ist ein Analogon der bekannten Schwarz-Christoffelschen Formel und wird auch genau wie diese bewiesen. Wir formen sie folgendermassen um

$$f(z)=\int_1^z\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{\alpha_k}dz+\text{constans}.$$

Daraus ergibt sich

$$f'(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{\alpha_k}$$

und

$$\arg f'(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\arg\left(1-\frac{z_k}{z}\right).$$

Mit Berücksichtigung der Ungleichung

$$\left|\arg\left(1-\frac{z_k}{z}\right)\right|\leqq\arc\sin\frac{|z_k|}{|z|}=\arc\sin\frac{1}{|z|}$$

---

[13]) l. c. [4]).

hat man also

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \text{ arc sin } \frac{1}{|z|}.$$

Da nun der Rand einer konvexen Menge mit beliebiger Genauigkeit durch konvexe Polygone approximiert werden kann, und die rechte Seite der soeben bewiesenen Ungleichung von der Eckenzahl nicht abhängt, so gilt diese Ungleichung für jede konvexe schlichte Funktion.

Damit wäre die folgende Behauptung bewiesen:

Ist $f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ *eine in* $|z| > 1$ *konvexe Funktion, so ist*

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \text{ arc sin } \frac{1}{|z|}.$$

Diese Abschätzung ist dem folgenden, ganz analogen Satz des Herrn Bieberbach nachgebildet:

Ist $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine in $|z| < 1$ konvexe Funktion (d. h. eine Funktion, welche das Innere des Einheitskreises auf einen konvexen Bereich abbildet) so gilt die Ungleichung

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \text{ arc sin } |z|.$$

Wir wenden uns nun zu den sternigen Funktionen.

Unter einem Stern inbezug auf den Nullpunkt verstehen wir ein Gebiet, welches mit jedem seiner Punkte auch die ganze diesen Punkt mit dem Nullpunkt verbindende Strecke enthält. Ähnlich verstehen wir unter einem Stern inbezug auf den unendlichfernen Punkt ein Gebiet, welches mit jedem Punkt ζ_0 auch den ganzen Halbstrahl $|\zeta| > |\zeta_0|$, $\arg \zeta = \arg \zeta_0$ enthält.

Eine in $|z| < 1$, resp. $|z| > 1$ *schlichte Funktion heisse sternig, wenn der Bildbereich ein Stern inbezug auf* 0 *resp. inbezug auf* ∞ *ist.* Wie leicht einzusehen, kann ein Stern inbezug auf ∞ den Nullpunkt nicht enthalten, ohne mit der ganzen Ebene identisch zu sein. Es kann also eine in $|z| > 1$ sternige Funktion nirgends den Wert Null annehmen.

Herr Bieberbach hat für sternige Funktionen den folgenden Drehungssatz bewiesen:

Ist $f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ in $|z| < 1$ sternig, so gilt die Ungleichung

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \text{ arc sin } |z| + \frac{\pi}{2}.$$

Diese Ungleichung ist einerseits weniger scharf, als der allgemeine Drehungssatz (II), da ihre rechte Seite für $|z| \to 0$ nicht gegen Null strebt, andererseits aber liefert sie ein schärferes Ergebnis, denn ihre rechte Seite kann die Zahl $\frac{3}{2}\pi$ nicht übersteigen. Die Übertragung dieses Satzes auf das Äussere des Einheitskreises lautet:

Satz 3.

Voraussetzung: $f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ *ist eine in* $|z| > 1$ *sternige Funktion.*

Behauptung: $|\arg f'(z)| \leqq 2 \text{ arc sin } \frac{1}{|z|} + \frac{\pi}{2}.$

Beweis: $f(z)$ ist dann und nur dann eine in $|z| > 1$ sternige Funktion, wenn $g(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ eine in $|\zeta| < 1$ sternige Funktion ist. Dafür, dass $g(\zeta)$ eine in $|\zeta| < 1$ sternige Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, dass die durch die Beziehung

$$g(\zeta) = \zeta \cdot k'(\zeta)$$

erklärte Funktion $k(\zeta)$ in $|\zeta| < 1$ konvex sein soll [14]). Damit aber $k(\zeta)$ konvex sei, ist das Bestehen der Ungleichung [15])

$$\Re\left(1 + \zeta \frac{k''(\zeta)}{k'(\zeta)}\right) \geqq 0,$$

also auch der Ungleichung

$$\left|\arg\left(1 + \zeta \frac{k''(\zeta)}{k'(\zeta)}\right)\right| \leqq \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

notwendig und hinreichend.

---

[14]) J. W. Alexander: Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of math. 2 ser. vol. 17 (1915) p. 12—22.

[15]) E. Study: Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites Heft. Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, Leipzig 1913, p. 109.

Für $f(z)$ muss also die Beziehung

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \zeta k'(\zeta), \quad |\zeta| < 1, \quad \frac{1}{\zeta} = z$$

gelten, wobei $k(\zeta)$ der Ungleichung (4) genügt. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{z}{k'(\zeta)}$$

$$f'(z) = \frac{k'(\zeta) + \zeta k''(\zeta)}{k'^2(\zeta)} = \frac{1 + \zeta \frac{k''(\zeta)}{k'(\zeta)}}{k'(\zeta)}$$

$$|\arg f'(z)| \leq \left| \arg \left(1 + \zeta \frac{k''(\zeta)}{k'(\zeta)}\right) \right| + |\arg k'(\zeta)|.$$

Mit Rücksicht auf (4) und auf den S. 168 angeführten Satz des Herrn Bieberbach folgt daraus die Behauptung.

Betrachten wir wiederum eine in $|z| > 1$ sternige Funktion $f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$. Die Funktion $\varphi(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ ist dann in $|\zeta| < 1$ sternig, es gelten also nach dem Bieberbachschen Drehungssatz für sternige Funktionen und nach Satz 3 die beiden Ungleichungen

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \text{ arc sin } \frac{1}{|z|} + \frac{\pi}{2} \qquad |z| > 1$$

$$|\arg \varphi'(\zeta)| \leq 2 \text{ arc sin } |\zeta| + \frac{\pi}{2} \qquad |\zeta| < 1.$$

Aus

$$\varphi'(\zeta) = \frac{f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{f^2\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot \zeta^2} \qquad |\zeta| < 1$$

folgt

$$\left|\arg f\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \arg \zeta\right| \leq \frac{1}{2} |\arg \varphi'(\zeta)| + \frac{1}{2} \left|\arg f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|,$$

also

$$|\arg f(z) - \arg z| \leq 2 \text{ arc sin } \frac{1}{|z|} + \frac{\pi}{2}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen

Satz 4.

Voraussetzung: *$f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ ist eine in $|z| > 1$ sternige Funktion.*

Behauptung: $|\arg f(z) - \arg z| \leq 2 \text{ arc sin } \frac{1}{|z|} + \frac{\pi}{2}$.

