the corners of each J_k belonging to $\widetilde{B}$. Further, as it is easily seen, the area $\overline{R-\sum_k J_k}$ may be subdivided into a finite number of not overlapping rectangles each of which contains one at least of the corners of the squares [4]) J_k. Hence, each of them contains points of $\widetilde{B}$, and, consequently, of B. Since $d(R)<\sigma$, it results from (3.1) that the function $F(I)$ is positive for each of these rectangles, and so, by (3.6) and (3.7)

$$\lambda\cdot|R| > F(R) > \sum_k F(J_k) \geqslant \mu\cdot(1-2\alpha)\,(1-\alpha)\cdot|R| \geqslant \mu\,(1-3\alpha)\cdot|R|.$$

This, however, is contradictory to (3.3) and concludes the proof.

[4]) This is directly obvious for the plane, but is not true for the space as seen from a simple example kindly communicated to the author by Mr. O. Nikodym. The problem whether the theorem itself holds for the space seems to be open, and the same remark applies to the results of Besicovitch, l. c.[2]).

Ensembles dont les dimensions modulaires de Alexandroff coïncident avec la dimension de Menger-Urysohn [1]).

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Dans la théorie homologique de la dimension, due à M. P. Alexandroff [2]), on est conduit d'une manière naturelle à considérer une infinité d'invariants topologiques qui méritent — au moins du point de vue d'homologie — d'être appelés „dimensions" (modulaires). Toutes ces „dimensions", différentes pour les ensembles compacts arbitraires, se montrent identique avec la dimension au sens de Menger-Urysohn pour les ensembles dont la structure topologique est peu compliquée (en particulier pour tous les polyèdres). Dans le domaine de ces derniers ensembles, la théorie de la dimension prend une forme particulièrement simple, naturelle et intuitive. Ainsi p. ex. se trouve réalisée pour ces ensembles *„l'hypothèse du produit"* qui est en défaut — d'après M. L. Pontrjagin [3])— dans le domaine des ensembles compacts arbitraires.

Le but de cette Note est de définir par des notions de la topologie générale une classe d'ensembles (comprenant en particulier tous les polyèdres) pour lesquels toutes les dimensions modulaires coïncident avec la dimension au sens de Menger-Urysohn.

[1]) Les résultats principaux de cet ouvrage ont été signalés (sans démonstrations rigoureuses) dans les C. R. 201 (1935), p. 1086—7, séance du 2 décembre et C. R. 202 (1936), p. 187—189, séance du 20 janvier.

[2]) Cf. P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 161—238.

[3]) L. Pontrjagin, C. R. 190 (1930), p. 1105—7, séance du 12 mai.

§ 1. La propriété (Δ) et ses conséquences élémentaires.

1. ***Définition.*** *L'espace M jouit au point $p \in M$ de la propriété* (Δ), lorsque tout entourage[4] U de p contient un entourage U_0 de p tel que chaque ensemble compact $A \subset U_0$ se laisse contracter[5] dans un sous-ensemble de U de dimension $\leqslant \dim A + 1$. *L'espace M jouit de la propriété* (Δ), lorsqu'il en jouit en chaque point[6].

Tout espace localement compact et jouissant de la propriété (Δ) est, bien entendu, localement contractile[7], mais non réciproquement. Ainsi p. ex. l'ensemble $\mathfrak{A}(2, 3)$, que je viens de construire récemment[8], est localement contractile, sans qu'il jouisse de la propriété (Δ). Il existe notamment une courbe simple fermée Ω qui se laisse contracter dans $\mathfrak{A}(2, 3)$, sans se laisser contracter dans aucun sous-

[4]) Par *entourage* du point p dans M, j'entends dans cette Note tout ensemble $U \subset M$ dont p est un point intérieur, c. à d. tel que $p \in U - \overline{M - U}$.

[5]) *L'ensemble A se laisse contracter dans un ensemble B*, lorsqu'il existe une fonction continue $f(x, t)$ transformant le produit cartésien $A \times \langle 0,1 \rangle$ en un sous-ensemble de B et telle que $f(x, 0) = x$ et $f(x, 1) = \text{const.}$ pour tout $x \in A$.

[6]) En remplaçant dans cette définition les mots „ensemble compact $A \subset U_0$" par „ensemble compact $A \subset U_0$ de la dimension $\leqslant n$", on parvient à une suite de propriétés $\{\Delta_n\}$, dont le produit logique équivaut, pour les espaces de dimension finie, à la propriété (Δ). On peut démontrer sans peine que pour un espace compact E de dimension finie, la propriété (Δ) (intégrale) se laisse aussi remplacer par le produit logique de toutes les conditions (Γ_n) ($n = 0, 1, \ldots$) définies comme il suit:

Condition (Γ_n). A chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que chaque fonction continue transformant la surface S_n de la sphère Q_{n+1} à $n+1$ dimensions en un sous-ensemble de E de dimension $\leqslant n$ et de diamètre $< \eta$ peut être étendue sur Q_{n+1} de sorte que ses valeurs forment un sous-ensemble de E de dimension $\leqslant n+1$ et de diamètre $< \varepsilon$.

La condition (Γ_n) se rattache à la notion de connexité locale en dimension n de MM. Alexander et Lefschetz, tandisque la propriété (Δ_n) à celle de la contractilité locale. Il est enfin à remarquer que les propriétés (Γ_n), dont la définition est basée sur la notion de surface sphérique S_n et de sphère Q_{n+1}, dépassent le domaine des notions purement topologiques. Pour ces raisons méthodologiques nous avons basé nos considérations sur la notion purement topologique de propriété (Δ).

[7]) L'espace M est *localement contractile au point $p \in M$*, lorsque tout entourage U de p contient un entourage U_0 de p qui se laisse contracter dans U. L'espace E est dit *localement contractile* tout court, lorsqu'il l'est en chacun de ses points.

[8]) Fund. Math. 24 (1935), p. 256.

ensemble de $\mathfrak{A}(2, 3)$ de dimension $\leqslant 2$ —singularité qui (d'après le corollaire du Nr. **5** de cette Note) est impossible pour un espace jouissant de la propriété (Δ).

En s'appuyant sur le fait bien connu que, dans un espace compact localement connexe E, chaque ensemble fermé, ponctiforme[9] et de diamètre suffisamment petit est contenu dans une dendrite[10] $D \subset E$ de diamètre arbitrairement petit, on conclut sans peine que pour les espaces compacts de dimension < 3 la propriété (Δ) équivaut à la contractilité locale. On prouve en outre que (Δ) coïncide aussi avec la contractilité locale pour tous les sous-ensembles compacts de l'espace euclidien 3-dimensionnel R_3, ou — plus généralement encore — pour tous les sous-ensembles compacts d'un polyèdre quelconque de dimension 3.

