Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes.

Par

St. Kierst et E. Szpilrajn (Varsovie).

Introduction.

Comme on sait, il existe des théorèmes qui permettent de prouver que parmi les fonctions *holomorphes dans le cercle-unité U* celles qui sont prolongeables au delà de U constituent une classe moins vaste que les fonctions non prolongeables.

Un théorème de ce type a été obtenu par M. Pólya [1]) qui a traité la classe des fonctions holomorphes dans U comme un certain espace (ajoutons: d'une nature assez particulière) et qui a démontré que celles parmi ces fonctions qui peuvent être prolongées constituent dans cet espace un ensemble non dense.

Or, la classe des fonctions holomorphes dans U peut être traitée comme un espace (L) de M. Fréchet et ceci d'une façon tout-à-fait naturelle: on considère une suite f_n comme convergente vers f lorsqu'elle tend vers f uniformément sur tout cercle $|z|\leqslant r$, où $0<r<1$. Désignons cet espace par $\mathcal{H}$. M. Fréchet a demontré dans sa *Thèse* que l'espace $\mathcal{H}$ est métrisable d'une façon complète [2]).

Il résulte du théorème bien connu de Runge que les polynômes (donc, à plus forte raison, les fonctions prolongeables au delà de U) constituent un ensemble dense dans $\mathcal{H}$. Or, M. Mazurkiewicz a posé le problème d'examiner *la catégorie* (au sens de Baire) de l'ensemble des fonctions non prolongeables et il a démontré que cet ensemble est résiduel dans $\mathcal{H}$ [1]).

[1]) Pólya [1] (voir la liste des ouvrages cités).

[2]) Fréchet [1], pp. 46 et 47.

Nous considérons dans la note présente quelques autres singularités et nous obtenons des résultats analogues [2]). Le théorème de M. Mazurkiewicz est une conséquence immédiate de nos théorèmes 4·1.

Dans le livre de M. Bieberbach [3]) on trouve l'exemple (construit au moyen du théorème de Runge) d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans U qui possède la propriété suivante: $\lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{i\vartheta})$ n'existe pour aucun ϑ $(0\leqslant\vartheta<2\pi)$. Remarquons d'abord qu'en modifiant un peu la construction [4]), on arrive à une singularité plus forte. On obtient notamment une *fonction qui transforme tout rayon de U en un ensemble dense dans tout le plan.* Cette propriété est le premier objet de nos considérations.

Nous nous occupons ensuite d'une autre singularité, en considérant des *fonctions qui prennent toute valeur complexe dans tout secteur de U.*

En nous appuyant sur le théorème de Runge (qui est appliqué aussi dans la construction de M. Bieberbach), nous démontrons que *les fonctions possédant ces deux singularités constituent un ensemble résiduel dans $\mathcal{H}$.* (4·1).

Après avoir obtenu ces résultats, nous nous sommes occupés des problèmes analogues pour les fonctions entières (grâce aux remarques de M. Lindenbaum) et pour les fonctions méromorphes dans le plan (d'après les indications de M. Saks). Dans ce qui suit l'ordre des considérations est changé: nous traitons d'abord en détail les fonctions entières et passons aux derniers paragraphes aux fonctions holomorphes dans U et méromorphes dans tout le plan.

Il existe certains rapports entre nos résultats et les recherches de divers auteurs concernant pour la plupart les fonctions *entières.*

[1]) Ce résultat a été précédé par un autre, dû à Mme Świętochowska-Żukowska, qui a démontré, en suivant les idées de M. Mazurkiewicz, que les fonctions non prolongeables constituent un ensemble résiduel dans l'espace des fonctions holomorphes dans U, uniformément bornées. Les résultats de Mme Świętochowska-Żukowska et de M. Mazurkiewicz n'ont pas été publiés.

[2]) Les résultats contenus dans cette note ont été signalés (sans demonstrations) dans les C. R. **196** (1933), p. 1453, séance du 15 mai 1933.

[3]) Bieberbach [1]. pp. 152—155.

[4]) Il suffit de remplacer la suite $0, 1, 0, 1, \dots$ par une suite de nombres complexes, dense dans le plan.

M. Borel suggère dans les C. R. [1]) une idée suivante:

„Considérons, pour simplifier, une fonction entière $Z = F(z)$ et supposons que la variable z s'éloigne à l'infini suivant un chemin non singulier, une ligne droite pour fixer les idées; le point Z décrira une certaine courbe: on doit regarder, comme étant le cas général, le cas où cette courbe remplit tout le plan, c.-à-d. passe une infinité de fois aussi près qu'on veut de tout point du plan".

Or, les résultats du § 2 (en particulier 2·4 et 2·5) peuvent être considérés comme précisant cette opinion de M. Borel.

Les résultats du § 3 sont liés avec certains ouvrages concernant des problèmes qui se rattachent au théorème de Picard. On considère parfois dans ces ouvrages diverses directions singulières. Un nombre $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$ s'appelle *une direction* (P) (de Picard) [2]) d'une fonction entière lorsque dans tout secteur $\vartheta - \varepsilon < \arg z < \vartheta + \varepsilon$ cette fonction prend toute valeur complexe une infinité de fois sauf une valeur exceptionelle au plus. Les fonctions pour lesquelles toute direction est une direction (P) ont été étudiées par certains auteurs [3]). Or, appelons un nombre $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$ *une direction* (P^*) de $f(z)$ lorsqu'elle prend dans chaque secteur $\vartheta - \varepsilon < \arg z < \vartheta + \varepsilon$ toute valeur complexe (sans exception) une infinité de fois. Il résulte de nos théorèmes du § 3 (en particulier de 3·5) que *les fonctions pour lesquelles chaque direction est une direction (P^*) constituent un ensemble résiduel dans l'espace des fonctions entières.*

D'ailleurs nous obtenons des résultats analogues, en examinant certaines singularités plus fortes. Nous considérons notamment (en suivant la ligne des recherches de certains auteurs — cf. p. ex. Biernacki [1], p. 545) les équations $f(z) - r(z) = 0$, où $r(z)$ est une fonction rationelle arbitraire, au lieu de $f(z) - a = 0$. De plus nous ne nous bornons pas aux secteurs et nous considérons une famille d'ensembles beaucoup plus vaste.

Remarquons encore que l'un de nos résultats (3·7) est lié avec une question posée par M. Bloch.

Au § 5 nous examinons les fonctions *méromorphes*. Il est clair que dans ce champ on peut obtenir des singularités plus fortes que

[1]) Borel [1].

