Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées

par

G. FICHTENHOLZ et L. KANTOROVITCH (Leningrad, U. R. S. S.).

1. Nous nous proposons d'étudier dans cet article quelques questions qui se rattachent aux fonctionnelles linéaires [1]) (ou plus généralement, aux opérations linéaires) dans l'espace des fonctions

$$x = x(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

mesurables et bornées. Pour préciser la définition de cet espace il nous faut établir que ce que nous entendons par la norme $\|x\|$ d'un élément x.

Tout d'abord, notre espace est une extension de l'espace classique C, formé des fonctions continues. Dans C la norme est définie d'habitude comme il suit

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$$

et il est assez naturel d'étendre cette définition aux fonctions bornées en général. L'espace des fonctions mesurables et bornées, ainsi métrisé, sera dit espace M. Deux éléments x et $\overline{x}$ de M sont identiques, si et seulement si l'on a constamment dans $[a, b]$:

$$x(t) = \overline{x}(t).$$

C'est le point de vue de M. Lebesgue, dans ses recherches importantes sur l'extension de la notion de l'intégrale de Stieltjes.

D'autre part, dans beaucoup de recherches il paraît plus commode ne distinguer pas l'un de l'autre deux éléments x et $\overline{x}$, si les fonctions $x = x(t)$ et $\overline{x} = \overline{x}(t)$ sont équivalentes, c'est-à-dire,

---

[1]) À propos des concepts fondamentaux du calcul fonctionnel on peut consulter le livre de M. S. Banach, Théorie des opérations linéaires (Varsovie, 1932). Nous le citerons comme: Banach.

ne diffèrent que dans un ensemble de points de mesure nulle. Cela nous conduit à une autre définition de la norme

$$\|x\| = \underset{a \leq t \leq b}{\text{vrai max}} \; |x(t)| \text{ [2]}.$$

Nous appellerons espace M^* l'espace des fonctions mesurables bornées, avec cette métrique-ci.

On peut parvenir à la même définition de la norme par des considérations d'une autre nature. Soit $L^p (p \geqslant 1)$ l'espace, formé des fonctions $x = x(t)$ sommables dans $[a, b]$ et à p-ième puissance sommable. On entend d'habitude par la norme $\|x\|$ d'un élément x de L^p le nombre

$$\|x\| = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p \, dt} \,.$$

Comme les fonctions bornées sont contenues dans tous les L^p, il est naturel de passer à la limite dans cette relation-ci, en faisant p croître à l'infini. Or, comme on sait[3]), quelle que soit la fonction mesurable $x(t)$, on a

$$\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p \, dt} = \underset{a \leq t \leq b}{\text{vrai max}} \; |x(t)|,$$

ce qui nous conduit exactement à la définition de la norme ci-dessus.

Dans ce qui suit nous allons étudier les espaces M et M^* simultanément[4]).

Tout d'abord, nous allons établir (dans le n° 2) la forme

[2]) C'est le plus petit des nombres réels K, tels que

$$|x(t)| > K$$

en un ensemble de mesure nulle au plus.

[3]) Ce résultat est dû à M. Pólya. V.: G. Pólya, Sur un algorithme etc., C. R. de l'Acad. des Sc. 157 (1915) p. 843. Cp.: G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I (Berlin, 1929.) II Abschn. Nr. 83.

[4]) Il est à remarquer que M. H. Steinhaus avait déjà étudié le champ de fonctions mesurables bornées, mais en moyennant d'une métrique de l'espace L:

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| \, dt .$$

V. son Mémoire: Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Z. 5 (1918) p. 186—221.

générale d'une fonctionnelle linéaire, définie dans l'espace M (ou M^*). Cette forme est donnée par une intégrale de Radon:

$$f(x) = \int_E x(t) \, \Phi(dE) ,$$

où la nature de la fonction $\Phi(e)$ d'ensemble est à préciser.

La fonctionnelle ordinaire

$$f(x) = \int_a^b x(t) \, . \, \varphi(t) \, dt ,$$

où φ est sommable, n'est qu'un cas très particulier de cette formule générale. Il est aisé d'en donner les caractères distinctifs (n° 3).

Par détermination de la puissance de la famille de toutes les fonctionnelles linéaires dans M (et dans M^*), nous précisons davantage (n° 4) la contribution de la famille particulière ci-dessus.

Dans le n° 5, nous étudions la relation entre l'intégrale de Radon et celle de Stieltjes. On y trouve également quelques remarques sur le rôle et la portée des recherches de M. H. Lebesgue sur ce sujet.

Après établir, dans le n° 6, les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence faible d'une suite de fonctionnelles linéaires (dans M ou M^*), nous donnons la forme générale d'une opération linéaire qui transforme chaque fonction mesurable bornée en une fonction continue.

Nous en tirons ensuite (n° 7) la conséquence importante, concernant l'extension des opérations linéaires. Notamment, nous montrons que l'opération linéaire, dont le domaine est C et le contredomaine est situé sur C, n'est pas toujours prolongeable sur M (ou M^*).

2. Quelle est la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace M (ou M^*)?

Il est connu[5]) que dans l'espace L^p $(p > 1)$ la forme générale de la fonctionnelle linéaire est donnée par la formule

$$f(x) = \int_a^b x(t) \, . \, \varphi(t) \, dt, \tag{1}$$

[5]) F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910) p. 475. V. aussi: Banach, p. 64.

où la fonction φ appartient à l'espace conjugué $L^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, la norme $\|f\|$ de la fonctionnelle coïncidant avec la norme de φ:

$$\|f\|=\|\varphi\|=\sqrt[q]{\int_a^b|\varphi(t)|^q\,dt}\,.$$

Si l'on fait tendre p vers l'unité (et, simultanément, q vers l'infini) on aura justement, par ce passage à la limite, la forme générale (1) d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace L, la fonction φ appartenant cette fois à l'espace conjugué M^*. Nous avons de plus ici encore:

$$\|f\|=\|\varphi\|=\operatorname*{vrai\,max}_{a\leqq t\leqq b}|\varphi(t)|\text{ [6]}.$$

On pourrait essayer en obtenir un résultat, valable pour M^*, d'une manière tout à fait analogue, en faisant p croître vers l'infini, donc q tendre vers l'unité, et conclure de là que la forme générale cherchée est fournie par la même expression (1), la fonction φ appartenant à L $(q=1)$. Il est vrai que, sous cette hypothèse, la formule (1) présente effectivement une fonctionnelle linéaire définie dans M^* (ou dans M) et de norme

$$\|f\|=\|\varphi\|=\int_a^b|\varphi(t)|\,dt.$$

Cependant — et c'est le fait remarquable — elle ne nous en donne nulle part la forme générale[7].

Pour résoudre la question proposée dans toute sa généralité, supposons qu'on a une fonctionnelle linéaire quelconque $f(x)$, définie dans M (ou dans M^*). En désignant par e un ensemble mesurable[8] arbitraire, compris dans l'intervalle $E=[a,b]$, considérons la fonction caractéristique $x_e(t)$ correspondante:

$$x_e(t)=1,\text{ si } t\in e,$$
$$=0,\text{ en dehors de } e$$

et posons

$$\Phi(e)=f(x_e).$$

[6]) H. Steinhaus, loc. cit.[4]), p. 189; Banach, p. 65.

[7]) H. Steinhaus (loc. cit.) avait démontré que la formule (1) donne la forme générale en question, si l'on part d'une autre métrique pour l'espace considéré; v.[4]).

[8]) L'hypothèse que les fonctions (et les ensembles) considérées sont mesurables n'est pas indispensable. Nous la maintenons pour plus de netteté.

C'est une fonction d'ensemble mesurable qui va jouer le rôle important dans la suite.

