Janiszewski, Z. [1] *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua* (en polonais), Prace Matematyczno-Fizyczne 26 (1915), pp. 11—63.

Kuratowski, C. [1] *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques et compacts*, Fund. Math. XI (1928), pp. 169—192.

— [2] *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. XII (1928), pp. 214—239.

— [3] *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII (1929), pp. 307—318.

— [4] *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa—Lwów 1933.

Nikodym, S. [1] *Sur les coupures du plan*, Fund Math. VII (1925), pp. 14—22.

Stoïlow, S. [1] *Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques*, Ann. Ec. Norm. Sup. III, 45 (1928), pp. 347—382.

Vietoris, L. [1] *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), pp. 454—472.

Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Die Boole'sche Algebra, auch Algebra der Logik genannt, ist bekanntlich ein formales System mit einer Reihe von wichtigen Interpretationen in verschiedenen Grundgebieten der Logik und Mathematik. Die allerwichtigste, jedenfalls die bekannteste, Interpretation dieses Systems stellt der sogenannte Klassenkalkül dar.

Die vorliegende Arbeit enthält einige Beiträge zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. Von den Ergebnissen, welche von mir auf diesem Gebiete erreicht worden sind, werde ich nur diejenigen mitteilen, die sich mit Hilfe gewöhnlicher mathematischer Schlussweisen begründen lassen und keinen speziellen metamathematischen Forschungsapparat erfordern.

§ 1. Das gewöhnliche und das erweiterte System der Boole'schen Algebra.

Es sind gegenwärtig mehrere äquivalente Systeme von Grundausdrücken und Postulaten bekannt, die zur Begründung der Boole'schen Algebra ausreichen. Um die weiteren Ausführungen zu konkretisieren, führen wir hier eins dieser Systeme explicite an.

In diesem System treten acht Grundausdrücke auf: „B" — „*der Betrachtungsbereich*", „$x < y$" — „*das Element x steht zum Element y in der Beziehung der Inklusion*" („*das Element x ist im Element y enthalten*"), „$x = y$", — „*das Element x steht zum Element y in der Beziehung der Gleichheit*" („*das Element x ist dem Element y gleich*") „$x + y$" — „*die Summe der Elemente x und y*", „$x \cdot y$" — „*das Produkt der Elemente x und y*", „0" — „*das leere Element*", „1" —

„das volle Element“ und „x'“ — „die Negation (das Komplement) des Elements x“. Das Symbol „B“ bezeichnet eine gewisse Menge von Elementen, die Symbole „0“ und „1“ — gewisse Elemente dieser Menge, die Symbole „$<$“ und „$=$“ — gewisse Relationen zwischen den Elementen dieser Menge; schliesslich bezeichnen die Symbole „$+$“, „$\cdot$“ und „$'$“ gewisse Operationen, welche zweien oder einem Elemente der Menge ein anderes Element dieser Menge zuordnen [1]).

Als Postulate sind folgende Sätze gegeben:

Postulat $\mathfrak{A}_1$. [a]) *Ist* $x \in B$, *so* $x < x$;
[b]) *ist* $x, y, \in B$, $x < y$ *und* $y < z$, *so* $x < z$.

Postulat $\mathfrak{A}_2$. *Ist* $x, y \in B$, *so* $x = y$ *dann und nur dann, wenn gleichzeitig* $x < y$ *und* $y < x$.

Postulat $\mathfrak{A}_3$. *Ist* $x, y \in B$, *so*
[a]) $x + y \in B$;
[b]) $x < x + y$ *und* $y < x + y$;
[c]) *wenn ausserdem* $z \in B$, $x < z$ *und* $y < z$, *so* $x + y < z$.

Postulat $\mathfrak{A}_4$. *Ist* $x, y \in B$, *so*
[a]) $x \cdot y \in B$;
[b]) $x \cdot y < x$ *und* $x \cdot y < y$;
[c]) *wenn ausserdem* $z \in B$, $z < x$ *und* $z < y$, *so* $z < x \cdot y$.

Postulat $\mathfrak{A}_5$. *Ist* $x, y, z \in B$, *so*
[a]) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
[b]) $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

Postulat $\mathfrak{A}_6$. [a]) $0, 1 \in B$;
[b]) *ist* $x \in B$, *so* $0 < x$ *und* $x < 1$.

Postulat $\mathfrak{A}_7$. *Ist* $x \in B$, *so*
[a]) $x' \in B$;
[b]) $x \cdot x' = 0$;
[c]) $x + x' = 1$.

[1]) Neben den spezifischen Symbolen der Boole'schen Algebra soll auch die übliche Symbolik aus dem Gebiet der Mengenlehre gebraucht werden. So bedeutet z. B. die Formel „$x, y \ldots \in X$“, dass die Elemente $x, y \ldots$ zu der Menge X gehören; die Formel „$X \subset Y$“ drückt aus, dass die Menge X in der Menge Y enthalten ist; das Symbol „$\underset{x}{E}[\varphi(x)]$“ bezeichnet die Menge aller derjenigen Elemente x, welche die Bedingung (Satzfunktion) $\varphi(x)$ erfüllen; das Symbol „$\{x, y \ldots\}$“ bezeichnet die Menge, welche ausschliesslich aus den Elementen $x, y \ldots$ besteht u. s. w. Soll ausgedrückt werden, dass zwischen x und y die Relation R besteht, bzw. nicht besteht, so wird „$x\,R\,y$“, bzw. „x *nicht* $R\,y$“ geschrieben.

Die Gesamtheit der Postulate [$\mathfrak{A}_1$—$\mathfrak{A}_7$] [2]) und der aus ihnen folgenden Sätze nennen wir das gewöhnliche System der Boole'schen Algebra.

Die Boole'sche Algebra lässt sich durch Einführung von zwei Operationen unendlichen Charakters, und zwar die der Addition und die der Multiplikation erweitern. Zu diesem Zwecke reihen wir in die Liste der Grundbegriffe folgende zwei Ausdrücke ein: „$\sum\limits_{y \in X} y$“ — *„die Summe aller Elemente der Menge X“* sowie „$\prod\limits_{y \in X} y$“ — *„das Produkt aller Elemente der Menge X“* [3]). Das System der Postulate [$\mathfrak{A}_1$—$\mathfrak{A}_7$] wird durch folgende Sätze ergänzt:

Postulat $\mathfrak{A}_8$. *Ist* $X \subset B$, *so*
[a]) $\sum\limits_{y \in X} y \in B$;
[b]) $x < \sum\limits_{y \in X} y$ *für beliebiges* $x \in X$;
[c]) *wenn ausserdem* $z \in B$ *und* $x < z$ *für beliebiges* $x \in X$, *so* $\sum\limits_{y \in X} y < z$.

[2]) Es ist dies — mit geringen Modifikationen — das von L. Couturat in seinem Buch: *L'algèbre de la logique*, Scientia N° 24, 1905 angegebene Postulatensystem. Von den Veränderungen, die wir in diesem System eingeführt haben, seien folgende angemerkt: (1) die bei Couturat definierten Ausdrücke „$x = y$“, „$x + y$“, „$x \cdot y$“, „0“, „1“ und „x'“ sind als Grundausdrücke behandelt, indem die Postulate in entsprechender Weise modifiziert werden; (2) in die Liste der Grundausdrücke wurde das Symbol „B“ aufgenommen, welches den Betrachtungsbereich bezeichnet; (3) das Postulat der Existenz: „$0 \neq 1$“ (op. cit., p. 28) wurde aus dem System beseitigt. In dem angeführtem Buch Couturats kann sich der Leser darüber unterrichten, wie man aus dem angenommenen Postulatensystem alle Sätze der Boole'schen Algebra ableitet, die in den ferneren Betrachtungen gebraucht werden.

[3]) Neben den Ausdrücken „$\sum\limits_{y \in X} y$“ und „$\prod\limits_{y \in X} y$“ werden hier symbolische Ausdrücke allgemeiner Natur verwenden: „$\sum\limits_{\varphi(x)} f(x)$“, bzw. „$\prod\limits_{\varphi(x)} f(x)$“ — *die Summe*, bzw. *das Produkt aller Elemente y von der Form $y = f(x)$, die den Elementen x entsprechen, welche ihrerseits die Bedingung $\varphi(x)$ erfüllen.* Die Ausdrücke kann man übrigens leicht auf Grundausdrücke zurückführen: X sei die Menge aller Elemente y von der Form: $y = f(x)$, wo x ein beliebiges Element ist, welches die Bedingung $\varphi(x)$ erfüllt; es gelten dann die Formeln: $\sum\limits_{\varphi(x)} f(x) = \sum\limits_{y \in X} y$ *und* $\prod\limits_{\varphi(x)} f(x) = \prod\limits_{y \in X} y$. Jene Ausdrücke allgemeiner Natur treten schon im Postulat $\mathfrak{A}_{10}$ auf.

Postulat $\mathfrak{A}_9$. *Ist* $X \subset B$, *so*

a) $\prod_{y \in X} y \in B$;

b) $\prod_{y \in X} y < x$ *für beliebiges* $x \in X$;

c) *wenn ausserdem* $z \in B$ *und* $z < x$ *für beliebiges* $x \in X$, *so* $z < \prod_{y \in X} y$.

