converse, let S' be a cut set in G'. Since by the proof of the Lemma the cut set D' cuts G' into just two pieces, G' itself must be connected. Therefore S' cuts G' into two „pieces". Let the first contain the (re-numbered) vertices $p_1, \dots, p_k$; the second, the vertices $p_{k+1}, \dots, p_{n+1}$. Then the corresponding circuits in G give a cycle

$$D = C_1 + C_2 + \dots + C_k = C_{k+1} + C_{k+2} + \dots + C_{n+1} \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

Every arc on D belongs to one of the first k C's and to one of the remaining C's, and so corresponds to an arc in G' connecting the first set of vertices to the second set. This arc must belong to the cut set, so that $D \subset S$. But the cycle D must contain a subset D_1 which is a circuit. The corresponding set D_1' is, by Lemma 6.1, a cut set in G', although $D_1' \subset S'$. By definition a cut set has no proper subset which is a cut set, so that S must be identical with the circuit D_1, and cut sets do correspond to circuits. This shows G' to be a dual of G.

Conversely, let G have a dual G'. To find a 2-fold complete set of circuits, note first that the non-separability of G implies [1]) that of G'. By the definition of a dual, the nullity n of G is the same as the rank $V(G')-1$ of G' (cf. (1)), so that G' has $n+1$ vertices $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$. The set D_i' of all arcs on any one vertex p_i is a cut set in G', for its removal deletes p_i. Consequently the corresponding set of arcs D_i in G must be a circuit, by the Theorem of Whitney quoted previously. These circuits $D_1, D_2, \dots, D_{n+1}$ contain each arc of G exactly twice, so that their sum is zero (mod 2). No other relation mod 2 is possible. For suppose instead that

$$D_1 + D_2 + \dots + D_m = 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2); \qquad m < n+1.$$

Then any arc of G on one of these D's is on another one, so that any arc of G' with a first end on one of $p_1, \dots, p_m$ has a second end on another one of these vertices, and $p_1, \dots, p_m$ are not connected to the remainder of G'. This contradicts the non-separability of G'. Thus $D_1, \dots, D_n$ are independent (mod 2), are $n = N(G)$ in number, and so form a 2-fold complete set of circuits. Theorem II is established.

[1]) Whitney I, Theorem 26. The exclusion of isolated vertices is essential here.

Freie Überdeckungen und freie Abbildungen.

Von

Heinz Hopf (Zürich).

Einleitung.

1. Den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen bildet die folgende Eigenschaft der n-dimensionalen Sphären, die zuerst von L. Lusternik und L. Schnirelmann, und dann noch einmal von K. Borsuk entdeckt und bewiesen worden ist [1]):

Satz A_n. *Ist die n-dimensionale Sphäre S^n mit $n+1$ abgeschlossenen Mengen überdeckt, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein antipodisches Punktepaar der Sphäre.*

Die isolierte Stellung dieses interessanten Satzes reizt zu dem Versuch, ihn in ein System allgemeinerer Überdeckungssätze einzuordnen. Beginnt man bei einem solchen Versuch mit der Analyse des Falles $n=1$, so sieht man sofort, daß der Satz A_1 nur ein Korollar des folgenden viel allgemeineren Satzes ist:

Satz A_1^*. *Bilden die abgeschlossenen Mengen F_1 und F_2 eine Überdeckung des zusammenhängenden topologischen Raumes [2]) R, und ist f irgend eine stetige Abbildung von R in sich, so enthält wenigstens eine der beiden Mengen ein Punktepaar $\{x, f(x)\}$.*

Denn da R zusammenhängend ist, gibt es einen Punkt $x \in F_1 \cdot F_2$, und das Punktepaar $\{x, f(x)\}$ gehört der Menge F_i an, wenn diese den Punkt $f(x)$ enthält.

[1]) L. Lusternik et L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Moskau 1930 (in russischer Sprache), S. 26, Lemma 1. K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math. XX (1933), S. 177. Man vergl. auch P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I* (Berlin 1936), S. 486—487. Dieses Buch wird im folgenden als A.-H. zitiert.

[2]) Unter einem *topologischen Raum* soll immer ein Raum verstanden werden, der die Kuratowskischen Axiome erfüllt; s. A.-H. (cf. Fußnote [1])), S. 37 ff.

Versteht man unter R die Kreislinie S^1 und unter f die antipodische Abbildung von S^1, so geht der Satz A_1^* in A_1 über.

Kann man auch für $n > 1$ *den Satz* A_n *in einer dem Satz* A_1^* *ähnlichen Weise verallgemeinern?* Wir werden sehen: dies ist noch für $n=2$, jedoch nicht mehr — wenigstens nicht bei Wahrung der Analogie — für $n \geqq 3$ möglich. Der Satz A_2 nimmt also — außer dem nahezu trivialen Satz A_1 — eine Sonderstellung im Kreise der Sätze A_n ein. Diese Sonderstellung bildet das Thema der nachstehenden Ausführungen.

2. Auf die Richtungen, in denen man Verallgemeinerungen des Satzes A_2 erwarten darf, wird man — außer durch den Satz A_1^* — durch zwei bereits bekannte Sätze hingewiesen, von denen jeder den Satz A_2 enthält; der eine dieser Sätze — Satz A_2' — stammt von B. Knaster, der andere — Satz A_2'' — von A. Denjoy und J. Wolff [3]):

Satz A_2'. *Es sei* U *ein beliebiges unikohärentes* [4]) *lokal zusammenhängendes* [5]) *Kontinuum und* f *eine involutorische Abbildung* [6]) *von* U *auf sich; ist* U *mit drei abgeschlossenen Mengen überdeckt, so enthält wenigstens eine von ihnen ein involutorisches Punktepaar* $\{x, f(x)\}$.

[3]) B. Knaster, *Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua*, Verhandl. Intern. Math. Kongreß Zürich 1932, 2. Bd., S. 193. — J. Wolff et A. Denjoy, *Sur la division d'une sphère en trois ensembles*, L'Enseignement Math. XXXII (1933), p. 66 (Remarque).

