Quant aux ensembles mesurables (B) des autres classes, nous savons que *chaque ensemble plan mesurable* (B) *peut être uniformisé par un complémentaire analytique, et qu'il existe des* G_δ *plans, même parmi les images de fonctions* $y=f(x)$ *de I-e classe de Baire de variable réelle, qui ne peuvent être uniformisés relativement à l'axe* $0Y$ *par aucun ensemble analytique* [7]).

[7]) Cf. W. Sierpiński, *Sur l'uniformisation des ensembles mesurables* (B), Fund. Math. XVI, p. 136—40 et N. Lusin, *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica, vol. IV (Cluj 1930), p. 60, *Sur les points d'unicité d'un ensemble mesurable* (B), C. R. Acad. Sc., vol. 189, p. 423 et *Sur les ensembles analytiques*, Fund. Math. X, p. 65.

Über stetige Abbildungen eines Elementes.

Von

Julia Różańska (Moskau).

Unter den stetigen Abbildungen eines kompakten metrischen Raumes auf ein Element spielen die sog. *wesentlichen* Abbildungen eine sehr wichtige Rolle, da sie mit der Dimension und anderen Homologie-Begriffen eng verbunden sind. Die Fragen der Homotopie sind dagegen mit den stetigen Bildern eines Elementes verknüpft.

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Theorie der Homologie- und Homotopie-Membranen und der dazugehörigen stetigen Abbildungen.

Das Hauptresultat besteht in dem Homöomorphie-Satze (§ 3), der besagt, dass eine *irreduzible nulldimensionale auf dem Rande eineindeutige Abbildung eines Elementes auf eine unverzweigte Homotopie-Membran ein Homöomorphismus ist.*

Man versteht dabei unter einer *unverzweigten Homotopie-Membran* ein stetiges, auf dem Rande eineindeutiges Bild eines Elementes derart, dass jeder nicht auf dem Rande liegender Punkt dieses Bildes durch eine *sphäroidale*[1]) Menge für jedes $\varepsilon>0$ ε-ausgesondert werden kann.

Der Satz bildet in einem gewissen Sinne eine Charakteristik des n-dimensionalen Elementes, die aber Einschränkungen nicht nur auf die Struktur des Bildraumes, sondern auch auf den Charakter der betrachteten Abbildung zulässt. Für $n=2$ fallen diese Einschränkungen ab und man enthält eine neue Charakteristik der Kreisscheibe, als einer unverzweigten Homotopie-Membran (§ 4).

[1]) S ist *sphäroidal*, falls für jeden Punkt $x \in S$ eine Umgebung $U_x \subset S$ existiert derart, dass $S \subset U_x$ ein absoluter Retrakt ist (K. Borsuk, *O zagadnieniu topologicznego scharakteryzowania sfer euklidesowych*, Wiadomości Matematyczne, Warszawa 1934, polnisch).

Ist insbesondere das Bild des Elementes von vornherein ein Element, so bildet der Homöomorphie-Satz einen Satz über stetige Abbildungen von zwei Elementen — eine Kennzeichnung der homöomorphen Abbildung, die auch neu ist.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Über wesentliche Membranen.
§ 2. Irreduzibilität einer unverzweigten Homotopie-Membran.
§ 3. Homöomorphie-Satz.
§ 4. Neue Kennzeichnung der Kreisscheibe.

§ 1. Über wesentliche Membranen. Wir betrachten eine $(n-1)$-dimensionale[2]) zyklische[3]) Menge Z^{n-1}. Es sei F eine abgeschlossene Menge, die Z^{n-1} als Teilmenge enthält.

Wir betrachten ferner die Gesamtheit derjenigen stetigen Abbildungen von F auf ein Element K^*, die Z^{n-1} auf S^{n-1}, den Rand dieses Elementes, wesentlich abbilden, und zwar derart, dass die Gesamturbildmenge von S^{n-1} mit Z^{n-1} zusammenfällt. Solche Abbildungen nennen wir *auf dem „Rande" Z^{n-1} wesentliche Abbildungen.*

Definition 1. F heisst eine *durch Z^{n-1} berandete wesentliche Membran*, falls jede auf dem Rande wesentliche Abbildung $f(F)=K^*$ auch auf K^* wesentlich ist (und mindestens eine solche existiert).

Wir sagen auch in diesem Falle, dass Z^{n-1} *homolog Null in F* ist.

Definition 2. F heisst eine *durch Z^{n-1} berandete Homologie-Membran*, falls es mindestens eine auf dem Rande wesentliche Abbildung $f(F)=K^*$ gibt, die auch auf K^* wesentlich ist.

Wir sagen in diesem Falle, dass Z^{n-1} *schwach homolog Null in F* ist.

Bemerkung. Es ist zweckmässig im Falle einer zusammenhängenden Menge F sich in den Definitionen 1 und 2 auf die irreduzibel-zyklischen Mengen zu beschränken[4]). Aber auch im Falle einer irreduzibel-zyklischen Menge Z^{n-1} zieht das Vorhandensein in F eines relativen Zyklus rel. Z^{n-1} (mod m oder nach einem variablen Moduln) im allgemeinen die Eigenschaft von F eine wesentliche Membran zu sein nach sich nicht. Betrachten wir z. B. den Rand des Möbiusschen Bandes (mod 2, oder mod k [5])), so ist er schwach homolog Null auf dem Rande im Sinne von Def. 2, ersichtlich aber nicht homolog Null. Es genügt dazu eine Abbildung des Bandes (mod $2, k$) auf K^* mit dem Grade $2, k$ auf dem Rande zu betrachten, die auf K^* nicht eine wesentliche ist. Dasselbe gilt auch für Pontrjaginsche[5]) Flächen und jedesmal, wenn eine Torsion vorhanden ist.