Postulat $\mathfrak{A}_{10}$. *Ist* $x \in B$ *und* $X \subset B$, *so*

a) $x \cdot \sum_{y \in X} y = \sum_{y \in X} (x \cdot y)$;

b) $x + \prod_{y \in X} y = \prod_{y \in X} (x + y)$.

Das Postulatensystem $[\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_{10}]$ sowie die Gesamtheit der daraus sich ergebenden Sätze bilden das erweiterte System der Boole'schen Algebra.

Es muss hervorgehoben werden, dass die Postulate dieses Systems von einander nicht unabhängig sind; so z. B. lassen sich die Postulate $\mathfrak{A}_5{}^a$, $\mathfrak{A}_5{}^b$ und $\mathfrak{A}_{10}{}^b$ aus den übrigen ableiten. Auch sind die in dem System auftretenden Grundausdrücke gegeseitig nicht unabhängig. Es lässt sich z. B. das Inklusionszeichen „$<$" auf verschiedene Weise mit Hilfe der anderen Ausdrücke definieren. Dies bezeugt folgender Satz, dessen Beweis auf Grund der Postulate $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_7$ keine Schwierigkeiten bereitet.

Ist $x, y \in B$, *so sind die Formel* (1) $x < y$, (2) $x + y = y$, (3) $x \cdot y = x$, (4) $x' + y = 1$ *sowie* (5) $x \cdot y' = 0$ *äquivalent.*

Wird dagegen das Symbol „$<$" in der Liste der Grundausdrücke beibehalten, so kann daraus das Gleichheitszeichen „$=$" gestrichen werden, indem als seine Definition das Postulat $\mathfrak{A}_2$ angenommen wird.

Das Symbol „$=$" wird oft nicht als ein spezifisches Symbol der Boole'schen Algebra, sondern als das Zeichen der logischen Identität, somit als eine Konstante allgemein logischen Charakters behandelt. Eben solchen Standpunkt werden wir von nun an einnehmen. Er ermöglicht bedeutende Vereinfachungen in dem System der Grundausdrücke und Postulate der Boole'schen Algebra. Besonders lässt sich die Liste der Grundausdrücke bedeutend reduzieren: es genügt, in dieser Liste neben das Symbol „B" einen der Ausdrücke „$x < y$", „$x + y$", „$x \cdot y$", „$\sum_{y \in X} y$" oder „$\prod_{y \in X} y$" zu stellen,

um alle andern Ausdrücke zu definieren. Für jeden der angeführten Ausdrücke kann man ein entsprechendes System von Postulaten konstruieren, welches dem System $[\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_{10}]$ äquivalent, aber viel einfacher ist [4]).

Als Beispiel führen wir hier ein einfaches, auf den zwei Grundausdrücken „B" und „$x < y$" begründetes, Postulatensystem an und stellen seine Äquivalenz mit dem System $[\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_{10}]$ fest. Das System besteht aus vier Sätzen:

Postulat $\mathfrak{B}_1$. *Ist* $x, y \in B$, $x < y$ *und* $y < x$, *so* $x = y$.

Postulat $\mathfrak{B}_2$. *Ist* $x, y, z \in B$, $x < y$ *und* $y < z$, *so* $x < z$.

Postulat $\mathfrak{B}_3$. *Ist* $x, y \in B$ *und* x *nicht* $- < y$, *so gibts solch ein Element* $z \in B$, *dass* $z < x$, z *nicht* $- < y$ *und dass dabei die Formeln:* $u \in B$, $u < y$ *und* $u < z$ *stets:* $u < v$ *für jedes* $v \in B$ *ergeben.*

Postulat $\mathfrak{B}_4$. *Ist* $X \subset B$, *so existiert ein Element* $x \in B$, *welches folgende Bedingungen erfüllt:* (1) $y < x$ *für jedes* $y \in X$; (2) *wenn* $z \in B$, $z < x$ *und wenn für jedes* $y \in X$ *die Formeln:* $u \in B$, $u < y$ *und* $u < z$ *stets:* $u < v$ *für jedes* $v \in B$ *ergeben, so ist auch* $z < v$ *für jedes* $v \in B$.

Um den Inhalt der beiden letzten Postulate zugänglich zu machen, heben wir hervor, dass auf Grund des früheren Postulatensystems die Bedingung: „*die Formeln:* $u \in B$, $u < y$ *und* $u < z$ *ergeben stets:* $u < v$ *für jedes* $v \in B$" der Formel „$y \cdot z = 0$" äquivalent ist.

Ähnlich kann man die Bedingung „$z < v$ *für jedes* $v \in B$" durch die Gleichheit „$z = 0$" ersetzen.

Die übrigen Ausdrücke der Boole'schen Algebra werden in folgender Weise definiert:

Defintion $\mathfrak{B}_5$. a) *Für beliebige* $x, y z \in B$: $z = x + y$ *dann und nur dann, wenn* z *das einzige Element ist, welches die Bedingungen:*

(1) $x < z$ *und* $y < z$,

(2) *für jedes* $u \in B$, *ist* $x < u$ *und* $y < u$, *so* $z < u$ —

— *erfüllt;*

b) *für beliebige* $x, y, z \in B$: $z = x \cdot y$ *dann und nur dann, wenn* z *das einzige Element ist, welches die Bedingungen:*

[4]) Für das gewöhnliche System der Boole'schen Algebra hat solche Postulatensysteme E. V. Huntington konstruiert; vergl. seine Abhandlungen: *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 5, 1904, pp. 288—309, sowie *New sets of independent postulates...*, ibid., vol. 35, 1933, pp. 274—304.

(1) *$z < x$ und $z < y$,*

(2) *für jedes $u \in B$, ist $u < x$ und $u < y$, so $u < z$ — — erfüllt;*

c) *für beliebiges $x \in B$; $x = 0$ dann und nur dann, wenn x das einzige Element ist, welches der Bedingung: $x < v$ für jedes $v \in B$ — genügt;*

d) *für beliebiges $x \in B$: $x = 1$ dann und nur dann, wenn x das einzige Element ist, welches der Bedingung: $v < x$ für jedes $v \in B$ — genügt;*

e) *für beliebige $x, y \in B$: $y = x'$ dann und nur dann, wenn y das einzige Element ist, welches folgenden Bedingungen genügt:*

(1) *die Formeln $u \in B$, $u < x$ und $u < y$ implizieren stets: $u < v$ für jedes $v \in B$;*

(2) *die Formeln $u \in B$, $x < u$ und $y < u$ implizieren stets: $v < u$ für jedes $v \in B$.*

Definition $\mathscr{B}_6$. Ist $x \in B$ und $X \subset B$, so

a) *$x = \sum_{y \in X} y$ dann und nur dann, wenn x das einzige Element ist, welches die Bedingungen:*

(1) *$y < x$ für jedes $y \in X$;*

(2) *ist $z \in B$ und $y < z$ für jedes $y \in X$, so $x < z$ — — erfüllt;*

b) *$x = \prod_{y \in X} y$ dann und nur dann, wenn x das einzige Element ist, welches die Bedingungen:*

(1) *$x < y$ für jedes $y \in X$;*

(2) *ist $z \in B$ und $z < y$ für jedes $y \in X$, so $z < x$ — — erfüllt.*

Satz 1. Das Postulatensystem $[\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_{10}]$ ist dem System der Postulate und Definitionen $[\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_6]$ äquivalent.

Beweis. I. Wir werden zeigen, in welcher Weise die Sätze $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_6$ sich aus den Postulaten $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_{10}$ ableiten lassen.

$\mathscr{B}_1$ stellt eine Abschwächung des Postulats $\mathscr{A}_1$ dar; $\mathscr{B}_2$ deckt sich mit $\mathscr{A}_1^{\mathrm{b}}$.

Wir gehen zu $\mathscr{B}_3$ über. Es sei $x, y \in B$ und dabei x *nicht* $-< y$. Wir setzen: $z = x \cdot y'$. Man sieht sofort, dass $z \in B$ und $z < x$. Wäre $z < y$, also $x \cdot y' < y$, so hätten wir (mit Rücksicht auf die Formel: $x \cdot y < y$): $x \cdot y + x \cdot y' < y$, woraus $x \cdot (y + y') < y$, $x \cdot 1 < y$ und endlich $x < y$ — entgegen der Voraussetzung; also z *nicht* $-< y$.

Ist schliesslich $u \in B$, $u < y$ und $u < z$, so $u < y \cdot z = y \cdot (x \cdot y')$; daraus folgt durch leichte Umformungen $u < x \cdot (y \cdot y') = x \cdot 0 = 0$, und da $0 < v$ für jedes $v \in B$, so auch $u < v$ für jedes $v \in B$. So erfüllt das Element z alle Bedingungen des Postulats $\mathscr{B}_3$.