2. ***Lemme.*** *M étant un espace compact à propriété* (Δ), *il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$ tel que chaque ensemble compact $A \subset M$ de diamètre $< \eta$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de M de dimension $\leqq \dim A + 1$ et de diamètre $< \varepsilon$.*

Admettons que M contient plus d'un point. On peut alors faire correspondre à chaque $p \in M$ un entourage ouvert $U_p \neq M$ tel que chaque ensemble compact $A \subset U_p$ se laisse contracter dans un ensemble de dimension $\leqq \dim A + 1$ contenu dans le $\frac{\varepsilon}{2}$-entourage[11]) de p. La fonction

$$\lambda(x) = \sup_{p \in M} |x, M - U_p|$$

est alors continue et positive dans M. On voit aisément que sa borne inférieure η remplit la thèse du lemme.

3. ***Lemme.*** *A étant un espace compact et M un espace compact jouissant de la propriété* (Δ), *les fonctions continues transformant A en sous-ensembles de dimension $\leqq \dim A$ constituent un ensemble dense dans l'espace M^A (espace des transformations continues de A en sous-ensembles de M).*

[9]) c. à d. ensemble dont tout sous-continu ne contient qu'un seul point.

[10]) c. à d. image continu de l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ ne contenant aucune courbe simple fermée. Chaque dendrite se laisse contracter dans elle-même. Cf. Fund. Math. 18 (1932), p. 211.

[11]) J'entends par *ε-entourage* du sous-ensemble A de l'espace M l'ensemble de tous les $x \in M$ dont la distance $|x - A|$ de A est $\leqslant \varepsilon$.

Démonstration. On peut admettre que la dimension de A est finie et que A est situé [12]) dans un espace euclidien R. M étant localement contractile et par conséquent aussi localement connexe en toutes les dimensions, on peut faire correspondre à chaque fonction $\varphi \epsilon M^A$ un entourage U de A (dans R) et une extension $\varphi^* \epsilon M^U$ de φ sur U [13]). D'après le théorème bien connu de P. Alexandroff [14]), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction continue $\alpha(x)$ transformant A en un polyèdre de dimension $\leqslant \dim A$, situé dans R et satisfaisant à l'inégalité $|x-\alpha(x)|<\varepsilon$ pour tout $x \epsilon A$. Pour un ε suffisamment petit, on a $\alpha(A) \subset U$ et la fonction $\varphi^*\alpha(x)$ diffère de $\varphi(x)$ aussi peu que l'on veut. Ainsi, on peut supposer dans la suite que A est un polyèdre.

Le lemme étant évidemment vrai pour $\dim A = 0$, supposons qu'il soit vrai pour $\dim A < n$. Soit maintenant $\dim A = n$ et $f \epsilon M^A$. Pour un $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition simpliciale $\varLambda$ de A si fine que f transforme chacun de ses simplexes en un ensemble dont le diamètre est $<\frac{1}{4}\eta$, où η désigne un nombre satisfaisant à la thèse du lemme du N⁰ **2**. Soit A^* le polyèdre qu'on obtient de A en enlevant les points intérieurs de tous les simplexes n-dimensionnels de la décomposition $\varLambda$. Le lemme étant vrai pour les polyèdres de dimension $<n$, il existe une fonction $f_0 \epsilon M^{A^*}$ qui diffère de f (dans A^*) de $<\frac{1}{4}\eta$ et qui satisfait à la condition $\dim f_0(A^*) \leqslant n-1$. Par conséquent, f_0 transforme la frontière (géométrique) de chacun des simplexes de $\varLambda$ en un ensemble dont la dimension est $\leqslant n-1$ et dont le diamètre est $<\eta$. Cet ensemble se laisse donc contracter dans un sous-ensemble de M ayant la dimension $\leqslant n$ et le diamètre $<\varepsilon$. Cela veut dire que la fonction f_0 se laisse prolonger sur les intérieurs des simplexes n-dimensionnels de $\varLambda$ de manière que les dimensions des images de ces simplexes soient $\leqslant n$ et que leurs diamètres soient $<\varepsilon$. Il en résulte que, pour un ε suffisamment petit, la fonction f_0 ainsi prolongée sur l'ensemble A diffère aussi peu que l'on veut de la fonction f, c. q. f. d.

---

[12]) en s'appuyant sur le „*Einbettungssatz*" de Menger et Nöbeling. Voir p. ex. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie* I, Berlin, Springer 1935, p. 369.

[13]) Cf. C. Kuratowski, Fund. Math. 24 (1935), p. 273.

[14]) C. R. 183 (1926), p. 640.

4. Lemme. Prémisses: *1) A et B sont deux sous-ensembles compacts et disjoints d'un espace E; 2) f_0 est une fonction continue transformant A en un sous-ensemble d'un espace compact M de dimension finie et qui jouit de la propriété ($\varDelta$); 3) Φ est l'espace fonctionnel de toutes les transformations continues de E en sous-ensembles de M coïncidant avec f_0 dans l'ensemble A.*

Thèse: *Les fonctions $\varphi \epsilon \Phi$ satisfaisant à la condition $\dim \varphi(B) > \dim B$ constituent un ensemble Φ^* qui est un F_σ de I-re catégorie dans Φ.*

Démonstration. On peut évidemment admettre que le nombre $n = \dim B$ est fini. En désignant par Φ_k (pour $k=1,2,\ldots$) l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \epsilon \Phi$ pour lesquelles la $(n+1)$-ème constante d'Urysohn [15]) de $\varphi(B)$ est $<\frac{1}{k}$, on voit que les ensembles Φ_k sont ouverts dans Φ et que $\Phi^* = \Phi - \prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k$. Il ne reste donc qu'à démontrer que $\prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k$ est dense dans l'espace Φ. On peut admettre [12]) que M est un sous-ensemble d'un espace euclidien R. Il existe alors une fonction $r(x)$ rétractant [16]) un certain entourage U de M (entourage dans R) en M.

D'après le lemme du N⁰ **3**. il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $\psi(x)$ qui transforme B en un sous-ensemble de M sans augmenter sa dimension et qui remplit l'inégalité $|\varphi(x)-\psi(x)| < \varepsilon$, quel que soit $x \epsilon B$. En considérant les points de l'espace R comme des vecteurs au point initial 0, on a

$$\psi(x) = \varphi(x) + \alpha(x), \tag{1}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction continue remplissant la condition

$$|\alpha(x)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

---

[15]) nommée aussi „*coefficient d'applatissement de dimension n*". Cf. P. Urysohn, Fund. Math. 8 (1926), p. 353. Pour qu'un ensemble compact F soit de dimension $\geqslant n$, il faut et il suffit que sa n-ième constante d'Urysohn soit positive.

