Sur l'équivalence des suites d'ensembles et l'équivalence des fonctions [1]).

Par

Edward Szpilrajn (Warszawa).

Introduction. La notion d'*équivalence* qui fait l'objet du travail présent appartient à la Théorie générale des ensembles. J'étudie ici certains problèmes de la Théorie des ensembles de points, concernant cette notion.

Soient X et Y deux espaces de même puissance, d'ailleurs tout à fait arbitraires. Deux objets mathématiques A et B (ensembles, classes d'ensembles, suites d'ensembles, fonctions, etc.), définies respectivement dans les espaces X et Y, peuvent être considérés comme *équivalents au sens de la Théorie générale des ensembles* (je les appelle *équivalents* tout court) lorsqu'il existe une transformation biunivoque de l'espace X en l'espace Y qui transforme A en B.

Dans le cas, où A et B sont des *ensembles* (contenus respectivement dans X et Y) l'équivalence ainsi conçue se réduit directement à l'égalité des puissances ($\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ et $\overline{\overline{X - A}} = \overline{\overline{Y - B}}$). Les problèmes de la Théorie des ensembles de points concernant les puissances sont, ou bien depuis longtemps résolus (la puissance des ensembles boreliens et analytiques), ou bien depuis longtemps ouverts (la puissance des complémentaires analytiques, l'existence des ensembles toujours de première catégorie de puissance du continu).

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie) les 8 et 22 novembre 1935.

Par contre, la notion d'équivalence pour les objets des types logiques supérieurs n'a presque pas été considérée jusqu'à présent [1]). La question d'examiner *l'équivalence des suites d'ensembles* a été posé récemment par M. St. Ulam (cf. 2.5 (v), (vi) et 3.2 (jj)).

La plupart des théorèmes de ce travail répondent aux questions du type suivant:

(Q) Existe-t-il pour chaque suite s d'ensembles appartenant à la classe $\mathbf{F}_1$ (d'ensembles) une suite équivalente à s d'ensembles appartenant à $\mathbf{F}_2$?

Les problèmes de ce genre ont de différentes solutions, p. ex. j'ai démontré les propositions suivantes: *chaque suite d'ensembles boreliens est équivalente à une suite d'ensembles F_σ et G_δ* (3.1); *il existe une suite d'ensembles projectifs qui n'est équivalente à aucune suite d'ensembles boreliens* (3.2); *si* $\mathfrak{c} = \aleph_1$, *il existe une suite d'ensembles telle qu'aucune suite qui en est extraite n'est équivalente à aucune suite d'ensembles mesurables* (L) (3.6), etc.

Les réponses à la question (Q) ont été obtenues à l'aide de *la fonction caractéristique d'une suite d'ensembles* qui généralise la notion bien connue de fonction caractéristique d'*un seul* ensemble (§ 1). Dans quelques cas je suis parvenu facilement à une réponse négative, en examinant les puissances des classes en question (2.5); dans ces raisonnements, la notion de fonction caractéristique n'a pas été nécessaire. Par contre, dans beaucoup d'autres cas (§ 3), elle joue un rôle essentiel, car elle permet, une fois pour toutes (lemme fondamental 2.3), de passer des recherches sur les *suites d'ensembles* aux recherches dans le domaine des *fonctions* et partant, de s'appuyer sur divers théorèmes relatifs aux fonctions dans les espaces métriques.

Conformément à cet état de choses, j'ai défini et étudié *l'équivalence des fonctions* (§§. 2 et 3). En outre, j'ai examiné la notion *d'équivalence des suites de fonctions* (§ 4) que je dois aussi à M. Ulam.

Dans divers raisonnements j'ai utilisé la notion d'*homéomorphie généralisée* (due à M. Kuratowski [2])). Presque toutes les propositions de ce travail peuvent être traitées comme des théorèmes concernant cette notion, car, pour obtenir des réponses positives au problème (Q), je démontre toujours (excepté pour les théorèmes

[1]) Certains théorèmes sur la notion d'équivalence des classes d'ensembles (introduite par MM. Whitehead et Russell [I], * 111, pp. 84—92) se trouvent dans les notes: Sierpiński [3] (cf. aussi Sierpiński [I], p. 77) et Szpilrajn [2], p. 306.

[2]) Voir Kuratowski [I], p. 221, [1], et Sierpiński [2].

3.4 et 3.5) que l'équivalence en question est réalisée par une homéomorphie généralisée.

Certaines questions sur l'équivalence et l'homéomorphie généralisée restent ouvertes. On peut se demander p. ex. (par analogie au théorème d'après lequel il existe une homéomorphie généralisée entre chaque couple d'ensembles boreliens de même puissance[1])) si chaque équivalence entre deux suites d'ensembles boreliens peut être réalisée par une homéomorphie généralisée. Un problème analogue se pose pour les fonctions mesurables (B), en particulier pour les fonctions continues (dans un intervalle, ou bien dans l'ensemble des nombres irrationnels).

Termes et notations. 0.1. Les lettres X, Y, Z désignent les espaces considérés. Dans le § 3 je suppose une fois pour toutes que ce sont des espaces métriques indénombrables, séparables et complets. Dans les autres paragraphes, ou bien je considère comme espaces les ensembles absolument arbitraires, ou alors j'énonce explicitement toutes les prémisses relatives.

I désigne l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$; par conséquent I^n est le „cube fondamental" de l'espace cartésien à n dimensions.

0.2. f et g étant deux fonctions définies sur un espace X, j'écris $f = g$ au lieu de: $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

E étant un sous-ensemble d'un espace X, $f_E(x)$ désigne *la fonction caractéristique de* E; on a ainsi: $f_E(x) = 1$ pour $x \in E$ et $f_E(x) = 0$ pour $x \bar{\in} E$.

0.3. K étant une classe de sous-ensembles d'un espace X, je désigne par K_c la classe de tous les ensembles $X - K$, où $K \in \mathsf{K}$, par K_d celle des produits d'un nombre fini d'ensembles appartenant à K et par K_σ celle des sommes d'une suite dénombrable d'ensembles appartenant à K. Chaque classe K telle que $\mathsf{K} = \mathsf{K}_d = \mathsf{K}_\sigma$ s'appelle un *σ-anneau d'ensembles*[2]) (p. ex. la classe des sous-ensembles ouverts d'un espace métrique, celle des sous-ensembles F_σ, boreliens etc. — sont des σ-anneaux)

0.4. K étant une classe de sous-ensembles d'un espace X et Y un espace métrique, je dis qu'une fonction f définie sur X est *mesurable* (K), lorsqu'on a $f^{-1}(G) \in \mathsf{K}$ pour chaque sous-ensemble ouvert G de Y (p. ex. si X est un espace métrique et K désigne la classe des sous-ensembles F_σ de X, la classe des fonctions mesurables (K) coïncide à celle des fonctions de première classe sur X). Si $X \in \mathsf{K}$ on a évidemment:

(i) *Pour que la fonction $f_E(x)$ soit mesurable (K) il faut et il suffit qu'on ait:* $E \in \mathsf{K}$ et $X - E \in \mathsf{K}$.

---

[1]) Kuratowski [1], pp. 208 et 216; Sierpiński [2], p. 271.
[2]) Cf. Hausdorff [I], p. 236.

0.5. On dit qu'un ensemble (contenu dans un espace X métrique et complet) est *toujours de première catégorie* lorsqu'il est de première catégorie sur chaque ensemble parfait (contenu dans X). L'ensemble E (situé dans X) *jouit de la propriété* (s)[1]) lorsqu'il existe pour chaque ensemble parfait $P \subset X$ un ensemble parfait $D \subset P$ tel qu'on a $D \subset E$ ou bien $DE = 0$. Une fonction définie sur X *jouit de la propriété* (s) lorsqu'il existe pour chaque ensemble parfait $P \subset X$ un ensemble parfait $D \subset P$ tel que la fonction $f|D$ est continue.

Une fonction biunivoque f (definie sur un ensemble situé dans un espace métrique, dont les valeurs appartiennent également à un espace métrique) s'appelle *homéomorphie généralisée* (de classe α, β), lorsque les fonctions f et f^{-1} sont mesurables (B) (respectivement de classe α et β).

En général, la terminologie employée (p. ex. en ce qui concerne les fonctions mesurables (B)) est en accord avec celle de la *Topologie* de M. Kuratowski[2]).