Um $\mathscr{B}_4$ abzuleiten, wird eine beliebige Menge $X \subset B$ gewählt und $x = \sum_{y \in X} y$ gesetzt. Nach $\mathscr{A}_8^{\mathrm{a,b}}$ gilt: $x \in B$ und dabei $y < x$ für jedes $y \in X$. Betrachten wir ferner ein beliebiges Element $z \in B$, welches die Voraussetzungen der Bedingung (2) des Postulats $\mathscr{B}_4$ erfüllt, d. i. (α) $z < x$ und (β) für jedes $y \in X$ ergeben die Formeln: $u \in B$, $u < y$ und $u < z$ stets: $u < v$ für jedes $v \in B$. Ersetzt man in (β) „u" durch „$z \cdot y$", so folgt daraus: $z \cdot y < v$ für $y \in X$ und $v \in B$, woraus nach $\mathscr{A}_8^{\mathrm{c}}$: $\sum_{y \in X} (z \cdot y) < v$, und da auf Grund von $\mathscr{A}_{10}^{\mathrm{a}}$: $z \cdot x = z \cdot \sum_{y \in X} y = \sum_{y \in X} (z \cdot y)$, so ferner: $z \cdot x < v$ für jedes $v \in B$. Anderseits ergibt (α): $z = z \cdot x$; zuletzt also $z < v$ für jedes $v \in B$. Das Element x genügt mithin allen Bedingungen des Postulats $\mathscr{B}_4$.

$\mathscr{B}_5^{\mathrm{a}}$ leiten wir unmittelbar aus $\mathscr{A}_3$ ab, wobei $\mathscr{A}_2$ angewendet wird, um nachzuweisen, dass $x + y$ das einzige Element ist, welches die Bedingungen (1) und (2) der Definition $\mathscr{B}_5^{\mathrm{a}}$ erfüllt. Ähnlich wird $\mathscr{B}_5^{\mathrm{b}}$ — aus $\mathscr{A}_4$, $\mathscr{B}_5^{\mathrm{c,d}}$ — aus $\mathscr{A}_6$, $\mathscr{B}_6$ — aus $\mathscr{A}_8$ und $\mathscr{A}_9$ abgeleitet.

Es bleibt $\mathscr{B}_5^{\mathrm{e}}$. Sei $x, y \in B$ und $y = x'$. Ist $u \in B$, $u < x$ und $u < y$ so $u < x \cdot y = x \cdot x' = 0$, und da $0 < v$, so auch $u < v$ für jedes $v \in B$; y erfüllt also die Bedingung (1). In ähnlicher Weise wird festgestellt, dass y der Bedingungen (2) genügt.

Befriedigt irgend ein anderes Element $y_1 \in B$ ebenfalls diese beiden Bedingungen, so ergibt sich, was leicht zu beweisen: $x \cdot y_1 = 0$ und $x + y_1 = 1$; mit Hilfe üblicher Schlussweisen der Boole'schen Algebra erhält man aus diesen Formeln: $y_1 = x' = y$. Infolgedessen ist y das einzige Element, welches den Bedingungen (1) und (2) genügt. Da nach $\mathscr{A}_7^{\mathrm{a}}$ jedem Element $x \in B$ ein Element $x' \in B$ entspricht, so schliesst man hieraus schon leicht, dass auch umgekehrt: wenn y das einzige Element ist, welches (1) und (2) erfüllt, so $y = x'$. $\mathscr{B}_5^{\mathrm{e}}$ ist also abgeleitet.

Auf diese Weise folgen tatsächlich die Sätze $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_6$ aus den Postulaten $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_{10}$, w. z. b. w.

II. Der Beweis in umgekehrter Richtung bietet ebenfalls keine grösseren Schwierigkeiten.

$\mathcal{A}_1^a$ wird aus $\mathcal{B}_3$ abgeleitet: indem wir nämlich in $\mathcal{B}_3$ „y" durch „x" ersetzen, überzeugen wir uns, dass die Vermutung: *x nicht* $-<x$ zu einem Widerspruch führt. $\mathcal{A}_1^b$ deckt sich mit $\mathcal{B}_2$. $\mathcal{A}_2$ ist eine Äquivalenz, also eine Konjunktion zweier Implikationen; eine dieser Implikationen deckt sich mit $\mathcal{B}_1$, die andere folgt direkt aus dem schon abgeleiteten Postulat $\mathcal{A}_1^a$ (hierbei darf man nicht vergessen, dass das Symbol „$=$" stets als Zeichen der logischen Identität zu behandeln ist).

Jetzt werden wir uns mit dem Postulat $\mathcal{A}_8$ befassen. X sei eine beliebige Untermenge von B. Dem Satz $\mathcal{B}_4$ zufolge, gibt es ein Element x, welches folgende Bedingungen genügt:

(1) $$x \in B;$$

(2) $$y < x \quad \textit{für jedes} \quad y \in X;$$

(3) *wenn $z \in B$, $z < x$ und wenn für jedes $y \in X$ die Formeln: $u \in B$, $u < y$ und $u < z$ stets: $u < v$ für jedes $v \in B$ ergeben, so auch $z < v$ für jedes $v \in B$.*

Wir werden beweisen, dass das Element x auch folgende Bedingung erfüllt:

(4) *ist $z \in B$ und ist $y < z$ für jedes $y \in X$, so auch $x < z$.*

In der Tat, nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall; z sei solch ein Element der Menge B, dass

(5) $$y < z \quad \textit{für jedes} \quad y \in X$$

und dass trotzdem *x nicht* $-<z$. Laut dem Satz $\mathcal{B}_3$ (wo „y" und „z" entsprechend durch „z" und „t" ersetzt werden) gibt es dann ein Element „t", welches nachstehende Bedingungen erfüllt:

(6) $$t \in B \quad \textit{und} \quad t < x;$$

(7) $$t \textit{ nicht } -< z;$$

(8) *die Formeln: $u \in B$, $u < z$ und $u < t$ ergeben stets: $u < v$ für jedes $v \in B$.*

Ziehen wir nun ein beliebiges Element $y \in X$ in Betracht und setzen wir voraus, dass die Formeln: $u \in B$, $u < y$ *und* $u < t$ bestehen. Der Formel (5) zufolge ist: $y < z$; die Inklusionen: $u < y$ und $y < z$ ergeben auf Grund von $\mathcal{B}_2$: $u < z$. Mit Hilfe von (8) schliessen wir hieraus, dass $u < v$ für jedes $v \in B$. Infolgedessen:

(9) *die Formeln: $u \in B$, $u < y$ und $u < t$ haben für beliebiges $y \in X$ stets: $u < v$ für jedes $v \in B$ zur Folge.*

Mit Rücksicht auf (6) und (9) kann man (3) anwenden, indem „z" durch „t" ersetzt wird; man erhält: $t < v$ für jedes $v \in B$ und insbesondere: $t < z$, was der Formel (7) offensichtlich widerspricht.

Wir müssen also annehmen, dass die Bedingung (4) erfüllt ist.

Nach (2) und (4) genügt das Element $z \in B$ beiden Bedingungen der Definition $\mathcal{B}_6^a$. Aus $\mathcal{B}_1$ ist dabei leicht zu schliessen, dass x das einzige Element ist, welches diese beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt; hieraus $x = \sum_{y \in X} y$. Ersetzt man in (1), (2) und (4) „x" durch „$\sum_{y \in X} y$", so erhalten wir das vollständige Postulat $\mathcal{A}_8$.

Aus der Zusammenstellung der Definitionen $\mathcal{B}_5^a$ und $\mathcal{B}_6^a$ folgt, dass die Formeln: $x = \sum_{t \in X} t$ und $x = y + z$ äquivalent sind, sobald die Menge $X \subset B$ nur aus den zwei Elementen y und z besteht: $X = \{y, z\}$; das Postulat $\mathcal{A}_8$ stellt also einen Spezialfall des Postulats $\mathcal{A}_8$ dar. Ähnlich wird $\mathcal{A}_6$ abgeleitet: wir wenden $\mathcal{A}_8$ zweimal an, indem beim ersten Mal angenommen wird, dass X die leere Menge sein, beim zweiten Mal aber: $X = B$ zu setzen ist. Endlich beweisen wir durch eine analoge Methode $\mathcal{A}_4$ und $\mathcal{A}_9$. Um z. B. $\mathcal{A}_9$ zu erhalten, zieht man eine beliebige Menge $X \subset B$ in Betracht und wendet $\mathcal{A}_8$ an, aber nicht auf diese Menge X, sondern auf die Menge Y aller derjenigen Elemente $y \in B$, welche die Bedingung: $y < x$ für jedes $x \in X$ — erfüllen; aus der Definition $\mathcal{B}_6$ ergibt sich, dass $\prod_{x \in X} x = \sum_{y \in Y} y$. $\mathcal{A}_4$ kann man als einen Spezialfall aus $\mathcal{A}_9$ ableiten, indem man: $X = \{y, z\}$ setzt.