[16]) c. à d. transformant U en l'ensemble M (dit *rétracte de* U) d'une manière continue et satisfaisant à l'égalité $r(x)=x$ pour tout $x \epsilon M$. Chaque sous-ensemble compact et localement contractile (et par conséquent chaque sous-ensemble compact jouissant de la propriété ($\varDelta$)) d'un espace R de dimension finie est un rétracte de certains de ses entourages dans R. Cf. Fund. Math. 19 (1932), p. 240.

pour tout $x \in B$. En posant maintenant $\alpha(x)=0$ pour tout $x \in A$, étendons la fonction $\alpha(x)$ d'une manière continue sur l'espace E tout entier, en conservant la condition (2). La fonction $\psi(x)$ est donc définie par la formule (1) dans l'espace E tout entier. L'inégalité (2) implique que, pour un ε suffisamment petit, la fonction $r\psi(x)$ est aussi définie dans l'espace E tout entier et qu'elle diffère de $\varphi(x)$ aussi peu que l'on veut. La fonction $r\psi(x)$ coïncidant dans A avec $\varphi(x)$ et dans B avec $\psi(x)$, on conclut qu'elle appartient à Φ et qu'elle n'augmente pas la dimension de B. Cela veut dire que $r\psi$ appartient à $\prod_{k=1}^{\infty}\Phi_k$ et par conséquent que $\prod_{k=1}^{\infty}\Phi_k$ est dense dans Φ, c. q. f. d.

5. On déduit de ce lemme et du théorème bien connu de R. Baire sur les ensembles de I-re catégorie dans les espaces complets le

Corollaire. *Soit f une fonction continue transformant un espace E en un sous-ensemble d'un espace M compact, de dimension finie et jouissant de la propriété (Δ); soient $A, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ des sous-ensembles compacts de E. Dans ces hypothèses, il existe pour tout $\varepsilon>0$ une fonction $\varphi \in M^E$ satisfaisant aux conditions: 1^0 $\varphi(x)=f(x)$ pour tout $x \in A$; 2^0 $|\varphi(x)-f(x)|<\varepsilon$ pour tout $x \in E$; 3^0 $\dim\varphi(B_n-A)\leqslant\dim(B_n-A)$ pour tout $n=1,2,\ldots$ (donc aussi $\dim\varphi(\sum_{n=1}^{\infty}B_n-A)\leqslant\dim(\sum_{n=1}^{\infty}B_n-A)$ [17]).*

6. ***Lemme.*** *M étant un espace compact de dimension finie et jouissant de la propriété (Δ), il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\eta>0$ tel que, pour chaque fonction continue f transformant un sous-ensemble fermé A d'un espace compact E en un sous-ensemble de M dont le diamètre est $<\eta$, il existe une fonction continue $\varphi \in M^E$ telle que: 1^0 le diamètre de $\varphi(E)$ est $<\varepsilon$; 2^0 $\dim\varphi(E-A)\leqslant\dim(E-A)$; 3^0 $\varphi(x)=f(x)$ pour tout $x \in A$.*

Démonstration. On peut admettre [12]) que M est un sous-ensemble d'un espace euclidien R. Or, il existe une fonction $r(x)$ rétractant [16]) un certain entourage U de M en M. Soit maintenant $\eta>0$ si petit que, pour chaque $x \in M$, le η-entourage de x_0 (dans R) soit contenu dans U et qu'il soit transformé par $r(x)$ en un ensemble de diamètre $<\varepsilon$.

[17]) D'après le „*Summensatz*" de la théorie de la dimension.

L'ensemble $f(A)$ étant contenu dans un η-entourage (entourage dans R) U_η d'un point quelconque $p_0 \in f(A)$, il existe une extension $f'(x)$ de f sur l'espace E tout entier dont les valeurs appartiennent à U_η. La fonction $rf'(x)$ transforme alors E en un sous-ensemble de M de diamètre $<\varepsilon$. Pour obtenir la thèse de notre lemme, il ne reste donc qu'à appliquer le corollaire du N⁰ **5.**

§ 2. Opérations.

7. ***Théorème.*** *Soit M un espace de dimension finie, décomposé en deux ensembles compacts $M^{(1)}$ et $M^{(-1)}$ dont la partie commune jouit de la propriété (Δ). Dans ces conditions, pour que M jouisse de la propriété (Δ), il faut et il suffit que $M^{(1)}$ et $M^{(-1)}$ jouissent de cette propriété.*

Démonstration. 1^0 Admettons que $M^{(1)}$ et $M^{(-1)}$ jouissent de la propriété (Δ). D'après le lemme du N⁰ **2,** on peut faire correspondre à tout $n=1,2,\ldots$ un nombre positif $\varepsilon_n<\frac{1}{n}$ si petit que tout ensemble compact $B\subset M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$ de diamètre $<\varepsilon_n$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de $M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$ dont le diamètre est $<\frac{1}{n}$ et la dimension est $\leqslant\dim B+1$.

L'espace M jouit, bien entendu, de la propriété (Δ) en tout point $p \in M-M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$. Il ne reste donc qu'à prouver que chaque ensemble fermé $A\subset M$ situé dans le ε_n-entourage d'un point arbitraire $p \in M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$ se laisse contracter dans un sous-ensemble de M de dimension $\leqslant\dim A+1$ et de diamètre tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$. On peut d'ailleurs admettre que $p \in A$. Posons $B=A\cdot M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$. Il existe alors une fonction continue $\psi(x,t)$ transformant le produit cartésien $B\times\langle 0,1\rangle$ en un sous-ensemble de $M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$ de diamètre $<\frac{1}{n}$ et de dimension $\leqslant\dim A+1$, et telle que

$$\psi(x,0)=x,\qquad \psi(x,1)=p \tag{3}$$

pour tout $x \in B$. A l'aide des égalités (3), la fonction ψ est définie (d'une manière continue) non seulement dans $B\times\langle 0,1\rangle$, mais aussi dans l'ensemble $A\times(0)+A\times(1)+B\times<0,1>$ tout entier, qui est un sous-ensemble fermé du produit cartésien $A\times<0,1>$. La dimension de l'ensemble des valeurs de cette fonction est $\leqslant \dim A+1$ et son diamètre est $<\frac{1}{n}+\varepsilon_n<\frac{2}{n}$. Or, en s'appuyant sur le lemme du N° **6**, on peut étendre, pour n suffisamment grand, la fonction ψ sur chacun des ensembles $[A\cdot M^{(i)}]\times<0,1>$ $(i=\pm 1)$ de manière que la dimension de l'ensemble de ses valeurs soit $\leqslant \dim A+1$ et que son diamètre soit aussi petit que l'on veut. L'existence d'une telle fonction ψ prouve que M jouit de la propriété (Δ) au point p.