Die Definitionen 1 und 2 gelten selbstverständlich auch im Falle einer sphärischen Menge $Z^{n-1}=S^{n-1}$. In diesem Falle, der im § 2 angewendet wird, ist es zweckmässig aus der Gesamtheit der auf dem Rande S^{n-1} wesentlichen Abbildungen diejenige auszusondern, die auf dem Rande eineindeutig sind.

Dann kann man die Abbildungen $f(F)=K^*$, die in den Definitionen 1 und 2 betrachtet werden, geometrisch derart realisieren, dass S^{n-1} als gemeinsame Teilmenge von F und K^* im Hilbertschen Raume auftritt und die Abbildung auf diesem gemeinsamen Rande die Identität ist.

Führt man statt 1 und 2 die Definitionen ein:

Definition 1'. F heisst eine *durch S^{n-1} berandete wesentliche Membran*, falls jede auf dem Rande S^{n-1} identische Abbildung $f(F)=K^*$, auch auf K^* wesentlich ist.

Definition 2'. F heisst eine *durch S^{n-1} berandete Homologie-Membran*, falls es mindestens eine auf dem Rande S^{n-1} identische Abbildung $f(F)=K^*$ gibt, die auch auf K^* wesentlich ist.

— so erhält man folgenden Satz:

Satz I. *Eine durch S^{n-1} berandete Homologie-Membran ist stets eine wesentliche Membran.*

---

[2]) In Brouwer-Urysohn-Mengerschem Sinne.

[3]) d.h. auf eine Sphäre S^{n-1} wesentlich abbildbare Menge (P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106, S. 223).

[4]) oder als Bildmenge nicht das Element, sondern ein durch mehrere Sphären berandete Stück des Euklidischen Raumes zu betrachten.

[5]) L. Pontrjagin, *Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension*, C. R. Paris (1930).

Beweis. Wir haben zu beweisen, dass falls zwei Abbildungen $f_1(F)=K^*$ und $f_2(F)=K^*$ gegeben sind, die auf dem gemeinsamen Rande S^{n-1} von F und K^* zusammenfallen, so sind die beiden Abbildungen auf K^* gleichzeitig wesentlich oder unwesentlich. Dies folgt aber direkt aus der Definition der wesentlichen Abbildung.

Eine wesentliche durch Z^{n-1} (bzw. S^{n-1}) berandete Membran ist eine natürliche Verallgemeinerung eines zwei Punkte a und b enthaltenden Kontinuums. Wir gehen jetzt zur Frage nach der Existenz einer irreduzibel-wesentlichen durch Z^{n-1} berandeten Membran über.

Definition 3. Zwei (oder mehrere) abgeschlossene Mengen F und F_1, die eine und dieselbe Menge Z^{n-1} enthalten und inbezug auf Z^{n-1} wesentliche Membranen sind, heissen *wesentliche Membranen mit demselben Rande.*

Satz II. *Es sei $F\supset F_1\supset\ldots\supset F_n\supset\ldots$ eine Folge von wesentlichen Membranen mit demselben Rande Z^{n-1}. Dann ist die Durchschnittsmenge $F_\omega=\prod_{i=1}^{\infty}F_i$ ebenfalls eine wesentliche Membran mit dem Rande Z^{n-1}. M. a. W., die Eigenschaft eine wesentliche Membran zu sein ist eine induktive Eigenschaft.*

Beweis. Es sei $\psi(F_\omega)=K^*$ eine beliebige auf dem Rande wesentliche Abbildung der Menge F_ω auf K^*. Wir wollen beweisen, dass sie wesentlich ist. Wäre in der Tat ψ unwesentlich, so gäbe es eine stetige Abänderung der Abbildung ψ, $\tilde{\psi}$ (oder eventuell ψ selbst), derart dass $\tilde{\psi}(F_\omega)=K^*-U_\xi$.

Diese Abbildung, nach einem bekannten Erweiterungssatze, lässt sich zu einer Abbildung des ganzen Raumes F erweitern, d. h. es gibt eine stetige Funktion $\Psi(F)=K^*$, die auf F_ω mit $\tilde{\psi}(F_\omega)$ zusammenfällt und F in K^* (oder einen Teil davon) abbildet.

Da $\Psi(F)$ gleichmässig stetig ist, gibt es für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ derart, dass aus $\varrho(x,y)<\delta$, wo $(x+y)\subset F$, $\varrho(\Psi(x),\Psi(y))<\varepsilon$ folgt.

Es sei $\varrho(\xi,K^*-U_\xi)=d$. Wir wählen $\varepsilon<d/2$ und eine diesem E entsprechende Zahl δ. Da $F_\omega=\prod_{i=1}^{\infty}F_i$ ist, so ist $\lim_{n\to\infty}\operatorname{apx}(F_n,F_\omega)=0$, also, für $n\geqslant N$, $\operatorname{apx}(F_n,F_\omega)<\delta$.