0.6. J'ajoute la liste des autres termes et notations, et les numéros des paragraphes contenant leurs définitions.

Équivalence des suites d'ensembles	2.1
Équivalence des fonctions	2.1
Équivalence des suites de fonctions	4.1
$f_{\mathfrak{e}}$ — fonction caractéristique d'une suite d'ensembles	1.2
$f_{\mathfrak{g}}$ — fonction caractéristique d'une suite de fonctions	4.2
$f_{\bar{\mathfrak{g}}}$ — fonction quasi-caractéristique d'une suite de fonctions	4.3
C, C_n^0, C_n^2	1.1
φ_z	1.1
e_z	1.4
N^*	3.1
A_n, C_n, B_n	3.2
$\bar{g}$	4.3

§ 1. Fonction caractéristique d'une suite d'ensembles.

1.1. ***Ensemble de Cantor.*** Ecrivons chaque nombre appartenant à l'intervalle I dans le système ternaire, c. à d. $0, i_1 i_2 i_3 \ldots$ au lieu de $\sum_{n=1}^{\infty}(i_n/3^n)$, où $i_n = 0, 1, 2$. Désignons par C l'ensemble bien connu de Cantor, c. à d. l'ensemble des nombres

$$(*) \quad t = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots, \quad \text{où } i_n = 0 \text{ ou bien } i_n = 2 \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

Soient: k un nombre naturel et $i = 0$ ou bien $i = 2$. L'ensemble des nombres de la forme $(*)$, tels que $i_k = i$ sera désigné C_k^i. On a évidemment:

(i) $C = C_n^0 + C_n^2 \qquad C_n^0 \cdot C_n^2 = 0 \quad$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$

(ii) *g et h étant deux fonctions dont les valeurs appartiennent à C, la relation:*

$$g^{-1}(C_n^2) = h^{-1}(C_n^2) \qquad \textit{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

entraîne l'identité des fonctions g et h.

---

[1]) Cf. Szpilrajn [3].
[2]) Kuratowski [I].

(iii) *Les ensembles* $C_n^i\,(i=0,\,2;\;n=1,2,\dots)$ *sont fermés et ouverts dans* C.

Posons pour chaque nombre $0,\,i_1\,i_2\,i_3\dots$ de la forme (*) et pour chaque suite croissante $\varkappa=(k_1,\,k_2\dots)$ de nombres naturels:

$$\varphi_\varkappa(0,\,i_1\,i_2\,i_3\dots)=0,\,i_{k_1}\,i_{k_2}\,i_{k_3}\dots$$

On a alors:

(iv) *La fonction* $\varphi_\varkappa$ *est une fonction continue transformant l'ensemble* C *en lui-même, de sorte que l'ensemble* $\varphi_\varkappa^{-1}(t)$ *est non dense dans* C *pour chaque* $t\,\epsilon\,C$.

La continuité de la fonction $\varphi_\varkappa$ et l'égalité $\varphi_\varkappa(C)=C$ sont évidentes. Soit maintenant $t_0=0,\,i_1\,i_2\,i_3\dots$ un nombre de la forme (*). Posons $C_0=\varphi_\varkappa^{-1}(t_0)$. L'ensemble des nombres $0,j_1j_2j_3\dots$ où $j_{k_n}\neq i_{k_n}$, sauf pour un nombre fini d'indices n, est évidemment dense dans C et disjoint à C_0. L'ensemble C_0 étant fermé, on en conclut qu'il est non dense.

1.2. ***Fonction caractéristique.*** $e=\{E_n\}$ étant une suite d'ensembles contenus dans un espace X, posons pour chaque $x\,\epsilon\,X$:

$$f_e(x)=0,\,i_1\,i_2\,i_3\dots,\quad\text{où}\quad\begin{cases}i_n=0 & \text{quand}\quad x\,\bar\epsilon\,E_n\\ i_n=2 & \text{quand}\quad x\,\epsilon\,E_n\end{cases}$$

(en d'autres mots: $i_n=2f_{E_n}(x)$). La fonction f_e sera appelée *fonction caractéristique de la suite* e.

On a évidemment:

(i) $$f_e(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{3^n}f_{E_n}(x)\right]\ ^{1)}$$

(ii) $$f_e^{-1}(0)=\prod_{n=1}^{\infty}(X-E_n)=X-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\qquad f_e^{-1}(1)=\prod_{n=1}^{\infty}E_n$$

(iii) $$f_e^{-1}(C_n^0)=X-E_n\qquad f_e^{-1}(C_n^2)=E_n\quad\text{pour}\quad n=1,2,\dots$$

Nous allons démontrer maintenant que:

(iv) ***En faisant correspondre à chaque suite*** e ***de sous-ensembles de*** X ***la fonction*** f_e, ***on obtient une correspondance biunivoque entre la classe de toutes les suites de sous-ensembles de*** X ***et celle de toutes les fonctions définies sur*** X ***dont les valeurs appartiennent à*** C.

[1]) C'est à M. Kuratowski que je dois cette égalité.

Les fonctions caractéristiques de deux suites distinctes de sous-ensembles de X étant évidemment distinctes, il reste à démontrer que chaque fonction g définie sur X et telle que $g(X)\subset C$ est la fonction caractéristique d'une suite e de sous-ensembles de X. Posons, en effet:

$$E_n=g^{-1}(C_n^2)\qquad e=\{E_n\}.$$

Il en résulte, d'après (iii) et 1.1 (ii), que $f_e=g$.

1.3. ***Suites d'ensembles appartenant à un σ-anneau.*** Soient: **K** une classe de sous-ensembles d'un espace X et $e=\{E_n\}$ une suite de sous-ensembles de X. Les ensembles C_n^0 et C_n^2 étant ouverts dans C (voir 1.1 (iii)) et l'ensemble $f_e(X)$ étant contenu dans C, il résulte de 1.2 (iii) que

(i) La fonction f_e étant mesurable (**K**)[1]), tous les ensembles de la suite e et leurs complémentaires appartiennent à **K**.

Nous allons démontrer qu'on a d'autre part:

(ii) **K** étant un σ-anneau et e étant une suite d'ensembles appartenant avec leurs complémentaires à **K**, la fonction f_e est mesurable (**K**).

K étant un σ-anneau, la condition

$$(+)\qquad \mathop{\mathrm{E}}_x[g(x)>a]\,\epsilon\,\mathbf{K}\quad\text{et}\quad\mathop{\mathrm{E}}_x[g(x)<a]\,\epsilon\,\mathbf{K}\quad\text{pour tout } a \text{ réel}$$

équivaut à la mesurabilité (**K**) de la fonction g. La condition (+) résulte immédiatement de la mesurabilité (**K**). Inversement: G étant un ensemble ouvert de nombres réels, il existe deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ de nombres réels tels que $G=\sum_{n=1}\mathop{\mathrm{E}}_x[a_n<x<b_n]$ et par conséquent

$$g^{-1}(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\mathop{\mathrm{E}}_x[g(x)>a_n]\cdot\mathop{\mathrm{E}}_x[g(x)<b_n]\}\,\epsilon\,\mathbf{K}.$$

En utilisant un raisonnement connu, appliqué p. ex. dans la théorie des fonctions réelles mesurables (B), on démontre aisément que la somme d'une suite uniformément convergente de fonctions mesurables (**K**) est une fonction mesurable (**K**)[2]).

[1]) au sens de 0.4.

[2]) Il suffit p. ex. de s'appuyer sur un théorème énoncé explicitement par M. Hausdorff [I], p. 236, III.

Les ensembles E_n et $X - E_n$ appartenant à K par hypothèse, les fonctions $f_{E_n}(x)$ sont mesurables (K) en vertu de 0.4 (i). La fonction f_e étant donc égale à la somme d'une série uniformément convergente des fonctions mesurables (K) (cf. 1.2 (i)), il en résulte que f_e est mesurable (K), c. q. f. d.

Les propositions (i) et (ii) nous donnent:

(iii) *Soient*: K *un σ-anneau de sous-ensembles d'un espace X et e une suite de sous-ensembles de X. Pour que tous les ensembles de la suite e et leurs complémentaires appartiennent à* K, *il faut et il suffit que la fonction f_e soit mesurable* (K).