Genau dieselbe Abschätzung erhält man für in $|z| > 1$ sternige Funktionen. — Auch diese Abschätzungen sind insofern schwächer als Satz 2 resp. Satz 2', als ihre rechten Seiten mit $|z| \to 0$ resp. $|z| \to \infty$ nicht gegen Null streben. Sie sind jedoch insofern besser, als sie zeigen, dass $\arg f(z)$ von $\arg z$ nicht um mehr als $\frac{3}{2}\pi$ abweichen kann.

§ 2.

Wir verabreden die folgenden

Bezeichnungen:

Den Kreis $|z| = \varrho$ bezeichnen wir mit K_ϱ; die analytische Jordan-Kurve $w = \underset{|z|=\varrho}{f(z)}$, welche durch Abbildung von K_ϱ mit Hilfe einer schlichten Funktion $f(z)$ entsteht, — mit C_ϱ; den kleinsten von allen nach innen gerichteten Krümmungsradien von C_ϱ mit m_ϱ (im Allgemeinen muss C_ϱ nicht konvex sein, kann also auch nach aussen gerichtete Krümmungsradien haben); den Krümmungsradius von C_ϱ an der Stelle $w = f(z)$ — mit $R_\varrho(z)$.

Satz 5.

Voraussetzung: *$w = f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ ist eine in $|z| > 1$ reguläre und schlichte Funktion.*

Behauptung: *Für jedes $\varrho > 1$ ist*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu |a_\nu|^2}{\varrho^{2\nu}} \leq \varrho^2 - m_\varrho^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z) = z$.

Beweis: Wir berechnen den Inhalt I_ϱ des Inneren von C_ϱ

$$I_\varrho = \int_0^{2\pi} u\, v'\, d\vartheta,$$

wobei

$$f(\varrho\, e^{i\vartheta}) = u(\vartheta) + i\, v(\vartheta).$$

Es ist also

$$I_\varrho = \int_0^{2\pi} u\, v'\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho\, e^{i\vartheta}) + \bar{f}(\varrho\, e^{i\vartheta})}{2} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial\vartheta} f(\varrho\, e^{i\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial\vartheta} \bar{f}(\varrho\, e^{i\vartheta})}{2\,i}\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\varrho\, e^{i\vartheta} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\varrho^\nu e^{i\nu\vartheta}} + \varrho\, e^{-i\vartheta} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_\nu}{\varrho^\nu e^{-i\nu\vartheta}}}{2} \cdot \frac{\varrho\, i\, e^{i\vartheta} - \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\, a_\nu\, i}{\varrho^\nu e^{i\nu\vartheta}} + \varrho\, i\, e^{-i\vartheta} - \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\, \bar{a}_\nu\, i}{\varrho^\nu e^{-i\nu\vartheta}}}{2\,i} \right\} d\vartheta =$$

$$= \pi\, \varrho^2 - \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\, |a_\nu|^2}{\varrho^{2\nu}}.$$

Wir stützen uns nun auf den folgenden Hilfssatz

Geometrischer Hilfssatz.

Voraussetzung: *Die analytische Jordan-Kurve C hat einen Krümmungsradius $\geq \varepsilon > 0$ überall dort, wo er nach innen gerichtet ist.*

Behauptung: *Das Innere von C enthält das Innere eines ganzen Kreises mit dem Radius ε.*

Den Beweis dieses Hilfssatzes geben wir in § 5.

Diesem Hilfssatz zufolge ist im Innern von C_ϱ ein Kreis mit dem Radius m_ϱ enthalten, es ist also

$$I_\varrho \geq m_\varrho^2 \cdot \pi.$$

Indem man in diese Ungleichung den vorhin berechneten Wert für I_ϱ einsetzt, erhält man die Behauptung. Das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn $I_\varrho = m_\varrho^2 \pi$, wenn also C_ϱ ein Kreis mit dem Radius m_ϱ ist. Da jedoch $f(z) = z$ die einzige Funktion von der Form $f(z) = z + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ ist, welche $|z| = \varrho$ auf einen

Kreis abbildet, so kann tatsächlich nur für diese Funktion das Gleichheitszeichen gelten.

Aus Satz 5 folgt unmittelbar der

Satz 6. *Bei einer Abbildung des Gebietes $|z| > 1$ mit Hilfe einer Funktion $f(z)$, welche der Voraussetzung von Satz 5 genügt, wird $|z| = \varrho$ auf eine einfache geschlossene analytische Kurve C_ϱ abgebildet, welche an mindestens einer Stelle einen nach innen gerichteten und von ϱ kleineren Krümmungsradius haben muss. Dieser kleinste nach innen gerichtete Krümmungsradius kann nur für $f(z) = z$ gleich ϱ sein.*

Dieser Satz kann mit Hilfe des geometrischen Hilfssatzes auch unmittelbar aus der Ungleichung

$$I_\varrho = \pi\, \varrho^2 - \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\, |a_\nu|^2}{\varrho^{2\nu}} \geq m_\varrho^2\, \pi$$

abgelesen werden, welche der geometrischen Tatsache Ausdruck gibt, dass der Inhalt des Innern von C_ϱ kleiner ist als die Oberfläche des Kreises $|z| = \varrho$ (mit Ausnahme des Falles $\underset{(\nu=1,2,\ldots)}{a_\nu \equiv 0}$, d. h. $f(z) = z$). Diese Verkleinerung der Oberfläche von K_ϱ ist um so merkwürdiger, als die Oberfläche des Kreisringes $1 < r_1 < |z| < r_2$ bei derselben Abbildung vergrössert wird; der Inhalt seines Bildes beträgt nämlich

$$I_{r_1}^{r_2} = \pi\,(r_2^2 - r_1^2) + \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |a_\nu|^2 \left[\frac{1}{r_1^{2\nu}} - \frac{1}{r_2^{2\nu}}\right].$$

Der Satz 5 hatte „geometrischen Charakter" in dem Sinne, in welchem auf S. 4 von geometrischer Fragestellung die Rede war. Wir beweisen noch ein „numerisches" Seitenstück dazu:

Satz 7.

Voraussetzung: *Wie in Satz 6.*

Bezeichnung: $\min\limits_{|z|=\varrho>1} \dfrac{|f'(z)|^2}{|f'(z)| + \varrho\, |f''(z)|} = \varepsilon_\varrho.$

Behauptung: *Für jedes $\varrho > 1$ gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\, |a_\nu|^2}{\varrho^{2\nu}} \leq \varrho^2\,(1 - \varepsilon_\varrho^2).$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z) = z$.