Ehe wir weiter gehen, sei bemerkt, dass auf Grund der schon erhaltenen Postulate $\mathcal{A}_1$—$\mathcal{A}_4$ und $\mathcal{A}_6$ das Postulat $\mathcal{B}_3$ leicht in folgender Weise umgeformt werden kann:

(10) *ist $x, y \in B$ und x nicht $-<y$, so existiert solch ein Element $z \in B$, dass $z < x$, $z \neq 0$ und $z \cdot y = 0$.*

Ähnlich kann man die Bedingung (2) des Postulats $\mathcal{B}_4$ modifizieren: *wenn $z \in B$, $z < x$ und wenn $z \cdot y = 0$ für jedes $y \in X$, so auch $z = 0$.* Wir erinnern ausserdem daran, wie bei der Begründung

von $\mathfrak{A}_8$ nachgewiesen wurde, dass das Element x, welches die Behauptung der Postulats $\mathfrak{B}_4$ befriedigt, mit $\sum_{y \in X} y$ identisch ist. Man kann also folgendes feststellen:

(11) *ist* $X \subset B$, $z \in B$, $z < \sum_{y \in X} y$ *und ist dabei* $z \cdot y = 0$ *für jedes* $y \in X$, *so* $z = 0$.

Mit Hilfe von (10) und (11) begründen wir schon ohne Schwierigkeiten $\mathfrak{A}_{10}$. Sei $x \in B$ und $X \subset B$. Dem Satz $\mathfrak{A}_8{}^b$ gemäss ist: $z < \sum_{y \in X} y$ für jedes $z \in X$, woraus auf Grund von $\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{B}_2$ leicht $x \cdot z < x \cdot \sum_{y \in X} y$ für $z \in X$ zu erhalten ist, also, in Übereinstimmung mit $\mathfrak{A}_8{}^c$,

(12) $$\sum_{y \in X} (x \cdot y) < x \cdot \sum_{y \in X} y.$$

Sollte die inverse Inklusion nicht stattfinden, so gäbe es nach (10) solch ein Element $z \in B$, dass

(13) $$z < x \cdot \sum_{y \in X} y \quad \textit{und} \quad z \cdot \sum_{y \in X} (x \cdot y) = 0,$$

(14) $$z \neq 0.$$

Dem Postulat $\mathfrak{A}_8{}^b$ zufolge haben wir: $x \cdot y < \sum_{y \in X} (x \cdot y)$ für jedes $y \in X$, woraus: $z \cdot (x \cdot y) < z \cdot \sum_{y \in X} (x \cdot y)$ und, mit Rücksicht auf (13), $z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = 0$ für jedes $y \in B$; aus der Formel (13) folgt ausserdem, dass $z \cdot x < \sum_{y \in X} y$. Indem die Bedingung (11) angewendet wird, erhält man hieraus: $z \cdot x = 0$; weil dabei (13): $z < x$, also: $z = z \cdot x$ impliziert, so ist letzten Endes: $z = 0$ — im Widerspruch zu der Formel (14).

Auf diese Weise ist festgestellt, dass die zu (12) inverse Inklusion tatsächlich besteht; dem Postulate $\mathfrak{B}_1$ gemäss ergibt sich sofort daraus $\mathfrak{A}_{10}{}^a$.

Als einen Spezialfall des Postulats $\mathfrak{A}_{10}{}^a$ erhalten wir $\mathfrak{A}_5{}^a$. Aus $\mathfrak{A}_5{}^a$ kann man unmittelbar $\mathfrak{A}_5{}^b$ ableiten; dagegen muss $\mathfrak{A}_{10}{}^b$ durch eine

analoge Methode, wie das Postulat $\mathfrak{A}_{10}{}^a$, begründet werden (die Inklusion $x + \prod_{y \in X} y < \prod_{y \in X} (x + y)$ ergibt sich leicht aus $\mathfrak{A}_9$, $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_2$; um die inverse Inklusion zu begründen, wenden wir ein apagogisches Schlussverfahren an, wobei in wesentlichem Mass von (10) und dem schon abgeleiteten Postulat $\mathfrak{A}_5{}^a$ Gebrauch gemacht wird).

Es bleibt noch $\mathfrak{A}_7$ zu erörtern. Auf Grund der übrigen Postulate formen wir vor allen Dingen die Definition $\mathfrak{B}_5{}^e$ in folgender Weise um:

(15) *ist* $x, y \in B$, *so* $y = x'$ *dann und nur dann, wenn gleichzeitig* $x \cdot y = 0$ *und* $x + y = 1$,

(es erübrigt sich hier hinzuzufügen, dass y das einzige Element ist, welches beide angeführten Gleichheiten erfüllt: aus den Postulaten $\mathfrak{A}_1$—$\mathfrak{A}_6$ kann man nämlich leicht schliessen, dass zwei Elemente von dieser Beschaffenheit identisch sein müssen).

Betrachten wir ferner ein beliebiges Element $x \in B$; wir bezeichnen mit dem Symbol „X" die Menge aller solcher Elemente $z \in B$, dass $x \cdot z = 0$: $X = \underset{z}{E}[z \in B \textit{ und } x \cdot z = 0]$, und setzen schliesslich: $y = \sum_{z \in X} z$. Dem Satz $\mathfrak{A}_{10}{}^a$ zufolge besteht die Formel: $x \cdot y = x \cdot \sum_{z \in X} z = \sum_{z \in X} (x \cdot z)$; da alle Summanden der Summe $\sum_{z \in X} (x \cdot z)$ gleich 0 sind, so haben wir, wie leicht aus $\mathfrak{A}_8{}^c$ zu erschliessen, auch $\sum_{z \in X} (x \cdot z) = 0$ oder

(16) $$x \cdot y = 0.$$

Nehmen wir sodann an, dass $x + y \neq 1$, woraus *1 nicht* $-< x + y$. Nach (10) folgt aus dieser Formel die Existenz eines solchen Elements $z \in B$, dass $z \neq 0$ und $z \cdot (x + y) = 0$, woraus $z \cdot x + z \cdot y = 0$ und $z \cdot x = 0 = z \cdot y$. Ist $z \cdot x = 0$, so $z \in X$, woraufhin, auf Grund von $\mathfrak{A}_8{}^b$, $z < \sum_{z \in X} z = y$ und folglich $z = z \cdot y$; diese Gleichheit, mit der Formel: $z \cdot y = 0$ zusammengestellt, ergibt: $z = 0$ — der vorher festgestellten Ungleichheit entgegen. Wir müssen also annehmen, dass

(17) $$x + y = 1.$$

Aus (15)—(17) ist sofort ersichtlich, dass $y = x'$ woraus, nach entsprechender Einsetzung $\mathfrak{A}_7$ folgt.

Auf diese Weise lassen sich alle Postulate des Systems $[\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_{10}]$ aus den Postulaten und Definitionen $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_6$ ableiten; letzten Endes sind also beide Systeme äquivalent, w. z. b. w.

Das Postulatensystem $[\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4]$ lässt sich in formaler Hinsicht vereinfachen:

Satz 2. Das Postulatensystem $[\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4]$ ist einem System äquivalent, welches aus $\mathcal{B}_2$ und dem folgenden Satze besteht:

Postulat $\mathcal{B}_4^*$. Ist $X \subset B$, so existiert genau ein Element $x \in B$, welches die Bedingungen (1) *und* (2) *des Postulats B_4 erfüllt.*

Beweis. $\mathcal{B}_4^*$ wurde implicite aus dem System $[\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_4]$ in dem Beweis des Satzes 3 abgeleitet. Dort wurde nämlich gezeigt, dass jedes Element $x \in B$, welches die Bedingungen (1) und (2) des Postulats $\mathcal{B}_4$ erfüllt, auch der Formel $x = \sum_{y \in X} y$ genügt; so kann es auch nur ein solches Element geben. Es bleibt also noch zu beweisen, dass sich die Postulate $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_3$ aus $\mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_4^*$ herleiten lassen.

Zwecks Vereinfachung der Betrachtung wollen wir vor allem das Hilfssymbol „$)($" definieren (die Formel „$x)(y$" kann man so lesen: „*die Elemente x und y sind disjunkt*"):

(1) *ist $x, y \in B$, so $x)(y$ dann und nur dann, wenn die Formeln: $u \in B$, $u < x$ und $u < y$ stets: $u < v$ für jedes $v \in B$ ergeben.*

Ferner beweisen wir einige Hilfssätze.

(2) *Ist $x, y, z \in B$, $x < y$ und $y)(z$, so $x)(z$.*

Dies folgt direkt aus (1) und aus dem Postulat $\mathcal{B}_2$.

(3) *Ist $y \in B$ und $y)(y$, so $y < v$ für jedes $v \in B$.*

Zum Beweis wenden wir $\mathcal{B}_4^*$ an, indem $X = \{y\}$ gesetzt wird. Wenn man (1) berücksichtigt, ergibt sich das Element $x \in B$, welches die Bedingungen: (α) $y < x$ sowie (β) ist $x \in B$, $z < x$ und $z)(y$, so $z < v$ für jedes $v \in B$ — erfüllt. Wird in (β) „z" durch „y" ersetzt und dabei (α) berücksichtigt, so erhält man sofort (2).