2° Admettons que M jouit de la propriété (Δ). L'ensemble $M^{(i)}$ jouissant alors de la propriété (Δ) en tout point de $M^{(i)}-M^{(-i)}$, il ne reste qu'à démontrer qu'il jouit aussi de cette propriété en tout point $p\in M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$. Envisageons dans ce but une fonction $r(x)$ rétractant un certain entourage $G^{(i)}$ (entourage dans $M^{(i)}$) de l'ensemble $M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$ en cet ensemble [16]. Or, à tout entourage $U^{(i)}$ (entourage dans $M^{(i)}$) du point p correspond un entourage U (entourage dans M) de ce point tel que $U\cdot M^{(i)}\subset U^{(i)}$ et $r(U)\subset U^{(i)}$. L'espace M jouissant de la propriété (Δ), il existe un entourage U_0 du point p (dans M), tel que tout ensemble compact $A\subset U_0$ se laisse contracter dans un ensemble $B\subset U$ remplissant la condition

$$\dim B\leqslant \dim A+1. \tag{4}$$

Cela veut dire qu'il existe une fonction continue ψ transformant $A\times<0,1>$ en B de façon que $\psi(x,0)=x$ et $\psi(x,1)=\text{const.}$ pour tout $x\in A$.

En s'appuyant maintenant sur le corollaire du N° **5**, on conclut qu'il existe une fonction $r_0(x)$ rétractant U en $M^{(1)}\cdot M^{(-1)}$ de manière que $r_0(B)\subset U^{(i)}$ et que $\dim r_0(B_0-M^{(1)}\cdot M^{(-1)})\leqslant \dim(B_0-M^{(1)}\cdot M^{(-1)})$, et par suite aussi que

$$\dim r_0(B)\leqslant \dim B. \tag{5}$$

En posant maintenant $r_i(x)=x$ pour tout $x\in U\cdot M^{(i)}$ et $r_i(x)=r_0(x)$ pour tout $x\in U\cdot M^{(-i)}$, on obtient une fonction rétractant $U+M^{(i)}$ en $M^{(i)}$ de manière que la fonction $r_i\psi(x)$ présente une contraction de l'ensemble A dans l'ensemble $r_i(B)\subset B\cdot M^{(i)}+r_0(B)\subset U\cdot M^{(i)}+U^{(i)}\subset U^{(i)}$. On a d'ailleurs, d'après (4) et (5): $\dim r_i(B)\leqslant \dim B\leqslant \dim A+1$, c. à d. la propriété (Δ) de l'ensemble $M^{(i)}$ au point p est démontrée.

8. *Théorème.* *Le produit cartésien $M^{(1)}\times M^{(-1)}$ de deux espaces $M^{(1)}$ et $M^{(-1)}$ compacts, de dimension finie et jouissant de la propriété (Δ) jouit de la même propriété.*

D é m o n s t r a t i o n. Admettons [12]) que $M^{(i)}$ est situé dans un hyperplan (n_i-1)-dimensionnel $H^{(i)}$ d'un espace euclidien $R^{(i)}$ à n_i dimensions. Le produit cartésien $M^{(1)}\times M^{(-1)}$ est alors un sous-ensemble de l'hyperplan $H^{(1)}\times H^{(-1)}$ de l'espace euclidien $R=R^{(1)}\times R^{(-1)}$. Envisageons une décomposition simpliciale $\Lambda^{(i)}$ de $R^{(i)}-M^{(i)}$, telle que les diamètres des simplexes de $\Lambda^{(i)}$ tendent vers 0 avec leur distance de $M^{(i)}$ [18]). Il résulte du corollaire du N° **5** qu'il existe une fonction $r_i(x)$ rétractant un certain entourage $U^{(i)}$ de $M^{(i)}$ (entourage dans $R^{(i)}$) en $M^{(i)}$ et satisfaisant à la condition:

$$\dim r_i(\sigma^{(i)})\leqslant \dim \sigma^{(i)} \tag{6}$$

pour tout simplexe géométrique $\sigma^{(i)}$ de $\Lambda^{(i)}$ (à un nombre quelconque de dimensions). Soit maintenant $p_0=(p_0^{(1)},p_0^{(-1)})$ un point arbitraire de $M^{(1)}\times M^{(-1)}$. Pour un $\varepsilon>0$ arbitraire, il existe un $\eta>0$ tel que tous les simplexes (géométriques) $\sigma^{(i)}$ de $\Lambda^{(i)}$ dont la distance de $p_0^{(i)}$ est $<\eta$ sont contenus dans un $\frac{\varepsilon}{2}$-entourage de $p_0^{(i)}$. Soit maintenant A un sous-ensemble compact de $M^{(1)}\times M^{(-1)}$ situé dans un $\frac{\eta}{2}$-entourage de p_0. En prenant un point arbitraire $p_1\in R-H^{(1)}\times H^{(-1)}$ dont la distance de p_0 est $<\frac{\eta}{2}$, posons pour tout $x\in A$ et $0\leqslant t\leqslant 1$:

$\psi(x,t)=$ *point qui divise le segment (orienté)* $\overline{xp_1}$ *dans le rapport* $t:(1-t)$.

Le point p_1 étant situé hors de l'hyperplan $H^{(1)}\times H^{(-1)}$, on a:

$$\psi(A\times<0,1>)\cdot M^{(1)}\times M^{(-1)}=A. \tag{7}$$

Désignons maintenant par T_k l'ensemble-somme de tous les produits de la forme $\sigma^{(1)}\times\sigma^{(-1)}$, $\sigma^{(i)}$ parcourant les simplexes géométriques de $\Lambda^{(i)}$, qui sont contenus dans un ε-entourage (entourage dans R) de p_0 et dont la dimension est $\leqslant k$. Toutes les valeurs de la fonction ψ étant situées dans un η-entourage de p_0, on conclut qu'il existe un $k\leqslant \dim R$ tel que

$$\psi(A\times<0,1>)\subset A+T_k. \tag{8_k}$$

[18]) Voir p. ex. le livre cité de P. Alexandroff et H. Hopf, p. 143.