[2]) d'après la terminologie de M Valiron. On appelle aussi ces directions „directions (J)" (de Julia). En accord avec M. Valiron, nous réservons ici cette dernière dénomination à une autre notion (cf. 3·7).

[3]) Cf. Pólya [2], pp. 622 et 627, Biernacki [1], p. 576.

dans les champs précédents. La propriété énoncée dans le numéro 5·2 est déja connue: c'est M. Gross qui a construit une fonction possédant cette singularité.

Tous nos résultats principaux sont de type suivant: les fonctions possédant certaine propriété constituent dans un espace fonctionnel un ensemble résiduel. Vu 1° que tout sous-ensemble résiduel d'un espace métrique complet est non vide (0·1), 2° que les espaces considérés sont métrisables d'une façon complète (0·6) — *nos théorèmes donnent a fortiori les démonstrations de l'existence des fonctions possédant les singularités en question.*

Ajoutons que le passage de nos démonstrations aux constructions particulières ne présente que des difficultés purement techniques. Néanmoins, il paraît intéressant de donner d'une façon tout-à-fait explicite (p. ex. par des coëfficients de série de Taylor) des exemples des fonctions possédant des propriétés considérées dans cette note. Nous devons à M. Zygmund un tel exemple d'une fonction pour laquelle toute direction est une direction (P^*) (3.6). Le problème de trouver des exemples analogues pour des autres singularités reste ouvert.

Il est enfin à remarquer que dans chacun des espaces envisagés les fonctions qui possèdent toutes les singularités considérées à la fois constituent de même un ensemble résiduel, car le produit d'un nombre fini (ou dénombrable) d'ensembles résiduels est aussi un ensemble résiduel.

Termes, notations et remarques préliminaires.

0·1 *Espaces* (L) *et espaces métriques.* Nous supposons ces notions [1]) connues au lecteur.

E étant un espace (L), on dit qu'il est ***métrisable*** lorsqu'on peut établir une métrique dans E telle que la convergence selon cette métrique et la convergence primitive dans E soient équivalentes.

(x, y) désignant la distance entre deux élements x et y d'un espace métrique M, on dit que cet espace est ***complet*** lorsque pour toute suite x_n d'éléments de M, la relation $\lim_{m,n\to\infty} (x_m, x_n) = 0$ (la condition de Cauchy) entraîne la convergence de x_n.

E étant un espace (L), un sous-ensemble Z de E est dit ***résiduel*** (dans E) lorsqu'il contient un ensemble qui est un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts, denses dans E (ou bien: lorsque $E - Z$ est de première catégorie [au sens de Baire] dans E).

Un ensemble contenant un ensemble résiduel, de même qu'un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles résiduels — sont des ensembles résiduels. Un sous ensemble résiduel d'un espace métrique complet non-vide (et, par conséquent, d'un espace (L) non-vide, métrisable d'une façon complète) est un ensemble non-vide (et partout dense) [1]).

[1]) Cf. p. ex. Hausdorff [1], pp. 94 et 142.

0·2. *Ensembles plans.* E_1 et E_2 étant deux ensembles plans, $\varrho(E_1, E_2)$ désigne sa distance, c.-à-d. la borne inférieure des nombres $|z_1 - z_2|$ pour $z_1 \epsilon E_1$, $z_2 \epsilon E_2$. CE désigne le complémentaire de l'ensemble E.

Chaque ensemble ouvert et connexe s'appelle *domaine*; sa fermeture—*domaine fermé* Un ensemble E *divise le plan* lorsque CE n'est pas connexe. Cet ensemble *divise le plan entre* x *et* y, lorsque x et y appartiennent à deux composants différents de CE.

Le cercle-unité $|z| < 1$ sera désigné par U. Un sous-ensemble E de U *s'approche indéfiniment de la frontière de* U, lorsqu'il existe au moins un point d'accumulation de E, appartenant à la frontière de U.

Une image homéomorphe d'une demi-droite, s'appelle *rayon topologique*. Un rayon topologique situé sur le plan resp. dans U *tend vers l'infini*, resp. *vers la frontière de* U, lorsqu'il est fermé, resp. fermé dans U.

Une suite E_n d'ensembles plans *tend vers l'infini* lorsque pour tout nombre $r > 0$ tous les ensembles E_n pour n suffisamment grands sont contenus dans le domaine $|z| > r$.

0·3. *Fonctions.* Soit $f(x)$ une fonction définie sur un ensemble X. Pour $E \subset X$ on désigne par $f(E)$ l'ensemble de tous les $f(x)$ pour $x \epsilon E$.

$f(z)$ étant une fonction complexe définie pour tout z complexe, resp. pour tout $z \epsilon U$, on dit qu'un nombre complexe a (fini ou non) est *une valeur asymptotique de* $f(z)$, lorsqu'il existe un rayon topologique tendant vers l'infini, resp. vers la frontière de U, sur lequel $f(z)$ tend vers a.

Z étant un ensemble plan, on dit qu'une fonction complexe $f(z)$ est holomorphe *sur* Z lorsqu'elle peut être prolongée sur un ensemble ouvert $G \supset Z$, en formant une fonction holomorphe dans G.

$\varphi(x)$ étant une fonction réelle, $\operatorname*{Max}_{x \epsilon X} \varphi(x)$ désigne la borne supérieure de $\varphi(x)$ sur X.

0·4. *Convergence uniforme des fonctions méromorphes.* Pour deux nombres complexes z_1, z_2 finis ou non $|z_1, z_2|$ désigne la distance sphérique des projections stéréographiques de z_1 et z_2 sur une sphère fixe.

Une suite $m_n(z)$ de fonctions méromorphes est dite *uniformément convergente* vers $m(z)$, sur un ensemble E lorsqu'il existe pour tout $\eta > 0$ un nombre N tel qu'on ait $|m_n(z), m(z)| < \eta$ pour tout $n > N$ et $z \epsilon E$[1]).

Cette notion de la convergence uniforme est compatible avec la notion de la convergence uniforme des fonctions holomorphes. Si une suite de fonctions méromorphes $m_n(z)$ tend uniformément vers une fonction méromorphe $m(z)$ qui n'a pas de pôles sur un ensemble F fermé et borné, alors $m_n(z)$ ne possèdent pas de pôles sur F pour n suffisamment grands et elles convergent vers $m(z)$ uniformément sur F dans le sens ordinaire. Inversement: une suite de fonctions holomorphes uniformément convergente (sur E) sera aussi uniformément convergente, si l'on considère ces fonctions comme méromorphes.