(4) *Ist $y, z \in B$, $y < z$ und $y)(z$, so $y < v$ für jedes $v \in B$.*

Betrachten wir ein beliebiges Element $u \in B$ derart, dass $u < y$; mit Rücksicht auf die Voraussetzung: $y < z$ erhält man mit Hilfe von $\mathcal{B}_2$: $u < z$. Laut der Definition (1) ergibt sich aus den Formeln: $y)(z$, $u < y$ und $u < z$, dass $u < v$ für jedes $v \in B$. Wenn also $u \in B$ und $u < y$, so gilt: $u < v$ für jedes $v \in B$; setzt man in (1) „y" für „x", so folgt daraus, dass $y)(y$, also gemäss (3), dass $y < v$ für jedes $v \in B$, worum es uns gerade ging.

(5) *Ist $x \in B$, so $x < x$.*

Ähnlich wie in dem Beweis des Hilfssatzes (3) setzen wir in $\mathcal{B}_4^*$: $X = \{x\}$ und erhalten das Element x_1, welches beiden Bedingungen: (α) $x < x_1$ und (β) ist $z \in B$, $z < x_1$ und $z)(x$, so $z < v$ für jedes $v \in B$ — genügt. Ferner betrachten wir die Menge $X_1 = \underset{y}{E}[y \in B$ *und* $y < x]$. Es ist: (γ) $y < x$ für jedes $y \in X_1$, sowie (δ) ist $z \in B$, $z < x$ und $z)(y$ für jedes $y \in X_1$, so $z < v$ für jedes $v \in B$ [aus den Voraussetzungen von (δ) folgt nämlich, dass $z)(z$, woraus infolge von (3): $z < v$ für jedes $v \in B$]. Wendet man nun $\mathcal{B}_2$ an, so erhält man aus (α) und (γ): (ε) $y < x_1$ für jedes $y \in X_1$. Endlich ist folgende Bedingung erfüllt: (ζ) wenn $z \in B$, $z < x_1$ und $z)(y$ für jedes $y \in X_1$, so $z < v$ für jedes $v \in B$ [ist in der Tat: $u \in B$, $u < z$ und $u < x$, so $u \in X_1$, woraus, der Voraussetzung der Bedingung (ζ) gemäss, $z)(u$, oder, was nach (1) auf dasselbe hinausgeht, $u)(z$; nach (4) ergibt sich aus den Formeln: $u < z$ und $u)(z$, dass $u < v$ für $v \in B$; laut (1) haben wir also: $z)(x$, das Element z erfüllt demnach die Voraussetzungen der Bedingung (β), infolgedessen $z < v$ für jedes $v \in B$, was ja bewiesen werden sollte]. Berücksichtigt man (1), so folgt aus (γ)—(ζ), dass sowohl x als auch x_1 gleichzeitig beide Bedingungen des Postulats $\mathcal{B}_4$ in Anwendung auf die Menge X_1 erfüllen. Daraus auf Grund von $\mathcal{B}_4^*$: $x = x_1$; diese Gleichheit, mit (α) zusammengestellt, ergibt sofort (4).

(6) *Wenn $x, y \in B$, $y < x$ und wenn für beliebiges $z \in B$ die Formeln: $z < x$ und $z)(y$ stets: $z < y$ zur Folge haben, so $x = y$.*

Um dies zu beweisen, wird wieder: $X = \{y\}$ gesetzt. Infolge von (5) ist: (α) $t < y$ für $t \in X$ und ausserdem mit Rücksicht auf (4): (β) wenn $z \in B$, $z < y$ und $z)(t$ für $t \in X$, so $z < v$ für jedes $v \in B$. Anderseits implizieren die Voraussetzungen der Bedingung (6): (γ) $t < x$ für $t \in X$ sowie: (δ) ist $z \in B$, $z < x$ und $z)(t$ für $t \in X$, so $z < v$ für jedes $v \in B$ [wenn nämlich $z < x$ und $z)(y$, so gilt der Voraussetzung nach $z < y$, und hieraus infolge von (4): $z < v$ für jedes $v \in B$]. Aus (1) sowie aus (α)—(δ) folgt, dass sowohl y als auch x beide Bedingungen des Postulats $\mathcal{B}_4$ erfüllen; die Elemente x und y sind demnach, gemäss $\mathcal{B}_4^*$, identisch, w. z. b. w.

Nun kann man schon an die Begründung der Postulate $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_3$ herantreten.

$\mathscr{B}_1$ folgt direkt aus (6): ist nämlich $x < y$ und $y < x$, so ergibt die Formel $z < x$, auf Grund von $\mathscr{B}_2$, stets: $z < y$; die Voraussetzungen des Hilfssatzes (6) sind also befriedigt, infolgedessen $x = y$. Nicht schwer ist es übrigens, $\mathscr{B}_1$ unmittelbar aus $\mathscr{B}_4{}^*$ mit Hilfe von $\mathscr{B}_2$ abzuleiten. indem man $X = \underset{z}{E}[z \epsilon B \text{ und } z < x]$ setzt und so verfährt, wie beim Beweis des Hilfssatzes (5).

Um $\mathscr{B}_3$ zu begründen, wird indirekt geschlossen: wir nehmen an, dies Postulat sei nicht erfüllt, dass also (α) x *nicht* $- < y$, und dass trotzdem, mit Rücksicht auf (1): (β) für beliebiges $z \epsilon B$ die Formeln: $z < x$ und $z)(y$ stets: $z < y$ zur Folge haben. Es wird nun $\mathscr{B}_4{}^*$ auf die Menge $X = \{x, y\}$ angewendet; wir erhalten solch ein Element $t \epsilon B$, dass (γ) $x < t$, (δ) $y < t$ und dass (ε) für beliebiges $z \epsilon B$ die Formeln: $z < t$, $z)(x$ und $z)(y$ stets: $z < v$ für jedes $z \epsilon B$ ergeben. Es wird bewiesen, dass das Element t ebenfalls folgende Bedingung erfüllt: (ζ) ist $z \epsilon B$, $z < t$ und $z)(y$, so $z < y$. Zum Beweis betrachten wir ein beliebiges Element $u \epsilon B$ derart, dass $u < z$ und $u < x$; dem Hilfssatz (2) zufolge implizieren die Formeln: $u < z$ und $z)(y$ stets: $u)(y$; mit Hilfe von (β) erhalten wir aus den Formeln: $u < x$ und $u)(y$ die Inklusion: $u < y$, woraus, mit Rücksicht auf (4), $u < v$ für jedes $v \epsilon B$. Nach (1) folgt hieraus, dass $z)(x$; das Element z, welches die Voraussetzungen der Bedingung (ζ) befriedigt, genügt also auch den Voraussetzungen der Bedingung (ε), folglich $z < v$ für jedes $v \epsilon B$ und insbesondere $z < y$. Ersetzt man nun in (6) „x" durch „t" und berücksichtigt (δ) und (ζ), so ergibt sich: $t = y$, woraus gemäss (γ): $x < y$. Auf diese Weise sind wir zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung (α) gelangt und wir müssen folglich annehmen, dass das Postulat $\mathscr{B}_3$ erfüllt ist.

Es wurde also bewiesen, dass die Postulatensysteme $[\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4]$ und $[\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_4{}^*]$ tatsächlich äquivalent sind [5]).

[5]) Auf die Formulierung der Postulate $\mathscr{B}_4$ und $\mathscr{B}_4{}^*$ sowie auf einige Fragmente aus den Beweisen der Sätze 1 und 2 sind die Forschungen S. Leśniewski's von Einfluss gewesen. Die Systeme $[\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4]$ und $[\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_4{}^*]$ stehen nämlich in einem engen formalen Zusammenhang mit einem Axiomensystem, das von Leśniewski für die, durch ihn begründete und Mereologie genannte, deduktive Theorie konstruiert worden ist; vergl. S. Leśniewski, *O podstawach matematyki* (*Über die Grundlagen der Mathematik*, polnisch), Przegląd Filozoficzny, Jahrg. 31, 1928, pp. 261—291, sowie Jahrg. 33, 1930, pp. 82 ff. Am besten würde dem Axiomensystem Leśniewski's das System $[\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_4{}^*]$ entsprechen; wie jedoch aus dem Satz 2 ersichtlich, ist in diesem System das Postulat $\mathscr{B}_1$ (übrigens ähnlich wie das ihn entsprechende Axiom in dem System von Leśniewski) überflüssig, da es sich aus den anderen Postulaten des Systems ableiten lässt. Die formalen Unterschiede zwischen dem erweiterten Syst m der Boole'schen Algebra und der Mereologie lassen sich bis auf einen Punkt reduzieren: auf Grund der Mereologie existiert nichts dem leeren Elemente Entsprechendes. Auch diese Differenz lässt sich jedoch durch eine gewisse Interpretation des Symbols „0" beseitigen.

§ 2. Das atomistische System der Boole'schen Algebra.