Démontrons que dans le cas $k > \dim A + 1$ l'existence d'une fonction ψ contractant A en p_1 et remplissant les conditions (7) et (8_k) implique l'existence d'une fonction contractant A en p_1 et remplissant les conditions (7) et (8_{k-1}). Rangeons dans ce but tous les éléments k-dimensionnels de la forme $\sigma^{(1)} \times \sigma^{(-1)}$ de l'ensemble T_k en une suite infinie $\{\sigma_n^{(1)} \times \sigma_n^{(-1)}\}$. L'ensemble $F_n = \psi^{-1}(\sigma_n^{(1)} \times \sigma_n^{(-1)})$ [18a] $\subset A \times \langle 0,1 \rangle$ étant de dimension $\leqslant \dim A + 1 < k$, la fonction ψ se laisse remplacer [19] dans F_n par une transformation continue de F_n en frontière (géométrique) de l'élément $\sigma_n^{(1)} \times \sigma_n^{(-1)}$ coïncidant avec ψ dans la frontière de F_n (frontière ensembliste de F_n rél. $A \times \langle 0,1 \rangle$). Les diamètres des simplexes $\sigma_n^{(i)}$ tendant avec $\dfrac{1}{n}$ vers 0, il est évident que la suite des fonctions que l'on obtient de ψ par les modifications en question, faites tour à tour dans tous les éléments $\sigma_n^{(1)} \times \sigma_n^{(-1)}$, est uniformément convergente vers une fonction contractant A en p_1 dans l'ensemble $A + T_{k-1}$ et remplissant la condition (7). Ceci implique qu'il existe une contraction ψ_0 de A en p_1 dans l'ensemble $A + T_{k_0}$, où $k_0 \leqslant \dim A + 1$.

Posons maintenant $r(x^{(1)}, x^{(-1)}) = (r(x^{(1)}), r(x^{(-1)}))$ pour tout couple $(x^{(1)}, x^{(-1)}) \in U^{(1)} \times U^{(-1)}$. La fonction $r(x)$ est alors une rétraction de $U^{(1)} \times U^{(-1)}$ en $M^{(1)} \times M^{(-1)}$. Il en résulte que la fonction $r\psi_0(x)$ constitue une contraction de A en p_1 dans l'ensemble $A + r(T_{k_0}) \subset M^{(1)} \times M^{(-1)}$. L'ensemble T_{k_0} étant contenu dans ε-entourage de p_0, le diamètre de l'ensemble $A + r(T_{k_0})$ est pour ε suffisamment petit aussi petit que l'on veut. On tire en outre de la définition de $r(x)$:

$$\dim r(\sigma^{(1)} \times \sigma^{(-1)}) = \dim [r_1(\sigma^{(1)}) \times r_{-1}(\sigma^{(-1)})] \leqslant$$
$$\leqslant \dim r_1(\sigma^{(1)}) + \dim r_{-1}(\sigma^{(-1)}) \leqslant \dim \sigma^{(1)} + \dim \sigma^{(-1)} \leqslant \dim A + 1,$$

pour tout élément $\sigma^{(1)} \times \sigma^{(-1)}$ de T_{k_0}. De là résulte [17] l'inégalité $\dim [A + r(T_{k_0})] \leqslant \dim A + 1$, ce qui achève notre démonstration.

9. En s'appuyant sur le fait évident que l'ensemble vide, l'ensemble ne contenant qu'un seul point et le segment $\langle 0,1 \rangle$ jouissent de la propriété (Δ), on tire des théorèmes **7** et **8** le corollaire suivant:

[18a]) E étant un ensemble arbitraire, $\psi^{-1}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $\psi(x) \in E$.

[19]) Voir P. Alexandroff, Math. Ann. 106 (1932), p. 170.

Corollaire. Tous les polyèdres jouissent de la propriété (Δ) [20].

La question suivante reste ouverte:

Les thèses des théorèmes **7** *et* **8** *restent-elles vraies sans l'hypothèse de la dimension finie?*

§ 3. Cycles et homologies dans les espaces jouissant de la propriété (Δ).

10. *Termes et notations* [21]). Un complexe algébrique (aux coefficients arbitraires) Q est dit *ε-complexe* d'un espace compact M, lorsque tous ses sommets appartiennent à M et que la distance maximum entre deux sommets d'un simplexe de Q est $< \varepsilon$. Deux ε-complexes Q_1 et Q_2 de M sont dits *η-homologues dans M* (notation: $Q_1 \underset{\eta}{\sim} Q_2$ dans M), lorsqu'il existe un η-complexe K de M dont la frontière est égale à $Q_1 - Q_2$. Dans le cas ordinaire, où Q_1 et Q_2 sont des ε-complexes aux coefficients entiers, Q_1 et Q_2 sont dits *η-homologues avec division dans M* (notation: $Q_1 \underset{\eta}{\approx} Q_2$ dans M), lorsqu'il existe un η-complexe ordinaire K de M dont la frontière est égale à $a \cdot (Q_1 - Q_2)$, où a désigne un nombre entier $\neq 0$. Nous employons aussi le symbole „$\underset{\eta}{\approx}$“ dans le cas modulaire, en le considérant alors comme équivalant au symbole „$\underset{\eta}{\sim}$“.

Une suite $\Gamma^n = \{\gamma_i^n\}$, où γ_i^n est un ε_i-cycle de M à n dimensions avec $\lim\limits_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$, s'appelle *vrai cycle à n dimensions de M* et notamment: 1° *vrai cycle ordinaire*, lorsque tous les γ_i^n sont des cycles ordinaires; 2° *vrai cycle* mod m, lorsque tous les γ_i^n

[20]) Une autre démonstration de cette proposition se trouve (esquissée) dans ma note de C. R. 201 (1935), p. 1086.

[21]) J'adopte ici la terminologie et les notations de la Note française de P. Alexandroff „*Sur la notion de dimension des ensembles fermés*“, Journ. de Math. P. et Appl. 11 (1932), p. 283—298. Cette terminologie diffère en général de la terminologie employée par le même auteur dans son Mémoire allemand „*Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen*“, Math. Ann. 106 (1932), p. 161—238. Ainsi p. ex. le terme „*homologue à zéro*“ (notation: ~ 0) de cette Note correspond au terme „*berandet*“ (notation: $\simeq 0$) de la „*Dimensionstheorie*“ et le terme „*homologue avec division à zéro*“ (notation: ≈ 0) — au terme „*homolog Null*“ (notation: ~ 0). Il faut en outre distinguer la notion de „*vrai cycle essentiel*“, resp. „*convergent*“ de cette Note de celle de „*wesentlicher*“, resp. „*konvergenter Zyklus*“ du Mémoire allemand précité.

sont des cycles mod m; 3⁰ *vrai cycle d'après le module variable*, lorsque γ_i^n est un cycle mod m_i, m_i dépendant en général de i.

$\{\gamma_i^n\}$ est ~ 0 dans M (resp. ≈ 0 dans M), lorsqu'il existe une suite $\{\varepsilon_i\}$ de nombres positifs, convergente vers 0 et telle que $\gamma_i \underset{\varepsilon_i}{\sim} 0$ dans M (resp. $\gamma_i \underset{\varepsilon_i}{\approx}$ dans M).