Tout d'abord, il est évident que

1) *$\Phi(e)$ est bornée.*

En effet, on a

$$|\Phi(e)|=|f(x_e)|\leqslant\|f\|\cdot\|x_e\|\leqslant\|f\|.$$

De l'additivité de la fonctionnelle $f(x)$ il résulte que

2) *$\Phi(e)$ est additive (au sens restreint).*

Soient e_1, e_2 deux ensembles sans points communs. Alors on aura

$$x_{e_1+e_2}(t)=x_{e_1}(t)+x_{e_2}(t),$$

en sorte que

$$\Phi(e_1+e_2)=\Phi(e_1)+\Phi(e_2).$$

Enfin, s'il s'agit de l'espace M^*, la fonction d'ensemble $\Phi(e)$ jouit certainement de la propriété:

3) *$me=0$ implique toujours $\Phi(e)=0$.*

Soit maintenant $x(t)$ une fonction mesurable bornée:

$$l_0\leqslant x(t)<L \qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

En imitant le procédé d'intégration lebesguienne, décomposons l'intervalle (l_0, L) en intervalles partielles à l'aide des nombres

$$l_0<l_1<\ldots<l_j<l_{j+1}<\ldots<l_m=L.$$

Désignons, pour abréger, par e_j l'ensemble

$$e_j=\underset{t}{\mathcal{E}}(l_j\leqslant x(t)<l_{j+1})$$

et formons la somme

$$\sum_{j=0}^{m-1}l_j\cdot\Phi(e_j).$$

Cette somme-ci n'est autre chose que la valeur de la fonctionnelle $f(x)$, correspondante à la fonction

$$\bar{x}(t)=\sum_{j=0}^{m-1}l_j\cdot x_{e_j}(t).$$

Or, si l'on désigne par λ le maximum des différences $l_{j+1}-l_j$, on a dans $[a,b]$

$$0\leqslant x(t)-\bar{x}(t)<\lambda,$$

en sorte que

$$|f(x)-f(\bar{x})|=|f(x-\bar{x})|\leqslant\|f\|\cdot\|x-\bar{x}\|\leqslant\|f\|\cdot\lambda.$$

Donc, si λ tend vers zéro, on a

$$f(x)=\lim\sum_{j=0}^{m-1}l_j\cdot\Phi(e_j).$$

En autres termes,

$$f(x) = \int_E x(t)\, \Phi(dE), \tag{2}$$

où l'intégrale est comprise au sens de RADON[9]).

C'est précisément la forme générale cherchée de la fonctionnelle linéaire dans l'espace M (resp. M^*).

Pour l'établir il nous faut prouver de plus que, inversement, chaque expression de la forme (2) nous donne une telle fonctionnelle. A cet effet, supposons qu'on a une fonction $\Phi(e)$ d'ensemble mesurable dans $E=[a, b]$, jouissant des propriétés 1), 2) [et, resp., 3)] ci-dessus.

D'après 1), on a, quel que soit $e \subset E$,

$$|\Phi(e)| \leqslant K.$$

Il en résulte immédiatement que la fonction $\Phi(e)$ est aussi à variation bornée. En effet, si

$$E = e_1 + e_2 + \ldots + e_m + e_{m+1} + \ldots + e_n$$

$(e_i \cdot e_j = 0$ pour $i \neq j)$, on peut supposer généralement que l'on a, p. e., $\Phi(e_i) \geqslant 0$ pour $i=1, 2, \ldots, m$ et $\Phi(e_i) < 0$ pour $i=m+1, m+2, \ldots, n$. Alors, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(e_i)| = \Phi(e_1 + e_2 + \ldots + e_m) - \Phi(e_{m+1} + \ldots + e_n) \leqslant 2K.$$

La borne supérieure de cette somme, nécessairement finie, porte le nom de variation totale de $\Phi(e)$ dans E; on la désigne par

$$V_\Phi(E) = \int_E |\Phi(dE)|.$$

On peut raisonner de la même manière sur l'ensemble $e \subset E$ et définir $V_\Phi(e)$. La fonction d'ensemble $V_\Phi(e)$ jouit évidemment des mêmes propriétés 1), 2) [et, resp.. 3)] que la fonction $\Phi(e)$. On a de plus

$$|\Phi(e)| \leqslant V_\Phi(e).$$

[9]) J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen, Sitzungsber. der Ak. zu Wien, Abt. IIa, 122 (1913) p. 1295 et suiv. Or, il est à remarquer que M. Radon avait étudié des fonctions d'ensemble absolument additives, tandis que pour notre but est essentiel de ne supposer que l'additivité au sens restreint. Cp.: A. Kolmogoroff, Untersuchungen über den Integralbegriff, Math. Ann. 103 (1930) p. 682.

Nous pouvons donc présenter la fonction $\Phi(e)$ sous la forme d'une différence de deux fonctions non-négatives de même nature

$$\Phi(e) = \Phi_1(e) - \Phi_2(e),$$

en posant, p. e.,

$$\begin{cases} \Phi_1(e) = \frac{1}{2}[V_\Phi(e) + \Phi(e)], \\ \Phi_2(e) = \frac{1}{2}[V_\Phi(e) - \Phi(e)]. \end{cases} \tag{3}$$

Ce sont précisément ces fonctions qu'on appelle variation positive, resp., négative de la fonction d'ensemble $\Phi(e)$.

Grâce à cette décomposition, dans la preuve de l'existence même de l'intégrale (2), on peut se borner au cas d'une fonction $\Phi(e)$ non-négative. Or, dans ce cas le raisonnement devient tout à fait identique à celui de la théorie lebesguienne; il paraît inutile de le reproduire.

Donc, la fonctionnelle (2) est effectivement définie pour toute fonction $x(t)$, mesurable et bornée. On vérifie aisément qu'elle est additive, de la même façon (cette fois aussi), comme pour l'intégrale de LEBESGUE, car le raisonnement respectif dans la théorie lebesguienne ne s'appuie que sur l'additivité au sens restreint de la mesure.

Enfin, revenons à la somme

$$\sum_{=0}^{m-1} l_j \cdot \Phi(e_j).$$

Si $|l_j| > \|x\| + \lambda$, l'ensemble e_j est vide [resp., de mesure nulle ce qui entraîne, vu 3): $\Phi(e_j) = 0$]. Il en résulte:

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} l_j \cdot \Phi(e_j)\right| \leqslant (\|x\| + \lambda) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} |\Phi(e_j)| \leqslant (\|x\| + \lambda) \cdot V_\Phi(E),$$

d'où, à la limite,

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \cdot V_\Phi(E). \tag{4}$$

Donc, la fonctionnelle $f(x)$, définie par (2), est bien linéaire, c. q. f. d.

Passons à établir la norme $\|f\|$ de cette fonctionnelle. De l'inégalité (4) il vient

$$\|f\| \leqslant V_\Phi(E). \tag{5}$$

Or, ε étant pris à volonté, on peut décomposer l'intervalle E:
$$E = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$
de façon qu'on ait
$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(e_i)| > V_\Phi(E) - \varepsilon.$$
En posant
$$x^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} \Phi(e_i) \, . \, x_{e_i}(t),$$
cette inégalité peut s'écrire:
$$f(x^*) > V_\Phi(E) - \varepsilon.$$
Comme $\|x^*\| = 1$, il résulte
$$\|f\| > V_\Phi(E) - \varepsilon. \tag{6}$$
En tenant compte des inégalités (5) et (6) on voit de suite qu'on a précisément l'égalité
$$\|f\| = V_\Phi(E) = \int_E |\Phi(dE)|. \tag{7}$$

Nous sommes arrivés donc au

Théorème. *La forme générale d'une fonctionnelle linéaire, définie dans l'espace M (ou M^*), est présentée par l'intégrale de* Radon:
$$f(x) = \int_E x(t)\, \Phi(dE), \tag{8}$$
où $\Phi(e)$ est une fonction d'ensemble mesurable $e \subset E$, bornée et additive au sens restreint (s'anullant avec me, s'il s'agit d'espace M^*).

La norme $\|f\|$ de cette fonctionnelle est égale à la variation totale $V_\Phi(E)$ de Φ dans E.

3. Il est facile de se rendre compte des conditions sous lesquelles la fonctionnelle générale (2) se réduit à la fonctionnelle banale (1):

Théorème. *La fonctionnelle linéaire* (2) *dans l'espace M (ou M^*) se ramène à une intégrale de* Lebesgue (1) *si et seulement si la fonction $\Phi(e)$ d'ensemble mesurable $e \subset E$ est absolument continue* (c'est-à-dire, si $\Phi(e)$ est infiniment petit avec me).

