

Ce dernier théorème résulte d'ailleurs directement du théor. du N 4: si l'on décompose l'ensemble  $N$  en ensembles  $N_1 + \dots + N_m$  fermés, disjoints et tels que  $\delta[f(N_i)] < \varepsilon$ , l'égalité

$$A = f(N_1) + \dots + f(N_m)$$

présente la décomposition demandée. De plus, si à la place de  $\varepsilon$  on considère une suite  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$  tendant vers 0, on obtient une suite des décompositions du genre envisagé de façon que les termes de la décomposition  $k + 1$ -ème proviennent d'une subdivision des termes de la  $k$ -ème décomposition<sup>1)</sup>. Il suffit, en effet, de subdiviser les ensembles  $N_1, \dots, N_m$ .

<sup>1)</sup> Pour les décompositions de ce genre, voir Hurewicz Annals, l. c.

## Sur un théorème de Hessenberg<sup>1)</sup>.

Par

Gabriel Sudan (Bucarest).

G. Hessenberg a démontré le théorème suivant:

„Tout nombre initial est un nombre principal additif“.

Dans cette note on va généraliser ce théorème pour une certaine classe de fonctions transfinites:  $f_0; f_1; f_2; \dots f_i \dots$  définies comme il suit:

Soient d'abord  $\beta$  et  $\gamma$  deux nombres ordinaux quelconques et  $f(x)$  une fonction de la variable  $x$ . On désignera par  $\varrho_x(\beta, f(x), \nu)$  la fonction qui satisfait à la récurrence suivante:

$$\begin{cases} \varrho_x(\beta, f(x), 0) = \beta \\ \varrho_x(\beta, f(x), \nu + 1) = f(\varrho_x(\beta, f(x), \nu)) \\ \varrho_x(\beta, f(x), \lim\{\gamma\}) = \lim_{\gamma} \{\varrho_x(\beta, f(x), \gamma)\}. \end{cases}$$

Les valeurs de  $\varrho_x$  sont donc des itérations répétées de la fonction  $f(x)$ , la valeur initiale étant  $\beta$ . On pose maintenant:

$$f_0 \equiv f_0(\alpha_0, \nu) \equiv \alpha_0 + \nu;$$

et pour  $i > 0$ :

$$f_i \equiv f_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \alpha_i, \nu) \equiv \varrho_x(\beta_i, f_{i-1}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, x, \alpha_i), \nu)^2).$$

<sup>1)</sup> La présente note est en étroite liaison avec un travail publié dans les Math. Annalen Vol. 105: „Zur Jacobsthal'schen transfiniten Arithmetik“ et qui sera désigné dans la suite simplement par Z. J. tr. A. Pour tout ce qui concerne les notations que nous employons ici, le lecteur trouvera, dans le travail mentionné, les explications nécessaires.

<sup>2)</sup> Z. J. tr. A. Pag. 40.



ce qui prouve que le nombre cardinal correspondant à la valeur de la fonction  $f_{i+1}$  est le même que celui qui correspond au plus grand de ses paramètres.

Les nombres principaux de  $f_i$ , rangés par ordre de grandeur, constituent un ensemble bien-ordonné. Dans le cas où la suite  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$ , ne contient que des nombres finis, le premier élément de cet ensemble est  $\omega$ . On peut donc désigner les nombres principaux de  $f_i$  par une seule lettre, par ex.  $\xi$ , affectée de deux indices:  $\xi_\alpha^i \cdot i$  indique que  $\xi_\alpha^i$  est nombre principal de  $f_i$ , et  $\alpha$  est le nombre ordinal de l'ensemble formé par les nombres principaux de  $f_i$  plus petits que  $\xi_\alpha^i$ . On a par ex.:  $\xi_0^i = \omega$ . L'indice  $\alpha$  jouit de la propriété suivante:

Si  $\alpha$  est un nombre limite, par ex.:  $\alpha = \lim \{\gamma\}$  on a:

$$\xi_\alpha^i = \lim \{\xi_\gamma^i\}.$$

En effet, la limite d'une suite de nombres principaux de  $f_i$  est encore un nombre principal de cette fonction<sup>1)</sup>. Soit alors:

$$\xi_\beta^i = \lim \{\xi_\gamma^i\}.$$

Le nombre  $\beta$  est plus grand que tous les éléments de la suite  $\{\gamma\}$ . Il est donc plus grand ou au moins égal à sa limite:

$$\beta \geq \alpha.$$

D'autre part, de  $\alpha = \lim \{\gamma\}$ , on déduit:

$$\xi_\alpha^i > \xi_\gamma^i$$

pour tout  $\gamma$ , élément de  $\{\gamma\}$ .  $\xi_\alpha^i$  est donc plus grand ou au moins égal à la limite de la suite  $\{\xi_\gamma^i\}$ . C'est-à-dire:

$$\xi_\alpha^i \geq \xi_\beta^i,$$

ce qui entraîne

$$\alpha \geq \beta.$$

On aura donc:

$$\alpha = \beta.$$

**Lemme II.** Tout nombre principal  $\xi_\alpha^i$  de  $f_i$  ( $2, 2, \dots, 2, \alpha_i, \nu$ ) appartient à la même classe de nombres que son indice  $\alpha$  si cet indice

est plus grand ou au moins égal à  $\omega$ . Dans le cas où  $\alpha$  est un nombre fini, le nombre  $\xi_\alpha^i$  est dénombrable.

En effet, on peut démontrer<sup>1)</sup> que l'on a:

$$\xi_\alpha^i = f_{i+2}(2, 2, \dots, 2, \omega \cdot \alpha).$$

Done, pour  $\alpha \geq \omega$ , on aura, d'après le lemme I:

$$|\xi_\alpha^i| = |\omega \cdot \alpha| = |\alpha|;$$

et, pour  $\alpha < \omega$ :

$$|\xi_\alpha^i| = |\omega \cdot \alpha| = |\omega|.$$

Considérons maintenant un nombre initial quelconque  $\Omega$ , et le nombre principal  $\xi_\Omega^i$  qui a pour indice ce nombre initial. On a évidemment:

$$\xi_\Omega^i \geq \Omega.$$

Considérons, d'autre part, la suite  $\{\xi_\gamma^i\}$  formée par tous les nombres principaux de  $f_i$  dont l'indice est plus petit que  $\Omega$ . On a:

$$\xi_\Omega^i = \lim \{\xi_\gamma^i\} \quad (\gamma < \Omega).$$

De  $\gamma < \Omega$  on déduit, à l'aide du lemme II,

$$|\xi_\gamma^i| < |\Omega|$$

ce qui veut dire:

$$\xi_\gamma^i < \Omega.$$

La limite de la suite  $\{\xi_\gamma^i\}$  sera donc aussi plus petite ou tout au plus égale à  $\Omega$ . C'est-à-dire:

$$\xi_\Omega^i \leq \Omega.$$

Done:

$$\xi_\Omega^i = \Omega,$$

et le théorème est démontré.

<sup>1)</sup> Z. J. tr. A. Pag. 50.

<sup>1)</sup> Pour plus de précision nous supposons  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_i = 2$ .

<sup>2)</sup> Z. J. tr. A. Pag. 44.