Nun bedeckt die Bildmenge $\Psi(F_n)$ das ganze Element K^* nicht. In der Tat, aus $\operatorname{apx}(F_n,F_\omega)<\delta$ folgt $\operatorname{apx}(\Psi(F_n),\Psi(F_\omega))<\varepsilon$; also $\varrho(\Psi(F_n),\xi)\geqslant d-\varepsilon\geqslant d/2$. Es ist also $\Psi(F_n)$ eine unwesentliche Abbildung auf K^* einer wesentlichen Membran, die auf dem Rande wesentlich ist, was unmöglich ist.

Damit ist der Satz II bewiesen.

Unter Anwendung der transfiniten Induktion ergibt der Satz II die Folgerung, dass eine wesentliche durch Z^{n-1} berandete Membran stets eine irreduzibel-wesentliche Membran mit demselben Rande enthält.

Ein entsprechender Satz für Homologie-Membranen mit demselben mengentheoretischen Rande Z^{n-1} ist aber falsch, was man an folgendem Beispiel sehen kann.

Beispiel. Die Menge F bestehe aus einer Folge von Kreisscheiben $K_1,K_2,\ldots K_n,\ldots$ mit den gegen 0 konvergierenden Radien, derart dass die Kreisscheibe K_i die Kreisscheiben K_{i-1} und K_{i+1} in einem einzigen Punkte berührt, und aus dem einzigen Limespunkte x dieser Folge:

$$F=\sum_{i=1}^{\infty}K_i+x.$$

Es seien S_i die sphärischen Ränder von K_i. Die Menge Z^1 definieren wir folgendermassen:

$$Z^1=\sum_{i=1}^{\infty}S_i+x.$$

Es seien $G_i=K_i-S_i$, $i=1,2,\ldots$. Dann definieren wir:

$$F_i=F-\sum_{k=1}^{i-1}G_k.$$

Es ist klar, dass Z^1 in jedem F_i enthalten ist, und dass jedes F_i eine Homologie-Membran inbezug auf Z^1 ist, nicht aber die Durchschnittsmenge $F_\omega=Z^1$.

§ 2. Irreduzibilität einer unverzweigten Homotopie-Membran. Es werden folgende Definitionen angenommen:

Definition 1. Ein stetiges auf dem Rande eineindeutiges Bild eines Elementes $f(K)=F$ heisst eine *durch das Bild des Randes berandete Homotopie-Membran.*

Wir nehmen im Folgenden an, dass $\dim K = \dim F = n$ ist.

Definition 2. F heisst eine *unverzweigte Homotopie-Membran,* falls alle dem Rande fremde Punkte von F sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine sphäroidale $(n-1)$-dimensionale Menge ε-aussondern lassen.

Definition 3. Eine Homotopie-Membran F heisst *irreduzibel,* falls keine echte abgeschlossene Teilmenge von F eine Homotopie-Membran mit demselben Rande ist.

Satz III. *Jede unverzweigte n-dimensionale Homotopie-Membran F ist eine irreduzible Membran.*

Beweis. Wir wollen zunächst beweisen, dass eine unverzweigte Homotopie-Membran irreduzibel-wesentlich ist. Da F, als eine Homotopie-Membran mit dem Rande S, ersichtlich eine wesentliche Membran mit demselben Rande ist, so enthält F eine irreduzibel-wesentliche Teilmembran Φ mit demselben Rande. Wir wollen beweisen, dass $F - \Phi = 0$ ist.

Ist dies nicht der Fall, so hat mindestens eine der Komponenten von $F - \Phi$, etwa C, mindestens einen Limespunkt auf Φ. Sind sämtliche Punkte dieser Art in S enthalten, so ist F durch eine in S abgeschlossene Menge in zwei unzusammenhängende Teile, also auch das Element K, das Urbild der Membran F, durch eine Teilmenge des Randes in zwei Teile zerlegt, was unmöglich ist.

Es gibt folglich mindestens einen dem Rande fremden Limespunkt $\xi \subset \Phi$ einer Komponente C von $F - \Phi$.

Wir wollen zunächst zeigen, dass ξ auf Φ durch eine echte Teilmenge einer sphäroidalen Menge sich ε-aussondern lässt. Eine ξ ε-aussondernde Menge auf F ist auch eine ε-aussondernde Menge auf Φ, da $\Phi \subset F$. Es sei $\varepsilon < \delta(C)$ und S_ε eine ξ auf F ε-aussondernde sphäroidale Menge. Ist ξ auf Φ durch S_ε und durch keine echte Teilmenge von S_ε ausgesondert, so ist S_ε schlecht gewählt, denn für die vollständige ε-Aussonderung auf F müssen wir ausser $S_\varepsilon \subset \Phi$ noch mindestens einen Punkt auf C wählen. Also lässt sich ξ auf Φ durch eine echte Teilmenge $L_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ ε-aussondern.

Es seien jetzt U_ξ^F und U_ξ^Φ die den Mengen S_ε und L_ε entsprechenden ε-Umgebungen. Da L_ε eine abgeschlossene Teilmenge von S_ε ist, so gibt es einen Punkt $x \in S_\varepsilon - L_\varepsilon$, dessen eine Umgebung U_x in $S_\varepsilon - L_\varepsilon$ liegt: $L_\varepsilon \subset S_\varepsilon - U_x$.