Si une suite $m_n(z)$ de fonctions méromorphes tend uniformément vers $m(z)$

[1]) Voir p. ex. Hausdorff [1], p. 142; Hahn [1], p. 134.
[2]) Cf. Ostrowski [1], p. 232.

(sur E), alors $\dfrac{1}{m_n(z)}$ tend uniformément vers $\dfrac{1}{m(z)}$ (sur E). Ensuite, si deux suites de fonctions méromorphes $M_n(z)$ et $m_n(z)$ tendent uniformément vers $M(z)$ et $m(z)$ (sur E) et si, en outre, $M(z)$ est finie dans les points où $m(z)$ s'annule et vice versa — alors la suite $M_n(z) \cdot m_n(z)$ tend uniformément vers $M(z) \cdot m(z)$ (sur E)[1]).

0·5. *Approximation.* Citons les théorèmes sur l'approximation des fonctions holomorphes et méromorphes par les polynômes et les fonctions rationnelles:

Théorème de Runge: Pour toute fonction $f(z)$ holomorphe dans un ensemble ouvert G ne divisant pas le plan, il existe une suite de polynômes qui tend vers $f(z)$ uniformément sur tout sous-ensemble fermé de G.

Théorème: Pour toute fonction $f(z)$ méromorphe dans un ensemble ouvert G, il existe une suite de fonctions rationnelles qui tend vers $f(z)$ uniformément sur tout sous-ensemble fermé de G.

0·6. *Espaces fonctionnels.* Désignons par $\mathcal{G}$ la classe des fonctions entières, par $\mathcal{H}$ celle des fonctions holomorphes dans U, par $\mathfrak{M}$ celle des fonctions méromorphes dans tout le plan. Nous traiterons ces classes comme espaces (L): une suite f_n sera considérée convergente vers f (en symboles: $f_n \rightrightarrows f$) lorsque $f_n(z)$ tend vers $f(z)$ uniformément sur tout cercle, resp. sur tout cercle $|z| < r$ (où $0 < r < 1$).

Les espaces $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{M}$ sont métrisables d'une façon complète (ils sont aussi séparables, ce qui pour nous n'est pas essentiel). Posons pour tout nombre $a \geqslant 0$

$$a^* = \frac{a}{1+a}.$$

Voici les définitions correspondantes de la distance[2]):

$$(g_1, g_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname*{Max}_{|z| \leqslant n} |g_1(z) - g_2(z)|^*$$

$$[h_1, h_2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname*{Max}_{|z| \leqslant 1 - \frac{1}{n}} |h_1(z) - h_2(z)|^*$$

$$\{m_1, m_2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname*{Max}_{|z| \leqslant n} |m_1(z), m_2(z)|$$

0·7. **Lemme.** Prémisses: Soient: D un domaine borné, dont la frontière est une courbe simple fermée rectifiable F, $f(z)$ et $g(z)$ fonctions holomorphes sur $D + F$. Supposons que $f(F)$ est la frontière de $f(D)$ et que

(1) $$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad z \epsilon F,$$

où ε est un nombre positif fixe.

[1]) Cf. Ostrowski [1], p. 226.
[2]) Cf. Fréchet [2], p. 87 et [1] p. 45. Ajoutons que cette méthode de métrisation des espaces fonctionnels peut être généralisée. On peut énoncer sur ce sujet certains théorèmes généraux.

Thèse: La fonction $g(z)$ prend dans D toute valeur u telle que $\varrho(Cf(D),(u))>\varepsilon$.

Démonstration. On a par l'hypothèse

$$\varrho(Cf(D),\,(u))>\varepsilon. \tag{2}$$

Posons

$$\varphi(z)=f(z)-u$$
$$\psi(z)=g(z)-f(z).$$

La relation (2) entraîne $|\varphi(z)|\geqslant\varepsilon$ pour $z\in F$; d'autre part $|\psi(z)|<\varepsilon$ d'après (1).

La fonction $\varphi(z)$ possède un zéro au moins dans D, donc la fonction $\varphi(z)+\psi(z)=g(z)-u$ y possède de même un zéro au moins, en vertu du théorème de Rouché

§ 1. Fonctions entières: Lemme fondamental.

1·1. ***Lemme.*** $g_n(z)$ étant une suite arbitraire de fonctions entières et z_n une suite de nombres complexes, les relations $g_n\rightrightarrows g_0$ et $z_n\to z_0$ entraînent $g_n(z_n)\to g_0(z_0)$.

Démonstration. Les fonctions $g_n(z)$ tendent vers $g_0(z)$ uniformément sur la suite z_n. Par conséquent, η étant un nombre positif quelconque, on a

$$|g_n(z_k)-g_0(z_k)|<\frac{\eta}{2}\quad pour\quad k=1,2\ldots\quad et\quad n>N.$$

On a d'autre part

$$|g_0(z_k)-g_0(z_0)|<\frac{\eta}{2}\quad pour\quad k>M,$$

donc

$$|g_n(z_n)-g_0(z_0)|<\eta\quad pour\quad n>\mathrm{Max}\,(N,M).$$

1·2. ***Lemme.*** Prémisses: Soient: F un ensemble plan fermé et borné, $f_0(z)$ une fonction complexe continue sur F, ε un nombre positif.

Thèse: La classe $\mathcal{G}^0$ des fonctions entières $g(z)$ telles que

$$|f_0(z)-g(z)|<\varepsilon\quad pour\ tout\quad z\in F$$

constitue un ensemble ouvert dans $\mathcal{G}$.

Démonstration. Supposons $g_n\rightrightarrows g_0$ et $g_n\,\bar{\epsilon}\,\mathcal{G}_0$ pour $n=1,2\ldots$ Il existe donc une suite z_n telle qu'on a toujours $z_n\in F$ et

$$|f_0(z_n)-g_n(z_n)|\geqslant\varepsilon.$$

Soit z_{k_n} une suite partielle convergente vers un point $z_0\in F$. La fonction $f_0(z)$ étant continue sur F, on a — en vertu de 1·1 —

$$|f_0(z_0)-g_0(z_0)|\geqslant\varepsilon$$

et par conséquent $g_0\,\bar{\epsilon}\,\mathcal{G}^0$

1·3. ***Lemme fondamental***[1]. Prémisses: *Soient: G_n une suite tendant vers l'infini d'ensembles ouverts bornés, dont aucun ne divise le plan; F_n une suite de sous-ensembles fermés de G_n; $f(z)$ une fonction holomorphe dans $\sum_{n=1}^{\infty}G_n$. Soit enfin $\mathcal{G}^*$ la classe de fonctions entières définie comme il suit: $g\in\mathcal{G}^*$, lorsqu'il existe une suite croissante j_n de nombres naturels telle qu'on a*

$$|g(z)-f(z)|<\frac{1}{j_n}\quad pour\ tout\quad z\in F_{j_n}\quad et\quad n=1,2\ldots$$