[4]) Ein topologischer Raum R heißt *multikohärent*, wenn er die Vereinigungsmenge zweier abgeschlossener und zusammenhängender Teilmengen ist, deren Durchschnitt nicht zusammenhängend ist; ein zusammenhängender Raum, der nicht multikohärent ist, heißt *unikohärent*. Für die lokal zusammenhängenden Kontinuen (s. Fußnote [5])), also z. B. für alle Polyeder, ist die Unikohärenz gleichbedeutend mit dem Verschwinden der ersten Bettischen Zahl; Beweis von K. Borsuk, *Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. XX (1933), S. 224 (besonders Nr. 11), und E. Čech, *Sur les continus Péaniens unicohérents*, ibidem S. 232; für den Spezialfall der Polyeder vergl. man auch M. Rueff, *Über die Unikohärenz n-dimensionaler Polyeder*, Comm. Math. Helvet. V (1935), S. 14. Einen einfachen Beweis der Unikohärenz der n-dimensionalen Sphäre S^n mit $n \geqq 2$ findet man auch bei C. Kuratowski, *Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'Analysis Situs*, Fund. Math. XIV (1929), S. 304.

[5]) Man vergl. z. B. F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin-Leipzig 1929), §§ 29 und 36.

[6]) D. h. eine stetige Abbildung mit $ff(x)=x$ für jeden Punkt x.

Satz A_2''. *Es sei* f *eine beliebige stetige Abbildung* [7]) *der Kugelfläche* S^2 *in sich; ist* S^2 *mit drei abgeschlossenen Mengen überdeckt, so enthält wenigstens eine von ihnen ein Punktepaar* $\{x, f(x)\}$.

Der erste Satz lehrt, daß für unser Problem die Kugeln eine unnötig enge Klasse von Räumen bilden; der zweite zeigt, daß der Satz A_2 für viel allgemeinere Punktepaare der Kugel gilt als für Antipodenpaare. Die analogen Bemerkungen konnte man beim Übergang vom Satz A_1 zu dem Satz A_1^* machen. Wir werden nun sogleich einen Satz aussprechen, der A_2' und A_2'' umfaßt und als direktes Analogon von A_1^* gelten darf. Dabei entnehmen wir dem Satz A_2' die Klasse der Räume, mit der wir uns beschäftigen werden: die der unikohärenten lokal zusammenhängenden Kontinuen; und der Satz A_2'' — zusammen mit dem Satz A_1^* — liefert uns denjenigen Begriff, den wir in den Mittelpunkt unserer weiteren Überlegungen stellen:

Definition. Die Überdeckung $\mathfrak{A}$ des topologischen Raumes R heiße *frei*, wenn es eine solche Abbildung f von R in sich gibt, daß jedes Element E von $\mathfrak{A}$ zu seinem Bild $f(E)$ fremd ist [8]).

Nun lautet das Analogon des Satzes A_1^* folgendermaßen:

Satz IIb. *Ein unikohärentes lokal zusammenhängendes Kontinuum gestattet keine freie Überdeckung mit drei abgeschlossenen Mengen.*

Der Satz A_2'' behält also seine Gültigkeit für wesentlich allgemeinere Räume als die Kugelfläche S^2 — zum Beispiel für alle Sphären S^n mit $n > 2$ —, und im Satz A_2' ist die Voraussetzung des involutorischen Charakters der Abbildung f überflüssig [9]).

[7]) In der Formulierung des Satzes in der Arbeit von Wolff-Denjoy wird unnötigerweise die Eineindeutigkeit der Abbildung vorausgesetzt, obwohl sie auch in dem dortigen Beweise nicht benutzt wird.

[8]) Wegen der Überdeckungs-Begriffe wie *Element*, *Ordnung*, *Endlichkeit* vergl. man A.-H., S. 47.

[9]) S. Eilenberg hat in der Arbeit *Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère*, Fund. Math. XXV (1935), S. 267, unter anderem gezeigt, daß man in dem Satz A_2' auf die Voraussetzung der *Kompaktheit* von U verzichten darf. In dem so *verallgemeinerten* Knasterschen Satz ist die Voraussetzung des involutorischen Charakters von f *nicht* überflüssig, wie folgendes Beispiel zeigt: U ist die reelle x-Gerade, für $i=0, 1, 2$ ist F_i durch $3k+i \leqq x \leqq 3k+i+1$, wobei k alle ganzen Zahlen durchläuft, erklärt, und f ist die Verschiebung der Geraden in sich um die Strecke $3/2$.

Wegen der Voraussetzung des lokalen Zusammenhanges beachte man S. 50, Fußnote [26a]).

3. Der Satz IIb ist lediglich eine spezielle Folgerung aus dem wesentlich allgemeineren Hauptsatz dieser Arbeit, nämlich dem

Satz IIa. *Ein unikohärentes lokal zusammenhängendes Kontinuum gestattet keine freie endliche Überdeckung der Ordnung 2 mit abgeschlossenen Mengen* [8]).

Dieser Satz ist mit einem dritten Satz äquivalent, dessen Formulierung wir die folgende Definition vorausschicken:

Definition. Die Abbildung [10]) φ des topologischen Raumes R in einen Raum R' heiße *frei*, wenn es eine solche Abbildung f von R in sich gibt, daß $\varphi f(x) \neq \varphi(x)$ für jeden Punkt x von R ist; mit anderen Worten: wenn die Urbilder $\varphi^{-1}(x')$ der Punkte x' von R' eine freie Überdeckung von R bilden.

Dann ist, wie man leicht zeigt, IIa mit dem folgenden Satz äquivalent:

Satz IIc. *Ein unikohärentes lokal zusammenhängendes Kontinuum gestattet keine freie Abbildung in einen eindimensionalen Raum.*

Die drei Sätze II a, b, c werden — im § 2 — aus einer Eigenschaft beliebiger unikohärenter topologischer Räume [2]) abgeleitet:

Satz I. *Ein unikohärenter topologischer Raum gestattet niemals eine freie endliche Überdeckung der Ordnung 2 mit abgeschlossenen und zusammenhängenden Mengen.*

Dieser Satz wird im § 1 bewiesen.

4. Die folgende Tatsache, die sich unmittelbar aus einem Satz von K. Borsuk ergibt (§ 3, Nr. 19), verdient besondere Beachtung: die drei Eigenschaften, welche laut den Sätzen II a, b, c *notwendige* Bedingungen dafür sind, daß ein lokal zusammenhängendes Kontinuum unikohärent sei, sind hierfür auch *hinreichend*; man erhält somit — bei Beschränkung auf lokal zusammenhängende Kontinuen — drei neue Charakterisierungen der Unikohärenz (Satz III). Zugleich erkennt man, daß die im Satz A_2' von B. Knaster formulierte Voraussetzung der *Unikohärenz* gerade den für unsere Problemstellung — also für die Verallgemeinerung des Satzes A_2 — wesentlichen Punkt trifft.

[10]) Unter einer *Abbildung* soll durchweg eine *eindeutige und stetige* Abbildung verstanden werden.