Beweis: Wir berechnen den Krümmungsradius $R_\varrho(z)$. Es ist bekanntlich

$$R_\varrho(z)=\frac{ds}{d\varphi},$$

wobei ds das Bogenelement auf C_ϱ bedeutet und mit φ der Winkel zwischen der Tangente von C_ϱ im Punkte $w=f(z)$ und der reellen Achse der w-Ebene bezeichnet wird. Es ist ferner

$$R_\varrho(z)=\frac{ds}{d\varphi}=\frac{ds}{dS}\cdot\frac{dS}{d\Phi}\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

wo dS das Bogenelement auf K_ϱ, und Φ die Richtung der Tangente von K_ϱ im Punkte z bedeutet. Nach bekannten Sätzen ist

$$\frac{ds}{dS}=|f'(z)|,\quad \frac{dS}{d\Phi}=\varrho.$$

Da φ in der Form

$$\varphi=\mathfrak{J}\{\log\, izf'(z)\}$$

ausgedrückt werden kann, so hat man

$$\frac{d\varphi}{d\Phi}=\mathfrak{J}\left\{i\left[1+\varrho e^{\Phi i}\frac{f''(\varrho e^{\Phi i})}{f'(\varrho e^{\Phi i})}\right]\right\}=\mathfrak{R}\left\{1+\varrho e^{\Phi i}\frac{f''(\varrho e^{\Phi i})}{f'(\varrho e^{\Phi i})}\right\}.$$

Es gilt also für den Krümmungsradius $R_\varrho(z)$ die Formel

$$(5)\qquad R_\varrho(z)=|f'(z)|\,\varrho\,\frac{1}{1+\mathfrak{R}\left\{z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}}.$$

Der Krümmungsradius ist nach innen gerichtet, wenn er ein positives Vorzeichen hat, wenn also

$$\mathfrak{R}\left\{z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}>-1.$$

Aus (5) findet man sofort

$$m_\varrho\geqq\underset{\mathfrak{R}\left\{z\frac{f''}{f'}\right\}>-1}{\varrho\min_{|z|=\varrho}}\frac{|f'(z)|}{1+\mathfrak{R}\left\{z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}}\geqq\varrho\min_{|z|=\varrho}\frac{|f'(z)|^2}{|f'(z)|+\varrho\,|f''(z)|}.$$

Wenn man die so erhaltene untere Schranke für m_ϱ in Satz 5 einsetzt, erhält man die behauptete Ungleichung.

In Satz 6 wurde eine von der Funktion $f(z)$ unabhängige obere Schranke für m_ϱ angegeben: $m_\varrho\leqq\varrho$. Wir wollen m_ϱ ähnlich auch von unten abschätzen:

Satz 8.

Voraussetzung: *Wie in Satz 5.*

Behauptung: *Für jedes* $\varrho>1$ *ist*

$$m_\varrho\geqq\frac{(\varrho^2-1)^2}{7\varrho^3-\varrho}.$$

Beweis: Wir bilden die Funktion

$$f_1(\zeta)=f\left(\frac{1+\zeta z}{\zeta+\bar z}\right)-f(z).$$

Es ist $f_1(\infty)=0, f_1(-\bar z)=\infty.\, f(z)$ ist also für $|\zeta|>|\bar z|=|z|$ regulär und schlicht. Die Funktion $f_2(\zeta)=f_1(|z|\zeta)$ ist schon in $|\zeta|>1$ regulär und schlicht und es wird $f_2(\infty)=0$. Ihre Entwicklung

$$f_2(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu}{\zeta^\nu}$$

hat die Koeffizienten

$$b_1=\frac{f'(z)(1-|z|^2)}{|z|}$$

$$b_2=\frac{f''(z)(1-|z|^2)^2-2f'(z)(1-|z|^2)\bar z}{2|z|^2}.$$

Wir dividieren $f_2(\zeta)$ durch b_1 und erhalten

$$f_3(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{1}{\zeta^2}+\ldots$$

Die Funktion

$$f_4(\zeta)=f_3\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\zeta+\frac{b_2}{b_1}\cdot\zeta^2+\ldots$$

ist schon in $|\zeta|<1$ regulär und schlicht. Nach dem Bieberbachschen Satze (IV) ist also $\left|\frac{b_2}{b_1}\right|\leqq 2$, d. h.

$$\left|\frac{\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2)-2\bar z}{2|z|}\right|\leqq 2$$

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\,z-\frac{2|z|^2}{|z|^2-1}\right|\leqq\frac{4|z|^2}{|z|^2-1}$$

Daraus entnehmen wir

$$\Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \leqq \frac{6\,|z|^2}{|z|^2-1}$$

$$1+\Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \leqq \frac{7\,|z|^2-1}{|z|^2-1}.$$

Da uns nur diejenigen Punkte z interessieren, für welche die linke Seite dieser Ungleichung positiv ist, können wir auf Grund der Formel (5) auf die Richtigkeit der Ungleichung

$$\Re_\varrho(z) \geqq |f'(z)|\,\varrho\,\frac{\varrho^2-1}{7\,\varrho^2-1}$$

schliessen. Wir schätzen noch $|f'(z)|$ mit Hilfe des Löwnerschen Verzerrungssatzes ab und erhalten

$$\Re_\varrho(z) \geqq \frac{\varrho^3-\varrho}{7\,\varrho^2-1}\cdot\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right) = \frac{(\varrho^2-1)^2}{7\,\varrho^3-\varrho}. \text{ [16])}$$

§ 3.

Wir beschränken uns jetzt auf die folgendermassen erklärte Funktionenklasse: Jedes dieser Klasse angehörende $f(z)$ ist in irgendeinem, den abgeschlossenen Bereich $|z| \geqq 1$ (bzw. $|z| \leqq 1$) im Inneren enthaltenden Bereiche regulär und schlicht. Solche Funktionen wollen wir kurz als „für $|z| \geqq 1$ (bzw. $|z| \leqq 1$) regulär und schlicht" bezeichnen.

Zunächst bemerken wir die folgenden Eigenschaften der in diesem Sinne für $|z| \leqq 1$ resp. für $|z| \geqq 1$ regulären und schlichten Funktionen: 1° Der Kreis K_1 wird auf eine analytische Jordan-Kurve C_1 abgebildet, deren kleinster nach innen gerichteter Krümmungsradius $m_1 > 0$ ist; 2° $\min\limits_{|z|=1} |f'(z)| > 0$; 3° $\operatorname{Max}\limits_{|z|=1} |f''(z)| < \infty$, daher 4° $\min\limits_{|z|=1} \dfrac{|f'(z)|^2}{|f'(z)|+|f''(x)|} > 0.$

[16]) Die sich daraus ergebende Folgerung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\,|a_\nu|^2}{\rho^{2\nu}} \leqq \rho^2 - \frac{(\rho^2-1)^4}{(7\,\rho^3-\rho)^2}$$

verdient nicht besonders hervorgehoben zu werden, da unmittelbar aus dem Bieberbachschen Flächensatze die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\,|a_\nu|^2}{\rho^{2\nu}} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\,|a_\nu|^2}{\rho^{2(\nu-1)}} \leqslant \frac{1}{\rho^2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|a_\nu|^2 \leqslant \frac{1}{\rho^2}$$

folgt, welche überdies scharf ist (das Gleichheitszeichen gilt für $f(z) = z + \frac{1}{z}$).

Für diese besondere Funktionenklasse gelten die folgenden „Flächensätze":

Satz 9.