Thèse: *$\mathcal{G}^*$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Désignons par $\mathcal{G}_n$ la classe des fonctions entières telles que

$$|g(z)-f(z)|<\frac{1}{n}\quad pour\quad z\in F_n$$

et posons

$$\mathcal{G}^{(j)}=\sum_{n=j}^{\infty}\mathcal{G}_n.$$

En vertu de 1·2 les ensembles $\mathcal{G}_n$, donc aussi $\mathcal{G}^{(j)}$, sont ouverts. Comme on a

$$\mathcal{G}^*=\prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{G}^{(j)},$$

il suffit de démontrer que les ensembles $\mathcal{G}^{(j)}$ sont denses dans G.

Soit donc $g(z)$ une fonction entière et j un nombre naturel.

k étant un nombre naturel quelconque, il existe un nombre n_k tel que tous les ensembles G_n pour $n\geqslant n_k$ sont contenus dans le domaine $|z|>k+1$. Posons encore $l=\mathrm{Max}\,(n_k,j)$. L'ensemble composé de G_{l_k} et du cercle $|z|<k+\frac{1}{2}$ ne divise pas le plan, donc, en vertu du théorème de Runge, il existe un polynome $p_k(z)$ tel qu'on ait en même temps

$$|p_k(z)-g(z)|<\frac{1}{k}\qquad pour\quad |z|\leqslant k \tag{1}$$

[1]) Pour nos démonstrations ce lemme joue à peu près un tel rôle qu'un théorème énoncé par M Ostrowski ([2], p. 65) pour les constructions particulières.

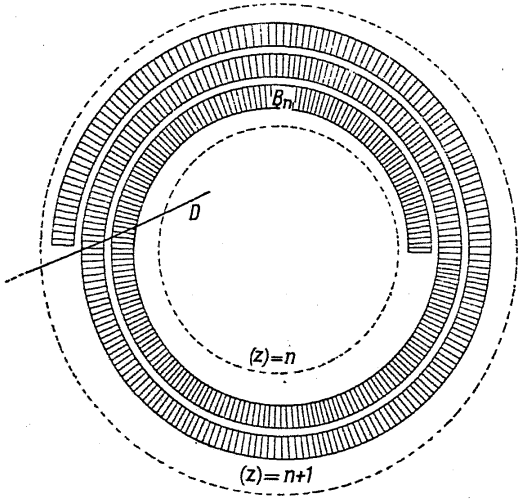
et

(2) $$|p_k(z) - f(z)| < \frac{1}{l_k} \qquad \textit{pour} \quad z \in F_{l_k}.$$

La relation (2) entraîne: $p_k \in \mathcal{G}^{(J)}$ et la relation (1) (pour $k = 1, 2 \ldots$): $p_k \rightrightarrows g$.

§ 2. Fonctions entières: Fonctions qui transforment toute demi-droite en un ensemble dense dans le plan.

2·1 ***Définitions.*** Nous désignons par B_n les domaines fermés contenus respectivement dans les couronnes $n < |z| < n+1$ et de la forme montrée sur la figure.



$\mathcal{G}^{\mathrm{I}}(z_0)$ sera une classe de fonctions entières définie comme il suit: $g \in \mathcal{G}^{\mathrm{I}}(z_0)$ s'il existe une suite croissante k_n de nombres naturels telle qu'on ait

$$|g(z) - z_0| < \frac{1}{k_n} \quad \textit{pour} \quad z \in B_{k_n} \quad \textit{et} \quad n = 1, 2 \ldots$$

$\mathcal{G}^{\mathrm{I}}$ désignera la classe des fonctions entières $g(z)$ satisfaisant à la condition suivante: z_n étant une suite de nombres complexes telle que $z_n \in B_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$, la suite $g(z_n)$ est dense dans le plan.

La classe des ensembles plans, dont chacun est a) connexe, b) non borné, c) disjoint d'une demi-droite arbitraire — sera désignée par $\mathbf{P}$. (Cette classe contient donc chaque demi-droite).

La classe des fonctions entières qui transforment tout ensemble appartenant à $\mathbf{P}$ en un ensemble dense dans le plan, sera désignée par $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}$.

2·2 ***Théorème.*** *$\mathcal{G}^{\mathrm{I}}$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

D é m o n s t r a t i o n. En vertu du 1·3 l'ensemble $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}(z_0)$ est résiduel dans $\mathcal{G}$ pour tout z_0 complexé. Soit w_n une suite de nombres complexes dense dans le plan. Notre théorème résulte immédiatement de l'inclusion suivante:

$$\mathcal{G}^{\mathrm{I}} \supset \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^{\mathrm{I}}(w_n).$$

2·3. ***Lemme.*** La relation $P \in \mathbf{P}$ entraîne $PB_n \neq 0$ pour $n > N$.

D é m o n s t r a t i o n. Comme $P \in \mathbf{P}$, il existe une demi-droite D, disjointe de P. Soit N un nombre naturel tel que

$$N > \mathrm{Max}\,[\varrho(P, (0)),\ \varrho(D, (0))].$$

Supposons $n > N$. L'ensemble $B_n + D$ divise le plan entre tous les points ξ_1 et ξ_2 tels que $|\xi_1| < n < n+1 < |\xi_2|$ (comparer la figure).

L'ensemble P contient des tels couples de points, il est connexe et il est disjoint de D; par conséquent $PB_n \neq 0$.

2·4. ***Théorème.*** *$\mathcal{G}^{\mathrm{II}}$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Cela résulte de 2·2 et de l'inclusion $\mathcal{G}^{\mathrm{II}} \supset \mathcal{G}^{\mathrm{I}}$ que nous allons démontrer. Supposons donc $g \,\overline{\in}\, \mathcal{G}^{\mathrm{II}}$. Il existe donc un ensemble $P \in \mathbf{P}$ tel que $g(P)$ n est pas dense dans le plan. En vertu de 2·3, il existe N tel qu'on ait $PB_n \neq 0$ pour $n > N$. Désignons donc par z_n pour $n > N$ un point arbitraire de PB_n et pour $n \leqslant N$ un point arbitraire de B_n. La suite $g(z_n)$ n'étant pas dense dans le plan, $g \,\overline{\in}\, \mathcal{G}^{\mathrm{I}}$.