1.4. ***Suites extraites.*** Nous allons démontrer une proposition concernant la fonction caractéristique d'une suite extraite d'une suite arbitraire d'ensembles:

Soient: $e = \{E_n\}$ *une suite d'ensembles contenus dans un espace arbitraire X et $\varkappa = (k_1, k_2 \ldots)$ une suite croissante de nombres naturels. $e_\varkappa$ désignant la suite $\{E_{k_n}\}$, on a*:

$$f_{e_\varkappa}(x) = \varphi_\varkappa(f_e(x)) \quad \textit{pour tout} \quad x \in X.$$

Pour chaque point $x_0 \in X$ les nombres $f_e(x_0)$ et $f_{e_\varkappa}(x_0)$ sont de la forme (*):

$$f_e(x_0) = 0, i_1\, i_2\, i_3 \ldots \qquad f_{e_\varkappa}(x_0) = 0, j_1\, j_2\, j_3 \ldots .$$

L'égalité $j_n = 0$ équivaut à la relation $x_0 \bar{\in} E_{k_n}$, donc à l'égalité: $i_{k_n} = 0$. On a dès lors $j_n = i_{k_n}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et par conséquent $0, j_1\, j_2\, j_3 \ldots = \varphi_\varkappa(0, i_1\, i_2\, i_3 \ldots)$ (cf. 1.1), c. q. f. d.

§ 2. L'équivalence des suites d'ensembles et des fonctions. Nombre de types d'équivalence.

2.1. ***Définitions.*** Deux suites: $a = \{A_n\}$ de sous-ensembles d'un espace X et $b = \{B_n\}$ de sous-ensembles d'un espace Y sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une transformation biunivoque $\varphi(x)$ de l'espace X en l'espace Y telle que $\varphi(A_n) = B_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On dit alors que la fonction φ *réalise* cette équivalence.

Deux fonctions: $g(x)$ définie sur X, et $h(y)$ définie sur Y, sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une transformation biunivoque $\varphi(x)$ de X en Y telle que $g(x) = h(\varphi(x))$ pour tout $x \in X$ (et c'est la fonction φ qui *réalise* cette équivalence).

2.2. ***Équivalence de deux suites d'ensembles et de leurs fonctions caractéristiques.*** *Pour que deux suites d'ensembles soient équivalentes, il faut et il suffit que leurs fonctions caractéristiques soient équivalentes (et c'est la même transformation qui réalise ces équivalences).*

Soient: $a = \{A_n\}$ et $b = \{B_n\}$ deux suites d'ensembles contenus respectivement dans X et dans Y et $\varphi(x)$ — une transformation biunivoque telle que $\varphi(X) = Y$. Posons:

$$(*) \qquad g(x) = f_b(\varphi(x)) \quad \text{pour chaque } x \in X.$$

La relation

$$\varphi(A_n) = B_n \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

équivaut successivement à chacune des relations suivantes:

$$\varphi(f_a^{-}(C_n^2)) = f_b^{-1}(C_n^2) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{(d'après 1.2 (iii))}$$

$$\varphi^{-1}(f_b^{-1}(C_n^2)) = f_a^{-1}(C_n^2) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$g^{-1}(C_n^2) = f_a^{-1}(C_n^2) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{(d'après (*))}$$

$$g(x) = f_a(x) \quad \text{pour chaque } x \in X \quad \text{(d'après 1.1 (ii))}$$

$$f_b(\varphi(x)) = f_a(x) \quad \text{pour chaque } x \in X \quad \text{(d'après (*))}.$$

2.3. ***Lemme fondamental.*** *Soient*: H *et* K *deux σ-anneaux d'ensembles contenus respectivement dans les espaces X et Y de même puissance et Φ une classe de transformations biunivoques transformant Y en X. Pour que*

(a) *il existe pour chaque suite $e = \{E_n\}$ d'ensembles appartenant avec leurs complémentaires à* H *une transformation $\varphi \in \Phi$ telle que les ensembles $\varphi^{-1}(E_n)$ appartiennent à* K *avec leurs complémentaires,*

il faut et il suffit que

(b) *il existe pour chaque fonction $g(x)$ définie sur X, mesurable* (H), *dont les valeurs appartiennent à C, une transformation $\varphi \in \Phi$ telle que la fonction $g(\varphi(y))$ est mesurable* (K).

Il suffit comme démonstration d'appliquer les propositions 1.2(iv), 1.3(iii) et 2.2.

Nous nous appuyerons souvent sur ce lemme dans le § 3.

2.4. ***Une condition nécessaire et suffisante.*** Considérons des fonctions admettant des valeurs qui appartiennent à un espace Z:

(i) *Pour que deux fonctions*: $g(x)$ *et* $h(y)$ (*définies respectivement sur* X *et* Y) *soient équivalentes, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(*) \qquad \overline{\overline{g^{-1}(z)}} = \overline{\overline{h^{-1}(z)}} \quad \textit{pour tout} \quad z \in Z.$$

Nécessité. Il existe une transformation biunivoque $\varphi(x)$ telle que $\varphi(X) = Y$ et $g(x) = h(\varphi(x))$ (pour tout $x \in X$). On a donc $g^{-1}(z) = \varphi^{-1}(h^{-1}(z))$ pour tout $z \in Z$, d'où il résulte la relation $(*)$.

Suffisance. Les familles des ensembles $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(z)$ (où z parcourt l'espace Z) forment évidemment les décompositions des espaces X et Y en ensembles disjoints:

$$X = \sum_{z \in Z} g^{-1}(z) \qquad\qquad Y = \sum_{z \in Z} h^{-1}(z)$$

$$g^{-1}(z') \cdot g^{-1}(z'') = h^{-1}(z') \cdot h^{-1}(z'') = 0 \quad \text{pour} \quad z' \neq z''.$$

Par conséquent, on conclut d'après $(*)$ qu'il existe une transformation biunivoque φ de X en Y telle que

$$(\ast\ast) \qquad h^{-1}(z) = \varphi(g^{-1}(z)) \quad \text{pour tout} \quad z \in Z.$$

Soit x_0 un élement arbitraire de X. Posons $z_0 = g(x_0)$. On a donc $x_0 \in g^{-1}(z_0)$, d'où il résulte, en vertu de $(\ast\ast)$:

$$\varphi(x_0) \in \varphi(g^{-1}(z_0)) = h^{-1}(z_0)$$

et par conséquent:

$$h(\varphi(x_0)) = z_0 = g(x_0).$$

Le point x_0 étant arbitraire, on a $h(\varphi(x)) = g(x)$ pour tout $x \in X$, les fonctions g et h sont donc équivalentes, c. q. f. d.

Il résulte de (i) que,

(ii) g *et* h *étant deux fonctions équivalentes, définies respectivement sur* X *et* Y, *on a* $g(X) = h(Y)$.

2.5. ***Types d'équivalence.*** Considérons toutes les fonctions admettant des valeurs qui appartiennent à un espace Z. Au lieu de dire que deux fonctions (ou bien deux suites d'ensembles) sont équivalentes, nous dirons que leurs *types d'équivalence sont égaux.*

Posons pour chaque fonction g et pour chaque $z \in Z$

$$\mathfrak{m}_g(z) = \overline{\overline{g^{-1}(z)}}.$$

Il résulte de 2.4 (i) que

(i) *Pour que deux fonctions* g *et* h *soient équivalentes, il faut et il suffit qu'on ait* $\mathfrak{m}_g(z) = \mathfrak{m}_h(z)$ *pour tout* $z \in Z$;

d'où, en vertu de 2.2:

(ii) *Pour que deux suites* a *et* b *d'ensembles (contenus respectivement dans* X *et* Y*) soient équivalentes, il faut et il suffit qu'on ait* $\mathfrak{m}_{f_a}(t) = \mathfrak{m}_{f_b}(t)$ *pour tout* $t \in C$.

On peut dire par conséquent que la fonction $\mathfrak{m}_g(z)$ (ou bien: la fonction $\mathfrak{m}_{f_e}(t)$) *représente* le type d'équivalence de la fonction g (ou bien de la suite e d'ensembles).

Il résulte de 1.2 (iv) et 2.2 qu'on peut toujours, au lieu de considérer les types d'équivalence des suites d'ensembles, considérer ceux des fonctions dont les valeurs appartiennent à C.