En effet, si la fonction $\Phi(e)$, additive au sens restreint, est absolument continue, elle sera nécessairement additive au sens complet ou absolument additive. Dans ce cas, d'après le théorème bien connu, la fonction $\Phi(e)$ peut se présenter sous forme d'une intégrale indéfinie de Lebesgue:
$$\Phi(e) = \int_e \varphi(t)\, dt, \tag{9}$$
où φ est une fonction sommable. Alors on aura
$$\int_E x(t)\, \Phi(dE) = \int_a^b x(t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{10}$$
car la différence
$$\int_a^b x(t)\, \varphi(t)\, dt - \sum_{j=0}^{m-1} l_j\, \Phi(e_j),$$
pouvant s'écrire
$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{e_j} [x(t) - l_j] \, . \, \varphi(t)\, dt,$$
ne surpasse pas, en valeur absolue, le nombre
$$\lambda \, . \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$
et tend vers zéro avec λ.

Réciproquement, si l'intégrale de Radon (2) se réduit à une intégrale de Lebesgue et l'on a (10) quelle que soit la fonction bornée mesurable $x = x(t)$, en posant $x = x_e(t)$ on retrouve (9), etc.

Remarque. Si c'est l'espace M^* dont il s'agit, en sorte que $\Phi(e)$ s'anulle avec me, il suffit de supposer l'additivité absolue de $\Phi(e)$, pour qu'il en résultera la continuité absolue et, par conséquent, l'identité (10). Cette remarque nous sera utile dans le n° 5.

En s'appuyant sur le principe de choix, on peut construire des exemples d'une fonction d'ensemble $\Phi(e)$, possédant les propriétés 1) et 2) [même 3)], mais pas absolument continue[10]). Donc, il existe certainement des fonctionnelles linéaires dans l'espace M (ou M^*), autres que les fonctionnelles banales (1).

Ce fait résulte d'ailleurs des considérations d'une autre nature. On sait que la forme générale d'une fonctionnelle linéaire

[10]) Voir, p. e.: G. Fichtenholz, Sur les fonctions d'ensemble additives et continues, Fund. Math. 7 (1925) p. 299.

dans l'espace C des fonctions continues est donnée par une intégrale de STIELTJES:

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dg(t),$$

où la fonction $g(t)$ est à variation bornée [11]). Il est aisé s'arranger pour que cette intégrale ne se réduise nulle part à l'intégrale de LEBESGUE. Alors il suffira d'étendre cette fonctionelle, d'après le théorème général de M. M. HAHN—BANACH [12]), sur l'espace M (ou M^*), pour arriver au résultat cherché. Bien entendu, l'extension mentionné s'appuie également sur le principe de choix.

4. Pour mieux éclaircir la relation quantitative entre la totalité de toutes les fonctionnelles du type (2) en général et celle des fonctionnelles banales (1), nous nous proposons d'en établir la puissance.

À cet effet, considérons une famille $\mathcal{E}$ d'ensembles mesurables $e\subset E=[0,1]$, jouissant de la propriété suivante:

quels que soient les $p+q$ ensembles

$$e_1,\ e_2,\dots,\ e_p,\ e_{p+1},\dots,\ e_{p+q}\in\mathcal{E},$$

l'ensemble-produit

(11) $$e_1\cdot e_2\cdot\ldots\cdot e_p\,.\,Ce_{p+1}\cdot\ldots\cdot Ce_{p+q}$$

est non-vide (s'il s'agit de M), resp., de mesure non-nulle (s'il s'agit de M^*).

Une telle famille $\mathcal{E}$ nous appellerons noyau indépendant. Ce nom sera justifié par le lemme ci-dessous.

Or, pour faciliter notre étude, il nous sera plus commode de changer la définition usuelle de la fonction caractéristique d'un ensemble e. Notamment, nous posons cette fois

$$x_e(t)=1 \text{ dans } e,$$
$$=-1 \text{ en dehors de } e.$$

Lemme I. *Soit $\mathcal{E}=\{e\}$ un noyau indépendant. Faisons correspondre d'une manière quelconque aux ensembles e des nombres réels k_e, bornés dans leur ensemble:*

$$|k_e|\leqslant K.$$

Alors, il existe une fonctionnelle linéaire $f(x)$, définie dans M (resp., dans M^*) de norme

$$\|f\|\leqslant K$$

et telle que l'on a

(12) $$f(x_e)=k_e$$

pour chaque $e\in\mathcal{E}$.

Démonstration. Considérons l'espace linéaire G de tous les éléments de la forme:

(13) $$x=x(t)=c_1x_{e_1}(t)+c_2x_{e_2}(t)+\ldots+c_px_{e_p}(t)-c_{p+1}x_{e_{p+1}}(t)-\ldots-c_{p+q}x_{e_{p+q}}(t)$$

où $e_i\in\mathcal{E}$ $(i=1,2,\dots,p+q)$ et c_i sont des constantes non-négatives.

De la définition même du noyau indépendant il résulte qu'on a toujours:

(14) $$\|x\|=c_1+c_2+\ldots+c_p+c_{p+1}+\ldots+c_{p+q}.$$

En effet, $|x(t)|$ ne surpassant jamais ce nombre, elle atteint cette valeur dans l'ensemble (11) non-vide (resp., de mesure non-nulle).

Il vient de plus que tout $x\in G$ admet exactement une représentation de la forme (13). Car, s'il en était autrement, on aurait pour la fonction $x=0$ la représentation (13) avec les coefficients non-nuls, ce qu'il est impossible, vu (14).

Pour un $x\in G$, défini par (13), posons maintenant

$$f(x)=c_1\,.\,k_{e_1}+c_2\,.\,k_{e_2}+\ldots+c_p\,.\,k_{e_p}-c_{p+1}\,.\,k_{e_{p+1}}-\ldots-c_{p+q}\,.\,k_{e_{p+q}}.$$

Cette fonctionelle vérifie bien les conditions (12) et est évidemment additive. De plus on a

$$|f(x)|\leqslant c_1\,.\,|k_{e_1}|+\ldots+c_p\,.\,|k_{e_p}|+c_{p+1}\,.\,|k_{e_{p+1}}|+\ldots+c_{p+q}\,.\,|k_{e_{p+q}}|\leqslant K\,[c_1+\ldots+c_p+c_{p+1}\ldots+c_{p+q}],$$

c'est-à-dire, vu (14),

$$|f(x)|\leqslant K\|x\|.$$

[11]) F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. de l'Acad. des Sc. 149 (1909) p. 974—977. V. aussi: Banach, p. 61.

[12]) H. Hahn, Über lineare Gleichungen in linearen Räumen, Journ. für r. u. a. Math., 157 (1927) p. 214—229. V. aussi: Banach, p. 55, th. 2.

Par suite, la fonctionnelle $f(x)$ est linéaire et de norme

$$\|f\| \leqslant K.$$

Il nous reste la prolonger sur tout espace M (resp. M^*) pour achever la démonstration.

Pour construire un noyau indépendant $\mathcal{E}$ de puisance $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$ nous faisons correspondre à chaque nombre réel $a>1$ un ensemble ν_a de nombres naturels n, satisfaisants (pour a fixe) à une quelconque des inégalités:

$$(2\,k)^a < n < (2\,k+1)^a \qquad (k=1,2,\ldots)$$

La famille $\mathcal{N}=\{\nu_a\}$ de ces ensembles constitue un noyau indépendant sui generis pour la totalité N de tous les nombres naturels. Cela veut dire que, étant donné un nombre fini quelconque de ces ensembles:

$$\nu_{a_1}, \nu_{a_2}, \ldots, \nu_{a_p}, \nu_{a_{p+1}}, \ldots, \nu_{a_{p+q}},$$

il existe nécessairement des nombres n, appartenants aux ν_{a_1}, $\nu_{a_2}, \ldots, \nu_{a_p}$, mais non compris dans $\nu_{a_{p+1}}, \ldots, \nu_{a_{p+q}}$.

Pour fixer les idées, ne considérons qu'une paire d'ensembles ν_{a_1} et ν_{a_2} $(a_1>a_2)$. Dès que k_1 est suffisamment grand, ils existent des nombres naturels k_2, tels que l'on a

$$(2\,k_1)^{a_1} < (2\,k_2)^{a_2} < (2\,k_2+1)^{a_2} < (2\,k_2+2)^{a_2} < (2\,k_1+1)^{a_1}.$$

Alors, si l'on a pris à volonté

$$(2\,k_2)^{a_2} < n < (2\,k_2+1)^{a_2} \text{ ou } (2\,k_2+1)^{a_2} < n < (2\,k_2+2)^{a_2},$$

on aura $n\in\nu_{a_1}\cdot\nu_{a_2}$, resp., $n\in\nu_{a_1}\cdot C\nu_{a_2}$.