Es gibt zahlreiche Probleme, die zwar auschliesslich in den Termen der Boole'schen Algebra formuliert sind, die sich aber weder auf Grund des gewöhnlichen, noch des erweiterten Systems dieser Theorie entscheiden lassen. Besonders verdienen hier zwei Gruppen von Fragen der Beachtung: die Fragen der ersten Gruppe hängen mit dem Begriff der Mächtigkeit zusammen und betreffen besonders die Mächtigkeit der Menge B; in den Fragen der zweiten Gruppe haben wir es mit dem Begriff des Atomelements oder des unzerlegbaren Elements zu tun [6]). Wir werden uns in erster Linie mit den Problemen der zweiten Gruppe befassen, und zwar soll vor allem der zuletzt erwähnte Begriff definiert werden, indem gleichzeitig ein spezielles Symbol „At" als Bezeichnung der Menge aller Atomelemente eingeführt wird:

Definition $\mathscr{C}$. *$x \epsilon At$ dann und nur dann, wenn* (1) *$x \epsilon B$ und $x \neq 0$ und wenn ausserdem, für jedes Element $y \epsilon B$,* (2) *die Formeln: $y < x$ und $y \neq 0$ stets: $y = x$ zur Folge haben.*

Wir kennen verschiedene äquivalente Umformungen dieser Definition:

Satz 3. Auf Grund der Postulate $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_{10}$ und der Definition $\mathscr{C}$ sind für ein beliebiges Element $x \epsilon B$ die folgenden Bedingungen äquivalent: (1) *$x \epsilon At$;* (2) *jedes Element $y \epsilon B$ erfüllt eine und nur eine der beiden Formeln: $x < y$ oder $x < y'$;* (3) *$x \neq 0$ und dabei zieht die Formel $x = y + z$, für beliebige Elemente $y, z \epsilon B$: $x = y$ oder*

[6]) Diesen Begriff hat schon E. Schröder in seinen *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, II. Bd., 1 Abt., Leipzig 1891, pp. 318—349, behandelt; man findet dort die Definition des Atomelements, die der unterhalb angeführten Definition $\mathscr{C}$ äquivalent ist, sowie die Begründung mehrerer Eigenschaften dieses Begriffes, u. a. auch derjenigen, die wir in dem Satz 3 formulieren werden. Anstatt des Ausdruckes „Atomelement" gebraucht Schröder den Terminus „Individuum".

$x=z$ nach sich; (4) *$x \neq 0$ und dabei impliziert die Formel $x<y+z$, für beliebige Elemente $y, z \in B$: $x<y$ oder $x<z$;* (5) *die Formel: $x=\sum_{y \in X} y$ ergibt: $x \in X$ für jede Menge $X \subset B$;* (6) *die Formel: $x<\sum_{y \in X} y$ hat für jede Menge $X \subset B$ die Existenz solch eines Elements $y \in X$ zur Folge, dass $x<y$.*

Der Beweis verursacht keine Schwierigkeiten.

Im Zusammenhang mit der Definition $\mathcal{C}$ entsteht sofort eine ganze Reiche von Fragen: existieren die Atomelemente überhaupt? wenn ja, sind dann in jedem zum Betrachtungsbereich gehörendem und von 0 verschiedenem Elemente Atomelemente enthalten? Ferner, ist jedes Element die Summe der in ihm enthaltenen Atomelemente? Diese Fragen können auf Grund der bisherigen Voraussetzungen weder bejaht noch verneint werden. Alle obigen Probleme werden aber mit dem Augenblick positiv gelöst, wenn das Postulatensystem $[\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_{10}]$ oder $[\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_4]$ durch folgenden Satz ergänzt wird:

Postulat $\mathcal{D}$. Ist $x \in B$ und $x \neq 0$, so gibts solch ein Element $y \in At$, dass $y<x$.

Die Gesamtheit der Postulate $[\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_{10}, \mathcal{D}]$ und der daraus folgenden Sätze nennen wir das atomistische System der Boole'schen Algebra.

Das Postulat $\mathcal{D}$, scheinbar logisch schwach, zieht doch eine ganze Reihe weitgehender Konsequenzen nach sich; wir führen weiter unten einige davon an, indem gleichzeitig festgestellt wird, dass sie mit dem betrachteten Postulat äquivalent sind. Die erste Gruppe dieser Folgerungen bilden Sätze, welche auf diese oder jene Weise die Möglichkeit begründen, ein beliebiges Element als Summe von Atomelementen darzustellen:

Postulat $\mathcal{D}_1$. [a]) $1=\sum_{y \in At} y$;

[b]) *ist $x \in B$, so $x=\sum_{y \in At \text{ und } y<x} y$.*

Postulat $\mathcal{D}_2$. Sei $x, y \in B$; dann,

[a]) *wenn für jedes Element $z \in At$ die Formel: $z<x$ stets: $z<y$ ergibt, so $x<y$;*

[b]) *sind die Formeln: $z<x$ und $z<y$ für jedes Element $z \in At$ äquivalent, so $x=y$.*

Satz 4. Auf Grund der Postulate $\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_{10}$ und der Definition $\mathcal{C}$ ist das Postulat $\mathcal{D}$ jedem der Postulate $\mathcal{D}_1^a$, $\mathcal{D}_1^b$, $\mathcal{D}_2^a$ und $\mathcal{D}_2^b$ äquivalent [7]).

Beweis. Vor allem wird $\mathcal{D}_1^a$ aus $\mathcal{D}$ abgeleitet. Ist $\sum_{y \in At} y \neq 1$, so $(\sum_{y \in At} y)' \neq 0$; nach dem Satz $\mathcal{D}$ würde folglich ein Element $z \in At$ existieren, derart dass $z<(\sum_{y \in At} y)'$. Gleichzeitig wäre jedoch $\mathcal{A}_8^b$ gemäss: $z<\sum_{y \in At} y$. Aus der Bedingung (2) des Satzes 5 (wo „x" durch „z" und „y" durch „$\sum_{y \in At} y$" ersetzt wird) folgt aber, dass die zwei zuletzt angeführten Inklusionen sich gegenseitig ausschliessen. Man muss also annehmen, dass $1=\sum_{y \in At} y$, w. z. b. w.

Setzt man nun $\mathcal{D}_1^a$ voraus, so wird $\mathcal{D}_1^b$ auf folgende Weise begründet. Sei $x \in B$. Infolge von $\mathcal{D}_1^a$ und $\mathcal{A}_{10}^a$ besteht die Formel $x=x \cdot 1=x \cdot \sum_{y \in At} y=\sum_{y \in At}(x \cdot y)$. Anderseits schliessen wir aus der Bedingung (2) des Satzes 3, dass für ein beliebiges $y \in At$ entweder $y \cdot x=y$, oder $y \cdot x=0$, je nach dem, ob die Inklusion $y<x$ gilt oder nicht. Infolgedessen unterscheidet sich die Menge

$$X=\underset{y}{E}[y<x \text{ und } y \in At]$$

von der Menge aller Elemente, welche die Gestalt $y \cdot x$, wo $y \in At$, haben, höchstens durch das Fehlen des leeren Elements. Mit Hilfe von $\mathcal{A}_8$ folgert man hieraus leicht, dass $\sum_{y<x \text{ und } y \in At} y=\sum_{y \in At}(x \cdot y)$ und endlich dass $x=\sum_{y<x \text{ und } y \in At} y$, worum es gerade ging.

Aus $\mathcal{D}_1^b$ erhält man $\mathcal{D}_2^a$ durch Anwendung des Postulats $\mathcal{A}_8^c$, in welchem: $X=\underset{z}{E}[z \in At \text{ und } z<x]$ sowie $z=y$ gesetzt wird. Aus $\mathcal{D}_2^a$ kann sofort $\mathcal{D}_2^b$ mit Hilfe von $\mathcal{A}_2$ abgeleitet werden.

Um schliesslich $\mathcal{D}$ auf Grund von $\mathcal{D}_2^b$ zu begründen, wird folgendermassen geschlossen. Ist $x \in B$ und $x \neq 0$, so können nach $\mathcal{D}_2^b$ die Formeln: $z<x$ und $z<0$ nicht für jedes $z \in At$ äquivalent sein; weil dabei der Definition $\mathcal{C}$ gemäss für jedes $z \in At$ stets: $z \neq 0$ und

[7]) Schröder (op. cit., pp. 337—338) spricht die Vermutung aus, dass das Postulat $\mathcal{D}_1$ sich nicht aus $\mathcal{D}$ ableiten lässt.

folglich: *z nicht* $-<0$ gilt, so muss es solch ein Element $z \in At$ geben, dass $z<x$, w. z. b. w.

Dem Obigen zufolge sind die Postulate $\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_2^{\mathrm{b}}$ in der Tat äquivalent.