2·5. On peut demander si le théorème 2·4 reste vrai quand on rejette la condition c) de la définition de la classe $\mathbf{P}$. Or, la réponse est négative. D'après le théorème de MM. I v e r s e n et G r o s s[1].

[1] Voir I v e r s e n [1], p. 23; G r o s s [1], p. 10. Cf. aussi B i e b e r b a c h [1], p. 285.

toute fonction entière a l'infini comme une valeur asymptotique. Par conséquent *il existe pour toute fonction entière* $g(z)$ *un rayon topologique* T *tel que l'ensemble* $g(T)$ *est non dense dans le plan.*

§ 3. Fonctions entières: Fonctions qui prennent toute valeur complexe dans chaque secteur du plan.

3·1. ***Définitions.*** Posons

$$\mathfrak{z}_m^{(n)} = n\, e^{\pi i \frac{m}{2^n}}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ et $m = 1, 2, \ldots 2^n$.

Le cercle $|z - \mathfrak{z}_m^{(n)}| < \frac{1}{2^n}$ sera désigné par $K_m^{(n)}$

$\mathcal{F}$ étant une famille arbitraire de fonctions complexes dont chacune est définie à l'extérieur d'un cercle, nous définissons la classe $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F})$ comme il suit: $g \in \mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F})$ s'il existe pour toute fonction $\psi(z) = g(z) - \varphi(z)$ (où $\varphi \in \mathcal{F}$) une suite croissante l_n de nombres naturels telle que l'ensemble $\psi(K_m^{(l_n)})$ contienne le cercle $|z| < l_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $m = 1, 2, \ldots 2^{l_n}$.

Soit $\mathbf{R}$ la classe d'ensembles plans définie comme il suit: $R \in \mathbf{R}$, s'il existe un sous-ensemble S de R, connexe, non borné et tel que $\varrho(S, CR) > 0$ (La classe $\mathbf{R}$ contient donc tous les secteurs du plan).

La classe des fonctions entières $g(z)$ telles que l'équation $g(z) - \varphi(z) = 0$ possède une infinité de racines dans tout ensemble $R \in \mathbf{R}$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}$ — sera désignée par $\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(\mathcal{F})$.

Convenons de dire qu'une famille de fonctions $\mathcal{F}$ satisfait à la condition (b), si toutes les fonctions de cette famille sont définies et holomorphes à l'extérieur d'un certain cercle et lorsque cette famille est uniformément bornée à l'intérieur de chaque cercle. Nous dirons qu'une famille qui est somme d'une infinité dénombrable de familles satisfaisant à la condition (b) — satisfait à la condition (b^*).

3·2. ***Théorème.*** *$\mathcal{F}$ étant une famille satisfaisant à la condition (b^*), $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F})$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. En vertu de l'égalité évidente:

$$\mathcal{G}_{\mathrm{I}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}_n)$$

on peut supposer que $\mathcal{F}$ satisfait à la condition (b).

Supposons donc que toutes les fonctions de la famille $\mathcal{F}$ sont holomorphes dans le domaine $|z| > r_0$ et qu'il existe pour tout $r > r_0$ un nombre $M(r)$ tel qu'on ait pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}$

$$(1) \qquad |\varphi(z)| < M(r) \quad \text{pour} \quad r_0 < |z| < r.$$

Posons

$$f(z) = [n + 1 + M(n+1)] \cdot 2^n (z - \mathfrak{z}_m^{(n)}) \quad \text{pour} \quad z \in K_m^{(n)};\ n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots 2^n$$

et

$$K^{(n)} = \sum_{m=1}^{2^n} K_m^{(n)}.$$

En vertu de 1·3, l'ensemble $\mathcal{G}^*$ des fonctions $g \in \mathcal{G}$ pour lesquelles il existe une suite croissante l_n de nombres naturels tel que

$$(2) \qquad |f(z) - g(z)| < \frac{1}{l_n} \quad \text{pour} \quad z \in K^{(l_n)}$$

— est résiduel dans $\mathcal{G}$.

Nous allons démontrer que $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}^*$. Supposons donc $g \in \mathcal{G}^*$ et $\varphi \in \mathcal{F}$. En posant $\psi(z) = g(z) - \varphi(z)$, nous obtenons d'après (1) et (2):

$$(3) \qquad |f(z) - \psi(z)| < \frac{1}{l_n} + M(l_n + 1) \quad \text{pour} \quad z \in K^{(l_n)}.$$

La fonction $f(z)$ transforme tout cercle $K_m^{(n)}$ en un cercle $|z| \leqslant n + 1 + M(n+1)$ d'une telle façon que les frontières se correspondent. Par conséquent, l'inégalité (3) et le lemme 0·7 entraînent l'inclusion $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}^*$, ce qui achève notre démonstration.

3·3. ***Lemme.*** Pour tout ensemble $R \in \mathbf{R}$ et tout n suffisamment grand il existe un nombre m naturel ($1 \leqslant m \leqslant 2^n$) tel que $R \subset K_m^{(n)}$.

Démonstration. Soit S un sous-ensemble connexe non borné de R tel que $\varrho(S, CR) = \delta > 0$. L'ensemble S possède des points communs à chaque circonférence $|z| = n$ pour $n > N$.

Soit M un nombre tel que $\frac{\pi n}{2^{n-1}} < \delta$ pour $n > M$ et supposons $n > \mathrm{Max}(N, M)$. Soit ξ_n un point tel qu'on ait $\xi_n \in S$ et $|\xi_n| = n$. Il existe un nombre m_n naturel ($1 \leqslant m_n \leqslant 2^n$) tel que

$$|\xi_n - \mathfrak{z}_{m_n}^{n}| < \frac{\pi n}{2^n}.$$

On voit aisément que $K_{m_n}^{(n)} \subset R$. Supposons pour la démonstration $z \in K_{m_n}^{(n)}$, donc

$$|z - \mathfrak{z}_{m_n}^{(n)}| < \frac{1}{2^n}.$$

On a. par conséquent,

$$|z - \xi_n| < \frac{\pi n}{2^n} + \frac{1}{2^n} < \frac{\pi n}{2^{n-1}} < \delta,$$

donc $z \in R$.

3·4. ***Théorème.*** *$\mathcal{F}$ étant une famille satisfaisant à la condition (b^*), $\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(\mathcal{F})$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Ce théorème résulte de 3·2 et de l'inclusion $\mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}_{\mathrm{II}}(\mathcal{F})$ que nous allons démontrer.