5. Die Begriffe der *freien Überdeckung* und der *freien Abbildung* sowie die im Vorstehenden ausgesprochenen Sätze gehören in den Bereich der *Fixpunkttheorie.* Wenn nämlich ein Raum R keine fixpunktfreie Abbildung in sich gestattet, so gestattet er offenbar weder eine freie Überdeckung noch irgend eine freie Abbildung; ist aber R ohne Fixpunkt in sich transformierbar, so ist die Identität eine freie Abbildung und die Überdeckung des Raumes R mit allen seinen einpunktigen Teilmengen eine freie Überdeckung. Die Aussage „R kann fixpunktfrei in sich transformiert werden" wird also *verschärft* durch jede Aussage folgender Natur: „R gestattet eine freie Überdeckung *spezieller Art*" (etwa eine freie Überdeckung mit 5 Mengen oder eine freie Überdeckung der Ordnung 3), sowie durch jede Aussage: „R gestattet eine freie Abbildung in einen Raum *von vorgegebenem Charakter*" (etwa in einen beliebigen 2-dimensionalen Raum oder in den euklidischen Raum R^3). Somit sind die oben in Nr. 4 besprochenen Umkehrungen der Sätze II a, b, c (§ 3, Satz III) als Verschärfungen des Satzes von C. Kuratowski aufzufassen [11]): *Jedes multikohärente lokal zusammenhängende Kontinuum kann ohne Fixpunkt in sich abgebildet werden*; und diese Verschärfungen sind — im Gegensatz zu dem Satz selbst — umkehrbar, wie die Sätze II a, b, c zeigen, welche als „abgeschwächte Fixpunktsätze" gelten können.

Übrigens erhält man als Korollar des Satzes IIa den bekannten Fixpunktsatz für Baumkurven (§ 2, Nr. 15).

6. Nachdem, analog der Verallgemeinerung des Satzes A_1 durch den Satz A_1^*, auch eine Verallgemeinerung des Satzes A_2 in befriedigender Weise gelungen ist, hat man den Wunsch, auch die Sätze A_n für $n \geqq 3$ ähnlich zu behandeln. Nun ist es zwar in der Tat möglich, dem Satz A_2' für jedes n einen analogen Satz an die Seite zu stellen, der den Satz A_n als Spezialfall enthält [12]); hierauf will ich an anderer Stelle eingehen. Versucht man aber, auch den Satz A_2'' und die Sätze II a, b, c auf höhere Dimensionen

[11]) C. Kuratowski, wie unter [4]).

[12]) Es gilt der folgende Satz: *P sei ein zusammenhängendes Polyeder*; *es seien seine r-ten Bettischen Zahlen modulo 2 für $r = 1, 2, \ldots, k-1$ sowie seine gewöhnliche k-te Bettische Zahl gleich 0*; *ist P mit $k+2$ abgeschlossenen Mengen überdeckt und ist f eine Involution von P, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein involutorisches Punktepaar.* Hierin ist außer den Sätzen A_n auch der Satz A_2' enthalten, wenn man sich auf Polyeder beschränkt.

zu übertragen, so stößt man, selbst wenn man sich in diesen Sätzen auf die Betrachtung von *Sphären* beschränkt, auf große Schwierigkeiten. Dies soll im § 4 durch Beispiele plausibel gemacht werden. Die Schwierigkeiten scheinen im Wesen der Sache zu liegen, insofern nämlich unter allen Sphären die der niedrigsten Dimensionen tatsächlich eine Sonderstellung einnehmen. Zum Beispiel wird bemerkt (§ 4, Nr. 23, 24): zwischen den Urysohnschen Konstanten d_n und den Durchmessern δ der n-dimensionalen Sphären S^n bestehen die folgenden Beziehungen:

$$d_n(S^n) = \delta(S^n) \quad \text{für} \quad n=1 \text{ und } n=2,$$
$$d_n(S^n) < \delta(S^n) \quad \text{für} \quad n \geqq 3.$$

Und es zeigt sich insbesondere (Nr. 21): der Satz „*Die Sphäre S^n gestattet keine freie Überdeckung mit $n+1$ abgeschlossenen Mengen*" gilt *nur* für $n=0, 1, 2$, jedoch für keine einzige Dimensionszahl $n \geqq 3$. Der Verdacht, der angesichts der Sätze A_1^* und A_2'' auftauchen könnte, daß der Begriff des *Antipoden* für den Satz A_n ganz überflüssig sei, ist also unbegründet.

§ 1.

7. In diesem Paragraphen brauchen wir einige einfache Eigenschaften der Graphen; unter einem *Graphen* verstehen wir einen *Komplex, der höchstens eindimensional ist*[13]).

Die eindimensionalen Simplexe eines Komplexes nennen wir *Kanten*. Zwei Eckpunkte heißen *benachbart*, wenn sie auf einer Kante liegen, d. h. entweder eine Kante *aufspannen* oder miteinander identisch sind. Die von den Eckpunkten p und q aufgespannte Kante bezeichnen wir mit (pq). Eine endliche Folge $(p_1 p_2), (p_2 p_3), \ldots, (p_{n-1} p_n)$ heißt ein *Kantenzug*, der p_1 mit p_n verbindet; kommt in einem Kantenzug keine Strecke mehr als einmal vor, so heißt der Kantenzug *einfach*; ein einfacher Kantenzug, in dem $p_n = p_1$ ist, heißt *einfach geschlossen*. Wenn zwei Eckpunkte p und q eines Komplexes durch einen Kantenzug verbindbar sind, so sind sie offenbar auch durch einen einfachen Kantenzug verbindbar.

Ein Komplex heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei seiner Eckpunkte durch einen Kantenzug verbindbar sind. Ein zusammenhängender Graph heißt *mehrfach zusammenhängend*, wenn es in ihm zwei Eckpunkte gibt, die man durch zwei verschiedene einfache Kantenzüge verbinden kann; er enthält dann, wie man leicht sieht, einen einfach geschlossenen Kantenzug.

[13]) Wegen der hier benutzten Grundbegriffe aus der Theorie der Komplexe vergl. man A.-H., S. 155—157.

Ein *endlicher* Graph, der *einfach zusammenhängend*, d. h. zusammenhängend, aber nicht mehrfach zusammenhängend ist, heißt ein *Baum*. In einem Baum kann man je zwei Eckpunkte p und q durch einen und nur einen einfachen Kantenzug verbinden; diesen bezeichnen wir durch (pq); er ist, wenn p und q eine Strecke aufspannen, mit dieser identisch; ist $p=q$, so ist unter (pq) der nur aus dem Punkt $p=q$ bestehende Komplex zu verstehen. Offenbar ist jeder zusammenhängende Teilkomplex eines Baumes selbst ein Baum.