$\{\gamma_i^n\}$ est dit *essentiel*, lorsqu'il existe un ensemble compact $M_0 \subset M$ tel que: 1⁰ $\{\gamma_i^n\}$ est un vrai cycle de M_0; 2⁰ $\{\gamma_i^n\}$ n'est pas ≈ 0 dans M_0.

$\{\gamma_i^n\}$ s'appelle *convergent dans* M, lorsque $\{\gamma_{i+1}^n - \gamma_i^n\} \approx 0$ dans M.

Un nombre entier $d \neq 0$ s'appelle *diviseur* (dans M) de $\{\gamma_i^n\}$, lorsqu'il existe un vrai cycle $\{\gamma_i'^n\}$ de M pour lequel $\{\gamma_i^n\} \approx \{d \cdot \gamma_i'^n\}$ dans M. On constate sans peine que dans le cas où $\{\gamma_i^n\}$ est un vrai cycle ordinaire convergent dans M le vrai cycle ordinaire $\{\gamma_i'^n\}$ est aussi convergent dans M. $\{\gamma_i^n\}$ est dit *premier dans* M, lorsqu'il n'admet aucun diviseur sauf ± 1.

11. ***Lemme.*** *Chaque vrai cycle ordinaire $\{\gamma_i^n\}$ convergent et non homologue à zéro dans un espace compact M possède un nombre fini de diviseurs.*

Admettons que M est un sous-ensemble du cube fondamental Q_ω[22]) de l'espace de Hilbert. Posons $r_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots)$ pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \in Q_\omega$. L'ensemble $r_k(M)$ constitue alors un sous-ensemble fermé du polyèdre k-dimensionnel $Q_k = r_k(Q_\omega)$. Faisons correspondre à chaque $k = 1, 2, \ldots$ un polyèdre P_k constituant un entourage de $r_k(M)$ (dans Q_k) et contenu dans un $\frac{1}{k}$-entourage de $r_k(M)$. Les ensembles $A_k = \underset{p \in Q_\omega}{\mathrm{E}}[r_k(p) \in P_k]$ constituent alors une suite d'entourages de M dans l'espace Q_ω, telle que

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k = M \tag{9}$$

et que chaque vrai cycle de A_n est homologue dans A_k à un vrai cycle du polyèdre P_k. En particulier, le vrai cycle ordinaire $\{\gamma_i^n\}$ convergent dans M est pour tout $k = 1, 2, \ldots$ homologue dans A_k à un certain vrai cycle $\{{}_k\gamma_i^n\}$ convergent dans P_k. Il en résulte aussi

[22]) Q_ω désigne le sous-ensemble compact de l'espace de Hilbert composé de points $\{x_i\}$ où $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ D'après le théorème bien connu d'Urysohn chaque espace séparable est topologiquement contenu dans Q_ω.

que chaque diviseur de $\{\gamma_i^n\}$ (dans M) est un diviseur de $\{{}_k\gamma_i^n\}$ (dans P_k). L'existence d'un nombre infini de diviseurs de $\{\gamma_i^n\}$ dans M entraîne donc l'existence d'un nombre infini de diviseurs de $\{{}_k\gamma_i^n\}$ dans le polyèdre P_k et en conséquence la relation $\{{}_k\gamma_i^n\} \approx 0$ dans P_k. Le vrai cycle $\{{}_k\gamma_i^n\}$ étant homologue à $\{\gamma_i^n\}$ dans A_k, il en résulte que $\{\gamma_i^n\} \approx 0$ dans A_k pour tout $k = 1, 2, \ldots$, ce qui entraîne — d'après (9) — la relation $\{\gamma_i^n\} \approx 0$ dans M[23]). La démonstration du lemme est ainsi terminée.

12. ***Lemme.*** *L'existence d'un vrai cycle ordinaire à n-dimensions $\{\gamma_i^n\}$ convergent et non ≈ 0 dans un espace compact M entraîne l'existence — pour tout $m = 2, 3, \ldots$ — d'un vrai cycle* mod m *à n dimensions qui est non ~ 0 dans M.*

Démonstration. En vertu du lemme précédent, on peut admettre que $\{\gamma_i^n\}$ est premier dans M. Nous allons prouver que le même vrai cycle $\{\gamma_i^n\}$ considéré comme vrai cycle mod m [24]) est non homologue à zéro dans M. Il existerait notamment, dans le cas contraire, une suite $\{Q_i\}$ où Q_i est un ε_i-complexe ordinaire de M avec $\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$, telle que pour tout $i = 1, 2, \ldots$ la frontière $\dot{Q}_i$ de Q_i serait égale à $\gamma_i^n + m \cdot \gamma_i'$ où γ_i' est un ε_i-cycle ordinaire de M. Ceci entraîne $\{\gamma_i^n\} \sim \{m \cdot \gamma_i'\}$ dans M, ce qui veut dire que m est un diviseur de $\{\gamma_i^n\}$ dans M, contrairement à l'hypothèse que $\{\gamma_i^n\}$ est premier dans M.

13. Il résulte en particulier de la démonstration du dernier lemme que l'existence d'un vrai cycle ordinaire à n dimensions, convergent, essentiel et homologue à zéro dans M entraîne l'existence, pour tout $m = 2, 3, \ldots$, d'un vrai cycle mod m à n dimensions, essentiel et homologue à zéro dans M. En tenant compte du fait qu'il existe [25]) un vrai cycle ordinaire à n dimensions convergent, essentiel et homologue à zéro dans chaque espace compact localement contractile dont la dimension mod 0 est $n+1$, on conclut [26]) que *pour les espaces compacts localement contractiles la dimension* mod 0 (c. à d. la dimension sans torsion) *est la plus petite parmi toutes les dimensions modulaires.*

[23]) Cf. ma note de Wiadomości Matematyczne 38 (1934), p. 16 (en polonais).

[24]) c. à d. le vrai cycle qu'on obtient de $\{\gamma_i^n\}$ en réduisant tous ses coefficients d'après le module m, ou — ce qui revient au même — en considérant ces coefficients comme identiques avec les classes-résidus („Restklassen") mod m correspondantes.

[25]) Voir la démonstration du N⁰ **15** de cet ouvrage et le renvoi [29]).

[26]) Cette remarque est due à M. S. Eilenberg.