Soient donc $g \in \mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F})$, $R \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathcal{F}$ et $\psi(z) = g(z) - \varphi(z)$. Il existe donc une suite croissante l_n de nombres naturels telle que l'ensemble $\psi(K_m^{(l_n)})$ contient le cercle $|z| < l_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $m = 1, 2, \ldots 2^n$. En vertu de 3·3 il existe un nombre N tel que pour tout $n > N$ il existe un nombre naturel m_n $(1 \leqslant m_n \leqslant 2^n)$ pour lequel $R \supset K_{m_n}^{(n)}$. Il en résulte que si $l_n > N$, la fonction $\psi(z)$ possède une racine dans $K_{m_n}^{(l_n)}$. Par conséquent cette fonction possède une infinité de racines dans R. Donc $g \in \mathcal{G}_{\mathrm{II}}(\mathcal{F})$.

3·5. On démontre sans peine que la famille $\mathcal{R}$ de toutes les fonctions rationnelles satisfait à la condition (b^*). A cet effet désignons par $\mathcal{R}_{l,m,n}$ la famille des fonctions $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, où $p(z)$ et $q(z)$ sont deux polynômes tels que 1) p est de degré l au plus, 2) $|p(z)| \leqslant m$ pour $|z| \leqslant 1$, 3) $|q(z)| \geqslant 1$ pour $|z| \geqslant n$. Pour un polynôme $p(z)$ satisfaisant aux conditions 1) et 2) on a l'inégalité $|p(z)| \leqslant m r^l$ pour $|z| \leqslant r$. Par conséquent les familles $\mathcal{R}_{l,m,n}$ satisfont à la condition (b). On a d'autre part

$$\mathcal{R} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_{l,m,n},$$

la famille $\mathcal{R}$ satisfait donc à la condition (b^*).

Le théorème 3.4 entraîne donc le

Théorème. *$\mathcal{G}_{\mathrm{II}}(\mathcal{R})$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$,*

d'où on a, à plus forte raison, le

Théorème. *Les fonctions entières qui prennent dans tout ensemble $R \in \mathbf{R}$ toute valeur complexe — constituent un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

Remarquons que ce théorème peut être obtenu directement: il suffit à cet effet de poser

$$f(z) = n \cdot 2^n (z - \mathfrak{z}_m^{(n)}) \quad \text{pour} \quad z \in K_m^{(n)}$$

(où $n = 1, 2 \ldots$ et $m = 1, 2, \ldots 2^n$) et d'appliquer 1·3, 0·7 et 3·3.

3·6. M. Zygmund nous a communiqué que la fonction

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{(3 \cdot 2^n)!} \tag{1}$$

prend dans tout secteur $\vartheta_1 < \arg z < \vartheta_2$ toute valeur complexe.

La série (1) est extraite de la série

$$(e^{\sqrt[3]{z}} + e^{\omega \sqrt[3]{z}} + e^{\omega^2 \sqrt[3]{z}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(3n)!} \qquad \text{où } \omega^3 = 1 \tag{2}$$

la fonction $g(z)$ est donc d'ordre $\leqslant \frac{1}{3}$.

$g(z)$ tend vers l'infini plus rapidement que chaque puissance de $|z|$ sur l'axe réel positif et par conséquent sur toute demi-droite de la forme: $\arg z = \pi \dfrac{p}{2^q}$.

Considérons un secteur

$$\pi \frac{p'}{2^{q'}} < \arg z < \pi \frac{p''}{2^{q''}}. \tag{3}$$

et soit N un nombre naturel tel que la fonction $g(z) - s_N(z)$ (où $s_n(z)$ désigne la somme partielle n-ième de la série (1)) prend dans le secteur (3) toutes les valeurs qu'elle prend dans le plan.

Rappellons à présent que 1° toute fonction entière d'ordre fini non entier prend toute valeur complexe une infinité de fois [1]) et que 2° pour toute fonction entière $f(z)$ d'ordre $< \frac{1}{2}$ il existe une suite de nombres positifs r_n telle que $m_f(r_n)$ (où $m_f(r)$ désigne la borne inférieure de $|f(z)|$ sur la circonférence $|z| = r$) tend vers l'infini plus rapidement que toute puissance de $|z|$ [2]).

Par conséquent $g(z) - s_N(z)$ étant une fonction d'ordre $\leqslant \frac{1}{3}$, il existe deux nombres positifs l_1 et l_2 telle que 1′ la fonction $g(z) - s_N(z)$ possède un zéro dans le quadrilatère curviligne Q définie par les inégalités (3) et $l_1 \leqslant z \leqslant l_2$, et 2′ qu'on a $|g(z) - s_N(z)| > |s_N(z)|$ sur la frontière de Q.

D'après le théorème de Rouché la fonction $g(z)$ possède donc un zéro dans Q. Le passage aux valeurs $\neq 0$ ne présente aucune difficulté.

Remarquons enfin que la fonction $g(z)$ ne prenant sur l'axe réel que les valeurs réelles — ne possède aucune des singularités du § 2.

[1]) Cf. p. ex. Bieberbach [1], p. 242.
[2]) Cf. p. ex. Bieberbach [1], p. 272.

D'autre part $\varphi(z)$ étant une fonction entière quelconque appartenant à $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}$ resp. $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}$ (cf. 2·1), la fonction $e^{\varphi(z)}$ appartient aussi à $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}$ resp. $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}$ tandis qu'elle ne possède aucune des singularités examinées aux numéros 3·1—3·6.

3·7. Désignons par $\mathcal{G}_{\mathrm{III}}(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ ayant le même sens que dans le numéro 3·1) la classe des fonctions $g \in \mathcal{G}$ telles que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}$ définie pour $|z| \geqslant r_0$ la famille $g(tz) - \varphi(tz)$ (où $t \geqslant 1$) ne soit normale pour aucun $|z_0| > r_0$.

Théorème. *$\mathcal{F}$ étant une famille satisfaisant à la condition (b^*), $\mathcal{G}_{\mathrm{III}}(\mathcal{F})$ est un ensemble résiduel dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Ce théorème résulte de 3·2 et de l'inclusion $\mathcal{G}_{\mathrm{III}}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F})$ que nous allons démontrer.