Neben den hiermit schon ausgesprochenen Tatsachen werden wir noch diejenigen Eigenschaften der Graphen benutzen, die in den nachstehenden Hilfssätzen α, β, γ enthalten sind.

Hilfssatz α. *Der Graph G sei mehrfach zusammenhängend; dann enthält er zwei Teilgraphen P und Q mit folgenden Eigenschaften:*
1) *jeder Eckpunkt von G gehört zu einem und nur einem von ihnen;*
2) *jeder der Graphen P und Q ist zusammenhängend;*
3) *es gibt wenigstens zwei Kanten von G, von denen je ein Eckpunkt zu P, der andere zu Q gehört*[14]).

Beweis. Es sei p ein Eckpunkt eines in G enthaltenen einfach geschlossenen Kantenzuges Z; die beiden von p verschiedenen und mit p benachbarten Eckpunkte von Z seien q und q'. Unter $\mathfrak{Q}$ verstehen wir die Eckpunktmenge, die aus q sowie aus denjenigen Eckpunkten von G besteht, welche mit q durch Kantenzüge verbindbar sind, die p nicht enthalten; z. B. ist $q' \in \mathfrak{Q}$; die Menge aller übrigen Eckpunkte heisse $\mathfrak{P}$. Die von den Eckpunkten der Mengen $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{Q}$ aufgespannten Teilgraphen von G seien P bezw. Q.

Die Behauptung 1 ist richtig infolge der Definition von $\mathfrak{P}$.

Beweis von 2: Q ist zusammenhängend, da infolge der Definition von $\mathfrak{Q}$ jeder Eckpunkt von Q mit dem Punkt q durch einen Kantenzug verbindbar ist, dessen Eckpunkte selbst zu $\mathfrak{Q}$ gehören. Ist p' irgend ein von p verschiedener Eckpunkt von P, so kann man ihn, da G zusammenhängend ist, mit dem Punkt p durch einen einfachen Kantenzug verbinden; kein Eckpunkt dieses Kantenzuges gehört zu $\mathfrak{Q}$, da sonst auch p' zu $\mathfrak{Q}$ gehören würde; folglich ist p' in P mit p verbindbar. Daraus folgt der Zusammenhang von P.

Die Behauptung 3 ist richtig, da die Strecken (pq) und (pq') die gewünschte Eigenschaft haben.

[14]) Dieser Hilfssatz ist der kombinatorische Ausdruck der Multikohärenz der mehrfach zusammenhängenden Polygone.

***Hilfssatz β.** Der Graph G sei einfach zusammenhängend, und es seien p und q voneinander verschiedene, benachbarte Eckpunkte von G; dann enthält G zwei Teilgraphen P und Q mit folgenden Eigenschaften: den Eigenschaften 1 und 2 wie im Hilfssatz α, sowie*

3′) es ist p Eckpunkt von P, q Eckpunkt von Q, und (pq) ist die einzige Kante, von welcher ein Eckpunkt zu P, der andere zu Q gehört.

Beweis. Man definiere P und Q genau so wie im Beweis des Hilfssatzes α. Dann ergibt sich die Richtigkeit der Behauptungen 1 und 2 wörtlich ebenso wie früher.

Beweis von 3′: Daß p Eckpunkt von P und q Eckpunkt von Q ist, folgt unmittelbar aus der Definition von P und Q. Gäbe es noch eine zweite Strecke $(p'q')$ mit $p' \epsilon P$, $q' \epsilon Q$, so könnte man infolge des Zusammenhanges von P und von Q (Eigenschaft 2) leicht einen einfachen Kantenzug konstruieren, der p mit q verbände und von der Strecke (pq) verschieden wäre — entgegen der Einfachheit des Zusammenhanges von G.

***Hilfssatz γ.** G sei ein Baum; jedem Eckpunkt e von G sei ein Eckpunkt $\varphi(e)$ von G zugeordnet. Dann gibt es zwei benachbarte Eckpunkte p und q, so daß (pq) ein Teil von $(\varphi(p)\,\varphi(q))$ ist.* (Dabei darf $p=q$ sein.)[15]

Beweis. Gibt es einen Eckpunkt e mit $\varphi(e)=e$, so erfüllt $p=q=e$ die Behauptung. Es sei also $\varphi(e) \neq e$ für jeden Eckpunkt e. Dann gibt es zu jedem Eckpunkt e einen eindeutig bestimmten einfachen Kantenzug $(e\,\varphi(e))$ und auf ihm genau einen von e verschiedenen Nachbarpunkt von e; diesen nennen wir $\varphi'(e)$. Die Behauptung des Hilfssatzes γ wird offenbar von zwei Punkten p und q erfüllt, wenn $\varphi'(p)=q$ und $\varphi'(q)=p$ ist. Die Existenz eines solchen Punktepaares ist also nachzuweisen.

e_1 sei ein beliebiger Eckpunkt; die unendliche Folge $e_1, e_2, e_3, \ldots$ definieren wir durch die Festsetzung $e_{i+1}=\varphi'(e_i)$. Da G nur endlich viele Eckpunkte besitzt, gibt es zwei solche Indizes i und k, $i<k$, daß $e_k=e_i$, aber $e_j \neq e_i$ für $i<j<k$ ist. Infolge der Definition von φ' ist $k>i+1$; wäre $k>i+2$, so würden die Eckpunkte $e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, \ldots, e_k$ einen einfach geschlossenen Kantenzug aufspannen — entgegen der Tatsache, daß G ein Baum ist. Es ist also $k=i+2$; die Punkte $p=e_i$, $q=e_{i+1}$ haben daher die gewünschte Eigenschaft.

[15]) Dieser Hilfssatz ist der kombinatorische Ausdruck des Fixpunktsatzes für Baumpolygone.

Bei den nachstehenden Anwendungen der Graphen auf topologische Räume werden die Graphen als *Nerven*[16]) von Überdeckungen auftreten. Wir werden folgende Bezeichnungsweise benutzen: ist $\mathfrak{F}$ eine Überdeckung des Raumes R und ist G der Nerv von $\mathfrak{F}$, so bezeichnen wir diejenigen Mengen aus $\mathfrak{F}$, die den Eckpunkten $p, q, \ldots$ von G entsprechen, mit $F_p, F_q, \ldots$; allgemeiner: ist P ein Teilkomplex von G, so verstehen wir unter $\mathfrak{F}_P$ immer die Vereinigungsmenge derjenigen Mengen aus dem System $\mathfrak{F}$, welche den Eckpunkten von P entsprechen.