2.6. ***Nombre de types d'équivalence.***

(i) *Soient*: X *un espace infini de puissance* $\mathfrak{n}$ *et* X_0 *un ensemble de même puissance, contenu dans* X. *Thèse: Il existe* $2^{\mathfrak{n}}$ *types d'équivalence des suites de sous-ensembles de* X_0.

Soit $\mathfrak{x}$ le nombre des types d'équivalence des suites d'ensembles contenus dans X_0. La classe de toutes les suites de ce genre étant de puissance $2^{\mathfrak{n}}$, on a évidemment

$$(+) \qquad \mathfrak{x} \leqslant 2^{\mathfrak{n}}.$$

Désignons maintenant par $\mathfrak{M}$ la classe de toutes les fonctions $\mathfrak{m}(t)$ définies sur C et satisfaisant aux conditions:

$$\mathfrak{m}(0) = \overline{\overline{X - X_0}}$$

$$\mathfrak{m}(t) = 1 \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{m}(t) = 2 \quad \text{pour chaque} \quad t \in C - (0).$$

La puissance de la classe $\mathfrak{M}$ est évidemment égale à $2^{\mathfrak{n}}$. Pour chaque fonction $\mathfrak{m}(t)$ appartenant à $\mathfrak{M}$ il existe une décomposition de l'ensemble X_0 en une famille d'ensembles disjoints $E(t)$, où t parcourt l'ensemble $C - (0)$, telle que

$$\overline{\overline{E(t)}} = \mathfrak{m}(t) \quad \text{pour chaque} \quad t \in C - (0).$$

Posons enfin:

$$(\ddagger)\qquad E(0) = X - X_0.$$

On a donc

$$(\substack{++\\+})\qquad \overline{\overline{E(t)}} = \mathfrak{m}(t) \quad \text{pour chaque } t \in C.$$

Pour chaque $x \in X$ il existe un point unique $t \in C$ tel que $x \in E(t)$; désignons ce point par $g(x)$. On a d'après $(\substack{++\\+})$:

$$\mathfrak{m}_g(t) = \overline{\overline{g^{-1}(t)}} = \overline{\overline{E(t)}} = \mathfrak{m}(t) \qquad \text{pour chaque } t \in C.$$

et d'après $(\ddagger)$:

$$(\ddagger\ddagger)\qquad g^{-1}(0) = X - X_0.$$

Les valeurs de la fonction g appartenant à C, il existe, d'après 1.2 (iv), une suite $e = \{E_n\}$ de sous-ensembles de X telle que $f_e = g$. Il résulte de $(\ddagger\ddagger)$ et 1.2 (ii) que $X - (E_1 + E_2 + \ldots) = X - X_0$, d'où $X_0 = E_1 + E_2 + \ldots$

Nous avons donc défini pour chaque fonction $\mathfrak{m}(t)$ appartenant à $\mathfrak{M}$ une suite e de sous-ensembles de X_0 telle que $\mathfrak{m}_{f_e}(t) = \mathfrak{m}(t)$ pour chaque $t \in C$. Les suites e ainsi définies ont des types d'équivalence différents (en vertu de 2.5 (ii)). On a donc $\mathfrak{x} \geqslant 2^{\mathfrak{n}}$ et, d'après $(+)$: $\mathfrak{x} = 2^{\mathfrak{n}}$, c. q. f. d.

Il suffit de poser $X = X_0$ dans la proposition précédente pour obtenir:

(ii) *X étant un espace de puissance $\mathfrak{n}$, il existe $2^{\mathfrak{n}}$ types d'équivalence des suites d'ensembles contenus dans X.*

En posant $X = I^n$ et $X_0 =$ un sous-ensemble de I^n isomorphe à C, on obtient en vertu de (i) et (ii):

(iii) *Il existe $2^{\mathfrak{c}}$ types d'équivalence des suites d'ensembles non denses de mesure nulle, contenus dans I^n.*

D'autre part:

(iv) *Il existe $\mathfrak{c}$ types d'équivalence des suites d'ensembles projectifs* (contenus dans un espace métrique, indénombrable, séparable et complet).

La puissance de la classe des ensembles projectifs étant égale à $\mathfrak{c}$, il existe $\mathfrak{c}$ au plus suites d'ensembles projectifs non équivalentes deux à deux. D'autre part pour chaque suite $\sigma = \{j_n\}$, formée de nombres 0 et 1, désignons par E_n^σ l'ensemble vide quand $j_n = 0$ et l'ensemble formé d'un seul point $x_0 \in X$ quand $j_n = 1$. On obtient ainsi $\mathfrak{c}$ suites d'ensembles fermés non équivalentes deux à deux.

Il résulte de (ii), (iii) et (iv):

(v) *Pour chaque suite e de sous-ensembles d'un espace X de puissance du continu, il existe une autre suite de sous-ensembles de X qui n'est équivalente à aucune suite extraite de e*[1]).

(vi) *Il existe une suite d'ensembles non denses de mesure nulle contenus dans I^n qui n'est pas équivalente à aucune suite de sous-ensembles projectifs de I^n*[2]).

§ 3. Notion d'équivalence et différentes classifications des ensembles et des fonctions.

(Les lettres X, Y, Z désignent dans ce paragraphe des espaces métriques indénombrables, séparables et complets).

3.1. ***La mesurabilité*** **(*B*)** Désignons par N^* l'espace composé de tous les nombres irrationnels appartenant à I et de tous les nombres naturels. Remarquons d'abord que

(o) Chaque ensemble borelien indénombrable contenu dans X est une image biunivoque et continue de l'espace N^*.

Cette proposition résulte du théorème de M. Lusin (d'après lequel chaque ensemble borelien est une image biunivoque et continue d'un sous-ensemble fermé de l'espace N des nombres irrationnels) et celui de M. Mazurkiewicz (chaque ensemble G_δ indénombrable se compose d'un ensemble homéomorphe à N et d'un ensemble au plus dénombrable)[3]).

---

[1]) C'est la réponse à une question posée par M. Ulam. Il est intéressant que ce théorème est en défaut dans le cas de l'espace X *dénombrable*: M. Sierpiński a démontré récemment qu'*il existe une suite u d'ensembles de nombres naturels telle que pour chaque suite e d'ensembles de nombres naturels il existe une suite extraite de u, équivalente à e*. Voir Sierpiński [5].

[2]) M. Ulam a démontré préalablement qu'il existe une suite d'ensembles qui n'est équivalente à aucune suite d'ensembles mesurables (B).

[3]) Voir p. ex. Kuratowski [I], p. 231 et 227. Cf. Sierpiński [4], p. 49.

Nous allons démontrer que *chaque fonction mesurable* (B) *est équivalente à une fonction continue, définie sur* N^*; d'une façon plus précise:

(i) *$g(x)$ étant une fonction mesurable (B) définie sur un espace X dont les valeurs appartiennent à Y, il existe une transformation $\varphi(t)$ biunivoque et continue de l'espace N^* en l'espace X telle que la fonction $g(\varphi(t))$ est continue.*

Soit W l'image de la fonction g. Posons pour chaque point $p=(x,y)\in X\times Y$:

$$u(p)=x \quad \text{et} \quad v(p)=y.$$

On voit aisément que

$$(+) \qquad v(p)=g(u(p)) \quad \text{pour chaque } p\in W.$$

W étant un ensemble borelien, il existe d'après (o) une fonction biunivoque et continue $\psi(t)$, définie sur N^* telle que $\psi(N^*)=W$. Posons pour chaque $t\in N^*$:

$$(\ddagger) \qquad h(t)=v(\psi(t));$$

$$(\ddagger\ddagger) \qquad \varphi(t)=u(\psi(t)).$$

Pour chaque $t\in N^*$ on a $\psi(t)\in W$, d'où — en vertu de $(\ddagger)$ et $(+)$:

$$h(t)=g(u(\psi(t)))$$

et d'après $(\ddagger\ddagger)$:

$$h(t)=g(\varphi(t)).$$

Les égalités $(\ddagger)$ et $(\ddagger\ddagger)$ entraînent la continuité des fonctions h et φ, d'autre part, la fonction u transformant d'une façon biunivoque l'ensemble W en espace X, la fonction φ transforme d'une même façon l'espace N^* en espace X.