Laut dem Satz 1 kann man im Satz 4 an die Stelle des Postulatensystems $[\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_{10}]$ das System der Postulate und Definitionen $[\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_6]$ einsetzen. Im Zusammenhang damit bemerken wir, dass in dem, durch die Definition $\mathfrak{C}$ und das Postulat $\mathfrak{D}_2^{\mathrm{a}}$ ergänzten, System $[\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_6]$ dass Postulat $\mathfrak{B}_3$ überflüssig ist, da es sich ohneweiteres aus $\mathfrak{D}_2^{\mathrm{a}}$ herleiten lässt (mann muss nur vorher in $\mathfrak{C}$ die Formeln von der Gestalt „$x \neq 0$" durch die Bedingung: „*es gibt solch ein Element* $z \in B$, *dass* x *nicht* $-<z$" ersetzen). Man kann sogar aus diesem System den Satz $\mathfrak{B}_2$ eliminieren, indem $\mathfrak{D}_2^{\mathrm{a}}$ gleichzeitig auf folgende Weise verstärkt wird:

Postulat $\mathfrak{D}_2^*$. *Ist* $x, y \in B$, *so* $x<y$ *dann und nur dann, wenn für ein beliebiges* $z \in At$ *die Formel:* $z<x$ *stets:* $z<y$ *ergibt.*

Die Sätze $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{D}_2^*$ bilden also ein Postulatensystem, welches zur Grundlegung des atomistischen Systems der Boole'schen Algebra ausreicht.

Es sei noch angedeutet, dass auf Grund des gewöhnlichen Systems der Boole'schen Algebra, d. h. der blossen Postulate $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_7$, der Satz 4 teilweise seine Gültigkeit verliert: die Sätze $\mathfrak{D}_1^{\mathrm{a}}-\mathfrak{D}_2^{\mathrm{b}}$ bleiben äquivalent (wenn das Zeichen „Σ" im Sinne der Definition $\mathfrak{B}_6^{\mathrm{a}}$ verstanden wird), dagegen ist $\mathfrak{D}$ tatsächlich schwächer als jene.

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt, dass man in der, durch das Postulat $\mathfrak{D}$ bereicherten, Boole'schen Algebra eine gewisse Schlussweise anwenden kann, die schon aus dem Klassenkalkül bekannt ist. Soll im Klassenkalkül die Inklusion „$X \subset Y$" bzw. die Gleichheit „$X=Y$" begründet werden, so weist man gewöhnlich nach, dass jedes Element der Menge X gleichzeitig ein Element der Menge Y ist, bzw. dass diese Mengen aus denselben Elementen bestehen. Den Postulaten $\mathfrak{D}_2^{\mathrm{a}}$ und $\mathfrak{D}_2^{\mathrm{b}}$ gemäss, kann man in vollständig analoger Weise in dem atomistischen System der Boole'schen Algebra verfahren, indem mit Atomelementen operiert wird und dabei ihre, in den Bedingungen (2), (4) und (6) des Satzes 3 nachgewiesenen, Eigenschaften ausgenützt werden.

Mit Hilfe der eben beschriebenen Schlussweise lassen sich u. a. zwei Sätze aus $\mathfrak{D}$ ableiten, die eine Verallgemeinerung der Postulate $\mathfrak{A}_5$ und $\mathfrak{A}_{10}$ bilden, und zwar die allgemeinen distributiven Gesetze zwischen der Addition und der Multiplication:

Postulat $\mathfrak{D}_3$. $\mathfrak{K}$ *sei eine beliebige Klasse von Untermengen* X *der Menge* B $(\sum_{X \in \mathfrak{K}} X \subset B)$; $\mathfrak{L}$ *sei ferner die Klasse aller derjenigen Mengen* Y, *die in der Summe aller Mengen der Klasse* $\mathfrak{K}$ *enthalten sind und die mit jeder Menge der Klasse* $\mathfrak{K}$ *mindestens ein gemeinsames Element haben* $(Y \subset \sum_{X \in \mathfrak{K}} X$; *ist* $X \in \mathfrak{K}$, *so* $X \cdot Y \neq 0)$. *Dann:*

$$^{\mathrm{a}})\ \prod_{X \in \mathfrak{K}} \sum_{z \in X} z = \sum_{Y \in \mathfrak{L}} \prod_{z \in Y} z;$$

$$^{\mathrm{b}})\ \sum_{X \in \mathfrak{K}} \prod_{z \in X} z = \prod_{Y \in \mathfrak{L}} \sum_{z \in Y} z.$$

Es besteht nun die Frage, ob sich das Postulat $\mathfrak{D}_3$ nicht bloss aus den Postulaten $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_{10}$ ohne Hilfe von $\mathfrak{D}$ ableiten lassen würde. Gemeinsam mit A. Lindenbaum haben wir gezeigt, dass dies nicht möglich ist: $\mathfrak{D}$ impliziert nicht nur $\mathfrak{D}_3$, sondern dieses ist ihm sogar äquivalent.

Satz 5. Auf Grund der Postulate $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_{10}$ *und der Definition* $\mathfrak{C}$ *sind die Postulate* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_3^{\mathrm{a}}$ *und* $\mathfrak{D}_3^{\mathrm{b}}$ *äquivalent.*

Beweis. $\mathfrak{D}_3^{\mathrm{a}}$ wird aus $\mathfrak{D}$ mit Hilfe einer Schlussweise abgeleitet, von der schon die Rede war: es wird bewiesen, dass für jedes beliebige $u \in At$ die Formeln: $(\alpha)\ u < \prod_{X \in \mathfrak{K}} \sum_{z \in X} z$ *und* $(\beta)\ u < \sum_{Y \in \mathfrak{L}} \prod_{z \in Y} z$ äquivalent sind. Nach $\mathfrak{A}_9^{\mathrm{b}}$ und $\mathfrak{A}_1^{\mathrm{b}}$ folgt tatsächlich aus (α), dass $u < \sum_{z \in X} z$ für jedes $X \in \mathfrak{K}$; weil $u \in At$, so schliessen wir hieraus, dem Satz 5 gemäss, dass jeder Menge $X \in \mathfrak{K}$ ein Element $z \in X$ von der Beschaffenheit: $u<z$ entspricht. Wenn also Y alle Elemente z enthält, die mindestens zu einer Menge $X \in \mathfrak{K}$ gehören und die Inklusion: $u<z$ befriedigen, so hat Y mit jeder Menge X ein gemeinsames Element und gehört demnach zur Klasse $\mathfrak{L}$; anderseits gilt, auf Grund von $\mathfrak{A}_9^{\mathrm{c}}$, die Formel $u < \prod_{z \in Y} z$. Hieraus erhält man mühelos, mit Hilfe von $\mathfrak{A}_8^{\mathrm{b}}$ und $\mathfrak{A}_1^{\mathrm{b}}$, die Formel (β). Der Beweis der inversen Implikation ist noch leichter (übrigens kann man schon auf Grund der blossen Postulate $\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_{10}$ zeigen, dass $\sum_{Y \in \mathfrak{L}} \prod_{z \in Y} z \subset \prod_{X \in \mathfrak{K}} \sum_{z \in X} z$).

Da das Postulat $\mathfrak{D}_2^b$ aus $\mathfrak{D}$ folgt, so ergibt die Äquivalenz der Formeln (α) und (β) für jedes $u \in At$ ohne weiteres die Gleichheit $\mathfrak{D}_3^a$.

Der Reihe nach zeigen wir, wie sich das Postulat $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{D}_3^a$ herleiten lässt. x sei ein beliebiges, von 0 verschiedenes Element der Menge B. Mit dem Symbol „$\mathfrak{K}$" bezeichnen wir die Klasse aller Mengen die nur aus zwei Elementen von der Form $x \cdot y$ und $x \cdot y'$ bestehen, wobei y ein beliebiges Element der Menge B ist. Für jede beliebige Menge $X \in \mathfrak{K}$ gilt die Formel: $\sum_{z \in X} z = x \cdot y + x \cdot y' = x \cdot (y + y') = x \cdot 1 = x$, woraus, wie das sofort zu sehen, auch $\prod_{X \in \mathfrak{K}} \sum_{z \in X} z = x$. Bilden wir nun für die Klasse $\mathfrak{K}$ die Klasse $\mathfrak{L}$ in der durch die Voraussetzung des Postulats $\mathfrak{D}_3$ vorgeschriebenen Weise. Nach $\mathfrak{D}_3^a$ gilt: $\prod_{X \in \mathfrak{K}} \sum_{z \in X} z = \sum_{Y \in \mathfrak{L}} \prod_{z \in Y} z$, weswegen $\sum_{Y \in \mathfrak{L}} \prod_{z \in Y} z = x \neq 0$. Leicht folgert man hieraus auf die Existenz solch einer Menge $Y \in \mathfrak{L}$, dass $\prod_{z \in Y} z \neq 0$. Ziehen wir ein beliebiges Element $y \in B$ in Betracht. Da $X = \{x \cdot y, x \cdot y'\} \in \mathfrak{K}$, so hat X mit der Menge Y zumindest ein gemeinsames Element: $x \cdot y \in Y$ oder $x \cdot y' \in Y$. Demzufolge gilt, auf Grund von $\mathfrak{A}_9^c$, eine der Formeln: $\prod_{z \in Y} z < x \cdot y$ oder $\prod_{z \in Y} z < x \cdot y'$; also ferner: $\prod_{z \in Y} z < x$ sowie entweder $\prod_{z \in Y} z < y$, oder $\prod_{z \in Y} z < y'$; diese beiden Inklusionen können nicht gleichzeitig bestehen, denn $\prod_{z \in Y} z \neq 0$. Man sieht also, dass das Element $\prod_{z \in Y} z$ der Bedingung (2) des Satzes 3 genugtut, woraus $\prod_{z \in Y} z \in At$. Auf diese Weise erhält man $\mathfrak{D}$: für das Element $x \neq 0$ haben wir nämlich solch ein Element $y \in At$ konstruiert, dass $y < x$. Was das Postulat $\mathfrak{D}_3^b$ anbetrifft, so ist es nicht schwer zu beweisen, dass es mit $\mathfrak{D}_3^a$ äquivalent ist (man kann beispielsweise zu diesem Zweck die verallgemeinerten De Morgan'schen Gesetze anwenden, die sich leicht aus den Postulaten $\mathfrak{A}_1$—$\mathfrak{A}_{10}$ ableiten lassen). Letzten Endes sind also die Sätze $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_3^a$ und $\mathfrak{D}_3^b$ äquivalent, w. z. b. w.