Voraussetzung: $f(z) = z + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ *ist für* $|z| \geqq 1$ *regulär und schlicht.*

Behauptung: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|a_\nu|^2 \leqq 1 - m_1^2.$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 5 durch einen einfachen Grenzübergang.

Satz 9'.

Voraussetzung: *Wie in Satz 9.*

Behauptung: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu\,|a_\nu|^2 \leqq 1 - \varepsilon_1^2,$

wobei

$$\varepsilon_1 = \min \frac{|f'(z)|^2}{|f'(z)|+|f''(z)|}.$$

Beweis: Durch Grenzübergang $\varrho \to 1$ in Satz 7.

Der Satz 9 hat „geometrischen", Satz 9' „numerischen" Charakter. Auf Grund eines jeden von diesen Flächensätzen kann ein Teil des Löwnerschen Verzerrungssatzes folgendermassen verschärft werden:

Satz 10.

Voraussetzung: $f(z) = z + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ *ist für* $|z| \geqq 1$ *regulär und schlicht.*

Behauptung:
$$|f'(z)| \leqq \frac{1-\dfrac{1-\sqrt{1-m_1^2}}{|z|^2}}{1-\dfrac{1}{|z|^2}}.$$

Beweis:

$$|f'(z)| = \left|1-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\,a_\nu}{z^{\nu+1}}\right| \leqq 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\,|a_\nu|}{|z|^{\nu+1}} = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{\nu}\,|a_\nu|\,\frac{\sqrt{\nu}}{|z|^{\nu+1}} \leqq$$

$$\leqq 1+\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\,|a_\nu|^2}\cdot\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{|z|^{2\nu+2}}}.$$

Nach Satz 9 ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \,|\, a_\nu \,|^2 \leqq 1 - m_1^2 .$$

Man findet ferner

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{|\, z \,|^{2\nu+2}} = \frac{1}{|\, z \,|^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{|\, z \,|^{2\nu-2}} = \frac{1}{|\, z \,|^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|\, z \,|^2}\right)^2} .$$

Aus diesen Beziehungen folgt unmittelbar die Behauptung. Man stellt auch leicht fest, dass für $f(z) = z$ und nur für diese Funktion das Gleichheitszeichen gilt.

Unter Verwendung des numerischen Flächensatzes findet man ebenso

$$|\, f'(z) \,| \leqq \frac{1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{|\, z \,|^2}}{1 - \frac{1}{|\, z \,|^2}} .$$

Herr Bieberbach hat den folgenden, bereits auf S. 171 angeführten Satz bewiesen[17]:

Ist $w = f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ eine in $|\, z \,| > 1$ schlichte Funktion, so liegen alle Randpunkte des Bildbereiches im Kreise $|\, w \,| \leqq 2$.

Für unsere Funktionenklasse kann dieser Satz folgendermassen verschärft werden:

Satz 11.

Voraussetzung: $w = f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$ *ist in* $|\, z \,| \geqq 1$ *regulär und schlicht.*

Behauptung: *Die Punkte w, welche dem Rande oder dem Komplement des Bildbereiches von $|\, z \,| \geqq 1$ angehören, genügen der Ungleichung*

$$|\, w \,| \leqq \sqrt{3 + \sqrt{1 - m_1^2}} .$$

Beweis: Wir betrachten erst einen Punkt w, welcher dem Komplement des Bildbereiches angehört. Es ist also $f(z) \neq w$ für

[17]) l. c. [3]) p. 946. Satz V.

$|\, z \,| \geqq 1$. Deshalb ist $f_1(z) = f(z) - w \neq 0$ und $f_2(\zeta) = \frac{1}{f_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ eine in $|\, \zeta \,| \leqq 1$ reguläre und schlichte Funktion. Die Entwicklung von $f_2(\zeta)$ beginnt mit den Ausdrücken $f_2(\zeta) = \zeta + w\,\zeta^2 + (w^2 - a_1)\,\zeta^3 + \ldots$

Herr Löwner[18]) zeigte, dass der Koeffizient bei ζ^3 in der Entwicklung $\varphi(\zeta) = \zeta + \beta\,\zeta^2 + \gamma\,\zeta^3 + \ldots$ der in $|\, \zeta \,| < 1$ schlichten Funktion $\varphi(\zeta)$ der Ungleichung

$$|\, \gamma \,| \leqq 3$$

genügt. Indem wir diesen Satz auf die Funktion $f_2(\zeta)$ anwenden, erhalten wir

$$|\, w^2 - a_1 \,| \leqq 3 .$$

Andererseits ist nach Satz 9

$$|\, a_1 \,| \leqq \sqrt{1 - m_1^2} .$$

Es ist also

$$|\, w \,|^2 \leqq 3 + |\, a_1 \,| \leqq 3 + \sqrt{1 - m_1^2} .$$

Für Punkte w, welche dem Rande des Bildbereiches angehören, ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung aus dem bisher Bewiesenen durch Grenzübergang.

Unser numerischer Flächensatz würde die Ungleichung

$$|\, w \,| \leqq \sqrt{3 + \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}$$

ergeben.

Wir zeigen noch, dass die als (IV), (I) und (II) angeführten Sätze für unsere Funktionenklasse verschärft werden können.

Satz 12.

Voraussetzung: $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ *ist für* $|\, z \,| \leqq 1$ *regulär und schlicht.*

Bezeichnungen: $\varepsilon = \min_{|z|=1} |\, f'(z) \,|$, $K = \operatorname{Max}_{|z|=1} |\, f''(z) \,|$.

Behauptung: *Es gibt für* $0 < \varepsilon < 1$, $0 \leqq K < \infty$ *definierte Funktionen* $\Phi(\varepsilon, K)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*
1° $\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi(\varepsilon, K) = 1$, 2° *für* $\varepsilon > 0, K < \infty$ *ist* $0 < \Phi(\varepsilon, K) < 1$,
3° *für jede der Voraussetzung genügende Funktion $f(z)$ gilt die Ungleichung*

[18]) K. Löwner: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I., Math. Ann. Bd. 89 (1923), p. 103—121, insbes. p. 121.

$$|a_2| \leqq 2\,\Phi(\varepsilon, K).$$

Insbesondere kann $\Phi(\varepsilon, K) = \sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon^4}{81\,(K+1)^5}}$ *gesetzt werden.*

Beweis: Ist $f(z)$ schlicht, so ist auch $\sqrt{f(z^2)}$ schlicht für $|z| \leqq 1$. Die Funktion

$$F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{f\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)}}$$

ist also regulär und schlicht für $|\zeta| \geqq 1$. Die Entwicklung dieser Funktion in der Umgebung des unendlichfernen Punktes beginnt mit den Ausdrücken

$$F(\zeta) = \zeta - \tfrac{1}{2}\, a_2 \frac{1}{\zeta} + \ldots$$

Um auf $F(\zeta)$ Satz 9' anwenden zu können, berechnen wir

$$\min_{|\zeta|=1} \frac{|F'(\zeta)|^2}{|F'(\zeta)| + |F''(\zeta)|} =$$

$$= \min_{|\zeta|=1} \frac{\left|f'\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)\right|^2}{\left|f'\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)\right|\left|f\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)\right|^{3/2} + \left|-2f\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)f''\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right) + 3f^{1/2}\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)f'^{\,2}\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right) - 3\zeta^2 f^{3/2}\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)f'\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)\right|} \geqq$$

$$\geqq \min_{|z|=1} \frac{|f'(z^2)|^2}{|f'(z^2)|\,|f(z^2)|^{3/2} + 2\,|f(z^2)|\,|f''(z^2)| + 3\,|f(z^2)|^{1/2}\,|f'(z^2)|^2 + 3\,|f(z^2)|^{3/2}\,|f'(z^2)|}$$