La proposition (i) est ainsi démontrée. Il en résulte que *chaque fonction mesurable (B), définie sur un espace X est équivalente à une fonction de première classe, définie sur un espace Y* (donné d'avance):

(ii) *$g(x)$ étant une fonction mesurable (B) définie sur X, dont les valeurs appartiennent à Z, il existe une transformation $\varphi(y)$ biunivoque de première classe de Y en X telle que la fonction $g(\varphi(y))$ est de première classe.*

Il existe en vertu de (i) une transformation $\varphi_1(t)$ biunivoque et continue de l'espace N^* en espace X telle que la fonction $g(\varphi_1(t))$ est continue. $\varphi_2(y)$ désignant une transformation biunivoque de première classe de l'espace Y en N^* [1]), posons $\varphi(y)=\varphi_1(\varphi_2(y))$. La fonction $g(\varphi(y))$ est de première classe, c. q. f. d.

Appuyons nous maintenant sur le lemme fondamental 2.3, en posant $\mathbf{H}=$ la classe des ensembles boreliens contenus dans X et 1° $\mathbf{K}=$ la classe des ensembles fermés dans N^*, 2° $\mathbf{K}=$ celle des sous-ensembles F_σ de Y. La classe des fonctions mesurables $(\mathbf{H})$ coïncide par conséquent avec celle des fonctions mesurables (B) et la classe des fonctions mesurables $(\mathbf{K})$ coïncide 1° avec celle des fonctions continues sur N^* et 2° avec celle des fonctions de première classe sur Y. Ainsi, il résulte des propositions (i) (pour $Y=C$) et (ii) (pour $Z=C$) que *chaque suite d'ensembles boreliens contenus dans X est équivalente à une suite de sous-ensembles fermés et ouverts de N^** et *à une suite de sous-ensembles F_σ et G_δ d'un espace Y* (donné d'avance). D'une façon plus précise:

(j) *$\{B_n\}$ étant une suite d'ensembles boreliens contenus dans un espace X, il existe une transformation $\varphi(t)$ biunivoque et continue de l'espace N^* en espace X telle que tous les ensembles $\varphi^{-1}(B_n)$ sont ouverts et fermés dans N^*.*

(jj) *$\{B_n\}$ étant une suite d'ensembles boreliens contenus dans X, il existe une transformation $\varphi(y)$ biunivoque de première classe de l'espace Y en espace X telle que tous les ensembles $\varphi^{-1}(B_n)$ sont F_σ et G_δ.*

3.2. ***La projectivité.*** Désignons par $\mathbf{A}_1$ la classe des ensembles analytiques, par $\mathbf{C}_1$ celle des complémentaires analytiques, par $\mathbf{A}_{n+1}$ celle des images continues des ensembles appartenant à $\mathbf{C}_n$ et par $\mathbf{C}_{n+1}$ celle des complémentaires des ensembles appartenant à $\mathbf{A}_{n+1}$. Posons enfin: $\mathbf{B}_n=\mathbf{A}_n\cdot\mathbf{C}_n$. (La classe $\mathbf{B}_1$ coïncide donc avec celle des ensembles boreliens). On démontre aisément que pour chaque fonction g mesurable $(\mathbf{B}_n)$ [2]), définie sur X, on a: $g(X)\in\mathbf{A}_n$ [3]).

[1]) Entre chaque couple d'ensembles indénombrables G_δ (situés dans les espaces complets et séparables) il existe une homéomorphie de classe 1, 1. Voir Kuratowski [1], p. 213.

[2]) au sens de 0.4.

[3]) A cet effet il suffit de démontrer que l'image de la fonction g appartient à $\mathbf{A}_n$. Cf. la démonstration analogue pour les fonctions mesurables (B), Kuratowski [I], p. 183.

(i) *Il existe pour chaque $n=1,2,\dots$ une fonction mesurable* $(\mathbf{B}_{n+1})$ *définie sur X dont les valeurs appartiennent à Y qui n'est équivalente à aucune fonction mesurable* $(\mathbf{B}_n)$.

Soit P un sous-ensemble de X appartenant à $\mathbf{C}_n$ (donc, à plus forte raison, à $\mathbf{B}_{n+1}$) et n'appartenant pas à $\mathbf{A}_n$ [1]). Soient: $\psi(x)$ une homéomorphie généralisée transformant X en Y [2]) et y_0 — un point arbitraire de $\psi(P)$. Posons:

$$g(x)=\psi(x) \quad \text{pour} \quad x \,\epsilon\, P;$$

$$g(x)=y_0 \quad \text{pour} \quad x \,\bar{\epsilon}\, P.$$

G étant un sous-ensemble ouvert de I, on a

$$g^{-1}(G)=\psi^{-1}(G)\cdot P \quad \text{quand} \quad y_0 \,\bar{\epsilon}\, G$$

ou bien

$$g^{-1}(G)=\psi^{-1}(G)+(X-P) \quad \text{quand} \quad y_0 \,\epsilon\, P$$

et par conséquent $g^{-1}(G) \,\epsilon\, \mathbf{B}_{n+1}$.

La fonction g est donc mesurable $(\mathbf{B}_{n+1})$ et, d'autre part, l'ensemble $g(X)=\psi(P)$ n'appartenant pas à $\mathbf{A}_n$ [3]), aucune fonction équivalente à g (d'après 2.3 (ii)) n'est mesurable $(\mathbf{B}_n)$.

La proposition (i) (pour $Y=C$) et le lemme fondamental 2.3 entraînent:

(j) *Il existe pour chaque $n=1,2,\dots$ une suite d'ensembles (contenus dans X) appartenant à $\mathbf{B}_{n+1}$ qui n'est équivalente à aucune suite d'ensembles appartenant à $\mathbf{B}_n$;*

donc en particulier:

(jj) *Il existe une suite d'ensembles (contenus dans X) appartenant à $\mathbf{B}_2$ qui n'est équivalente à aucune suite d'ensembles boreliens* [4]).

---

[1]) Voir p. ex. Kuratowski [I], p. 242, théorème VI. Chaque espace indénombrable complet contenant un ensemble homéomorphe à l'ensemble des nombres irrationnels, ce théorème est valable pour chaque espace indénombrable, complet et séparable.

[2]) Cf. p. 304 [1]).

[3]) Les classes $\mathbf{A}_n$ sont des invariants par rapport aux homéomorphies généralisées. Cf. Sierpiński [2], p. 273.

[4]) C'est la solution d'un problème posé par M. Ulam.

3.3. *La mesurabilité (L) et la propriété de Baire.*

(o) Soient B_1 et B_2 deux ensembles boreliens contenus respectivement dans les espaces X_1 et X_2 tels que

$$(*) \qquad \overline{\overline{B_1}}=\overline{\overline{B_2}} \qquad \overline{\overline{X_1-B_1}}=\overline{\overline{X_2-B_2}}.$$

Thèse: Il existe pour chaque fonction g définie sur X_1 (dont les valeurs appartiennent à Y), mesurable (B) sur X_1-B_1, une fonction h équivalente à g, définie sur X_2 et mesurable (B) sur X_2-B_2. Une transformation réalisant cette équivalence est une homéomorphie généralisée.

Il résulte, en effet, de (*) qu'il existe une homéomorphie généralisée $\varphi(x)$ telle que $\varphi(B_2)=B_1$ et $\varphi(X_2-B_2)=X_1-B_1$ [1]). La fonction $h(x)=g(\varphi(x))$ remplit évidemment les conditions de la thèse.