L e m m e II. *Il existe un noyau indépendant $\mathcal{E}$ de puissance $\mathfrak{c}$.*

En effet, choisissons dans $E=[0,1]$ une suite dénombrable $\{d_n\}$ des intervalles non-empiétants. À chaque nombre réel $a>1$ nous faisons correspondre un ensemble e_a que voici:

$$e_a=\sum_{n\in\nu_a} d_n,$$

où la sommation s'étend aux nombres n, appartenants à la suite ν_a ci-dessus. La famille $\mathcal{E}=\{e_a\}$ satisfait évidemment aux conditions requises, car les ensembles

$$e_{a_1}, e_{a_2}, \ldots, e_{a_p}, Ce_{a_{p+1}}, \ldots, Ce_{a_{p+q}}$$

toujours ont en commun au moins un intervalle d_n.

A présent nous sommes en état de résoudre la question proposée, en premier lieu, par rapport à l'espace M^*.

T h é o r è m e I. *La puissance de la totalité de toutes les fonctionnelles linéaires dans l'espace M^* est*

$$2^{\mathfrak{c}}=2^{2^{\aleph_0}}.$$

Tout d'abord, si nous répartirons les fonctions mesurables et bornées en classes, en plaçant dans une même classe toutes les fonctions équivalentes, la puissance de la totalité de ces classes sera $\mathfrak{c}$. Par conséquent, la puissance de la totalité de toutes les fonctionnelles linéaires dans M^* ne peut surpasser le nombre cardinal

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}. \tag{15}$$

D'autre part, ils existent (en vertu du lemme I) les fonctionnelles linéaires, avec les valeurs arbitrairement choisies d'avance, pour toutes les fonctions de la famille $\{x_e(t)\}$ correspondante à un noyau $\mathcal{E}=\{e\}$ de puissance $\mathfrak{c}$ (lemme II). Il en résulte que la puissance en question est au moins égale à $2^{\mathfrak{c}}$, par suite, elle est exactement $2^{\mathfrak{c}}$.

Plaçons nous dès maintenant au point de vue de l'espace M. Nous aurons besoin des lemmes suivants:

L e m m e III. *Soit u une variable réelle dont le domaine A est un ensemble quelconque de puissance $\mathfrak{c}$. Il existe une famille $\mathcal{F}$ de puissance $2^{\mathfrak{c}}$, formée des fonctions $v=\varphi(u)$ de la variable u $(u\in A)$, uniformément bornées:*

$$l < \varphi(u) < L,$$

telle que les fonctions

$$\varphi_1(u),\ \varphi_2(u), \ldots, \varphi_k(u)$$

arbitrairement tirées de $\mathcal{F}$ en nombre fini, ont toujours les valeurs toutes distinctes, pour une au moins valeur u_0 de u.

Si intuitive que soit cette proposition par elle-même, sa démonstration exigue des considérations assez délicates, du domaine des nombres transfinis. Nous préférons leur donner place dans le „Supplément".

Lemme IV. *Il existe un noyau indépendant $\mathcal{E}$ de puissance* $2^{\mathfrak{c}}$.

Soit A un ensemble de points quelconque de mesure nulle et de puissance $\mathfrak{c}$. On peut supposer de plus qu'il est compris dans l'intervalle ouvert $(\frac{1}{2}, 1)$.

À chaque valeur $u \in A$ faisons correspondre un ensemble dénombrable e_u de points dans $[0, 1]$, de façon qu'ils soient sans aucun point commun deux-à-deux. On peut poser, p. e. (en tenant compte de ce que $\frac{1}{2} < u < 1$),

$$e_u = \{u, \frac{u}{2}, \frac{u}{2^2}, \ldots, \frac{u}{2^n}, \ldots\}. \tag{16}$$

En utilisant les suites ν_a de nombres naturels, dont il s'agissait plus haut, on peut construire à partir d'un e_u une infinité de puissance $\mathfrak{c}$ d'ensembles dénombrables de points

$$\{e_u^a\}$$

comme il suit. On ne garde pour e_u^a que tels points de e_u dont les indices appartiennent à ν_a.

On a évidemment

$$e_{u_1}^{a_1} \cdot e_{u_2}^{a_2} = 0, \text{ si } u_1 \neq u_2,$$

car $e_{u_1} \cdot e_{u_2} = 0$. Inversement, pour un u fixe, quelles que soient les valeurs distinctes

$$a_1, a_2, \ldots a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+q},$$

l'ensemble-produit

$$e_u^{a_1} \cdot e_u^{a_2} \cdot \ldots \cdot e_u^{a_p} \cdot ce_u^{a_{p+1}} \cdot \ldots \cdot ce_u^{a_{p+q}}$$

(ce_u^a désignant $e_u - e_u^a = e_u \cdot Ce_u^a$) est non-vide. Cela résulte immédiatement des propriétés des suites ν_a.

Soit $\mathcal{F} = \{\varphi(u)\}$ la famille de fonctions de puissance $2^{\mathfrak{c}}$, dont il s'agissait dans le lemme III, en y posant $l = 1$, $L = 2$ Nous faisons correspondre à chaque fonction $\varphi(u)$ un ensemble

$$E_\varphi = \sum_{u \in A} e_u^{\varphi(u)}.$$

Cet ensemble est mesurable, car il est contenu dans l'ensemble $\sum\limits_{u \in A} e_u$ de mesure nulle [vu (16) et en tenant compte de ce que $mA = 0$], par suite il est lui-même de mesure nulle.

La famille $\mathcal{E} = \{E_\varphi\}$ d'ensembles, de puissance $2^{\mathfrak{c}}$, est réellement un noyau indépendant.

En effet, quels que soient des ensembles

$$E_{\varphi_1}, E_{\varphi_2}, \ldots, E_{\varphi_p}, E_{\varphi_{p+1}}, \ldots, E_{\varphi_{p+q}}$$

en nombre fini, il existe une valeur u_0 de u, tel que les valeurs

$$v_i = \varphi_i(u_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p+q)$$

sont toutes distinctes, en vertu de la propriété fondamentale de la famille $\mathcal{F}$.

Alors, l'ensemble-produit

$$E_{\varphi_1} \cdot E_{\varphi_2} \cdot \ldots \cdot E_{\varphi_p} \cdot CE_{\varphi_{p+1}} \cdot \ldots \cdot CE_{\varphi_{p+q}},$$

contenant l'ensemble non-vide

$$e_{u_0} \cdot E_{\varphi_1} \cdot \ldots \cdot E_{\varphi_p} \cdot CE_{\varphi_{p+1}} \cdot \ldots \cdot CE_{\varphi_{p+q}} =$$
$$= e_{u_0}^{v_1} \cdot \ldots \cdot e_{u_0}^{v_p} \cdot ce_{u_0}^{v_{p+1}} \cdot \ldots \cdot ce_{u_0}^{v_{p+q}},$$

a fortiori est non-vide lui-même, c. q. f. d.

Enfin, nous avons le

Théorème II. *La puissance de la totalité de toutes les fonctionelles linéaires dans l'espaee M est*

$$2^{2^{\mathfrak{c}}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}.$$

La totalité de toutes les fonctions mesurables étant de puissance $2^{\mathfrak{c}}$, il est clair que celle de la totalité de fonctionnelles ne peut surpasser le nombre cardinal

$$\mathfrak{c}^{2^{\mathfrak{c}}} = 2^{2^{\mathfrak{c}}}.$$

En rapportant les lemmes I et IV, on voit de suite que la puissance en question est égale exactement à ce nombre.

Remarque. Toute fonctionelle linéaire dans M étant de la forme

$$f(x) = \int_E x(t)\, \Phi(dE),$$

où $\Phi(e)$ est une fonction d'ensemble mesurable, additive (au sens restreint) et bornée, il vient que la puissance de la totalité de telles fonctions d'ensemble est

$$2^{2^{2^{\aleph_0}}}.$$

Comme la fonction $\Phi(e)$, de la nature indiquée, toujours peut se mettre sous la forme d'une différence de deux fonctions non-négatives de même nature, on voit que la puissance restera la même pour la totalité des fonctions additives non-négatives.