Ist $|f''(z)| \leqq K$, so ist $|f'(z)| = \left|\int\limits_0^z f''(z)\,dz + f'(0)\right| = \left|\int\limits_0^z f''(z)\,dz + 1\right| \leqq$

$$\leqq |z| . K + 1,$$

$$|f(z)| = \left|\int\limits_0^z f'(z)\,dz\right| \leqq \frac{K}{2}|z|^2 + |z|,$$

also

$$\min_{|\zeta|=1} \frac{|F'(\zeta)|^2}{|F'(\zeta)| + |F''(\zeta)|} \geqq$$

$$\geqq \frac{\varepsilon^2}{(K+1)\left(\dfrac{K}{2}+1\right)^{3/2} + 2\left(\dfrac{K}{2}+1\right).K + 3\left(\dfrac{K}{2}+1\right)^{1/2}(K+1)^2 + 3\left(\dfrac{K}{2}+1\right)^{3/2}.(K+1)} >$$

$$> \frac{\varepsilon^2}{(K+1)^{5/2} + 2\,(K+1)^{5/2} + 3\,(K+1)^{5/2} + 3\,(K+1)^{5/2}} = \frac{\varepsilon^2}{9\,(K+1)^{5/2}}.$$

Nach Satz 9' genügt der Koeffizient bei $\dfrac{1}{\zeta}$ in der Entwicklung von $F(\zeta)$ der Ungleichung

$$\frac{1}{4}|a_2|^2 \leqq 1 - \frac{\varepsilon^4}{81\,(K+1)^5},$$

also

$$|a_2| \leqq 2\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^4}{81\,(K+1)^5}}.$$

Satz 13.

Voraussetzung: *Wie in Satz 12.*

Behauptung: *Es gibt Funktionen* $\Psi(\varepsilon, K, \varrho)$ *der Zahlen* ε, K, ϱ *(*ε *und* K *haben hier dieselbe Bedeutung, wie in Satz 12) mit den folgenden Eigenschaften:* 1° $0 \leqq \Psi(\varepsilon, K, \varrho) < 1$ *für* $0 < \varepsilon$, $\varrho < 1$, 2° *für jedes der Voraussetzung genügende* $f(z)$ *gelten die Ungleichungen*

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^{2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)} \cdot \frac{1}{1-\varrho^2} \leqq |f'(z)| \leqq \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)} \cdot \frac{1}{1-\varrho^2}$$

$$|\arg f'(z)| \leqq 2\,\Psi(\varepsilon, K, \varrho) . \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$$

für $|z| \leqq \varrho < 1$.

Beweis: Wir wählen einen Punkt z_o, $|z_o| < 1$, dann führen wir in $f(z)$ die Transformation $z = \dfrac{\zeta + z_o}{1 + \bar{z}_o \zeta}$ aus, welche den Einheitskreis in sich selbst und den Punkt z_o in den Punkt $\zeta = 0$ überführt. Die so erhaltene Funktion der Variablen ζ normieren wir und erhalten schliesslich die Funktion

$$\varphi(\zeta) = \frac{f\left(\dfrac{\zeta + z_o}{1 + \bar{z}_o\zeta}\right) - f(z_o)}{f'(z_o).(1 - |z_o|^2)} = \zeta + \beta_2\zeta^2 + \ldots$$

Der Koeffizient bei ζ^2 beträgt

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z_o)(1 - |z_o|^2)}{f'(z_o)} - 2\,\bar{z}_o\right).$$

Um auf $|\beta_2|$ die Ungleichung aus Satz 12 anwenden zu können, müssen wir $\min\limits_{|\zeta|=1} |\varphi'(\zeta)|$ und $\operatorname{Max}\limits_{|\zeta|=1} |\varphi''(\zeta)|$ für $|z_0|<\varrho<1$ abschätzen. Wir finden

$$|\varphi'(\zeta)| = \left| \frac{f'\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\bar z_0\zeta}\right)\frac{1-|z_0|^2}{(1+\bar z_0\zeta)^2}}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)} \right| = \left| \frac{f'\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\bar z_0\zeta}\right)}{f'(z_0)(1+\bar z_0\zeta)^2}\right| \geqq$$

$$\geqq \frac{\varepsilon}{(|z_0|K+1)(1+|z_0|)^2} \geqq \frac{\varepsilon}{(K+1).4}$$

$$|\varphi''(\zeta)| = \left|\frac{f''\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\bar z_0\zeta}\right)(1-|z_0|^2) - f'\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\bar z_0\zeta}\right).2.(1+\bar z_0\zeta)}{f'(z_0).(1+\bar z_0\zeta)^4}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{K+2(K+1).2}{\varepsilon(1-\varrho)^4} < \frac{5(K+1)}{\varepsilon.(1-\varrho)^4}.$$

Nach Satz 12 ist also

$$|\beta_2| = \frac{1}{2} \left|\frac{f''(z_0)(1-|z_0|^2)}{f'(z_0)} - 2\bar z_0\right| \leqq$$

$$\leqq 2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^4.\varepsilon^5(1-\varrho)^{20}}{(K+1)^4.4^4.9^2.5^5.(K+1)^5}} = 2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^9(1-\varrho)^{20}}{(K+1)^9.3^4.4^4.5^5}}$$

für $|z_0|<\varrho<1$.