Le lemme (o) entraîne les théorèmes suivants:

(i) *Chaque fonction jouissant de la propriété de Baire définie sur X est équivalente à une fonction jouissant de la propriété de Baire, définie sur un espace Y (donné d'avance).*

(ii) *Chaque fonction mesurable (L) définie sur I^n est équivalente à une fonction mesurable (L) définie sur I^m.*

(iii) *Chaque fonction mesurable (L) définie sur I^n (ainsi que chaque fonction jouissant de la propriété de Baire, définie sur X) est équivalente à une fonction mesurable (L) et jouissant de la propriété de Baire, définie sur I^m (où m est un nombre naturel, donné d'avance).*

Remarquons que *toutes ces équivalences* (dans les théorèmes (i)—(iii)) *sont réalisées par des homéomorphies généralisées.*

Démontrons p. ex. le théorème (iii). Soit donc g une fonction mesurable (L) sur I^n. Par conséquent, il existe un ensemble indénombrable K, étant un G_δ de mesure (n-dimensionnelle) nulle, telle que la fonction $g\,|\,I^n-K$ est de première classe [2]). Il suffit maintenant d'appliquer le lemme (o), en posant $X_1=I^n$, $X_2=I^m$, $B_1=K$

---

[1]) Il existe entre chaque couple d'ensembles boreliens de même puissance une homéomorphie généralisée (cf. p. 304 [1])), par conséquent il existe une homéomorphie généralisée ψ_1 telle que $\psi_1(B_1)=B_2$ et une homéomporhie généralisée ψ_2 telle que $\psi_2(X_1-B_1)=X_2-B_2$. Posons: $\varphi(x)=\psi_1(x)$ pour $x \,\epsilon\, B_1$ et $\varphi(x)=\psi_2(x)$ pour $x \,\epsilon\, X_1-B_1$. La fonction φ est évidemment une homéomorphie généralisée.

[2]) Cf. p. ex. Hahn [I], p. 566, Satz XI.

et B_2=un sous-ensemble de I^m, isométrique à C. La fonction h ainsi obtenue étant mesurable (B) sur $I^m - B_2$, elle est mesurable (L) et jouit de la propriété de Baire.

En nous appuyant sur le lemme fondamental 2.3, nous obtenons de (i)—(iii) les théorèmes analogues pour les suites d'ensembles mesurables (L) et jouissant de la propriété de Baire. Nous ne les énoncerons pas explicitement.

3.4. ***Un lemme général.*** Soit $\boldsymbol{F}$ une classe de fonctions définies sur X dont les valeurs appartiennent à Y. Considérons les deux conditions suivantes (remplies p. ex. par la classe des fonctions mesurables (L)):

(a) Pour chaque fonction $f \epsilon \boldsymbol{F}$ il existe un ensemble parfait $P \subset X$ tel que la fonction $f|P$ est continue.

(b) Il existe un ensemble $K \subset X$ tel que $\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{X-K}} = \mathfrak{c}$ et que la mesurabilité (B) de la fonction $f|K$ entraîne la relation: $f \epsilon \boldsymbol{F}$.

Nous dirons qu'une fonction $f(u)$ définie sur un espace arbitraire U de puissance $\mathfrak{c}$ et admettant des valeurs qui appartiennent à I, remplit la condition (A) lorsqu'on a:

(A_1) l'ensemble $f(U)$ contient un ensemble parfait;

ou bien

(A_2) il existe un point y_0 tel que $\overline{\overline{f^{-1}(y_0)}} = \mathfrak{c}$

Nous allons démontrer que

(i) $\boldsymbol{F}$ étant une classe qui remplit la condition (a), chaque fonction équivalente à une fonction qui appartient à $\boldsymbol{F}$ remplit la condition (A).

Soient: $f \epsilon \boldsymbol{F}$ et $P \subset X$ un ensemble parfait telle que la fonction $f|P$ est continue. Supposons que la fonction f ne satisfait pas à la condition (A_2): dès lors on a $\overline{\overline{f^{-1}(y)}} < \mathfrak{c}$ pour chaque $y \epsilon Y$. Il en résulte d'après le théorème de M. König que l'ensemble $f(P)$ est indénombrable et par conséquent il contient un ensemble parfait. Donc, la condition (A_1) est remplie.

La fonction f remplit ainsi la condition (A). Il résulte des propositions 2.4 (i) et (ii) que chaque fonction équivalente à une fonction satisfaisant à cette condition, lui satisfait également. Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Démontrons encore que

(ii) $\boldsymbol{F}$ étant une classe qui remplit la condition (b), chaque fonction satisfaisant à la condition (A) est équivalente à une fonction appartenant à $\boldsymbol{F}$.

1°. Soit f une fonction définie sur un espace U de puissance du continu qui remplit la condition (A_1): l'ensemble $f(U)$ contient donc un ensemble parfait P. Par conséquent, il existe une homéomorphie généralisée $\psi(x)$ telle que $\psi(X)=P$. Posons $Q=\psi(K)$ (voir la condition (b)); on a donc: $Q \subset f(U)$ et d'après (b):

$$(*) \qquad \overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{f(U)-Q}} = \mathfrak{c}.$$

Dès lors, il existe un ensemble $H \subset U$ de puissance $\mathfrak{c}$ tel que la fonction f transforme H en Q d'une façon biunivoque. Posons $f_1 = f|H$.

On a d'après (*):

$$\overline{\overline{U-H}} \geqslant \overline{\overline{f(U-H)}} \geqslant \overline{\overline{f(U)-Q}} = \mathfrak{c},$$

d'où en vertu de (b): $\overline{\overline{U-H}} = \overline{\overline{X-K}}$. Soit donc $\varphi_0(x)$ une transformation biunivoque telle que $\varphi_0(X-K) = U-H$. Posons:

$$(\ast) \qquad g(x) = \psi(x) \qquad \text{pour} \quad x \epsilon K;$$

$$(\ast\ast) \qquad g(x) = f(\varphi_0(x)) \qquad \text{pour} \quad x \epsilon X-K.$$

La fonction g, en tant que mesurable (B) sur K, appartient à $\boldsymbol{F}$; il reste donc à démontrer qu'elle est équivalente à f. Posons:

$$\varphi(x) = f_1^{-1}(\psi(x)) \qquad \text{pour} \quad x \epsilon K;$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \qquad \text{pour} \quad x \epsilon X-K.$$

Par conséquent la fonction φ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble $X-K$ en ensemble $U-H$ et de la même façon l'ensemble K en ensemble H:

$$\varphi(K) = f_1^{-1}(\psi(K)) = f_1^{-1}(Q) = H.$$

D'autre part, on a d'après ($\ast$):

$$f(\varphi(x)) = f(f_1^{-1}(\psi(x))) = \psi(x) = g(x) \qquad \text{pour} \quad x \epsilon K;$$

$$f(\varphi(x)) = f(\varphi_0(x)) = g(x) \qquad \text{pour} \quad x \epsilon X-K.$$

2°. Supposons qu'une fonction f, définie sur un espace U de puissance $\mathfrak{c}$, remplit la condition (A_2). Il existe donc un point y_0 dont le contre-image est de puissance $\mathfrak{c}$. Soit H un ensemble tel que

$$H \subset f^{-1}(y_0) \qquad \overline{\overline{H}} = \overline{\overline{U-H}} = \mathfrak{c}.$$

Il existe par suite une transformation biunivoque φ telle que

$$\varphi(X) = U \qquad \varphi(K) = H.$$

Posons:

$$g(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in X. \tag{**}$$

On a:

$$\varphi(x) \in H \subset f^{-1}(y_0) \quad \text{pour tout} \quad x \in K,$$

d'où

$$g(x) = f(\varphi(x)) = y_0 \quad \text{pour tout} \quad x \in K.$$

La fonction g, en tant que constante sur K, appartient à $\boldsymbol{F}$ et d'autre part il s'ensuit de (**) qu'elle est équivalente à f.

La proposition (ii) est ainsi démontrée.

Il résulte directement de (i) et (ii) que:

(iii) Soit $\boldsymbol{F}$ une famille de fonctions qui remplit les conditions (a) et (b). Pour qu'une fonction f (définie sur un espace arbitraire U de puissance $\mathfrak{c}$) soit équivalente à une fonction appartenant à $\boldsymbol{F}$, il faut et il suffit que la fonction f remplisse la condition (A);

ce qui entraîne le lemme suivant:

(iv) $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ *étant deux classes de fonctions (définies respectivement sur X_1 et X_2 et admettant des valeurs qui appartiennent à Y), dont chacune remplit les conditions* (a) *et* (b), *il existe pour chaque fonction $f_1 \in \boldsymbol{F}_1$ une fonction $f_2 \in \boldsymbol{F}_2$, équivalente à f_1.*

3.5. ***La propriété de Baire au sens restreint et la propriété (s).*** La classe $\boldsymbol{L}$ des fonctions mesurables (L) (pour $X = I^n$), la classe $\boldsymbol{R}$ des fonctions jouissant de la propriété de Baire, ainsi que la classe $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$ (pour $X = I^n$), remplissent les conditions (a) et (b). Si l'hypothèse du continu est vraie, la classe des fonctions jouissant de la propriété de Baire au sens restreint, ainsi que la classe des fonctions jouisssant de la propriété (s), remplissent également ces conditions, ce qui résulte de l'existence d'un ensemble indénombrable toujours de première catégorie [1]). Ces remarques nous permettent d'appliquer la proposition 3.4 (iv) pour les classes mentionnées de fonctions. On obtient ainsi une série de théorèmes [2]), p. ex.: *Si $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, il existe pour chaque fonction f jouissant de la propriété de Baire (ou bien: de la propriété (s)) une fonction équivalente à f, jouissant de la propriété de Baire au sens restreint.*

[1]) Voir p. ex. Kuratowski [I], p. 269.