8. Zunächst leiten wir aus dem Hilfssatz α einen topologischen Satz her:

***Satz I′.** Der topologische Raum R besitze eine solche Überdeckung $\mathfrak{F}$ mit abgeschlossenen und zusammenhängenden Mengen, daß der Nerv G von $\mathfrak{F}$ ein endlicher, mehrfach zusammenhängender Graph ist. Dann ist R multikohärent.*

Beweis. Teilgraphen P und Q von G seien gemäß dem Hilfssatz α gewählt; die Eckpunkte von P seien $p_1, p_2, \ldots, p_r$, die Eckpunkte von Q seien $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Dann ist $F_P = \sum_{i=1}^{r} F_{p_i}$ und $F_Q = \sum_{k=1}^{s} F_{q_k}$. Infolge der Eigenschaft 1 im Hilfssatz α ist $R = F_P + F_Q$.

Da die einzelnen Mengen F_{p_i} und F_{q_k} abgeschlossen sind, sind auch F_P und F_Q abgeschlossen. Da sowohl die Komplexe P und Q (nach Hilfssatz α, Eigenschaft 2) als auch die Mengen F_{p_i} und F_{q_k} zusammenhängend sind, sind auch F_P und F_Q zusammenhängend. Um die Multikohärenz von R in Evidenz zu setzen, bleibt daher nur zu zeigen: die Menge $F_P \cdot F_Q = \sum_{i,k} F_{p_i} \cdot F_{q_k}$ ist nicht leer und nicht zusammenhängend.

Unter den $r \cdot s$ Mengen $F_{p_i} \cdot F_{q_k}$ gibt es infolge der Eigenschaft 3 im Hilfssatz α wenigstens zwei, die nicht leer sind; daraus sieht man erstens, daß $F_P \cdot F_Q$ nicht leer ist, und zweitens, daß die Behauptung, $F_P \cdot F_Q$ sei nicht zusammenhängend, bewiesen ist, sobald man gezeigt hat: je zwei der $r \cdot s$ Mengen $F_{p_i} \cdot F_{q_k}$ sind zueinander fremd.

[16]) A.-H., S. 152.

Die Richtigkeit dieser letzten Behauptung ergibt sich folgendermaßen: wenn nicht gleichzeitig $i=i'$ und $k=k'$ ist, so besteht das Mengensystem $\{F_{p_i}, F_{q_k}, F_{p_{i'}}, F_{q_{k'}}\}$ aus wenigstens drei voneinander verschiedenen Elementen von $\mathfrak{F}$; da die Überdeckung $\mathfrak{F}$, deren Nerv ein eindimensionaler Komplex ist, die Ordnung 2 hat, ist daher $F_{p_i} \cdot F_{q_k} \cdot F_{p_{i'}} \cdot F_{q_{k'}} = 0$, w. z. b. w.

9. Jetzt ziehen wir eine Folgerung aus dem Hilfssatz β:

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{F}$ sei eine Überdeckung des topologischen Raumes R mit abgeschlossenen und zusammenhängenden Mengen; der Nerv G von $\mathfrak{F}$ sei ein Baum; a und b seien zwei Eckpunkten von G, ferner p und q zwei benachbarte Eckpunkte des einfachen Kantenzuges (ab). Ist dann Φ eine zusammenhängende Punktmenge von R, die sowohl mit F_a als auch mit F_b Punkte gemeinsam hat, so ist $\Phi \cdot F_p \cdot F_q \neq 0$.* (Dabei darf auch $p=q$ sein; ist $a=b$, so ist der Satz trivial).

Beweis. Unter $\mathfrak{F}'$ verstehen wir das System derjenigen Mengen aus $\mathfrak{F}$, welche Punkte mit Φ gemeinsam haben, unter G' den Nerven von $\mathfrak{F}'$; da sowohl Φ als auch jedes Element von $\mathfrak{F}$ zusammenhängend ist, ist auch die Menge $F_{G'}$ zusammenhängend. Hieraus folgt, da die Elemente von $\mathfrak{F}'$ abgeschlossen sind, daß G' ein zusammenhängender Komplex ist. Da $\Phi \cdot F_a \neq 0$ und $\Phi \cdot F_b \neq 0$ ist, sind a und b Eckpunkte von G'; infolge des Zusammenhanges von G' enthält G' daher den ganzen Kantenzug (ab) und insbesondere die Punkte p und q. Mithin ist $\Phi \cdot F_p \neq 0$ und $\Phi \cdot F_q \neq 0$.

Für den Fall $p=q$ ist damit der Satz schon bewiesen. Es sei $p \neq q$.

G' ist als zusammenhängender Teilkomplex des Baumes G selbst ein Baum. Daher gibt es zwei Teilkomplexe P und Q von G', welche die im Hilfssatz β ausgesprochenen Eigenschaften haben (wobei man den Baum G des Hilfssatzes β durch G' zu ersetzen hat). Aus der Eigenschaft 1 folgt $\Phi \subset F_P + F_Q$, also $\Phi = \Phi \cdot F_P + \Phi \cdot F_Q$; hierin ist, wie wir schon sahen, keiner der beiden Summanden leer; da Φ zusammenhängend ist und F_P und F_Q abgeschlossen sind, ist daher $\Phi \cdot F_P \cdot F_Q \neq 0$.

Bezeichnen wir die Eckpunkte von P und Q mit p_i bezw. q_k, so ist $F_P = \sum_i F_{p_i}$, $F_Q = \sum F_{q_k}$, also $F_P \cdot F_Q = \sum_{i,k} F_{p_i} \cdot F_{q_k}$. Infolge der Eigenschaft 3' aus dem Hilfssatz β ist nur eine unter den Mengen $F_{p_i} \cdot F_{q_k}$ nicht leer, nämlich die Menge $F_p \cdot F_q$; folglich ist $F_P \cdot F_Q = F_p \cdot F_q$.

Es ist also $\Phi \cdot F_p \cdot F_q = \Phi \cdot F_P \cdot F_Q$, und von dieser Menge haben wir schon gesehen, daß sie nicht leer ist. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

10. Aus dem Hilfssatz γ und dem Hilfssatz 1 ergibt sich nun der folgende Satz:

Satz I''. *R sei ein beliebiger topologischer Raum, $\mathfrak{F}$ eine solche Überdeckung von R mit abgeschlossenen und zusammenhängenden Mengen, daß der Nerv G von $\mathfrak{F}$ ein Baum ist. Dann ist die Überdeckung $\mathfrak{F}$ nicht frei.*

Beweis. Es sei f eine Abbildung von R in sich; wir haben zu zeigen, daß es ein Element F von $\mathfrak{F}$ gibt, für welches $f(F) \cdot F \neq 0$ ist.