Wir heben hervor, dass die distributiven Gesetze in dem Postulat $\mathfrak{D}_3$ nicht ihre schärfste und präziseste Formulierung gefunden haben: die Klasse $\mathfrak{L}$ enthält in der Regel eine Reihe von überflüssigen Mengen. Eine vollkommen präzise Form der distributiven Gesetze stellt erst das Postulat $\mathfrak{D}_3^*$ dar.

Postulat $\mathfrak{D}_3^*$. $\mathfrak{K}$ sei eine beliebige Klasse von nicht leeren Untermengen der Menge B und $\mathfrak{F}$ — die Klasse aller derjenigen Funktionen f, welche jeder Menge $X \in \mathfrak{K}$ irgendein Element $f(X) \in X$ zuordnen. Dann:

a) $\prod_{X \in \mathfrak{K}} \sum_{y \in X} y = \sum_{f \in \mathfrak{F}} \prod_{X \in \mathfrak{K}} f(X)$;

b) $\sum_{X \in \mathfrak{K}} \prod_{y \in X} y = \prod_{f \in \mathfrak{F}} \sum_{X \in \mathfrak{K}} f(X)$.

Der Satz 5 bleibt gültig, wenn in ihm $\mathfrak{D}_3$ durch $\mathfrak{D}_3^*$ ersetzt wird; indem wir aber $\mathfrak{D}_3^*$ aus $\mathfrak{D}$ ableiten, sind wir gezwungen, vom Auswahlaxiom Gebrauch zu machen.

Wir geben noch zwei Sätze an, die nicht nur mit dem Postulat $\mathfrak{D}$ (auf Grund der Postulate $\mathfrak{A}_1$—$\mathfrak{A}_{10}$ oder $\mathfrak{B}_1$—$\mathfrak{B}_4$), sondern mit dem ganzen atomistischen Postulatensystem der Boole'schen Algebra — [$\mathfrak{B}_1$—$\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{D}$] — äquivalent sind. Diese Sätze sind übrigens von einem ganz anderen Charakter als die bisher betrachteten Postulate.

Postulat $\mathfrak{E}_1$. Es gibt eine Menge E sowie eine Funktion F, welche folgende Bedingungen erfüllen: (1) *ist $x \in B$, so $F(x) \subset E$;* (2) *ist $X \subset E$, so existiert genau ein Element $x \in B$ derart, dass $X = F(x)$;* (3) *ist $x, y \in B$, so $x < y$ dann und nur dann, wenn $F(x) \subset F(y)$.*

Postulat $\mathfrak{E}_2$. Es gibt eine Klasse von Mengen $\mathfrak{K}$ und eine Funktion F, welche folgenden Bedingungen genügen: (1) *ist $X \in \mathfrak{K}$, so auch $\sum_{Y \in \mathfrak{K}} Y - X \in \mathfrak{K}$;* (2) *ist $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$, so auch $\sum_{Y \in \mathfrak{L}} Y \in \mathfrak{K}$;* (3) *ist $x \in B$, so $F(x) \in \mathfrak{K}$;* (4) *ist $X \in \mathfrak{K}$, so gibts genau ein solches Element, dass $X = F(x)$;* (5) *ist $x, y \in B$, so $x < y$ dann und nur dann, wenn $F(x) \subset F(y)$.*

Satz 6. Unter Berücksichtigung der Definitionen $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{C}$ ist das Postulatensystem [$\mathfrak{B}_1$—$\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{D}$] oder, was auf dasselbe herauskommt, [$\mathfrak{A}_1$—$\mathfrak{A}_{10}$, $\mathfrak{D}$] mit jedem der Postulate $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ äquivalent.

Beweis. Um aus dem System [$\mathfrak{B}_1$—$\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{D}$] das Postulat $\mathfrak{E}_1$ abzuleiten, wird $E = At$ und $F(x) = \underset{y}{E}[y \in At \text{ und } y < x]$ für $x \in B$ gesetzt. Der Beweis, dass die, durch diese Formeln bestimmten, Menge E und Funktion F den Bedingungen (1)—(3) genügen, stützt sich auf die Sätze 3, 5 und 6 und bietet keine Schwierigkeit. Versteht man unter $\mathfrak{K}$ die Klasse aller Untermengen der Menge E, so erhält man aus $\mathfrak{E}_1$ sofort $\mathfrak{E}_2$. Die Ableitung der Postulate $\mathfrak{B}_1$—$\mathfrak{B}_4$

und $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{S}_2$ ist etwas umständlicher. Eine gewisse Schwierigkeit verursacht übrigens nur das Postulat $\mathfrak{D}$. Es kommt darauf an, um zu zeigen, dass jede von 0 verschiedene Menge $X \epsilon \mathfrak{K}$ eine „atomistische" Untermenge enthält, d. h. solch eine andere, ebenfalls von 0 verschiedene Menge $Y \epsilon \mathfrak{K}$, welche keine anderen Mengen der Klasse $\mathfrak{K}$ umfasst, als 0 und sich selbst. Zu diesem Zweck betrachten wir ein beliebiges Element $x \epsilon X$ und setzen: $Y = \prod_{x \epsilon Z \text{ und } Z \epsilon \mathfrak{K}} Z$; auf Grund von (1) und (2) ist es nicht schwer zu beweisen, dass die Menge Y gerade solch eine „atomistische" Menge ist [8]). Der Satz ist also bewiesen.

Den Sinn des Satzes 8 könnte man in folgender Weise ausdrücken: das atomistische System der Boole'schen Algebra ist mit dem gewöhnlichen Klassenkalkül isomorph. In diesem Satz ist ausserdem eine ziemlich interessante Tatsache aus dem Gebiet der Mengenlehre enthalten: jede Klasse von Mengen $\mathfrak{K}$, welche die Bedingungen (1) und (2) des Postulats $\mathfrak{S}_2$ erfüllt (d. h. in Bezug auf die Operationen der Komplementbildung und der unbegrenzten Addition abgeschlossen ist), ist bezüglich der Inklusions beziehung mit der Klasse aller Untermengen einer gewissen Menge E isomorph.

[8]) Vergl. meine Arbeit: *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math., vol. 16, pp. 235 ff.

Sur la séparabilité multiple des ensembles.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

Soit K une classe donnée, formée d'éléments quelconques et soit Φ une famille donnée de sous-ensembles de K. La famille Φ sera dite *(simplement) additive* (resp. *multiplicative*) si, E_1 et E_2 étant deux ensembles de la famille Φ, leur somme $E_1 + E_2$ (resp. leur produit $E_1 E_2$) appartient encore à Φ.

Nous dirons que *la famille Φ admet le second principe de M. Lusin* si E_1 et E_2 étant deux ensembles de la famille Φ, il existe deux ensembles H_1 et H_2, tels que $H_1 H_2 = 0$, $E_1 - E_2 \subset H_1$, $E_2 - E_1 \subset H_2$, $K - H_1 \epsilon \Phi$ et $K - H_2 \epsilon \Phi$.

Nous dirons que la famille Φ admet le second principe de M. Lusin généralisé si, étant donné un nombre fini d'ensembles de la famille Φ, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, il existe des ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_n$, tels que $H_1 H_2 \ldots H_n = 0$ et que $K - H_i \epsilon \Phi$ et $E_i - E_1 E_2 \ldots E_n \subset H_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ [1]). Si cela a lieu pour un nombre n fixe d'ensembles, nous dirons que la famille Φ jouit de la propriété P_n.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Si la famille Φ* (de sous-ensembles d'une classe K quelconque) *est (simplement) additive et multiplicative et si elle admet le second principe de M. Lusin, elle admet le second principe de M. Lusin généralisé.*

Ce théorème est une généralisation d'une proposition démontrée par M. N. Lusin d'après laquelle la famille de tous les ensembles analytiques jouit de la propriété P_3 [2]). Il est à remarquer que notre

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. 23, p. 293.

[2]) N. Lusin, *C. R. de l'Acad. des Sc. de l'URSS* vol. II, p. 282 (séance du 19. IV. 1934).