Die Menge $R_\varepsilon = S_\varepsilon - U_x$ ist nach der Definition der sphäroidalen Menge ein *absoluter Retrakt* [6]), also lässt sich $U_\xi^\Phi + R_\varepsilon$ auf R_ε derart stetig zusammenziehen, dass die Punkte von R_ε dabei invariant bleiben. Es sei $\varphi(U_\xi^\Phi + R_\varepsilon) = R_\varepsilon$ diese retrahierende Abbildung. Die Abbildung φ erweitern wir durch eine Identität auf $\Phi - (U_\xi^\Phi + R_\varepsilon)$. Da sie mit φ auf dem Rande R_ε zusammenfällt, so ist die so erweiterte Abbildung $\tilde{\varphi}$ eine stetige und $\tilde{\varphi}(\Phi + R_\varepsilon) = \Phi - (U_\xi^\Phi + R_\varepsilon)$.

Setzen wir $\Psi = \Phi - (U_\xi^\Phi + R_\varepsilon)$.

Als stetiges Bild einer wesentlichen Membran ist Ψ folglich selbst eine wesentliche Membran, da die Abbildung die Punkte des Randes S von F festgelassen hat. Die Menge Ψ unterscheidet sich von $\Phi - U_\xi^\Phi$ eventuell durch eine offene Menge G in R_ε.

Wir wollen beweisen, dass auch $\Phi - U_\xi^\Phi$ eine wesentliche Membran ist. Sei G_1 eine Komponente von G und $y \subset G_1$. Wir betrachten eine Umgebung $U_y \subset G_1$ und eine wesentliche Abbildung von Ψ auf das Element K^n, $\psi(\Psi) = K^n$. Die Abbildung ψ der $\leqslant (n-1)$-dimensionalen Menge $\bar{U}_y$ auf die Umgebung $U_{f(y)}$ ist unwesentlich.

Wäre nun die Menge $\Psi - U_y$ keine wesentliche Membran, so würde es auch die Menge Ψ nicht. Man betrachte in der Tat die Abbildung $\Psi(\bar{U}_y)$ auf $\bar{U}_{f(y)}$ und halte diese Abbildung in den Punkten von $f(\bar{U}_y - U_y)$ auf dem Rande von $U_{f(y)}$ fest. Man betrachte ferner eine stetige Abänderung dieser Abbildung, $\tilde{\psi}(\bar{U}_y)$, die U_y in den Rand von $U_{f(y)}$ überführt. Man ergänze ferner $\tilde{\psi}$ durch Identität der Menge $\Psi - U_y$. Man erhält somit eine Abbildung $\tilde{\psi}$, die man jetzt in den Randpunkten von $U_{f(y)}$ festhält. Da nach Voraussetzung $\Psi - U_y$ keine wesentliche Membran ist, lässt sich die Umgebung $U_{f(y)}$ durch eine stetige Abänderung der Abbildung $\tilde{\psi}$ von den Bildpunkten der Menge $\Psi - U_y$, also auch der Menge Ψ, befreien.

[6]) K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. XVII, S. 152—170.

Folglich ist $\Psi - U_y$ eine wesentliche Membran.

Da die Umgebung $U_y \subset G_1$ beliebig gewählt wurde, so kann man $\Psi - G_1$ als eine Durchschnittsmenge von ineinander eingeschachtelten wesentlichen Membranen betrachten, so dass $\Psi - G_1$ und folglich auch $\Psi - G = \Phi - U_\xi^\Phi$ eine wesentliche Membran wäre, gegen die Annahme, dass Φ irreduzibel-wesentlich war. Also ist $F = \Phi$ und F irreduzibel-wesentlich.

Gäbe es nun eine Homotopie-Membran $F_1 \subset F$ mit demselben Rande, so wäre F_1 einerseits (als Teilmenge einer irreduzibel-wesentlichen Membran) keine wesentliche Membran, andererseits aber ist jede Homotopie-Membran eine wesentliche Membran. Dieser Widerspruch zeigt, dass $F_1 \equiv F$ ist, w. z. b. w.

Problem. *Enthält eine Homotopie-Membran stets eine irreduzible Homotopie-Membran mit demselben Rande?*

§ 3. Homöomorphie-Satz. Sei $f(R)=R'$ eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes auf einen Raum R'.

Definition 1. Die Abbildung f heisst *nulldimensional*, falls die Gesamturbildmengen der Punkte von R' nulldimensionale Mengen sind.

Definition 2. Die Abbildung f heisst *irreduzibel*, falls es keine echte abgeschlossene Teilmenge $C \subset R$ mit der Eigenschaft $f(C)=R'$ gibt.

Homöomorphie-Satz. *Jede auf dem Rande eineindeutige nulldimensionale irreduzible Abbildung $f(K)=F$ eines Elementes auf eine gleichdimensionale unverzweigte Homotopie-Membran ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir nehmen gegen die Behauptung an, dass es einen Punkt $\xi \subset F$ gibt, der in K mindestens zwei Urbildpunkte x_1, x_2 besitzt.

Es seien in K zwei kleine Elemente K_1 und K_2 derart, dass $x_1 \epsilon K_1$, $x_2 \epsilon K_2$ und $K_1 \cdot K_2 = 0$ ist. Es seien ferner $\Phi_1 = f(K_1)$ und $\Phi_2 = f(K_2)$ die Bildmengen dieser Elemente in F.