Soient donc $g \in \mathcal{G}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F})$; $\varphi \in \mathcal{F}$: $\psi(z) = g(z) - \varphi(z)$ et $|z_0| > r_0$. Il existe par conséquent une suite l_n de nombres naturels tels que l'ensemble $\psi(K_m^{l_n})$ contient le cercle $|z| < l_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $m = 1, 2, \ldots 2^n$. Soit δ un nombre satisfaisant aux inégalités: $|z_0| - r_0 > \delta > 0$. Pour n suffisamment grand la fonction $\psi_n(z) = \psi\left(\frac{l_n}{|z_0|} \cdot z\right)$ prend dans le cercle $|z - z_0| < \delta$ (désignons ce cercle par K_0) les mêmes valeurs que la fonction ψ dans le cercle $\left|z - l_n \frac{z_0}{|z_0|}\right| < \frac{l_n}{|z_0|}\delta$. Ce dernier cercle contient pour n suffisamment grand un cercle $K_{m_n}^{(l_n)}$. L'ensemble $\psi(K_0)$ contient $\psi(K_{m_n}^{(l_n)})$, donc *a fortiori* $\psi(K_0)$ contient le cercle $|z| < l_n$. Il n'existe par conséquent aucune suite partielle de $\psi_n(z)$ uniformément convergente, ou bien uniformément tendant vers l'infini. La famille $\psi(tz)$ n'est donc normale pour aucun $|z_0| > r_0$, ce qui donne: $g \in \mathcal{G}_{\mathrm{III}}(\mathcal{F})$.

Le théorème démontré se rattache au certain problème concernant les directions singulières de Julia. Un nombre réel ϑ s'appelle *direction* (J) (*de Julia*) *de la fonction entière* $g(z)$ lorsque la famille $g(tz)$ pour $t \geqslant 1$ n'est pas normale sur la demi-droite $\arg z = \vartheta$ [1]). Il résulte de notre théorème que *les fonctions pour lesquelles toute direction est une direction* (J) *constituent un ensemble résiduel dans* $\mathcal{G}$ [2]).

§ 4. Fonctions holomorphes dans le cercle-unité.

4·1. Il suffit d'introduire dans ce qui précède une série de modifications faciles pour obtenir des résultats analogues pour l'espace $\mathcal{H}$. Nous nous bornons donc à enoncer les théorèmes.

[1]) Toute direction (J) pour une fonction entière $g(z)$ est en même temps une direction (P) (cf. l'Introduction).

[2]) Cette remarque peut être considérée comme la réponse à une question posée par M Bloch ([1]. p. 16). Ajoutons que M. Bloch considère une autre définition d'une direction singulière, mais il résulte de certaines considérations de M. Valiron ([1], p. 71) que ces définitions sont équivalentes.

Désignons par $\mathbf{P}^*$ la classe des sous-ensmbles de U dont chacun a*) est connexe, b*) s'approche indéfiniment de la frontière de U et c*) est disjoint d'un segment joignant un point de U avec un point de la frontière de U [1]).

Désignons ensuite par $\mathbf{R}^*$ la classe des ensembles définis par des inégalités: $\vartheta_1 < \arg z < \vartheta_2$; $r < |z| < 1$.

Théorème. *La classe des fonctions $\in \mathcal{H}$ qui transforment tout ensemble $P \in \mathbf{P}^*$ en un ensemble dense dans le plan — constitue un ensemble résiduel dans $\mathcal{H}$.*

Théorème. *La classe des fonctions $\in \mathcal{H}$ qui prennent toute valeur complexe dans tout ensemble $R \in \mathbf{R}^*$ — constitue un ensemble résiduel dans $\mathcal{H}$.*

4·2. Remarquons maintenant que si l'on supprime la condition c*) dans la définition de la classe $\mathbf{P}^*$, le premier théorème de 4·1 cesse d'être vrai, car *pour toute fonction $f(z)$ holomorphe dans U il existe un rayon topologique tendant vers la frontière qui est transformé par f en un ensemble non dense dans le plan.* Cela résulte d'un théorème dû à M. Stoïlow. $f(z)$ étant une fonction holomorphe dans U, appelons un nombre complexe a (fini ou non) valeur limite de f, lorsqu'il existe une suite z_n de points de U, convergente vers un point de la circonférence $|z| = 1$ et telle que $f(z_n) \to a$. Or, M. Stoïlow a démontré que

(S) *Toute valeur limite d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans U qui n'est prise par f qu'un nombre fini de fois est une valeur asymptotique de f ou une limite des valeurs asymptotiques de f* [2]).

La frontière de l'ensemble $f(U)$ considérée sur la sphère de Riemann est évidemment contenue dans l'ensemble des valeurs limites de f et cette frontière étant non vide, il en résulte que *toute fonction holomorphe dans U possède au moins une valeur asymptotique.*

[1]) En définissant cette classe nous avons utilisé les remarques de MM. Eilenberg et Saks.

[2]) Stoïlow [1], p. 258. M. Stoïlow suppose dans sa démonstration que l'équation $f(z) = a$ possède un nombre fini de racines dans U, mais on peut étendre aisément ce raisonnement sur le cas, où ces racines n'existent guère.

Remarquons que l'alternative du théorème (S) est essentielle. Nous allons montrer ceci au moyen des deux exemples suivants:

Soit $f(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ et $g(z)\in\mathcal{G}^{\mathrm{II}}$ (cf. 2·1). Posons $\psi(z)=g(f(z))$ pour $|z|<1$. La fonction $f(z)$ transforme U en l'ensemble de tous les points z du plan pour lesquels $\arg z \neq \pi$. Cette fonction transforme donc tout ensemble connexe $E\subset U$ en un ensemble ou bien borné, ou bien appartenant à P (cf. 2·1). Par conséquent l'ensemble $\psi(E)$ est dans ce cas ou bien borné, ou bien dense dans le plan. $\psi(z)$ est donc *une fonction holomorphe dans U, non bornée pour laquelle l'infini n'est pas une valeur asymptotique.*

Soit à présent $\varphi(z)$ une fonction des MM. Lusin et Privaloff[1]) holomorphe dans U et telle qu'on ait $\lim\limits_{n=\infty} m_\varphi(r_n)$ pour une certaine suite $r_n\to 1$ (nous désignons par $m_\varphi(r)$ la borne inférieure de $|\varphi(z)|$ pour $|z|=r$). Cette fonction transforme chaque sous-ensemble connexe de U s'approchant indéfiniment de la frontière de U en un ensemble non borné; il en résulte que $\varphi(z)$ *ne possède qu'une seule valeur asymptotique:* ∞.

§ 5. Fonctions méromorphes dans le plan.