14. *Lemme.* *$\{\gamma_i^n\}$ étant un vrai cycle ordinaire à n dimensions d'un espace n-dimensionnel et compact M, la relation $\{\gamma_i^n\}\approx 0$ dans M entraîne la relation $\{\gamma_i^n\}\sim 0$ dans M.*

Démonstration. Admettons [12]) que M est un sous-ensemble d'une space euclidien R et supposons que $\{\gamma_i^n\}$ ne soit pas homologue à zéro dans M. Soit $\{U_k\}$ une suite d'entourages fermés de M (entourages dans M) telle que $\prod_{k=1}^{\infty} U_k = M$. Or, pour un certain k_0, le vrai cycle $\{\gamma_i^n\}$ n'est pas homologue à zéro dans U_{k_0} [23]). Soit $\alpha(x)$ une fonction continue transformant M en un polyèdre n-dimensionnel P de manière que tous les segments $\overline{x\,\alpha(x)}$ où $x\in M$ soient contenus dans U_{k_0}. Il en résulte que la transformation $\alpha(x)$ peut être considérée comme un résultat d'une déformation continue de M dans U_{k_0}, ce qui entraîne que $\alpha(x)$ transforme $\{\gamma_i^n\}$ en un vrai cycle ordinaire à n dimensions $\{{}_\alpha\gamma_i^n\}$, homologue à $\{\gamma_i^n\}$ dans U_{k_0} et par conséquent non homologue à zéro dans P. L'absence de la torsion n-dimensionnelle pour le polyèdre n-dimensionnel P implique alors que le vrai cycle $\{{}_\alpha\gamma_i^n\}$ n'est pas ≈ 0 dans P, d'où il résulte que $\{\gamma_i^n\}$ n'est pas ≈ 0 dans M.

15. *Théorème.* *Pour chaque espace M de dimension finie, compact et jouissant de la propriété (Δ), toutes les dimensions modulaires coïncident avec la dimension au sens de Menger-Urysohn.*

Démonstration. Posons $n=\dim M$ et admettons [12]) que M est situé dans un espace euclidien R. L'ensemble M étant localement contractile, il existe une fonction $r(x)$ rétractant un certain entourage ouvert U de M en M [16]). D'après le théorème fondamental de la théorie de la dimension de P. Alexandroff [27]), il existe dans M un vrai cycle d'après le module variable $\{\gamma_i^{n-1}\}$ de dimension $n-1$, essentiel et homologue à zéro dans M. Autrement dit: il existe une suite $\{Q_i\}$, où Q_i est un ε_i-complexe mod m_i de M avec $\lim_{i=\infty}\varepsilon_i=0$, telle que pour tout $i=1,2,\ldots$ la frontière $\dot{Q}_i$ de Q_i est égale à γ_i^{n-1}. Il existe en outre un sous-ensemble compact M_0 de M tel que $\{\gamma_i^{n-1}\}$ est un vrai cycle de M_0 et un entourage fermé $U_0\subset U$ de M_0 (entourage dans R) dans lequel $\{\gamma_i^{n-1}\}$ n'est pas homologue à zéro.

[27]) Voir P. Alexandroff, Math. Ann. 106 (1932), p. 195.

Soit T l'ensemble dénombrable de tous les sommets des complexes de la suite $\{Q_i\}$. Les points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ appartenant à T, désignons par $C(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ le plus petit parmi les ensembles convexes contenant tous ces points. L'ensemble $C(p_1,p_2,\ldots,p_k)\cdot U - M$ étant un F_σ, il existe d'après le corollaire du N° **5** une fonction $r_0(x)$ rétractant U en M de manière que $\dim r_0[C(p_1,p_2,\ldots,p_k)\cdot U - M] \leqslant \dim[C(p_1,p_2,\ldots,p_k)\cdot U - M]$ pour tout système fini $(p_1,p_2,\ldots,p_k)\subset T$.

Désignons maintenant par $\Lambda_i=\{{}_jQ_i\}$ la suite des décompositions barycentriques [28]) de Q_i et par $\Gamma_i=\{{}_j\gamma_i\}$ la suite des décompositions barycentriques de γ_i. Il existe alors des indices i arbitrairement grands tels que:

1° ${}_jQ_i$ (pour tout $j=1,2,\ldots$) sont des complexes de U et leurs frontières ${}_j\dot{Q}_i={}_j\gamma_i^{n-1}$ constituent le vrai cycle Γ_i de U_0 qui n'est pas homologue à zéro dans U_0.

2° La fonction $r_0(x)$ transforme la suite Λ_i en une suite $\{{}_jQ_{ir_0}\}$ de complexes de M dont les frontières constituent un vrai cycle $\Gamma_{ir_0}=\{{}_j\gamma_{ir_0}\}$ homologue à Γ_i dans U_0.

On conclut de 1° et 2° que Γ_{ir_0} est un vrai cycle de M *essentiel* et homologue à zéro dans M [29]).

Etant donné un nombre positif arbitraire ε, envisageons un index i si grand que le diamètre maximum de tous les simplexes σ_k

[28]) Soit $Q=\sum_{k=1}^{p} a_k\cdot\sigma_k$ un complexe algébrique arbitraire d'un espace euclidien R et $\sigma=(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ un de ses simplexes orientés. On fait correspondre à toute permutation $i_0,i_1,\ldots,i_m$ des nombres $0,1,\ldots,m$ le simplexe $\pm(b_{i_0}, b_{i_0i_1},\ldots,b_{i_0i_1\ldots i_m})$, où $b_{i_0i_1\ldots i_j}$ désigne le centre de gravité des points $a_{i_0}, a_{i_1},\ldots,a_{i_j}$, le signe $+$ correspondant aux permutations $i_0,i_1,\ldots,i_m$ paires et le signe $-$ aux permutations impaires. Le complexe ${}_1\sigma=\sum\pm(b_{i_0}, b_{i_0i_1},\ldots,b_{i_0i_1\ldots i_m})$, où la sommation est étendue sur toutes les permutations $i_0,i_1,\ldots,i_m$ des nombres $0,1,\ldots,m$, est dit la *première décomposition barycentrique* de σ. Le complexe ${}_1Q=\sum_{l=1}^{p} a_l\cdot{}_1\sigma_l$ est dit la *première décomposition barycentrique de Q*. Par la décomposition barycentrique j fois iterée on parvient à la *j-ième décomposition barycentrique* ${}_jQ$ de Q. On sait que 1° la frontière de ${}_jQ$ coïncide avec la j-ième décomposition barycentrique de la frontière $\dot{Q}$ de Q; 2° le diamètre maximum des simplexes de ${}_jQ$ tend avec $\frac{1}{j}$ vers 0; 3° si C est un ε-cycle de R, chacune de ses décompositions barycentriques ${}_jC$ est ε-homologue avec C dans l'ensemble des sommets de ${}_jC$.