M. W. Sierpiński avait déjà signalé que la puissance de toutes les fonctions additives (bornées ou non) est $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ et avait posé la question sur celle des fonctions additives non-négatives[13]). Nous venons de la résoudre.

5. Considérons à présent derechef une fonctionnelle linéaire (2), définie dans l'espace M (resp., M^*). Posons, pour $a < t \leqslant b$

$$g(t) = \Phi([a, t])$$

et $g(a) = 0$. La fonction $g(t)$, ainsi définie dans l'intervalle $[a, b]$, sera à variation bornée. En effet, si l'on divise l'intervalle $[a, b]$ en intervalles partiels par des points

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < i_{i+1} < \ldots < t_n = b,$$

on aura:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| = |\Phi([a, t_1])| + \sum_{i=1}^{n-1} |\Phi((t_i, t_{i+1}])| \leqslant V_\Phi(E),$$

en sorte que

$$\operatorname*{Var.}_{a \leqslant t \leqslant b} g(t) \leqslant V_\Phi(E) = \int_E |\Phi(dE)|.$$

Posons la question, si l'on a l'égalité

$$\int_E x(t)\,\Phi(dE) = \int_a^b x(t)\,dg(t) \tag{17}$$

toutes les fois, lorsque l'intégrale de Stieltjes existe. Il en n'est pas ainsi en général; or, on peut énoncer sur ce sujet les propositions que voici:

Théorème I. *Soit $\mathfrak{F}$ la famille de fonctions $x(t)$ bornées et n'ayant que discontinuités ordinaires à droite*[14]) *dans (a, b). Pour $x \in \mathfrak{F}$ (et seulement sous cette hypothèse) l'égalité* (17) *a lieu, quelle que soit Φ, pourvu que l'intégrale de* Stieltjes *existe (c'est-à-dire, pourvu que les points de discontinuité de $x(t)$ ne coïncident pas avec ceux de $g(t)$).*

Démonstration. Pour chaque τ, $a < \tau < b$, posons

$$x_\tau(t) = 1, \text{ si } a \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$= 0, \text{ si } t > \tau.$$

Si la fonction $g(t)$ est continue au point $t = \tau$, l'intégrale de Stieltjes a bien un sens pour $x = x_\tau(t)$ et l'égalité (17) subsiste, par définition même de $g(t)$. Il en sera de même pour les combinaisons linéaires aux coefficients constants de ces fonctions x_τ (y compris $x_b(t) \equiv 1$), ainsi que pour les fonctions-limites de telles combinaisons, uniformément convergentes; car dans le cas de convergence uniforme le passage à la limite sous le signe d'intégration est légitime, aussi bien pour l'intégrale de Stieltjes, que pour celle de Radon. Or, il est aisé de voir que la classe de fonctions, ainsi construite se confond avec $\mathfrak{F}$. Donc, chaque fonction $x \in \mathfrak{F}$ verifie effectivement la relation (17), bien entendu, si l'on a soin d'éviter les points de discontinuité de $g(t)$.

Réciproquement, soit $x_0 = x_0(t)$ une fonction mesurable bornée, non-comprise dans $\mathfrak{F}$. La famille $\mathfrak{F}$ étant un ensemble linéaire fermé dans l'espace M, la distance de x_0 à $\mathfrak{F}$ est non-nulle. D'après un théorème de M. Banach[15]), il existe alors une fonctionelle linéaire $f(x)$ dans l'espace M telle que

1) $f(x) = 0$ pour chaque $x \in \mathfrak{F}$
2) $f(x_0) = 1$.

Pour cette fonctionnelle-ci, qui a forcément la forme (2), la fonction respective $g(t)$ est égale à zéro identiquement. L'intégrale de Stieltjes, existe bien et s'anulle, quelle que soit x, tandis que l'intégrale de Radon est différente de zéro, p. e., pour $x = x_0$.

[13]) W. Sierpiński, Sur les fonctions d'ensemble additives et continues, Fund. Math. 3 (1922) p. 246.

[14]) Ces particularités des fonctions $x(t)$ viennent de la définition de la fonction $g(t)$. Si nous avions pris les intervalles semi-ouverts $[a, t)$ au lieu des intervalles fermés $[a, t]$, ce sont les discontinuités à gauche que nous devions admettre.

[15]) Banach, p. 57, lemme.

On peut compléter, d'ailleurs, ce qui précède par le

Théorème II. *Si l'on a, pour une fonction* Φ (e) *donnée,*

$$\underset{a \leq t \leq b}{\mathrm{Var}}\, g(t) = V_\Phi(E)\,, \tag{18}$$

l'égalité (17) *subsiste toujours, pourvu que l'intégrale de* Stieltjes *ait un sens.*

Démonstration. Supposons donc qu'on a l'égalité (18). Cela entraîne le même résultat pour un intervalle $[a, \tau]$ quelconque. En effet, les membres de la partie gauche de la relation

$$\underset{a \leq t \leq \tau}{\mathrm{Var}}\, g(t) + \underset{\tau \leq t \leq b}{\mathrm{Var}}\, g(t) = V_\Phi([a, \tau]) + V_\Phi((\tau, b])$$

ne pouvant surpasser les membres respectifs du coté droit, ils doient être égaux séparément, donc

$$\underset{a \leq t \leq \tau}{\mathrm{Var}}\, g(t) = V_\Phi([a, \tau])$$

ou plus brièvement

$$\overset{\tau}{\underset{a}{V}} g = \overset{\tau}{\underset{a}{V}} \Phi\,.$$

Il en résulte que les varations positives, resp., négatives des fonctions g et Φ se confondent également [v. (3), n⁰ 3]:

$$\Phi_1([a, \tau]) = \tfrac{1}{2}\{\overset{\tau}{\underset{a}{V}} \Phi + \Phi([a, \tau]) = \tfrac{1}{2}\{\overset{\tau}{\underset{a}{V}} g + g(\tau)\} = g_1(\tau)\,,$$

$$\Phi_2([a, \tau]) = \tfrac{1}{2}\{\overset{\tau}{\underset{a}{V}} \Phi - \Phi([a, \tau]) = \tfrac{1}{2}\{\overset{\tau}{\underset{a}{V}} g - g(\tau)\} = g_2(\tau)\,.$$

Comme

$$\Phi(e) = \Phi_1(e) - \Phi_2(e)\,,\ g(t) = g_1(t) - g_2(t)\,,$$

on peut donc se borner au cas, où la fonction $\Phi(e)$ est non-négative, en sorte que la fonction $g(t)$ ne décroît jamais. Or, dans ce cas précisément le raisonnement, pour prouver l'égalité entre l'intégrale de Radon et celle de Stieltjes (supposée existante), peut etre calqué de la démonstration usuelle de l'égalité des intégrales de Lebesgue et de Riemann.

Du théorème I il résulte, en particulier, que pour les fonctions $x = x(t)$ continues l'intégrale de Radon se ramène toujours

à une intégrale de Stieltjes. Réciproquement, toute intégrale de Stieltjes

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t)\,, \tag{19}$$

avec une fonction $g(t)$ a variation bornée quelconque, présente une fonctionnelle linéaire dans l'espace C des fonctions continues et on peut toujours l'étendre sur M (resp., sur M^*). Or, cela est possible d'une infinité de manières (même en conservant la norme de fonctionnelle) et exige, en général, l'application du principe de choix [16]).

On doit à M. H. Lebesgue les belles recherches [17]) dont l'objet est précisément l'extension de la notion d'intégrale de Stieltjes. Cette extension, faite d'une manière précise et uniforme, permet d'étendre toute fonctionnelle linéaire $f(x)$, définie dans l'espace C, sinon sur tout espace M, à moins sur le champ B de fonctions mesurables (B) et bornées.

La fonctionelle linéaire de M. Lebesgue est caractérisée par une propriété complémentaire que voici:

Si des fonctions $x_n(t)$ *tendent en croissant vers une fonction-limite* $x(t)$, *on a*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)\,.$$

Comme l'a montré l'illustre auteur, une telle fonctionnelle, définie dans B, est unique de son espèce.