5·1. En nous appuyant sur le théorème sur l'approximation (0·5) nous obtenons le lemme suivant, analogue à 1·3:

Lemme. Prémisses: *Soit F_n une suite tendant vers l'infini, d'ensembles plans fermés et bornés. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. Désignons par $\mathfrak{M}^*$ la classe de fonctions méromorphes $m(z)$, définie comme il suit: $m\in\mathfrak{M}^*$ lorsqu'il existe une suite croissante j_n de nombres naturels telle que*

$$|m(z)-f(z)|<\frac{1}{j_n}\quad\text{pour}\quad z\in F_{j_n}.$$

Thèse. *$\mathfrak{M}^*$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{M}$.*

Démonstration n'est qu'une modification de la démonstration du 1·3. Désignons par $\mathfrak{M}_n$ la classe des fonctions méromorphes $m(z)$ pour lesquelles

$$|m(z)-f(z)|<\frac{1}{n}\quad\text{pour}\quad z\in F_n$$

et posons

$$\mathfrak{M}^{(j)}=\sum_{n=j}^{\infty}\mathfrak{M}_n.$$

Les ensembles $\mathfrak{M}^{(j)}$ sont ouverts et on a

$$\mathfrak{M}^*=\prod_{j=1}^{\infty}\mathfrak{M}^{(j)}.$$

[1]) Lusin et Privaloff [1], p. 147.

On démontre ensuite que les ensembles $\mathfrak{M}^{(j)}$ sont denses dans $\mathfrak{M}$.

Soit donc $m\in\mathfrak{M}$ et j un nombre naturel. Pour tout nombre k naturel tous es ensembles F_n pour $n>n_k$ sont contenus dans le domaine $|z|>k$. Posons $l_k=\mathrm{Max}(n_k,j)$. En vertu du second théorème de 0·5 et des remarques de 0·4 il existe une fonction rationnelle $r_k(z)$ telle que

(1) $$|r_k(z),\ m(z)|<\frac{1}{k}\quad\text{pour}\quad |z|\leqslant k$$

et

(2) $$|r_k(z)-f(z)|<\frac{1}{l_k}\quad\text{pour}\quad z\in F_{l_k}.$$

Ces relations entraînent $r_k\in\mathfrak{M}^{(j)}$ (pour $k=1,2,\ldots$) et $r_k\rightrightarrows m$.

5·2. M. Gross a construit une fonction méromorphe dans le plan qui transforme tout ensemble connexe non borné en un ensemble dense dans le plan[1]). Désignons par $\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ la classe des fonctions possédant cette propriété.

Désignons ensuite par F_n les couronnes: $n\leqslant z\leqslant n+\frac{1}{2}$ et considérons une suite w_n de nombres complexes, dense dans le plan. En appliquant un raisonnement analogue au ceux de numéro 2·2 et en s'appuyant sur le lemme 5·1, on obtient le

Théorème. *$\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{M}$.*

Il résulte d'un théorème des MM. Iversen et Gross[2]) que chaque fonction de $\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ possède une infinité de pôles.

5·3. Désignons maintenant par $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ resp. $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(\infty)}$, resp. $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(0)}$ la classe des fonctions méromorphes qui prennent dans tout ensemble $R\in\mathbf{R}$ (voir 3·1) toute valeur complexe (l'infini inclu), resp. toute valeur complexe finie, resp. toute valeur complexe finie ou infinie mais différente de zéro.

Théorème. *$\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ est un ensemble résiduel dans $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. En posant $f(z)=2^n\cdot n(z-z_m^{(n)})$ pour $z\in K_m^{(n)}$ (cf. 3·1) pour $n=1,2,\ldots$ et $m=1,2,\ldots 2^n$, d'après 5·1, 0·7 et 3·3, nous concluons que l'ensemble $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(\infty)}$ est résiduel dans $\mathfrak{M}$.

Nous définissons à présent une transformation de l'espace $\mathfrak{M}$ en lui même, en faisant correspondre $\frac{1}{m(z)}$ à $m(z)$. Cette transformation est une homéomorphie (cf. 0·4) et elle transforme $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(\infty)}$ en $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(0)}$. Ce dernier ensemble est donc aussi résiduel. Comme $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}=\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(0)}\cdot\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^{(\infty)}$, l'ensemble $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ est résiduel dans $\mathfrak{M}$.

[1]) Gross [1], p. 14.

[2]) Iversen [1] p. 23 et Gross [1], p. 10.

Ouvrages cités.

Biernacki, M. [1] *Sur la théorie des fonctions entières.* Bull. Intern. de l'Acad. Polon. Classe des Sc. Math. et Nat., s. A. 1929, pp. 531—590.

Bieberbach, L. [1] *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Bd. II. Zweite Auflage. Leipzig-Berlin 1931.

Bloch, A. [1] *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité.* Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XX. Paris 1926.

Borel, E. [1] *Sur l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel.* C. R. **155** (1912) p. 201, ou bien dans le livre de M. Borel: Méthodes et problèmes de théorie des fonctions, Paris 1922, p. 144.

Fréchet, M. [1] *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel* (Thèse). Rendiconti di Palermo **22** (1906), pp. 1—74.

— [2] *Les espaces abstraits et leur théorie considérés comme l'Introduction à l'Analyse générale* Paris 1928.

Gross, W. [1] *Über die Singularitäten analytischer Funktionen.* Monatshefte für Math. u. Physik **29** (1918), pp. 3—47.

Hahn, H. [1] *Reelle Funktionen. I. Punktfunktionen.* Leipzig 1932.

Hausdorff, F. [1] *Mengenlehre.* Zweite Auflage. Berlin-Leipzig 1927.

Iversen, F. [1] *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Thèse). Helsingfors 1914.

Lusin, N. et Privaloff, J. [1] *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques.* Annales de l'Ecole Normale (3) **42** (1925), pp. 143—191.

Ostrowski, A. [1] *Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verallgemeinerungen des Picardschen Satzes.* Mathem. Zeitschrift **24** (1925) pp. 215—258.

— [2] *Studien über den Schottkyschen Satz.* Basel 1931.

Pólya, G. [1] *Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist.* Acta Mathematica **41** (1916—1918), pp. 99—118.

— [2] *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* Math. Zeitschrift **29** (1929), pp. 549—640.

Stoïlow, S. [1] *Les propriétés topologiques des fonctions analytiques d'une variable.* Annales de l'Institut Henri Poincaré **2** (1932) pp. 233—266.

Valiron, G. [1] *Remarque sur un théorème de M. Julia.* Bull. des Sciences Mathématiques (2) **49** (1925), I p., pp. 68—73.