[29]) Γ_{ir_0} est d'ailleurs, comme une image du vrai cycle convergent dans U_0, un vrai cycle convergent dans M. Dans la construction de ce vrai cycle, nous n'avons utilisé que l'existence de la suite $\{Q_i\}$ et de la fonction $r(x)$ rétractant un entourage U de M en M (en laissant les conséquences plus spéciales de la

du complexe $Q_l = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \sigma_k$ soit $< \varepsilon$ et que les conditions 1⁰ et 2⁰ soient remplies. Il en résulte que

$$\Gamma_{l,r_0} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \{{}_j\dot{\sigma}_{kr_0}\}. \tag{10}$$

Or, chacune des suites $\{{}_j\dot{\sigma}_{kr_0}\}$ $(k=1, 2, \dots)$ est un vrai cycle d'un ensemble compact A_k en lequel $r_0(x)$ transforme le polytope-somme de toutes les réalisations géométriques des faces $(n-1)$-dimensionnelles du simplexe σ_k. Il résulte, en outre, de la définition de la fonction $r_0(x)$ que les ensembles A_k, et par conséquent aussi l'ensemble $A_1+A_2+\dots+A_p$, sont de dimension $<n$. Si l'on suppose maintenant qu'on ait $\{{}_j\dot{\sigma}_{kr_0}\} \approx 0$ dans A_k pour tout $k=1, 2, \dots, p$, on aurait, d'après le lemme du N⁰ **14**, l'homologie $\{{}_j\dot{\sigma}_{kr_0}\} \sim 0$ dans A_k, ce qui entraîne, selon (10) l'homologie $\Gamma_{l,r_0} \sim 0$ dans $A_1+A_2+\dots+A_p$. Mais cela implique une contradiction, car le vrai cycle $(n-1)$-dimensionnel Γ_{l,r_0} est, d'après 1⁰ et 2⁰, essentiel et la dimension de $A_1+A_2+\dots+A_p$ est $<n$. Nous avons ainsi démontré qu'il existe un index k pour lequel le vrai cycle $\{{}_j\dot{\sigma}_{kr_0}\}$ n'est pas homologue à zéro dans A_k. Ce vrai cycle étant — comme une image de la suite des décompositions barycentriques de $\dot{\sigma}_k$ — ordinaire et convergent[30]), et le diamètre de A_k tendant avec ε vers 0, on parvient à la proposition suivante:

(11) *M étant un espace compact n-dimensionnel et jouissant de la propriété (Δ), il existe dans M des vrais cycles $(n-1)$-dimensionnels ordinaires, convergents, essentiels et de diamètre arbitrairement petit*[31]).

L'espace M étant localement contractile, tout vrai cycle de M dont le diamètre est suffisamment petit est évidemment homologue à zéro dans M. La proposition (11) entraîne donc que la dimension mod 0 de M est $\geqslant n$ et par conséquent[32]) égale à dim M.

---

propriété (Δ) en dehors de nos considérations), c. à d. seulement la contractilité locale de l'ensemble compact M. Or, dans le cas où Q_l est un complexe algébrique à module m, Γ_{lr_0} est un vrai cycle mod m. Il en résulte que dans les espaces localement contractiles (de dimension finie) dont la dimension mod 0 est égale à n, il existe de vrais cycles ordinaires de dimension $(n-1)$, essentiels, convergents et homologues à zéro. Cf. Math. Ann. 109 (1934), p. 376—380.

[30]) $\{\dot{\sigma}_{jkr_0}\}$ est même une „Fundamentalfolge" au sens de M. L. Vietoris, Math. Ann. 97 (1927), p. 454—472.

[31]) c. à d. de vrai cycles des sous-ensembles de M dont les diamètres sont arbitrairement petits.

[32]) toute dimension modulaire étant au plus égale à la dimension au sens de Menger-Urysohn. Cf. P. Alexandroff, l. c., p. 195.

Reste à prouver que toutes les autres dimensions modulaires de M sont $\geqslant n$. D'après (11), il existe dans M un ensemble compact A de diamètre arbitrairement petit et un vrai cycle $(n-1)$-dimensionnel, ordinaire et convergent dans A qui n'est pas homologue avec division à zéro dans A. Ceci implique, d'après le lemme du N⁰ **12**, l'existence d'un vrai cycle $(n-1)$-dimensionnel mod m (pour tout $m=2, 3, \dots$) de A qui n'est pas homologue à zéro dans A. En supposant que le diamètre de A est suffisamment petit, ce dernier vrai cycle est homologue à zéro dans M, de sorte que la dimension mod m de M est $\geqslant n$. Le théorème est ainsi établi.

16. Corollaire. *La dimension du produit cartésien d'un nombre fini (où d'une infinté dénombrable) d'espaces compacts jouissant de la propriété (Δ) est égale à la somme des dimensions de ces espaces.*

Pour parvenir à ce corollaire, on n'a qu'à s'appuyer sur le théorème[33]), d'après lequel la dimension mod 0 du produit cartésien d'espaces compacts est égale à la somme des dimensions mod 0 de ces espaces, et appliquer les théorèmes **8**[34]) et **15** de cette Note.

Remarquons enfin que, d'après le théorème du N⁰ **8**, la famille des espaces décomposables en un nombre fini d'ensembles compacts de dimension finie et jouissant de la propriété (Δ) est close par rapport aux opérations (finies) d'addition et du produit cartésien. Il résulte en outre du dernier corollaire que, pour ces espaces, la dimension du produit cartésien est égale à la somme des dimensions des facteurs. La classe considérée est par conséquent un *„anneau dimensionnel"* au sens de MM. P. Alexandroff et A. Kolmogoroff[35]).

---

[33]) Cf. L. Pontrjagin, C. R. 190 (1930), p. 1105—7, séance du 12 mai, où ce théorème est donné sans démonstration détailleé. Voir aussi P. Alexandroff, l. c., p. 165 et 235.

[34]) On parvient aussi au corollaire **16**, sans s'appuyer sur le théorème **8**, comme il suit: Soient $M_1, M_2, \dots, M_n$ les espaces compacts tels que pour tout $i=1, 2, \dots, n$ la dimension mod 0 (c. à d. la dimension sans torsion) $\Delta_0(M_i)$ de M_i est égale à dim M_i. En vertu du résultat cité de L. Pontrjagin et du théorème élémentaire, d'après lequel la dimension du produit cartésien ne dépasse pas la somme des dimensions des facteurs, on a:

$$\dim(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n) \leqslant \dim M_1 + \dim M_2 + \dots + \dim M_n =$$
$$= \Delta_0(M_1) + \Delta_0(M_2) + \dots + \Delta_0(M_n) = \Delta_0(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n) \leqslant \dim(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n),$$

d'où $\dim(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n) = \dim M_1 + \dim M_2 + \dots + \dim M_n$.

[35]) Cf. P. Alexandroff, l. c. p. 236.