[2]) On obtient entre autres les théorèmes 3.3, mais on ne prouverait pas de cette manière que les équivalences en question sont réalisées par les homéomorphies généralisées.

Le lemme fondamental 2.3 entraîne les théorèmes analogues pour les suites d'ensembles.

3.6. ***La non mesurabilité (L).*** La classe des fonctions mesurables (L) remplissant la condition (a) [1]), il résulte de 3.4 (i) que

(o) Chaque fonction équivalente à une fonction mesurable (L) satisfait à la condition (A) [1]).

Il en résulte que

(i) *Il existe une fonction g (définie sur un espace arbitraire U de puissance $\mathfrak{c}$), admettant des valeurs appartenant à C, qui n'est équivalente à aucune fonction mesurable (L).*

A cet effet il suffit de considérer un ensemble T totalement imparfait, de puissance $\mathfrak{c}$, contenu dans C; de désigner par $g(u)$ une transformation biunivoque telle que $g(U) = T$ et de s'appuyer sur (o).

La proposition (i) et le lemme fondamental 2.3 entraînent:

(ii) *Il existe une suite d'ensembles (contenus dans un espace donné U de puissance $\mathfrak{c}$) qui n'est équivalente à aucune suite d'ensembles mesurables (L).*

L'hypothèse du continu permet d'aller plus loin:

(iii) *Si $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, il existe une suite d'ensembles (contenus dans un espace donné U de puissance $\mathfrak{c}$) telle qu'aucune suite qui en est extraite n'est équivalente à aucune suite d'ensembles mesurables (L).*

Soient: L un sous-ensemble indénombrable de C dont chaque sous-ensemble non dense dans C est au plus dénombrable (donc c'est un „ensemble de M. Lusin" relativement à C; l'existence d'un ensemble de ce genre résulte de l'hypothèse du continu [2])) et $g(u)$ une fonction biunivoque telle que $g(U) = L$. En vertu de 1.2 (iv) il existe une suite $e = \{E_n\}$ de sous-ensembles de U de sorte que $f_e = g$.

Soit $\varkappa$ une suite croissante quelconque de nombres naturels. On a ainsi

$$f_{e_\varkappa}(u) = \varphi_\varkappa(f_e(u)) \quad \text{pour chaque} \quad u \in U$$

(cf. 1.4), d'où, pour chaque $t \in C$

$$f_{e_\varkappa}^{-1}(t) = f_e^{-1}[\varphi_\varkappa^{-1}(t)] = f_e^{-1}[f_e(U) \cdot \varphi_\varkappa^{-1}(t)] = f^{-1}[L \cdot \varphi_\varkappa^{-1}(t)].$$

[1]) Voir 3.4.

[2]) Voir p. ex. Sierpiński [I], p. 36.

L'ensemble $\varphi_\varkappa^{-1}(t)$ étant non dense dans C (en vertu de 1.1 (iv)), l'ensemble $L\cdot\varphi_\varkappa^{-1}(t)$ est au plus dénombrable, et, étant donné que la fonction f est biunivoque, l'ensemble $f_{e_\varkappa}^{-1}(t)$ est au plus dénombrable.

D'autre part, on a:

$$f_{e_\varkappa}(U)=\varphi_\varkappa(f_e(U))=\varphi_\varkappa(L).$$

La fonction $\varphi_\varkappa$ étant continue (voir 1.1 (iv)), l'ensemble $\varphi_\varkappa(L)$ possède l'ainsi dite propriété (C) [1]) et par suite il est totalement imparfait [2]).

Par conséquent la fonction $f_{e_\varkappa}$ ne remplit pas la condition (A), d'où il résulte en vertu de (o) qu'elle n'est équivalente à aucune fonction mesurable (L). La suite $e_\varkappa$, d'après 1.3 (iii) et 2.2, n'est donc équivalente à aucune suite d'ensembles mesurables (L).

§ 4. L'équivalence des suites de fonctions.

4.1. ***Définition.*** Deux suites: $\mathfrak{g}=\{g_n\}$ de fonctions définies sur un espace X et $\mathfrak{h}=\{h_n\}$ de fonctions définies sur un espace Y sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une transformation biunivoque de l'espace X en Y réalisant pour $n=1, 2, \ldots$ l'équivalence entre les fonctions g_n et h_n.

4.2. ***Fonction caractéristique.*** Considérons d'abord les fonctions dont les valeurs appartiennent à C. Soit $\{k_n, l_n\}$ une suite formée de toutes couples ordonnées de nombres naturels. $\mathfrak{g}=\{g_n\}$ étant une suite de fonctions, définies sur un espace X, posons successivement:

$$G_k^l=g_l^{-1}(C_k^2) \quad \text{pour} \quad k=1, 2, \ldots;\ l=1, 2, \ldots$$

(g_l est donc la fonction caractéristique de la suite $G_1^l, G_2^l, G_3^l, \ldots$)

$$G_n=G_{k_n}^{l_n} \quad \text{pour} \quad n=1, 2, \ldots\ ,$$
$$g=\{G_n\}$$
$$f_{\mathfrak{g}}=f_g.$$

La fonction $f_{\mathfrak{g}}$ sera appelée *fonction caractéristique de la suite* $\mathfrak{g}$.

De cette définition et des théorèmes 1.2 (iv), 1.3 (iii), 2.2 résultent directement les propositions suivantes, analogues à ces derniers:

[1]) Sierpiński [1], p. 304 (ou bien [I], p. 39)

[2]) Szpilrajn [1], p. 126.

(i) Soient: G la classe de toutes les fonctions définies sur X dont les valeurs appartiennent à C et $G^{\aleph_0}$ la classe des suites de fonctions appartenant à G. En faisant correspondre à chaque suite $\mathfrak{g}$ appartenant à $G^{\aleph_0}$ la fonction caractéristique $f_{\mathfrak{g}}$, on obtient une correspondance biunivoque entre $G^{\aleph_0}$ et G.

(ii) K étant un σ-anneau de sous-ensembles de X, la mesurabilité (K) de toutes les fonctions d'une suite $\mathfrak{g}$ équivaut à la mesurabilité (K) de la fonction caractéristique de $\mathfrak{g}$.

(iii) Pour que deux suites de fonctions soient équivalentes il faut et il suffit que leurs fonctions caractéristiques soient équivalentes (et c'est la même transformation qui réalise ces équivalences).

4.3. ***Fonction quasi-caractéristique.*** Z étant un espace métrique indénombrable, séparable et complet, considérons une homéomorphie généralisée ψ de classe 1, 1 telle que $\psi(Z)=C$ [1]). Pour chaque fonction h définie sur un espace X dont les valeurs appartiennent à Z, désignons par $\overline{h}$ la fonction définie par l'égalité:

$$\overline{h}(x)=\psi(h(x)) \quad \text{pour} \quad x\in X.$$

Il est clair que

(i) En faisant correspondre à chaque fonction h définie sur X, dont les valeurs appartiennent à Z, la fonction $\overline{h}$, on obtient une correspondance biunivoque entre la classe de toutes les fonctions définies sur X dont les valeurs appartiennent a Z et celle des fonctions définies sur X dont les valeurs appartiennent à C.

Démontrons ensuite que

(ii') K étant une classe de sous-ensembles de X et h une fonction définie sur X, dont les valeurs appartiennent à Z, la mesurabilité (K) de la fonction h (ou bien: de la fonction $\overline{h}$) entraîne la mesurabilité $(\mathsf{K}_{c\sigma})$ de la fonction $\overline{h}$ (ou bien: de la fonction h).