La fonctionelle de M. Lebesgue pouvant se mettre sous la forme d'une intégrale de Radon (2), il est aisé de particulariser la nature de la fonction $\Phi(e)$ d'ensemble mesurable (B) qui y figure. Soit e la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n + \ldots$$

(sans points communs deux-à-deux). Si l'on pose

$$x_n(t) = x_{e_1}(t) + \ldots + x_{e_n}(t)\,,$$

---

[16]) Banach, p. 55, th. 2. V. aussi p. 29.

[17]) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et sur la recherche des fonctions primitives (Paris, 1928) p. 252—290.

on voit de suite que ces fonctions tendent en croissant vers la fonction caractéristique $x_e(t)$. Il en résulte:

$$\Phi(e) = \lim_{n\to\infty} \Phi(e_1 + \ldots + e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(e_n)$$

de sorte que la fonction d'ensemble $\Phi(e)$ se trouve additive au sens complet ou absolument additive. Réciproquement, si l'on fait cette hypothèse d'avance, il en découle la propriété complémentaire mentionnée ci-dessus.

Il est à signaler que le prolongement de M. Lebesgue suppose essentiellement que la métrique de l'espace B est celle de M et non pas de M^*. En d'autres termes, la fonctionnelle $f(x)$, étendue sur B, fait correspondre aux fonctions équivalentes des nombres, en général, différents.

Dans l'hypothèse de la métrique de M^*, l'extension de M. Lebesgue n'est possible que dans le cas banal, où l'intégrale de Stieltjes (19) se réduit à celle de Lebesgue (1), et l'extension s'effectue d'elle-même. Cela résulte de la remarque du n° 3.

6. Considérons une suite

$$\{f_n(x)\}$$

de fonctionnelles linéaires, définies dans l'espace M (resp., M^*). Comme on sait, chacune d'elles peut se présenter sous la forme d'une intégrale de Radon:

$$f_n(x) = \int_E x(t)\, \Phi_n(dE)\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{20}$$

où $\Phi_n(e)$ est une fonction d'ensemble mesurable $e \subset E$, additive et bornée (et s'anullant avec me, s'il s'agit de M^*). La norme de la fonctionnelle $f_n(x)$ est fournie par variation totale de $\Phi_n(e)$:

$$\|f_n\| = V_{\Phi_n}(E) = \int_E |\Phi_n(dE)|\,. \tag{21}$$

Nous nous proposons d'établir les conditions de la convergence faible de cette suite.

Théorème I. *Pour que la suite de fonctionelles linéaires* (20) *converge, quel que soit $x \in M$ (resp., M^*), vers une limite déterminée et finie*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, \tag{22}$$

il faut et il suffit que

1) *les normes* (21) *soient bornées dans leur ensemble:*

$$\int_E |\Phi_n(dE)| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

2) *il existe une limite déterminée et finie*

$$\Phi(e) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(e) \tag{23}$$

pour chaque ensemble mesurable $e \subset E$.

Ces conditions étant remplies, on a pour $x \in M$ (resp., M^*):

$$\lim_{n\to\infty} \int_E x(t)\, \Phi_n(dE) = \int_E x(t)\, \Phi(dE)\,, \tag{24}$$

où $\Phi(e)$, déterminée par (23), *est une fonction d'ensemble de même nature que $\Phi_n(e)$.*

Démonstration. Les conditions 1), 2) sont nécessaires. Pour la première, cela résulte d'un théorème général de M. H. Hahn [18]). Quant à la seconde, pour en être sûr il suffit de poser dans (22) $x = x_e(t)$.

Les conditions sont également suffisantes. En effet, supposons qu'elles sont satisfaites. Alors, vu (23), la relation (24) à démontrer se trouve vérifiée pour $x = x_e$. Comme l'ensemble des éléments x_e et de leurs combinaisons linéaires

$$c_1 x_{e_1} + c_2 x_{e_2} + \ldots + c_m x_{e_m}$$

est partout dense dans M (resp., M^*), la formule (24) s'étend sur tout espace [19]).

Ce critérium de convergence nous permet maintenant d'étudier la forme générale de l'operation linéaire

$$y = U(x)\,, \tag{25}$$

qui fait correspondre à toute fonction mesurable bornée $x = x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ une fonction continue $y = y(s)$ $(a \leqslant s \leqslant b)$.

[18]) H. Hahn. Über Folgen linearer Operationen, Monatsh. f. M. u. Ph. 32 (1922), p. 6. On peut consulter aussi: Banach, p. 80 et 123.

[19]) Banach, p. 123.

Théorème II. *La forme générale d'une opération linéaire* (25), *dont le domaine est M (resp., M^*) et le contredomaine est situé sur C, est donnée par une intégrale de* Radon:

(26) $$y(s) = \int_E x(t)\, \Phi_s(dE),$$

dépendante d'un paramètre s. La fonction $\Phi_s\ (e)$de s et d'ensemble mesurable $e \subset E$ est assujettie aux conditions suivantes:

1) *$\Phi_s(e)$, comme fonction de e, est additive et bornée (et s'anulle avec me, s'il s'agit de M^*);*

2) *on a, quel que soit s,*

$$\int_E |\Phi_s(dE)| \leqslant K;$$

3) *$\Phi_s(e)$ est continue par rapport à s, pour e fixe.*

Si la constante K est choisie la plus petite possible, on a de plus

$$\|U\| = K.$$

Démonstration. Soit (25) une opération linéaire qui fait correspondre à un $x \in M$ (resp., M^*) un $y \in C$. Pour une valeur s_0 fixe de s, $y(s_0)$ sera une fonctionnelle linéaire, définie dans M(ou M^*). En effet, étant additive, elle satisfait de plus à l'inégalité [20]:

$$|y(s_0)| \leqslant \|y\| \leqslant \|U\| \cdot \|x\|$$

On voit donc que la norme de cette fonctionnelle ne surpasse point la norme $\|U\|$ de l'opération donnée.

D'après le théorème fondamental du n° 2, on a

$$y(s_0) = \int_E x(t)\, \Phi_{s_0}(dE),$$

où $\Phi_{s_0}(e)$ possède des propriétés 1). En outre, de la remarque qui précède il vient

(27) $$\int_E |\Phi_{s_0}(dE)| \leqslant \|U\|,$$

de sorte que la condition 2) est également remplie.

[20]) Banach, p. 54.

La fonction $y(s)$ étant continue, on a, quelle que soit la suite $\{s_n\}$ convergente vers s_0,

(28) $$\lim_{n\to\infty} \int_E x(t)\, \Phi_{s_n}(dE) = \int_E x(t)\, \Phi_{s_0}(dE),$$

pourvu que $x \in M$ (resp., M^*). Alors, en vertu du théorème I, on aura forcément

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{s_n}(e) = \Phi_{s_0}(e),$$

pour chaque $e \subset E$. Par suite, $\Phi_s(e)$ est justement continue, comme fonction de s.

Réciproquement, considérons l'opération, définie par la formule (26) dans tout espace M (resp., M^*), $\Phi_s(e)$ étant astreinte aux conditions 1), 2), 3).

Le théorème I nous apprenne que la fonction $y(s)$, ainsi définie, est bien continue (v. (28)), c'est-à-dire, appartient à C.

On voit immédiatement que l'opération en question est additive. En outre, il vient [vu 2)]

$$|y(s)| \leqslant \int_E |\Phi_s(dE)| \cdot \|x\| \leqslant K \cdot \|x\|,$$

en sorte qu'on aura également

$$\|y\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} |y(s)| \leqslant K \cdot \|x\|;$$

il en suit que l'opération est bien linéaire et de norme

(29) $$\|U\| \leqslant K.$$

La conclusion finale du théorème résulte de deux inégalités (27) et (29).

7. Le théorème II du n° précédent implique une conclusion intéressante, concernante l'extension des opérations linéaires.

Supposons que nous avons une opération linéaire (25) quelconque, définie dans l'espace M (resp., M^*) et dont les valeurs appartiennent à C. Cette opération a nécessairement la forme (26) et les conditions 1), 2), 3) du théorème sont remplies.

Si l'on choisie l'élément x de façon qu'il également appartient à C, l'intégrale de Radon peut se réduire à celle de Stieltjes [v. n° 5, (17)].