Wir setzen

$$\Psi(\varepsilon,K,\varrho) = \sqrt{1-\frac{\varepsilon^9(1-\varrho)^{20}}{(K+1)^9.3^4.4^4.5^5}}$$

und haben so die Ungleichung

$$\left|\frac{f''(z_0)(1-|z_0|^2)}{f'(z_0)} - 2\bar z_0\right| \leqq 4\Psi(\varepsilon,K,\varrho).$$

Daraus folgt

$$\left|z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}\right| \leqq \frac{4|z_0|\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}{1-|z_0|^2},$$

also

$$\frac{-4|z_0|\Psi(\varepsilon,K,\varrho)+2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \leqq \Re\left\{z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \leqq \frac{4|z_0|\Psi(\varepsilon,K,\varrho)+2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}$$

$$\frac{-4|z_0|\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}{1-|z_0|^2} \leqq \Im\left\{z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} \leqq \frac{4|z_0|\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}{1-|z_0|^2}$$

Auf Grund der Identitäten

$$\Re\left\{z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} = |z_0|\frac{\partial}{\partial|z_0|}\log|f'(z_0)|$$

$$\Im\left\{z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right\} = |z_0|\frac{\partial}{\partial|z_0|}\arg f'(z_0)$$

ergibt sich daraus

$$\frac{-4\Psi(\varepsilon,K,\varrho)+2|z_0|}{1-|z_0|^2} \leqq \frac{\partial}{\partial|z_0|}\log|f'(z_0)| \leqq \frac{4\Psi(\varepsilon,K,\varrho)+2|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

$$-\frac{4\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}{1-|z_0|^2} \leqq \frac{\partial}{\partial|z_0|}\arg f'(z_0) \leqq \frac{4\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}{1-|z_0|^2}.$$

Die Integration dieser Ungleichungen nach $|z_0|$ von 0 bis $|z_0|$ ergibt

$$-2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} - \log(1-|z_0|^2) \leqq \log|f'(z_0)| \leqq$$

$$\leqq 2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} - \log(1-|z_0|^2),$$

$$-2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} \leqq \arg f'(z_0) \leqq 2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}.$$

Diese Ungleichungen bleiben richtig, wenn man in ihnen $|z_0|$ durch $\varrho>|z_0|$ ersetzt. Dadurch erhält man aber schon

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^{2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}\cdot\frac{1}{1-\varrho^2} \leqq |f'(z_0)| \leqq \left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^{2\Psi(\varepsilon,K,\varrho)}\cdot\frac{1}{1-\varrho^2}$$

$$|\arg f'(z_0)| \leqq 2\Psi(\varepsilon,K,\varrho).\log\frac{1+\varrho}{1-\varrho}.$$

§ 4.

Eine im Gebiete B reguläre Funktion $f(z)$ heisse schlicht im Kleinen in B mit dem Schlichtheitsmodul $\eta>0$, wenn $|f'(z)|\geqq\eta$ für $z\,\varepsilon\,B$. Die Klasse derjenigen Funktionen, welche im Innern des Einheitskreises $|z|<1$ schlicht im Kleinen mit dem Schlichtheitsmodul η sind, bezeichnen wir mit L_η.

Selbstverständlich muss eine Funktion aus L_η nicht schlicht sein.

Satz 14.

Voraussetzung: *$f(z)=z+\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu$ gehört zu L_η.*

Behauptung: *Für* $|z| \leqq \varrho < 1$ *gelten die Ungleichungen*

$$\eta^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}} \leqq |f'(z)| \leqq \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}}$$

$$|\arg f'(z)| \leqq \frac{2\varrho \log \frac{1}{\eta}}{1-\varrho}.$$

Beweis: *Herr Borel*[19]) *hat den folgenden Satz bewiesen:* Ist $\varphi(z)$ im Innern des Einheitskreises regulär und ist ausserdem $\underset{|z|<1}{|\varphi(z)|} \leqq M$, $\underset{|z|<1}{\varphi(z)} \neq 0$, $\varphi(0)=1$, so gelten für $|z| \leqq \varrho < 1$ die Ungleichungen

$$\frac{1}{|\varphi(z)|} \leqq M^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}}, \qquad |\varphi(z)| \leqq M^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}}$$

$$|\arg \varphi(z)| \leqq \frac{2 \log M \cdot \varrho}{1-\varrho}.$$

In unserem Falle ist $f'(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu z^{\nu-1}$, also

$$\frac{1}{f'(0)} = 1, \quad \frac{1}{|f'(z)|} \leqq \frac{1}{\eta}.$$

Es genügt die Borel'schen Ungleichungen auf $\varphi(z) = \dfrac{1}{f'(z)}$ anzuwenden, um die Behauptung zu erhalten.

Es hat also schon jede Klasse L_η einen Verzerrungs- und einen Drehungssatz.

Aus Satz 14 folgert man leicht den folgenden

Satz 15.

Voraussetzung: *Wie in Satz 14.*

Behauptung: 1° $|f(z)| \leqq \int_0^{\varrho} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{2t}{1-t}} dt$ *für* $|z| \leqq \varrho$,

2° *ist* $|f(z_0)| < \int_0^{|z_0|} \eta^{\frac{2t}{1+t}} dt$ *für ein gewisses* z_0,

19) s. z. B. A. Ostrowski: Über den Schottkyschen Satz und die Borel'schen Ungleichungen, Stzgber. kgl. Akad. Berlin 1925, p. 471—478, insbes. p. 476—478.

so ist $f(z)$ *im Kreise* $|z| < |z_0|$ *nicht mehr schlicht, d. h. nimmt dort gewisse Werte mehr als einmal an.*

Beweis: 1° $|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)\, dz\right|$, wobei von 0 bis z geradlinig integriert werden kann. Daher ist

$$|f(z)| \leqq \int_0^{|z|} |f'(z)| \cdot |dz| \leqq \int_0^{\varrho} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{2t}{1-t}} dt.$$

2° den zweiten Teil der Behauptung kann man auch folgendermassen aussprechen: Ist $f(z)$ in einem Kreise $|z| < r \leqq 1$ schlicht, so gilt für $|z| = \varrho < r$ die Ungleichung

$$|f(z)| \geqq \int_0^{\varrho} \eta^{\frac{2t}{1+t}} dt.$$

In dieser Fassung wollen wir den zweiten Teil der Behauptung beweisen. Das Bild des Kreises $|z| = \varrho$ in der w-Ebene ist eine analytische Jordan-Kurve, welche den Nullpunkt im Innern enthält. Es sei w_0 der dem Nullpunkt am nächsten gelegene Punkt dieser Kurve d. h. $|w_0| = \min_{|z|=\varrho} |f(z)|$. Wir verbinden w_0 mit $w=0$ durch eine gerade Strecke. Da $f(z)$ noch im Kreise $|z| < r > \varrho$ schlicht ist, entspricht dieser Strecke in der z-Ebene ein analytischer Jordan-Bogen A, welcher den entsprechenden Punkt z_0 auf der Peripherie des Kreises $|z| = \varrho$ mit $z=0$ verbindet und sonst ganz im Innern dieses Kreises verläuft. Wir schätzen die Länge der w_0 mit $w=0$ verbindenden Strecke ab. Sie ist einerseits gleich $|w_0| = \min_{|z|=\varrho} |f(z)|$, andererseits

$$|w_0| = \int_{0\ \text{geradlinig}}^{|w_0|} |dw| = \int_{\substack{0\\(A)}}^{z_0} \left|\frac{dw}{dz}\, dz\right| = \int_{\substack{0\\(A)}}^{z_0} |f'(z)|\, |dz| \geqq \int_0^{\varrho} |f'(z)|\, d|z| \geqq$$

$$\geqq \int_0^{\varrho} \eta^{\frac{2t}{1+t}} dt.$$

Nennen wir eine Funktion der Klasse L_η, welche ausserdem in $|z| < 1$ schlicht ist, gleichmässig schlicht in $|z| < 1$ mit dem Schlichtheitsmodul η, so ergibt Satz 15 die folgende Konsequenz:

Eine in $|z|<1$ mit dem Schlichtheitsmodul η gleichmässig schlichte Funktion $f(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu$ genügt für $|z|=\varrho<1$ der Ungleichung

$$\int_0^\varrho \eta^{\frac{2\varrho}{1+\varrho}}\, d\varrho \leqq |f(z)| \leqq \int_0^\varrho \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\frac{2\varrho}{1-\varrho}} d\varrho.$$

Den für die Klassen L_η bewiesenen ganz analoge Sätze könnte man auf Grund der Borelschen Ungleichungen auch für die Klassen derjenigen Funktionen beweisen, deren Ableitung im ganzen Einheitskreise von einer festen Zahl beschränkt ist.