G étant un sous-ensemble ouvert quelconque de C, l'ensemble $\psi^{-1}(G)$ est un F_σ et par conséquent

$$\psi^{-1}(G)=F_1+F_2+\ldots,$$

où $F_n (n=1, 2 \ldots)$ sont des sous-ensembles fermés de Z. On a ainsi:

$$\overline{h}^{-1}(G)=h^{-1}(\psi^{-1}(G))=\sum_{n=1}^{\infty}h^{-1}(F_n)=\sum_{n}^{\infty}[X-h^{-1}(X-F_n)]\in\mathsf{K}_{c\sigma}.$$

[1]) Cf. p. 315 [1]).

La démonstration de la seconde partie du théorème est analogue.

Il résulte de (ii') que,

(ii) K étant une classe telle que $\mathsf{K}=\mathsf{K}_c=\mathsf{K}_\sigma$, la mesurabilité ($\mathsf{K}$) de la fonction h équivaut à celle de la fonction $\bar{h}$.

Remarquons enfin que

(iii) L'équivalence des fonctions $\bar{g}$ et $\bar{h}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions g et h soient équivalentes (et c'est la même transformation qui réalise ces équivalences).

$\mathfrak{g}=\{g_n\}$ étant une suite de fonctions définies sur X, dont les valeurs appartiennent à Z, appelons la fonction caractéristique de la suite $\bar{\mathfrak{g}}=\{\bar{g}_n\}$ (la fonction $f_{\bar{\mathfrak{g}}}$) — *fonction quasi-caractéristique de la suite* $\mathfrak{g}$.

Il résulte de (i) et (iii) que

(j) Les théorèmes analogues à 4.2 (i) et (iii) sont vrais pour les fonctions quasi-caractéristiques.

Remarquons maintenant que, K étant un σ-anneau d'ensembles, la classe $\mathsf{K}_{c\sigma}$ est également un σ-anneau. Il résulte par suite de (ii') que,

(jj) K étant un σ-anneau de sous-ensembles de X, la mesurabilité (K) de toutes les fonctions d'une suite $\mathfrak{g}$ entraîne la mesurabilité ($\mathsf{K}_{c\sigma}$) de la fonction quasi-caractéristique de $\mathfrak{g}$ et la mesurabilité (K) de cette fonction entraîne la mesurabilité ($\mathsf{K}_{c\sigma}$) de toutes les fonctions appartenant à $\mathfrak{g}$.

4.4. ***L'équivalence.*** Nous allons énoncer maintenant certaines propositions (analogues au lemme fondamental 2.3) qui nous permettront de passer des théorèmes du § 3 sur les fonctions, aux théorèmes analogues concernant les suites de fonctions.

Soient: H et K deux σ-anneaux d'ensembles contenus respectivement dans les espaces X et Y de même puissance, Z un espace métrique, indénombrable, séparable et complet et Φ une classe de transformations biunivoques de Y en X.

(i) S'il existe une fonction g mesurable (H), dont les valeurs appartiennent à Z qui n'est équivalente à aucune fonction mesurable (K), il existe également une suite de fonctions mesurables (H) qui n'est équivalente à aucune suite de fonctions mesurables (K).

C'est, notamment, la suite: $g(x)$, $g(x)$, $g(x)$ ...

Il résulte de (i) que *les théorèmes* 3.2 (i) *et* 3.6 (i) entraînent directement *les théorèmes analogues pour les suites de fonctions.*

(ii) Si pour chaque fonction $g(x)$ mesurable (H) dont les valeurs appartiennent à C il existe une transformation $\varphi\in\Phi$ telle que la fonction $g(\varphi(y))$ est mesurable (K), il existe également pour chaque suite de fonctions $\{g_n(x)\}$ mesurables (H) dont les valeurs appartiennent à C une transformation $\psi\in\Phi$ telle que les fonctions $g_n(\psi(y))$ $(n=1,2,\ldots)$ sont mesurables (K).

(iii) Si pour chaque fonction $g(x)$ mesurable ($\mathsf{H}_{c\sigma}$) dont les valeurs appartiennent à C il existe une transformation $\varphi\in\Phi$ telle que la fonction $g(\varphi(y))$ est mesurable (K), il existe pour chaque suite de fonctions $\{g_n(x)\}$ mesurables (H) dont les valeurs appartiennent à Z, une transformation $\psi\in\Phi$ telle que les fonctions $g_n(\psi(y))$ $(n=1,2\ldots)$ sont mesurables ($\mathsf{K}_{c\sigma}$).

La proposition (ii) résulte de 4.2 (i) — (iii); la proposition (iii) — de 4.3 (j) et (jj).

En vertu de (iii), *les théorèmes* 3.3 (i) — (iii) et 3.5 *entraînent les propositions analogues pour les suites de fonctions.* La proposition (ii) permet d'obtenir *les propositions analogues à* 3.1 (i) *et* (ii) *pour les suites de fonctions dont les valeurs appartiennent à C.* Dans le cas général on obtient de ces théorèmes, en vertu de (iii), la proposition suivante: *Pour chaque suite de fonctions mesurables* (B), *définies sur* X, *dont les valeurs appartiennent à* Z *il existe* 1⁰ *une suite équivalente de fonctions de première classe définie sur* N^*, 2⁰ *une suite équivalente de fonctions de deuxième classe définie sur* Y (X, Y, Z *désignant les espaces métriques, indénombrables, séparables et complets, donnés d'avance). La fonction* φ *réalisant cette équivalence est* 1⁰ *continue sur* N^*, 2⁰ *de première classe sur* Y.

Livres et travaux cités.

Hahn, H. [I] *Theorie der reellen Funktionen.* Erster Band. Berlin 1921.

Hausdorff, F. [I] *Mengenlehre.* Berlin-Leipzig 1927.

Kuratowski, C. [I] *Topologie I.* Monografje Matematyczne 3. Warszawa-Lwów 1933.

— [1] *Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie.* Fund. Math. 22 (1934), pp. 206—220.

Sierpiński, W. [I] *Hypothèse du continu.* Monografje Matematyczne 4. Warszawa-Lwów 1934.

— [1] *Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle.* Fund. Math. 11 (1928), pp. 302—304.

— [2] *Sur une extension de la notion de l'homéomorphie.* Fund. Math. 22 (1934), pp. 270—275.

— [3] *Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle.* Fund. Math. 22 (1934), pp. 276—280.

Sierpiński, W. [4] *Sur les images biunivoques et continues dans un sens.* Fund. Math. 26 (1936), pp. 44—49.

— [5] *Sur une suite universelle d'ensembles dénombrables.* Fund. Math. 26 (1936), pp. 327—333.

Szpilrajn, E. [1] *Sur une hypothèse de M. Borel.* Fund. Math. 15 (1930), pp. 126—127.

— [2] *Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur la propriété de Baire.* Fund. Math. 22 (1934), pp. 303—311.

— [3] *Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles.* Fund. Math. 24 (1935), pp. 17—34.

Whitehead, A. N. and Russell, B. [I] *Principia Mathematica*, vol. II. Cambridge 1927.

Sur une suite universelle d'ensembles dénombrables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, qui donne une solution à un problème posé récemment par M. E. Szpilrajn [1]):

Théorème I: *Il existe une suite infinie d'ensembles*

(1) $$X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots$$

formés de nombres naturels, telle que

(2) $$Y_1,\ Y_2,\ Y_3, \ldots$$

étant une suite infinie donnée quelconque d'ensembles dont la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ *est dénombrable, il existe une suite infinie croissante de nombres naturels* $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ *et une transformation biunivoque* f *de l'ensemble* N *de tous les nombres naturels en l'ensemble* S, $f(N)=S$, *telle que*

(3) $$f(X_{k_m}) = Y_m \quad \textit{pour} \quad m=1, 2, 3, \ldots$$

Nous déduirons le théorème I du théorème II que voici:

Théorème II: *Il existe une suite double*

$$\{a_n^m\} \ (m=1, 2, 3, \ldots;\ n=1, 2, 3, \ldots)$$

formée des nombres 0 *et* 1, *telle que*

$$\{u_n^m\} \ (m=1, 2, 3, \ldots;\ n=1, 2, 3, \ldots)$$

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. 26, p. 313 [1]).