Wir untersuchen die Mengen Φ_1, Φ_2 und die Durchschnittsmenge $\Phi_1 \cdot \Phi_2$:

1^0 Die Mengen Φ_1, Φ_2 sind irgendwo auf F *dicht*. Wäre in der Tat Φ_1 (bzw. Φ_2) auf F nirgendsdicht, so hätten wir $f(\overline{K-K_1})=F$, was der Irreduzibilität der Abbildung f widerspricht.

2^0 $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ ist auf F *nirgendsdicht*, denn gäbe es eine Umgebung $U_\xi \subset \Phi_1 \cdot \Phi_2$, so wäre $f^{-1}(U_\xi) = U_{x_1} + U_{x_2}$, wobei U_{x_1} und U_{x_2} offene Mengen in K wären. Man entfernt z. B. U_{x_1} aus K und betrachtet die Bildmenge $f(K - U_{x_1}) = F$. Die Menge $K - U_{x_1}$ ist eine echte abgeschlossene Teilmenge von K, deren Bild gleich F wäre, was der Irreduzibilität der Abbildung f widerspricht. Also ist $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ auf F nirgendsdicht.

3^0 Die Punkte der Kontinuen Φ_1, Φ_2 sind entweder *innere Punkte* von F, d. h. solche, die durch eine sphäroidale Menge sich ε-aussondern lassen, oder *Randpunkte*, d. h. solche, die durch eine echte Teilmenge einer sphäroidalen Menge sich ε-aussondern lassen.

Kein innerer Punkt y der Elemente K_1 und K_2 kann bei der Abbildung f in einen Randpunkt von $\Phi_i (i=1,2)$ übergehen. Es sei, in der Tat, L_ε die den Randpunkt $\eta \subset \Phi_1$ ε-aussondernde Menge, wobei $\eta = f(y)$ und y ein innerer Punkt von K_1 ist. L_ε ist dann eine echte Teilmenge einer η auf F ε-aussondernden sphäroidalen Menge S_ε. Als eine in K_1 die Menge $Y = f^{-1}(\eta) \cdot K_1$ ε-aussondernde Menge, enthält die Menge $f^{-1}(L_\varepsilon) \cdot K_1$ (von einem gewissen ε ab) stets Zyklen, da die Urbildmenge Y nach unserer Voraussetzung nulldimensional ist. Es sei $Z \subset f^{-1}(L_\varepsilon)$ eine solche zyklische Menge, wo also $f(Z) \subset L_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ ist. Es sei ferner $R_\varepsilon \supset L_\varepsilon$ ein in S_ε liegender absoluter Retrakt. $f(G_1) + R_\varepsilon$ ist in R_ε stetig zusammenziehbar. Es sei $\varphi(f(G_1) + R_\varepsilon) = R_\varepsilon$ die retrahierende Abbildung. Man vervollständige φ durch eine Identität der Menge $f(K - G_1)$. Die Abbildung

$$\psi = \begin{cases} \varphi f & \text{für } x \subset \overline{G}_1 \\ f & \text{für } x \subset K - G_1 \end{cases}$$

ist eine stetige Abänderung der Abbildung f, da auf dem gemeinsamen Rande Z beider Gebiete die Teilabbildungen φf und f zusammenfallen. Nun aber lässt die Abbildung ψ die durch L_ε ε-ausgesonderte Umgebung $U_\eta^{\Phi_1}$ frei von Bildpunkten der Menge G_1. Also ist wegen der Irreduzibilität von F die Menge $U_\eta^{\Phi_1}$ durch das Bild des Gebietes $K - G_1$ bedeckt. Da aber $\psi \equiv f$ auf $K - G_1$ ist, so bedeckt das Bild $f(K-G_1)$ die ganze Membran F, was der Irreduzibilität von f widerspricht.

Nun sei J_1 (bzw. J_2) die Menge der inneren Punkte von K_1 (bzw. K_2). Die Bildmengen $f(J_1)$ und $f(J_2)$ sind nach 3^0 in F offen, also auch ihre Durchschnittsmenge $f(J_1)\cdot f(J_2)$. Da aber dieselbe, als Teilmenge von $\Phi_1\cdot\Phi_2$, in F nach 2^0 nirgendsdicht ist, so ist sie leer. Folglich ist $f(x_1)\neq f(x_2)$, was der Annahme $f(x_1)=f(x_2)=\xi$ widerspricht. Damit ist der Homöomorphie-Satz bewiesen.

Als Korollar im Falle, wo F von vornherein als ein Element vorausgesetzt wird, erhalten wir folgende

Kennzeichnung einer homöomorphen Abbildung. *Ist $f(K)=K^*$ eine auf dem Rande eineindeutige nulldimensionale irreduzible Abbildung eines Elementes K auf ein Element K^*, so ist f ein Homöomorphismus.*

Bemerkung. Für den Spezialfall $n=2$ kann man eine etwas allgemeinere Definition einer unverzweigten Homotopie-Membran einführen, indem man nämlich die eindimensionalen ε-aussondernden Mengen nach ihren Bettischen Zahlen klassifiziert und dadurch die Begriffe von Randpunkten, einfachen Punkten und Verzweigungspunkten einer stetigen Fläche einführt. Die Sätze der §§ 2 und 3 bleiben dabei erhalten.

§ 4. Neue Kennzeichnung der Kreisscheibe. Es sei $f(K)=F$ eine beliebige auf dem Rande eineindeutige Abbildung der Kreisscheibe K auf eine unverzweigte, folglich irreduzible, 2-dimensionale Homotopie-Membran F.