Für jeden Eckpunkt e von G bezeichne $\varphi(e)$ einen solchen Eckpunkt von G, daß $f(F_e) \cdot F_{\varphi(e)} \neq 0$ ist. Nach dem Hilfssatz γ gibt es zwei benachbarte Eckpunkte p und q von G, für welche (pq) in $(\varphi(p)\, \varphi(q))$ enthalten ist. Da p und q benachbart sind, ist $F_p \cdot F_q \neq 0$, und daher folgt aus dem Zusammenhang von F_p und von F_q, daß auch $F_p + F_q$ zusammenhängend ist; folglich ist auch $\Phi = f(F_p + F_q)$ zusammenhängend.

Setzen wir $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$, so ist $f(F_p) \cdot F_a \neq 0$, also auch $\Phi \cdot F_a \neq 0$; ebenso ist $\Phi \cdot F_b \neq 0$; da ferner p und q zwei Nachbarpunkte in (ab) sind, sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt. Folglich ist $\Phi \cdot F_p \cdot F_q \neq 0$, also $f(F_p) \cdot F_p \cdot F_q + f(F_q) \cdot F_q \cdot F_p \neq 0$; mithin ist wenigstens eine der Mengen $f(F_p) \cdot F_p$ und $f(F_q) \cdot F_q$ nicht leer. Damit ist der Satz bewiesen.

11. In den Sätzen I' und I'' ist offenbar der in der Einleitung (Nr. 3) ausgesprochene *Satz I* enthalten: denn ist R ein unikohärenter topologischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine endliche Überdeckung der Ordnung 2 von R mit abgeschlossenen und zusammenhängenden Mengen, so ist der Nerv G von $\mathfrak{F}$ ein endlicher zusammenhängender Graph; nach Satz I' ist er nicht mehrfach zusammenhängend, also ist er ein Baum; dann ist $\mathfrak{F}$ nach Satz I'' nicht frei.

§ 2.

12. Unser nächstes Ziel ist der Beweis des Satzes IIa (cf. Nr. 3 der Einleitung). Wir schicken ihm einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 2. *K sei ein lokal zusammenhängendes Kontinuum und $\mathfrak{F}$ eine endliche Überdeckung von K mit abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2, \ldots, F_r$; die Ordnung von $\mathfrak{F}$ sei λ; eine positive Zahl γ sei gegeben. Dann gibt es eine endliche Überdeckung $\mathfrak{F}'$ von K mit abgeschlossenen Mengen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:*

1^0 *jede Menge Φ_j ist zusammenhängend;*

2^0 *jede Menge Φ_j liegt in der γ-Umgebung*[16a]) *einer Menge F_i;*

3^0 *die Ordnung von $\mathfrak{F}'$ ist ebenfalls λ.*

Beweis. γ' sei eine positive Zahl, die $<\gamma$ und kleiner als die Hälfte der Lebesgueschen Zahl[17]) von $\mathfrak{F}$ ist; die letztere Bedingung bedeutet: wenn eine Punktmenge aus K vom Durchmesser $\leqq 2\gamma'$ mit jeder Menge eines Teilsystems $\{F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_h}\}$ von $\mathfrak{F}$ einen Punkt gemeinsam hat, so ist $F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \ldots \cdot F_{i_h} \neq 0$.

Wegen des lokalen Zusammenhanges von K besitzt jeder Punkt x von K eine Umgebung $U(x)$, welche zusammenhängend und in der γ'-Umgebung von x enthalten ist[5]); wegen der Kompaktheit von K wird K bereits durch ein endliches System solcher $U(x)$ überdeckt; es sei $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ ein derartiges endliches System. Wir verstehen für $i = 1, 2, \ldots, r$ unter G_i die Vereinigungsmenge derjenigen U_j, die mit F_i Punkte gemeinsam haben; G_i ist eine offene Menge, die — infolge des Zusammenhanges der U_j — nur endlich viele Komponenten besitzt; daher besitzt auch die abgeschlossene Hülle $\overline{G}_i$ nur endlich viele Komponenten; diese Komponenten seien $\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \ldots, \Phi_{is_i}$. Die Gesamtheit aller Φ_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, r;$ $j = 1, 2, \ldots, s_i)$ ist eine Überdeckung $\mathfrak{F}'$ von K; wir behaupten, daß sie die gewünschten Eigenschaften hat.

Daß die Mengen Φ_{ij} abgeschlossen sind und die Eigenschaften 1^0 und 2^0 besitzen, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Definition. Ebenso ist klar, daß die Ordnung μ von $\mathfrak{F}'$ nicht kleiner als λ ist; zu beweisen bleibt: $\mu \leqq \lambda$.

[16a]) Die γ-*Umgebung* $U(F, \gamma)$ einer Menge F in einem metrischen Raum ist die Menge aller Punkte x mit $\varrho(x, F) < \gamma$. Durch ϱ wird immer die Entfernungsfunktion bezeichnet.

[17]) A.-H., S. 101—102.

Es sei $\{\Phi_{i_1 j_1}, \Phi_{i_2 j_2}, \ldots, \Phi_{i_\mu j_\mu}\}$ ein aus μ *verschiedenen* Elementen Φ_{ij} bestehendes Teilsystem von $\mathfrak{F}'$, für welches $\Phi_{i_1 j_1} \cdot \Phi_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot \Phi_{i_\mu j_\mu} \neq 0$ ist. Dann sind die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ paarweise voneinander verschieden; denn wäre etwa $i_1 = i_2$, so wären $\Phi_{i_1 j_1}$ und $\Phi_{i_2 j_2}$ zwei verschiedene Komponenten der Menge $\overline{G}_{i_1}$, was unmöglich ist, da $\Phi_{i_1 j_1} \cdot \Phi_{i_2 j_2} \neq 0$ ist. Folglich bilden die Mengen $F_{i_1}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_\mu}$ ein aus μ verschiedenen Elementen bestehendes Teilsystem von $\mathfrak{F}$. Jede dieser Mengen hat, wenn x ein Punkt des Durchschnittes $\Phi_{i_1 j_1} \cdot \Phi_{i_2 j_2} \cdot \ldots \cdot \Phi_{i_\mu j_\mu}$ ist, von x einen Abstand, der $\leqq \gamma'$ ist, und jede von ihnen hat daher mit der abgeschlossenen Hülle der γ'-Umgebung von x, also mit einer Menge vom Durchmesser $\leqq 2\gamma'$, einen Punkt gemeinsam. Somit ist, wie am Anfang des Beweises festgestellt wurde, $F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \ldots \cdot F_{i_\mu} \neq 0$, und daher $\mu \leqq \lambda$. Damit ist die Eigenschaft 3^0 bewiesen.