§ 5.

In diesem § wollen wir den Grundgedanken eines Beweises des im § 3 verwendeten geometrischen Hilfssatzes darlegen.

Es sei eine parametrische Darstellung der analytischen einfachen geschlossenen Kurve C in der folgenden Form gegeben

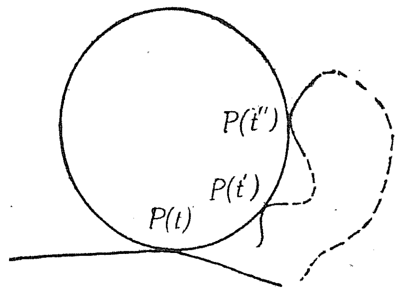
$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \quad 0\leqq t\leqq 2\pi$$
$$\varphi(0)=\varphi(2\pi), \quad \psi(0)=\psi(2\pi).$$

Mit $P(t)$ bezeichnen wir den Punkt von C, welcher dem Parameterwert t entspricht. Jedem $P(t)$ ordnen wir einen Kreis $K(t)$ zu, welcher folgendermassen definiert ist: $K(t)$ ist der grösste C in $P(t)$ berührende Kreis, welcher noch ganz im Innern von C liegt, (genauer: Dessen Inneres noch ganz im Innern von C liegt). Auf jedem $K(t)$ sei die der Richtung der Uhrzeiger entgegengesetzte Richtung als positiver Umlaufssinn festgesetzt. Wir nehmen an, die Richtung der wachsenden Parameter auf C sei auch dem Umlaufssinn der Uhrzeiger entgegengesetzt. Wir behaupten, es gebe unter allen Kreisen $K(t)$ mindestens einen Oskulationskreis von C.

Angenommen, kein $K(t)$ sei ein Oskulationskreis von C. Dann muss also jedes $K(t)$ ausser in $P(t)$ in mindestens noch einem Punkte C berühren; hätte nämlich $K(t)$ nur den Punkt $P(t)$ mit C gemeinsam und liesse sich dennoch durch keinen grösseren Kreis ersetzen, so müsste es ein Oskulationskreis sein. Aus dem analytischen Charakter von C folgt, dass jedes $K(t)$ nur endlich

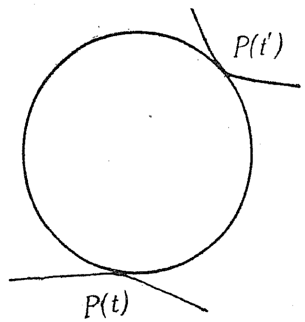
viele Punkte mit C gemeinsam haben kann. Von allen Berührungspunkten des Kreises $K(t)$ mit C fassen wir — ausser $P(t)$ — noch die folgenden zwei besonders ins Auge: 1° den ersten Berührungspunkt, den man von $P(t)$ aus in positiver Richtung auf $K(t)$ gehend antrifft — er heisse $P(t')$; 2° den ersten Berührungspunkt, den man antrifft, wenn man von $P(t)$ aus in positiver Richtung auf C geht — wir bezeichnen ihn mit $P(t'')$.

Wir beweisen, dass $P(t')$ mit $P(t'')$ identisch sein muss. Wäre nämlich $P(t')\neq P(t'')$, so müsste jedenfalls $P(t')$, auf $K(t)$ gerechnet, näher an $P(t)$ liegen als $P(t'')$ (s. Zeichn. 1). Auf C gerechnet, wäre $P(t'')$ näher an $P(t)$ als $P(t')$, d. h. es wäre $t''<t'$. Wir betrachten nun die aus den folgenden zwei Bögen zusammengesetzte Jordan-Kurve J: 1° Von $P(t)$ in der Richtung der wachsenden Parameter auf C bis $P(t'')$, 2° von $P(t'')$ auf $K(t)$ in der negativen Umlaufsrichtung bis $P(t)$. Für nahe an t' gelegene Parameterwerte t würden dann die Punkte der Kurve C im Innern von J liegen und C könnte für $t>t'$ das Innere von J nicht mehr verlassen, was unmöglich ist.



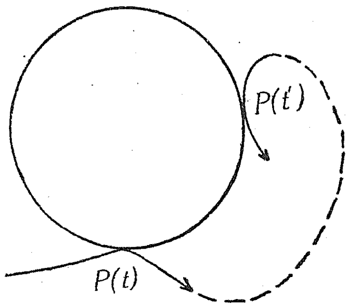
Zeichn. 1.

Wir können also von einem Punkte $P(t')$ sprechen, welcher mit $P(t'')$ zusammenfällt. Die Zahl t' ist eine Funktion von t: $t'=\varphi(t)$, $P(t')=P[\varphi(t)]$. Betrachten wir nun einen beliebigen Kreis $K(t)$, auf ihm die Punkte $P(t)$, $P(t')$, ferner zwei kleine Bögen von C, welche Werten von t aus gewissen Umgebungen von t und t' entsprechen (vgl. Zeichn. 2). Wir behaupten, dass sowohl in $P(t)$ als auch in $P(t')$ die Richtung der wachsenden Parameter auf C mit dem positiven Umlaufssinn auf $K(t)$ identisch ist. Dass dem so ist in $P(t)$, folgt aus der Definition von $K(t)$ (es liegt im Innern von C und berührt C, d. h. man

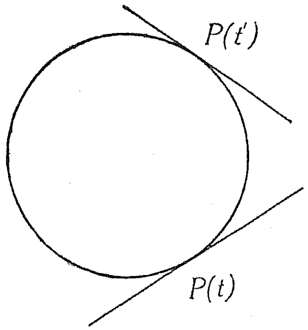


Zeichn. 2.

muss, von $P(t)$ auf C in der Richtung der wachsenden Parameter gehend, das Innere von C und das Innere von $K(t)$ auf derselben Seite haben). Nehmen wir nun an, die Richtung der wachsenden Parameter in $P(t')$ sei dem positiven Umlaufssinn auf $K(t)$ entgegengesetzt (vgl. Zeichn. 3). Dann betrachten wir wiederum die folgendermassen definierte Jordan-Kurve J: Von $P(t)$ mit wachsenden Parametern auf C bis $P(t')$, dann auf $K(t)$ im negativen Umlaufssinn bis $P(t)$. Für Parameterwerte, welche etwas grösser sind als t', tritt C ins Innere von J ein und kann



Zeichn. 3.