Es sei Γ ein Gebiet der Kreisscheibe K, das durch einen Teilbogen $\widehat{ab}$ des Randes Q von K und durch einen einfachen im Innern von K verlaufenden und die Punkte a, b des Randes verbindenden Bogen $\widehat{ab}'$, bzw. Kontinuum C_{ab}, begrenzt ist.

Definition 1. Wir nennen die Menge $\Phi=f(\overline{\Gamma})$ *ein Membranen stück*, falls das Bild des Randes von Γ eine in F verlaufende Kreislinie Q^{**} ist.

Ist $\alpha=f(a)$, $\beta=f(b)$, so ist $f(\widehat{ab})=\widehat{\alpha\beta}\subset Q^*$. Wir fordern, dass:

$$\left.\begin{matrix} f(\widehat{ab})' \\ f(C_{ab}) \end{matrix}\right\}=\widehat{\alpha\beta}'$$

sei, wobei $\widehat{\alpha\beta}'$ ein im Innern von F verlaufender Bogen mit den beiden Endpunkten α, β auf dem Rande Q^* von F ist. Die Kreislinie $Q^{**}=\widehat{\alpha\beta}+\widehat{\alpha\beta}'$ wird „*Rand*“ des Membranenstückes Φ genannt.

Ein Membranenstück Φ kann ausser den Punkten des so definierten Randes noch Randpunkte haben. Wir wollen zunächst eine solche Teilmenge Ψ von Φ finden, für welche dies nicht der Fall ist.

Hilfssatz I. *Ein Membranenstück Φ ist stets eine durch seinen Rand Q^{**} begrenzte wesentliche Membran.*

Hilfssatz II. *Die irreduzibel-wesentliche Teilmembran einer wesentlichen unverzweigten Membran enthält keine von den Punkten des „Randes“ verschiedene Randpunkte.*

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist schon im § 2, Satz III, enthalten.

Es sei Φ ein Membranenstück von F. Ist F unverzweigt, so gilt dasselbe auch für $\Phi\subset F$. Sei Ψ die irreduzibel-wesentliche Teilmembran von Φ. Ψ enthält dann keine von den Punkten des Randes Q^{**} von Φ verschiedene Randpunkte.

Definition 2. Die Menge Ψ heisst ein *irreduzibler Teil* des Membranenstückes Φ. (Im allgemeinen ist Ψ kein Membranenstück.)

Definition 3. Zwei Membranenstücke, bzw. irreduzibele Teile von Membranenstücken, heissen zueinander *komplementär*, falls die Summe ihrer Randkreislinien (mod. 2) gleich dem Rande der Membran F ist (d. h. falls sie den Bogen $\widehat{\alpha\beta}$ gemein haben).

Hilfssatz III. *Zwei komplementäre Membranenstücke* (*bzw. komplementäre irreduzible Teile von Membranenstücken*) *bedecken in unverzweigtem Falle die ganze Membran F.*

B e w e i s. In der Tat, ist $\Phi_1+\Phi_2$ (bzw. $\Psi_1+\Psi_2$) eine wesentliche Membran. Es genügt eine wesentliche Abbildung dieser Membran auf eine Kreisscheibe anzugeben, denn nach § I, Satz I ist dann auch jede andere Abbildung wesentlich. Zu diesem Zweck wird eine Kreisscheibe K' durch einen Bogen $\widehat{\alpha'\beta'}$ in zwei Hälften geteilt und Φ_1 (bzw. Ψ_1) auf die eine Hälfte, sowie Φ_2 (bzw. Ψ_2) auf die andere Hälfte derart wesentlich abgebildet, dass die beiden Abbildungen auf dem gemeinsamen Bogen $\widehat{\alpha'\beta'}$ zusammenfallen. Die zusammengesetzte Abbildung auf die ganze Kreisscheibe ist dann stetig und wesentlich. Die Summe $\Phi_1+\Phi_2$ (bzw. $\Psi_1+\Psi_2$) ist eine wesentliche Teilmembran von F, also in unverzweigtem Falle fällt sie mit F zusammen, w. z. b. w.

Hilfssatz IV. *Sind zwei innere Punkte zweier komplementärer irreduzibler Teile von Membranenstücken* [7]) *zusammengeschmolzen, so enthält die Summe der beiden Teile mindestens einen Verzweigungspunkt.*

Beweis. Sei F eine Membran, Ψ_1, Ψ_2 die irreduziblen Teile ihrer Membranenstücke und $\Psi_1+\Psi_2=F$. Die Menge $\Psi_1-\Psi_2$ ist ein nichtleeres Gebiet (rel. Ψ_2), sonst hätten wir einen Widerspruch mit der Eineindeutigkeit der Abbildung auf dem Rande Q von F. Wir betrachten diejenige abgeschlossene Komponente der Menge $\Psi_2-\Psi_1$, die sich an Q anschliesst:

$$\Psi_2' = \overline{\mathrm{Komp}_Q\,(\Psi_2-\Psi_1)}.$$

Die Kontinua Ψ_1 und Ψ_2' können nicht sich nur längs dem gemeinsamen Randbogen von Ψ_1 und Ψ_2 schneiden. In der Tat, seien p und q die Punkte der Kreisscheibe $K=f^{-1}(F)$, dessen Bilder $f(p)$ und $f(q)$ nach der Voraussetzung zusammenfallen; $f(p)$ und $f(q)$ liegen nicht auf dem gemeinsamen Randbogen $\widehat{\alpha\beta}$ von Ψ_1 und Ψ_2. Sei weiter c irgend ein innerer Punkt von $f^{-1}(\Psi_2')$. Man verbindet c mit q durch einen einfachen Bogen $\widehat{cq}\subset K$ derart, dass $\widehat{cq}\cdot f^{-1}(\alpha\beta)=0$ sei, und betrachtet $f(\widehat{cq})=K_{f(c),f(q)}=K_{f(c),f(p)}$. Es ist klar, dass $K_{f(p),f(q)}\cdot\widehat{\alpha\beta}=0$ ist. Der Schnittpunkt x von $K_{f(c),f(p)}$ mit dem Rande von Ψ_2' ist der gesuchte innere Punkt von Ψ_1, der zugleich zu Ψ_2' gehört. Der Punkt x ist ein Verzweigungspunkt der Fläche $\Psi_1+\Psi_2'$, folglich auch der Fläche F, w. z. b. w.

Homöomorphie-Satz. *Jede unverzweigte Homotopie-Membran ist einer Kreisscheibe homöomorph.*

Beweis. Zum Beweis gebrauchen wir die von L. Zippin [8]) gegebene Kennzeichnung der Kreisscheibe:

„Ein im kleinen zusammenhängendes kompaktes Kontinuum F ist einer Kreisscheibe homöomorph, falls F eine Kreislinie Q^* und mindestens einen Bogen $\widehat{\alpha\beta}$ enthält derart, dass $Q^*\cdot\widehat{\alpha\beta}=\alpha+\beta$ und dass jeder Bogen von dieser Beschaffenheit das Kontinuum in irreduzibler Weise zerlegt".

[7]) d. h. zwei nicht auf dem gemeinsamen Randbogen $\widehat{\alpha\beta}$ liegende Punkte.
[8]) L. Zippin, *A characterisation of the closed 2-cell*, Amer. Journ. of Math. 55 (1933), 207—217.

Wir wollen beweisen, dass für eine unverzweigte 2-dimensionale Homotopie-Membran die Bedigungen von L. Zippin erfüllt sind. Es sei $f(K)=F$ eine solche Membran. Da die Abbildung f auf dem Rande Q von K eineindeutig ist, so ist $Q^*=f(Q)$ eine in F enthaltene Kreislinie. Betrachten wir einen Bogen $\widehat{ab}\subset K$, so dass $Q\cdot\widehat{ab}=a+b$ ist. Das Bild $f(\widehat{ab})=K_{\alpha\beta}$ ist ein stetiges Kontinuum in F, das mit der Kreislinie Q^* keine weitere gemeinsame Punkte ausser $\alpha=f(a)$ und $\beta=f(b)$ besitzt. $K_{\alpha\beta}$ enthält einen einfachen Bogen $\widehat{\alpha\beta}\subset K_{\alpha\beta}$, für den $\widehat{\alpha\beta}\cdot Q^*=\alpha+\beta$ gilt. Jeder Bogen $\widehat{\alpha\beta}\subset F$, für welchen $\widehat{\alpha\beta}\cdot Q^*=\alpha+\beta$ gilt, zerlegt F.

Es sei, umgekehrt, $F-\widehat{\alpha\beta}=G$ (rel. F), wobei G ein zusammenhängendes Gebiet (rel. F) ist. Wir betrachten die Gesamturbildmenge $f^{-1}(\widehat{\alpha\beta})=E_{ab}$. Es können a priori zwei Fälle eintreten:

1⁰ E_{ab} enthält ein a mit b verbindendes Kontinuum C_{ab}, das die Kreisscheibe K zerlegt,

2⁰ E_{ab} enthält kein C_{ab}.

Wir wollen beweisen, dass diese beiden Fälle die Existenz eines Verzweigungspunktes in F nach sich ziehen, also in unverzweigtem Falle unmöglich sind.

Ad 1⁰. $K-C_{ab}=\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots$, wobei Γ_1, Γ_2 die an $\widehat{ab}$ und $\widehat{ba}$ auf Q anschliessenden Gebiete sind. Die Bildmengen $f(\overline{\Gamma}_1)=\Phi_1$ und $f(\overline{\Gamma}_2)=\Phi_2$ sind Membranenstücke, und zwar komplementäre Membranenstücke, da $\widehat{\alpha\beta}$ der gemeinsame Bogen ihrer Ränder ist. Sind Φ_1 und Φ_2 reduzibel, so enthalten sie irreduzible Membranenstücke Ψ_1 und Ψ_2, die wieder zueinander komplementär sind. Folglich ist $\Psi_1+\Psi_2=F$.

Der Bogen $\widehat{\alpha\beta}=f(C_{ab})$ zerlegt nach unserer Annahme die Membran F nicht. Also gibt es von den Punkten des Bogens $\widehat{\alpha\beta}$ verschiedene Punkte von Ψ_1 und Ψ_2, die geometrisch zusammenfallen. Dann enthält aber, nach Hilfssatz IV, $\Psi_1+\Psi_2$ einen Verzweigungspunkt. Der Fall 1⁰ ist also unmöglich.