13. Beweis des Satzes IIa. U sei ein unikohärentes lokal zusammenhängendes Kontinuum, $\mathfrak{F}$ eine endliche Überdeckung der Ordnung 2 von U mit abgeschlossenen Mengen und f eine Abbildung von U in sich; es soll gezeigt werden, daß es ein Element F von $\mathfrak{F}$ gibt, für welches $f(F) \cdot F \neq 0$ ist. Da $\mathfrak{F}$ nur endlich viele Elemente enthält, genügt es hierfür, das folgende zu beweisen: zu einem willkürlichen positiven ε gibt es ein Element F von $\mathfrak{F}$, für welches die Entfernung $\varrho(f(F), F) < \varepsilon$ ist.

Zu dem gegebenen ε existiert infolge der gleichmäßigen Stetigkeit von f eine solche positive Zahl δ, daß für je zwei Punkte x und y mit $\varrho(x, y) < \delta$ immer $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ ist. Unter γ verstehen wir die kleinere der Zahlen $\varepsilon/2$ und δ. Auf $\mathfrak{F}$ und γ wenden wir den Hilfssatz 2 an und konstruieren also eine Überdeckung $\mathfrak{F}'$ von U, welche die im Hilfssatz 2 genannten Eigenschaften besitzt und daher insbesondere die Ordnung 2 hat. Nach Satz I ist $\mathfrak{F}'$ nicht frei; es gibt also ein Element Φ von $\mathfrak{F}'$, für das $f(\Phi) \cdot \Phi \neq 0$ ist. Diese Menge Φ ist — entsprechend dem Hilfssatz 2 — in der γ-Umgebung einer zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Menge F enthalten. Da $\gamma \leqq \varepsilon/2$ ist, ist also $\Phi \subset U(F, \varepsilon/2)$. Da $\gamma \leqq \delta$ ist, ist $\Phi \subset U(F, \delta)$, und hieraus folgt nach der Definition von δ: $f(\Phi) \subset U(f(F), \varepsilon/2)$. Aus den drei Relationen

$$\Phi\cdot f(\Phi) \neq 0, \qquad \Phi \subset U(F, \varepsilon/2), \qquad f(\Phi) \subset U(f(F), \varepsilon/2)$$

ergibt sich $\varrho(f(F), F) < \varepsilon$, w. z. b. w.

14. Aus dem damit bewiesenen Satz IIa folgt leicht eine Eigenschaft einer der Urysohnschen Konstanten [18]) von U.

Wir erinnern an deren Definition und einfachsten Eigenschaften: unter der *k-ten Urysohnschen Konstanten* $d_k(R)$ des kompakten metrischen Raumes R versteht man die untere Grenze derjenigen Zahlen ε, für welche R Überdeckungen von Ordnungen $\leqq k$ mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind, gestattet ($k = 1, 2, \ldots$). Es ist immer $d_k(R) \geqq d_{k+1}(R)$ und, wenn $\delta(R)$ den Durchmesser von R bezeichnet, $\delta(R) \geqq d_k(R)$; ist R zusammenhängend, so ist $d_1(R) = \delta(R)$; ist R n-dimensional, so ist $d_n(R) > d_{n+1}(R) = 0$.

Satz IIa'. *Es sei U ein unikohärentes lokal zusammenhängendes Kontinuum, das mit einer Metrik versehen ist, und f eine beliebige stetige Abbildung von U in sich. Dann gibt es einen Punkt x von U mit*

$$\varrho(f(x), x) \leqq d_2(U).$$

Beweis. ε sei eine Zahl, die $> d_2(U)$ ist. Dann gibt es eine endliche Überdeckung $\mathfrak{F}$ der Ordnung 2 von U mit abgeschlossenen Mengen, von denen jede einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat. Nach Satz IIa ist $\mathfrak{F}$ nicht frei; für ein gewisses Element F von $\mathfrak{F}$ ist also $f(F)\cdot F \neq 0$; diese Menge F enthält ein Punktepaar $\{x, f(x)\}$, und für dieses Paar ist $\varrho(f(x), x) < \varepsilon$. Da es zu jedem $\varepsilon > d_2(U)$ einen derartigen Punkt x gibt und da U kompakt ist, existiert auch ein Punkt x mit $\varrho(f(x), x) \leqq d_2(U)$.

15. Wir machen zwei Anwendungen des Satzes IIa'. Erstens: wenn U eindimensional ist, so ist $d_2(U) = 0$, und wir erhalten den bekannten Fixpunktsatz [19]):

[18]) P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes* (suite), Fund. Math. VIII (1927), S. 225 (Notes supplémentaires).

[19]) Zuerst für topologische Abbildungen bewiesen von W. Scherrer, *Über ungeschlossene stetige Kurven*, Math. Zeitschrift 24 (1926), S. 125; für beliebige Abbildungen von G. Nöbeling, Ergebnisse eines math. Kolloquiums 2 (Wien 1932), S. 19 (cf. K. Menger, *Kurventheorie* (Berlin-Leipzig 1932), S. 313), und auf einem anderen Wege von K. Borsuk, *Einige Sätze über stetige Streckenbilder*, Fund. Math. XVIII (1932), S. 198 (Hauptsatz 1, Korollar 1). Ausserdem ist der Satz ein Spezialfall eines viel allgemeineren Fixpunktsatzes von S. Lefschetz in dem Buch *Topology* (New York 1930), S. 359.