Notamment, si l'on pose

$$g(t,s)=\Phi_s([a,t]) \qquad (a<t\leqslant b),$$
$$g(a,s)=0,$$

on a

(30) $$y(s)=\int_a^b x(t)\,d_t g(t,s).$$

De la définition même de la fonction $g(t,s)$ il résulte que les propriétés connues de $\Phi_s(e)$ entraînent les conclusions suivantes à propos de $g(t,s)$:

1) $g(t,s)$ est à variation bornée par rapport à t, s étant fixe, et on a de plus

$$\operatorname*{Var}_{a\leqq t\leqq b} g(t,s)\leqslant K;$$

2) $g(t,s)$ est continue par rapport à s, t étant fixe.

Soit donnée réciproquement une opération linéaire, définie dans C et dont le contredomaine est également situé sur C. Peut-on toujours la prolonger sur tout espace M (ou M^*), quand même aux dépens de l'accroissement de la norme? Comme nous venons de voire, pour que cette extension soit possible, il faut que l'opération dans C soit réprésentable sous la forme (30), avec les conditions prescrites 1) et 2).

Or, il est facile de définir de telles opérations, pour lesquelles la forme mentionnée n'est nulle part réalisable[21]). Considérons, p. e., la transformation identique dans C:

$$y(s)=x(s);$$

on peut la réprésenter par la formule (30), en posant

$$g(t,s)=0 \qquad \text{pour } a\leqslant t<s,\ a<s\leqslant b \text{ et pour } t=a,\ s=a,$$
$$g(t,s)=1 \qquad \text{partout ailleurs}.$$

Les points de la diagonale $s=t$ tous sont les points de discontinuité indispensable par rapport à s. Par suite, cette opération n'est pas prolongeable sur M (ou M^*), bien entendu, sous l'hypothèse que le contredomaine de l'opération ne puisse sortir de C.

Les fonctionnelles linéaires étant toujours prolongeables, d'après le théorème fondamental de M. M. Hahn-Banach, on voit à présent que pour les opérations linéaires il en n'est pas ainsi en général[22]); les choses ici sont plus compliquées.

Il ne faut pas croire d'ailleurs que les conditions 1) et 2) suffisent pour que l'extension d'une opération (30), de C à M (M^*), se trouve possible (avec la même norme). Définissons, p. e., l'opération fonctionnelle dans C comme voici (en posant $a=0$, $b=1$):

(31) $$y(s)=U(x)=\frac{3}{s}\left\{\int_{\frac{s}{3}}^{\frac{2s}{3}} x\,dt-\int_{\frac{2s}{3}}^{s} x\,dt\right\} \quad \text{si} \quad 0<s\leqslant 1$$
$$=0 \quad \text{pour } s=0.$$

Si l'on veut présenter cette opération-ci dans la forme (30), on doit y poser, pour $s\neq 0$,

$$\begin{aligned} g(t,s)&=0, && \text{si } 0\leqslant t\leqslant \frac{s}{3}\\ &=\frac{3}{s}t-1, && \text{si } \frac{s}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2s}{3}\\ &=3-\frac{3}{s}t, && \text{si } \frac{2s}{3}\leqslant t\leqslant s\\ &=0, && \text{si } s\leqslant t\leqslant 1 \end{aligned}$$

et de plus $g(t,0)=0$, pour $0\leqslant t\leqslant 1$. Cette fonction $g(t,s)$ satisfait bien aux conditions 1) et 2), et il est aisé de vérifier que l'opération (31) fait correspondre effectivement à une fonction continue $x=x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ une fonction également continue $y=y(s)$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$.

Comme, pour $s\neq 0$,

$$\operatorname*{Var}_{0\leqq t\leqq 1} g(t,s)=2,$$

[21]) Bien entendu, en tenant compte de la certaine indétermination de $g(t)$. Il est connu que, $x(t)$ étant continue, on peut changer les valeurs de $g(t)$ aux points d'un ensemble dénombrable, pourvu qu'elle reste à variation bornée, sans changement de la valeur de l'intégrale de Stieltjes.

[22]) Ce fait a été remarqé précédemment par M. M. S. Banach et S. Mazur; d'après les résultats de ces auteurs une opération linéaire n'est pas en général prolongeable, même dans le cas où le domaine et le contre-domaine sont séparables. Voir: S. Banach und S. Mazur, Zur Theorie der linearen Dimension, Stud. Math. 4 (1933) p. 100—112.

on a $\|U\|=2$. Supposons, par impossible, qu'on peut prolonger cette opération, en conservant la norme.

Considérons maintenant la fonction

$$x(t) = (-1)^n, \quad \text{si} \quad \frac{2}{3^{n+1}} \leqslant t < \frac{1}{3^n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$
$$= 0 \qquad \text{partout ailleurs.}$$

Pour ce x l'intégrale de Riemann (31) existe bien, il en est de même a fortiori pour l'intégrale de Stieltjes. Or, en vertu du théorème II du n° 5, celle-ci nous donne précisément la valeur de l'opération étendue (au moins, pour $s \neq 0$). Alors il vient

$$y\left(\frac{1}{3^n}\right) = (-1)^{n+1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

en sorte que la fonction $y(s)$, correspondante à x choisi, ne peut aucunement d'être continue pour $s=0$, contrairement à l'hypothèse.

La question sur les conditions nécessaires et suffisantes, pour que l'opération (30) soit prolongeable de C à M (M^*), reste ouverte.

Supplément.

Démonstration du lemme III, n° 4. Pour le moment nous ne pouvons effectuer la preuve que moyennant des considérations assez compliquées. Il est probable qu'on pourra démontrer cette proposition d'une façon beaucoup plus simple.

Commençons par une proposition auxiliaire.

Soit α un nombre ordinal de seconde espèce. Considérons des suites transfinies, formées des zéros et des unités:

$$\{t_1, t_2, \ldots, t_\omega, \ldots (t_\alpha)\} = \{t_\mu\}_{\mu<\alpha}, \qquad (t_\mu = 0 \text{ ou } 1)$$

dont le type d'ordre est α. On peut à chacune de ces suites faire correspondre une suite de nombres ordinaux $< \eta$

$$\{\beta_\nu\}_{\nu<\xi} = \{\beta_\nu [t_1, t_2, \ldots (t_\alpha)]\}$$

du type ξ, et cela de manière que pour un nombre fini quelconque de telles suites

$$\{\beta_\nu^{(1)}\}_{\nu<\xi}, \{\beta_\nu^{(2)}\}_{\nu<\xi}, \ldots, \{\beta_\nu^{(k)}\}_{\nu<\xi}$$

il existe toujours un $\nu_0 < \xi$ tel que

$$\beta_{\nu_0}^{(i)} \neq \beta_{\nu_0}^{(j)}, \text{ pourvu que } i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots k).$$

Les nombres ordinaux ξ et η ne dépendent que de α et peuvent être fixés d'avance; on peut choisir ces nombres ξ et η de façon qu'ils soient $\geqslant \alpha$, mais appartiennent avec α à la même classe de nombres ordinaux.

Nous allons prouver cette assertion par l'induction transfinie.

a) Tout d'abord, notre proposition est vraie pour $\alpha=\omega$. Dans ce cas il suffit prendre $\xi=\eta=\omega$ et poser

$$\beta_n = \beta_n [t_1, t_2, \ldots (t_\omega)] = \text{Entier } (an),$$

$$\text{où} \quad a = \frac{2t_1}{3} + \frac{2t_2}{3^2} + \frac{2t_3}{3^3} + \ldots \qquad (t_m = 0 \text{ ou } 1).$$

Il est évident que les suites, correspondantes aux valeurs distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de a, justement s'écartent, dès que n est assez grand.

b) Supposons qu'elle est vraie pour tout nombre ordinal de seconde espèce $\alpha < \alpha'$; il faut montrer qu'il en sera de même pour α'.

Soit, en premier lieu, α' la limite d'une suite de nombres ordinaux de première espèce, c'est-à-dire, $\alpha' = \alpha + \omega$, où α est de seconde espèce. Pour α notre assertion est juste, par hypothèse; en particulier, les nombres $\xi \geqslant \alpha$ et $\eta \geqslant \alpha$, attachés à α, sont déjà fixés. Posons $\xi' = \omega\xi$, $\eta' = \omega\eta$.