Zeichn. 4.

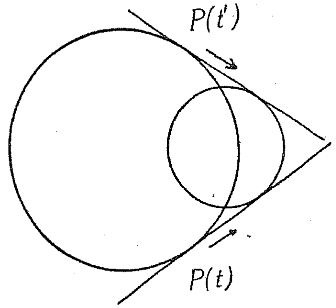
es nicht mehr verlassen. C ist eine analytische Kurve und $K(t)$ ist kein Oskulationskreis (weder in $P(t)$ noch in $P(t')$). Wir ersetzen zwei kleine Bögen auf C um $P(t)$ und $P(t')$ durch Tangentenstücke, d. h. wir betrachten anstatt der Zeichnung 2 die auf Zeichnung 4 dargestellte Figur. Wie leicht einzusehen, würde ein zwischen zwei Geraden eingeschlossener Maximalkreis vom Typus $K(t)$ die Eigenschaft haben, dass bei einer Verschiebung von $P(t)$ in der mit dem positiven Umlaufssinn auf $K(t)$ zusammenfallenden Richtung der Punkt $P(t')$ sich in der zum positiven Umlaufssinn auf $K(t)$ entgegengesetzten Richtung verschieben würde (vgl. Zeichn. 5). Dasselbe gilt also für den Kreis $K(t)$ und die beiden Tangentenstücke auf Zeichnung 4. Da der Unterschied zwischen kleinen Tangentenstücken und kleinen Kurvenbögen in unserem Falle vernachlässigt werden darf, können wir das so deuten, dass bei entsprechend kleinem positiven Zuwachs von t der Parameterwert t' abnimmt.

Wir untersuchen noch das Verhalten von t' bei abnehmendem t. Es sind hier zwei Möglichkeiten vorhanden:

1° Für genügend kleinen negativen Zuwachs von t ändert sich t' stetig. 2° t' ändert sich unstetig, wie klein man auch den negativen Zuwachs von t wählt.

Im Falle 1° ersetzen wir wieder zwei kleine Bögen von C um $P(t)$ und $P(t')$ durch Tangentenstücke und überzeugen uns ähnlich wie vorhin, dass kleinen negativen Zuwächsen von t positive Zuwächse von t' entsprechen.

Im Falle 2° gibt es eine solche Umgebung $U=(t'-\delta,\ t'+\delta)$ der Zahl t' und eine solche Folge $0<\varepsilon_n\to 0$, dass $\varphi(t-\varepsilon_n)$ nicht zu U gehört. Dieser Fall kann nur dann eintreten, wenn $K(t)$ ausser $P(t)$ und $P(t')$ noch andere Berührungspunkte mit C hat. Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass Mittelpunkt und Radius von $K(t)$ sich stetig mit t ändern. Die Richtung desjenigen Radius, welcher $P(t)$ mit dem Mittelpunkt verbindet, ist nämlich dieselbe, wie die Richtung der Normalen zu C in $P(t)$, muss also sogar analytisch von t abhängen; die Entfernung des Mittelpunktes von $K(t)$ vom Punkte $P(t)$ ist aber ersichtlich eine stetige Funktion der Richtung dieses Radius. Die Folge der Punkte $P[\varphi(t-\varepsilon_n)]$ ist beschränkt, eine Teilfolge $P[\varphi(t-\varepsilon_{n_\nu})]$ konvergiert also gegen einen Punkt $P(\bar{t})$, welcher auch nicht in U liegt. Die Punkte $P[(\varphi\, t-\varepsilon_{n_\nu})]$ liegen auf den Kreisen $K(t-\varepsilon_{n_\nu})$, welche gegen den Kreis $K(t)$ konvergieren. Der Punkt $P(\bar{t})$ liegt also auf $K(t)$. Es muss $\bar{t}>t'$ sein, was aus der Definition des Punktes t' folgt. Dieselbe Schlussweise lehrt auch, dass für genügend kleine positive Zuwächse ε von t die Punkte $P[\varphi(t-\varepsilon)]$ in der Umgebung eines der Berührungs-Punkte: $P(t')$ oder $P(\bar{t})$ (dieser letzteren kann es mehrere geben) liegen müssen.



Zeichn. 5.

Jedenfalls ist also für genügend kleines ε: $\varphi(t-\varepsilon)>t'=\varphi(t)$. Jeder Zahl t des Intervalls $\langle 0,\ 2\pi\rangle$ kann also eine solche Umgebung zugeordnet werden, dass in ihr $\varphi(t)$ eine abnehmende Funktion ist. Die Funktion $\varphi(t)$ ist also im ganzen Intervall monoton abnehmend und genügt ausserdem der Ungleichung

$$2\pi \geqq \varphi(t) \geqq t \geqq 0.$$

Es muss also ein solches t_0 existieren, dass $\varphi(t_0) = t_0$ wird. Der Kreis $K(t_0)$ hat dann nur den einen Punkt $P(t_0) = P(t_0')$ mit C gemeinsam, ist also doch ein Oskulationskreis.

Einer von den Kreisen $K(t)$ muss also ein Oskulationskreis sein und hat dann einen Radius $\geqq \varepsilon$ w. z. b. w. [20])

(Reçu par la Rédaction le 25. VI. 1928).

[20]) Zusatz bei der Korrektur:
Wie mich Herr Prof. E. Landau freundlichst aufmerksam machte, ergibt sich Satz 2 ohne den Umweg über Satz 1 durch Anwendung des im Beweise von Satz 1 gebrauchten Koebeschen Verfahrens auf $\mathfrak{J} \log \frac{f(z)}{z}$. Man erhält dann unmittelbar den Wortlaut von Satz 2 mit $\Psi(r) = \frac{4}{\pi} \log \frac{1}{1-\sqrt{r}} \cdot \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$.

Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie de séries orthogonales [1])

par

H. STEINHAUS (Lwów).

En se servant du calcul fonctionnel, comme l'a fait M. Banach dans une Note remarquable concernant les séries orthogonales [2]), on obtient les théorèmes suivants qui contiennent les résultats de la Note citée comme des cas particuliers.

I. Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\overline{\varphi}_n\}$ sont deux suites normées et orthogonales de fonctions continues, dont la seconde est *complète* dans le champ de fonctions continues, et si, en outre, la suite numérique $\{\lambda_k\}$ a la propriété de transformer tout développement formel par rapport aux φ d'une fonction continue [3])

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(\tau)$$

en un développement formel d'une fonction continue

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \overline{\varphi}_k(\tau)$$

par rapport aux $\overline{\varphi}$,
alors la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(\tau)$$

[1]) Les résultats principaux de cette Note ont été l'objet d'une communication au Premier Congrès des Mathématiciens Polonais tenu à Lwów en août 1927.

[2]) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 180, pp. 1637—40, (2 juin 1925).

[3]) Un développement formel est une série dont les coefficients sont obtenus par des formules à la Fourier.