Ad 2⁰. Zerlegt die Urbildmenge $E_{ab}=f^{-1}(\widehat{\alpha\beta})$ die Kreisscheibe nicht, so gibt es auf Q einen einfachen Bogen $\widehat{cd}$ mit c zwischen a und b, d zwischen b und a, welcher die Kreisscheibe in zwei Gebiete Γ_1 und Γ_2 zerlegt, sich mit E_{ab} nicht schneidet, wobei in beiden Gebieten Γ_1 und Γ_2 Punkte der Menge E_{ab} vorhanden sind.

Da $f(E_{ab})=\widehat{\alpha\beta}$ ein Kontinuum ist, so gibt es mindestens einen Punkt $\gamma\subset\widehat{\alpha\beta}$, dessen Urbilder in beiden Gebieten liegen, und zwar kann der Bogen $\widehat{cd}$ so gewählt werden, dass der Punkt γ ein nicht auf dem Rande $\widehat{cd}$ liegender Punkt der Membranenstücke $\Phi_1=f(\overline{\Gamma}_1)$, $\Phi_2=f(\overline{\Gamma}_2)$ ist. In der Tat, ist die Menge E_{ab} die Gesamturbildmenge des Bogens $\widehat{cd}$, also hat die Bildmenge des Bogens $\widehat{cd}$, der mit E_{ab} keine gemeinsame Punkte besitzt, keinen gemeinsamen Punkt mit $f(E_{ab})=\widehat{\alpha\beta}$.

Wir haben also unsere Aufgabe auf den ersten Fall zurückgeführt, da wir das Zusammenschmelzen zweier nicht auf $\widehat{cd}$ liegender Punkte der Membranenstücke Φ_1, Φ_2, und folglich auch Ψ_1, Ψ_2, bewiesen haben. Es existiert also, ebenfalls nach Hilfssatz IV, ein Verzweigungspunkt der Fläche F, was unmöglich ist.

Beide Fälle 1^0 und 2^0 haben sich als unmöglich erwiesen; also zerlegt der Bogen $\widehat{\alpha\beta}$ die Fläche F.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\widehat{\alpha\beta}$ die Fläche F in irreduzibler Weise zerlegt, d. h. dass keine Teilmenge $M\subset\widehat{\alpha\beta}$ diese Eigenschaft besitzt. Wir entfernen einen beliebigen Punkt $\gamma\subset\widehat{\alpha\beta}$ und zeigen, dass $(F-\widehat{\alpha\beta})+\gamma$ zusammenhängend ist. Es seien in der Tat χ, λ zwei Punkte auf zwei verschiedenen Bögen $\widehat{\alpha\beta}_1$, $\widehat{\alpha\beta}_2$ des Randes Q^* von F. Wir können zwei Bögen $\widehat{\chi\gamma}$ und $\widehat{\lambda\gamma}$ konstruieren, die im Innern der Membranenstücke Φ_1 und Φ_2 verlaufen und ausser γ keinen Punkt mit dem Bogen $\widehat{\alpha\beta}$ gemein haben, da γ sowohl aus $\Phi_1-\widehat{\alpha\beta}$ als auch aus $\Phi_2-\widehat{\alpha\beta}$ erreichbar ist. Also ist $(F-\widehat{\alpha\beta})+\gamma$ wirklich zusammenhängend.

Alle Forderungen von L. Zippin sind somit für die unverzweigte Membran erfüllt. Also ist F einer Kreisscheibe homöomorph, w. z. b. w.

Als Korollar erhält man folgenden

Satz. *Jede stetige, zweistufig stetige, unverzweigte Fläche ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit.*

Wir verstehen dabei die zweistufige Stetigkeit (d. h. den lokalen Zusammenhang in 2 Dimensionen) im Sinne von Homotopie.

Sur les courbes sans noeuds.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Soient Ω_0 et Ω deux courbes simples fermées sans points communs, situées dans la sphère à 3 dimensions S^3 (espace euclidien avec point à l'infini).

Dans un travail récent de M. K. Borsuk et moi [1]), le théorème suivant est établi:

(*T*) *Pour que Ω soit un rétracte* [2]) *de $S^3-\Omega_0$, il faut et il suffit que $\overline{v}(\Omega,\Omega_0)=1$.*

La question de conditions nécessaires et suffisantes pour que Ω soit un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation [2]) y a été posée comme problème. Or, il est évident que si Ω est un rétracte de $S^3-\Omega_0$ par déformation, les groupes fondamentaux $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ et $\pi_1(\Omega)$ sont isomorphes. Il en résulte que $\pi_1(S^3-\Omega_0)$ est alors isomorphe avec le groupe $\mathfrak{F}_1$ de tous les nombres entiers, ce qui signifie que, dans le sens de la théorie des noeuds (basée sur la notion de groupe fondamental), la courbe Ω_0 est sans noeud.

Je vais montrer dans le travail présent que c'est là la seule hypothèse à ajouter pour pouvoir remplacer dans l'enoncé (*T*) la rétraction ordinaire par celle de déformation.

J'obtiens en outre le résultat suivant: *pour qu'une courbe simple fermée $\Omega_0\subset S^3$ soit sans noeud, il faut et il suffit que l'ensemble $S^3-\Omega_0$ se laisse déformer dans lui-même en un polyèdre à 1 dimension.*

Les théorèmes démontrés seront ensuite étendus aux continus plus généraux que les courbes simples fermées.

---

[1]) K. Borsuk et S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. 26 (1936), p. 215.

[2]) ibid., p. 215, renvoi [16]).