Soit

$$\{t_1, \ldots, t_\alpha, t_{\alpha+1}, \ldots (t_{\alpha+\omega})\} = \{t_{\mu'}\}_{\mu'<\alpha'}$$

une suite des zéros et unités du type α'. Nous faisons lui correspondre une suite du type ξ' de nombres ordinaux $< \eta'$:

$$\begin{aligned}\bar\beta_{\nu'} &= \beta_{\omega.\nu+n} [t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, t_{\alpha+1}, \ldots (t_{\alpha+\omega})] = \\ &= \omega . \beta_\nu [t_1, t_2, \ldots (t_\alpha)] + \beta_n [t_\alpha, t_{\alpha+1}, \ldots (t_{\alpha+\omega})].\end{aligned} \qquad (\nu < \xi, \nu' < \xi')$$

Considérons un nombre fini quelconque de suites de nombres ordinaux:

$$(32) \qquad \{\bar\beta_{\nu'}^{(1)}\}_{\nu'<\xi'}, \{\bar\beta_{\nu'}^{(2)}\}_{\nu'<\xi'}, \ldots, \{\bar\beta_{\nu'}^{(k)}\}_{\nu'<\xi'},$$

définies par des suites paramétriques

$$(33) \qquad \{t_{\mu'}^{(1)}\}_{\mu'<\alpha'}, \{t_{\mu'}^{(2)}\}_{\mu'<\alpha'}, \ldots, \{t_{\mu'}^{(k)}\}_{\mu'<\alpha'}.$$

Il existe un ν_0, tel que les nombres ordinaux

$$\beta_{\nu_0}^{(i)} = \beta_{\nu_0}[t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots (t_\alpha^{(i)})], \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

pourvu qu'ils correspondent aux suites distinctes $\{t_\mu^{(i)}\}_{\mu<\alpha}$, sont ils mêmes distincts. Puis, il existe un n_0, tel que les nombres naturels

$$\tilde{\beta}_n^{(i)} = \beta_n[t_\alpha^{(i)}, t_{\alpha+1}^{(i)}, \dots (t_{\alpha+\omega}^{(i)})] \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

sont également distincts, bien entendu, en tant qu'ils correspondent aux suites distinctes $\{t_{\alpha+n}^{(i)}\}_{n<\omega}$. Alors, pour $\nu_0' = \omega\nu_0 + n_0$ les nombres ordinaux

$$\bar{\beta}_{\nu_0'}^{(i)} = \omega \cdot \beta_{\nu_0}^{(i)} + \tilde{\beta}_{n_0}^{(i)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

sont tous réellement distincts, car deux suites paramétriques (33) diffèrent, sinon dans la partie initiale des indices $\{t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots (t_\alpha^{(i)})\}$, au moins dans le reste $\{t_\alpha^{(i)}, t_{\alpha+1}^{(i)}, \dots (t_{\alpha+\omega}^{(i)})\}$.

Les nombres ordinaux $\xi' = \omega\xi \geqslant \xi + \omega \geqslant \alpha + \omega = \alpha'$ et $\eta' \geqslant \alpha'$ appartiennent évidemment à la même classe que les nombres α, ξ, η et α'.

c) Enfin, soit α' la limite des nombres ordinaux de seconde espèce:

$$\alpha' = \operatorname*{Lim}_{\varkappa<\lambda} \alpha_\varkappa .$$

La proposition à démontrer étant vraie, par hypothèse, pour chaque $\alpha_\varkappa < \alpha'$, on peut fixer les nombres $\xi_\varkappa \geqslant \alpha_\varkappa$, $\eta_\varkappa \geqslant \alpha_\varkappa$, etc. Posons

$$\xi' = \xi_1 + \xi_2 + \dots (+\xi_\lambda) = \sum_{\varkappa<\lambda} \xi_\varkappa ; \quad \eta' = \operatorname*{Lim}_{\varkappa<\lambda} \eta_\varkappa .$$

On voit que

$$\xi' \geqslant \sum_{\varkappa<\lambda} \alpha_\varkappa \geqslant \operatorname*{Lim}_{\varkappa<\lambda} \alpha_\varkappa = \alpha', \quad \eta' = \operatorname*{Lim}_{\varkappa<\lambda} \eta_\varkappa \geqslant \operatorname*{Lim}_{\varkappa<\lambda} \alpha_\varkappa = \alpha' .$$

Les nombres α', ξ', η' sont de la même classe. En effet, soit $\aleph$ la puissance du nombre α' (c'est-à-dire, la puissance d'un ensemble dont le type d'ordre est α'). Le nombre λ étant $\leqslant \alpha'$, la puissance du nombre $\xi' = \sum_{\varkappa<\lambda} \xi_\varkappa$ ne surpasse pas $\aleph \cdot \aleph = \aleph$. Il en est de même pour le nombre η'.

Si $\nu' < \xi'$, on a

$$\nu' = \sum_{\iota<\varkappa} \xi_\iota + \delta, \text{ où } \delta < \xi_\varkappa .$$

Posons dans ce cas

$$\bar{\beta}_{\nu'} = \beta_{\nu'}[t_1, t_2, \dots (t_{\alpha'})] = \beta_\delta[t_1, t_2, \dots (t_{\alpha_\varkappa})], \qquad (\nu' < \xi')$$

on voit que $\bar{\beta}_{\nu'} < \eta'$.

Si l'on a donné un nombre fini quelconque de suites (33) et (32), les suites

$$\{t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots (t_{\alpha'}^{(1)})\}, \dots, \{t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots (t_{\alpha'}^{(k)})\}$$

étant différentes, il en sera même pour les suites accourcies

$$\{t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots (t_{\alpha_{\varkappa_0}}^{(1)})\}, \dots, \{t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots (t_{\alpha_{\varkappa_0}}^{(k)})\},$$

dès que $\varkappa_0$ est suffisamment grand. Alors il existe un nombre ordinal $\delta_0 < \xi_{\varkappa_0}$, tel que les nombres

$$\beta_{\delta_0}[t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots (t_{\alpha_{\varkappa_0}}^{(i)})] \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

sont tous distincts. Il est ainsi évidemment pour les

$$\bar{\beta}_{\nu_0'}^{(i)} = \beta_{\nu_0'}[t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots (t_{\alpha'}^{(i)})] \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

aussi, si l'on pose

$$\nu_0' = \sum_{\iota<\varkappa_0} \xi_\iota + \delta_0,$$

c. q. f. d.

La proposition, énoncée au début, est donc démontrée.

Cela posé, nous sommes en état de prouver le lemme en question. Soit $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_\gamma$. Prenons pour α un nombre initial Ω_γ et définissons les nombres ξ et η qui sont attachés à lui, d'après ce que précède. Les suites

$$1, 2, \dots, \omega, \dots (\xi) \text{ et } 1, 2, \dots, \omega, \dots (\eta)$$

toutes les deux ont puissance $\mathfrak{c}$.

Etablissons une correspondance biunivoque, d'une part, entre les éléments de la première suite et les points u de l'ensemble A, et d'autre part, entre les éléments de la seconde suite et les nombres réels de l'intervalle ouvert (l, L).

Faisons correspondre à chaque suite de zéros et unités

(34) $$t_1, t_2, \dots (t_{\Omega_\gamma})$$

une fonction $\varphi(u)$, $u \in A$, en posant $\varphi(u) = v$ précisément dans le cas, où u correspond à un nombre $\nu < \xi$ et simultanément v $(l < v < L)$ correspond au nombre

$$\beta_\nu [t_1, t_2, \dots (t_{\Omega_\gamma})] < \eta .$$

Si l'on choisie un nombre fini quelconque de telles fonctions, rattachées aux suites différentes

$$t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots (t_{\Omega_\gamma}^{(i)}), \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

leur valeurs seront forcément distinctes, p. e., pour la valeur u_0 de u, correspondant au nombre ν_0 dont il s'agissait dans la proposition auxiliaire.

Enfin, il est clair que la puissance de la famille $\mathcal{F}$ de toutes les fonctions, ainsi définies, est égale à la puissance de toutes les suites (34), c'est-à-dire, exactement à $2^{\mathfrak{c}}$.

La preuve est achevée.

Université de Leningrad.
Institut Mathématique.

(Reçu par la Rédaction le 12. 7. 1934).