Korollar I. *Bei jeder Abbildung einer Baumkurve — d. h. eines eindimensionalen, unikohärenten, lokal zusammenhängenden Kontinuums — in sich existiert ein Fixpunkt.*

Zweitens: U sei die n-dimensionale Sphäre S^n und f die antipodische Abbildung von S^n auf sich; dann ist $\varrho(f(x), x) = \delta(S^n)$ für jeden Punkt x von S^n; da für $n \geqq 2$ die S^n unikohärent ist, ergibt sich:

Korollar II. *Für die n-dimensionalen Sphären S^n mit $n \geqq 2$ ist*

$$d_2(S^n) = \delta(S^n) \text{ [20]}).$$

16. Beweis des Satzes IIb (Einleitung, Nr. 2). Das unikohärente lokal zusammenhängende Kontinuum U sei mit den abgeschlossenen Mengen F_1, F_2, F_3 überdeckt. Wenn $F_1\cdot F_2\cdot F_3 = 0$ ist, so hat die Überdeckung die Ordnung 2 und ist daher nicht frei nach Satz IIa. Wenn es einen Punkt $x \in F_1\cdot F_2\cdot F_3$ gibt, so gehört für jede Abbildung f von U in sich das Punktepaar $\{x, f(x)\}$ einer der drei Mengen an. Die Überdeckung ist also in keinem Fall frei.

Mit dem Satz IIb sind auch die in der Einleitung zitierten Sätze A_2' und A_2'' noch einmal bewiesen, sowie die folgende Verallgemeinerung des Satzes A_2'':

Korollar III. *Ist $n \geqq 2$, so gestattet die Sphäre S^n keine freie Überdeckung mit drei abgeschlossenen Mengen.*

17. Daß der *Satz IIc* (Einleitung, Nr. 3) mit dem Satz IIa äquivalent und somit gültig ist, ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 3. *Der kompakte metrische Raum R gestattet dann und nur dann eine freie endliche Überdeckung einer Ordnung $\leqq \lambda + 1$ mit abgeschlossenen Mengen, wenn er eine freie Abbildung in einen höchstens λ-dimensionalen Raum gestattet* [21]).

Beweis. Erstens: f sei eine Abbildung von R in sich und φ eine solche Abbildung von R in den höchstens λ-dimensionalen Raum R', daß $\varphi f(x) \neq \varphi(x)$ für jeden Punkt x von R ist. Da $f(R)$

[20]) Für $n > 2$ wird eine Verallgemeinerung dieser Gleichheit auf einem anderen Wege durch die Formeln (9a) und (10) in Nr. 23 und Nr. 24 bewiesen werden.

[21]) Dieser Hilfssatz ist im wesentlichen in Nr. 2 der Arbeit von C. Kuratowski und S. Ulam, *Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. XX (1933), S. 244, enthalten.

kompakt ist, gibt es eine solche Zahl ε, daß $\varrho(\varphi f(x), \varphi(x)) > \varepsilon > 0$ für alle Punkte x ist. Nun gibt es abgeschlossene Mengen $F'_1, F'_2, \dots, F'_m$ deren Durchmesser $<\varepsilon$ sind und die eine Überdeckung einer Ordnung $\leqq \lambda+1$ von $f(R)$ bilden. Dann bilden die abgeschlossenen Mengen $F_i = \varphi^{-1}(F'_i)$, $i=1, 2, \dots, m$, eine Überdeckung derselben Ordnung $\leqq \lambda+1$ von R. Diese Überdeckung ist frei; denn ist $x \in F_i$, so ist $\varphi(x) \in F'_i$ und, da $\varrho(\varphi f(x), \varphi(x))$ größer als der Durchmesser von F'_i ist, $\varphi f(x)$ *nicht* $\in F'_i$, also $f(x)$ *nicht* $\in F_i$, und mithin ist $f(F_i)\cdot F_i = 0$.

Zweitens: Es sei wieder f eine Abbildung von R in sich, und ferner seien $F_1, F_2, \dots, F_m$ abgeschlossene Mengen, die eine Überdeckung einer Ordnung $\leqq\lambda+1$ von R bilden und für die $f(F_i)\cdot F_i=0$, $i=1, 2, \dots, m$, gilt. Für jedes hinreichend kleine positive ε hat, wie man leicht sieht, die Überdeckung, die von den offenen Mengen $G_i = U(F_i, \varepsilon)$, $i=1, 2, \dots, m$, gebildet wird, dieselbe Ordnung $\leqq\lambda+1$ und ebenfalls die Eigenschaft: $f(G_i)\cdot G_i = 0$ für alle i. Nun kann man bekanntlich [22]), nach einem Verfahren von Kuratowski, den Raum R durch eine solche Abbildung φ in den Nerven N der Überdeckung [23]) abbilden, daß folgendes gilt: bezeichnet e_i den Eckpunkt von N, der der Menge G_i entspricht, so liegt der Punkt $\varphi(x)$ dann und nur dann im Inneren eines Simplexes von N, zu dessen Eckpunkten e_i gehört, wenn $x \in G_i$ ist. Da nun x und $f(x)$ niemals zugleich einer Menge G_i angehören, ist gewiß niemals $\varphi(x) = \varphi f(x)$; die Abbildung ist also frei. Da N höchstens λ-dimensional ist, ist damit der Hilfssatz bewiesen.

Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß man noch einen Zusatz machen kann: ist f eine feste Abbildung von R in sich, so möge die Überdeckung $\mathfrak{F}$ von R frei *in bezug auf* f heißen, falls $f(F)\cdot F = 0$ für jedes Element F von $\mathfrak{F}$ ist; und die Abbildung φ von R heiße frei *in bezug auf* f, wenn $\varphi f(x) \neq \varphi(x)$ für alle Punkte x von R ist. Dann gilt, wie der obige Beweis zeigt:

Zusatz zum Hilfssatz 3. *R sei ein kompakter metrischer Raum und f eine Abbildung von R in sich. Der Raum R gestattet dann und nur dann eine in bezug auf f freie endliche Überdeckung einer Ordnung $\leqq \lambda+1$ mit abgeschlossenen Mengen, wenn er eine in bezug auf f freie Abbildung auf einen höchstens λ-dimensionalen Raum gestattet.*

[22]) C. Kuratowski, *Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles*, Fund. Math. XX (1933), S. 191. Man vgl. auch A.-H., S. 366—368.

[23]) Der Nerv N wird als euklidisches Polyeder realisiert gedacht.

18. Als Spezialfall des Satzes IIc heben wir hervor:

Korollar IV. *Ist $n \geqq 2$ und φ eine Abbildung der Sphäre S^n auf einen eindimensionalen Raum, so ist φ nicht frei; insbesondere gibt es ein antipodisches Punktepaar $\{x, y\}$ von S^n mit $\varphi(x)=\varphi(y)$.*

§ 3.

19. ***Satz III.*** *Dafür, daß das lokal zusammenhängende Kontinuum K multikohärent sei, ist jede einzelne der folgenden drei Bedingungen* (a), (b), (c) *sowohl notwendig als auch hinreichend*:

(a) *K gestattet eine freie endliche Überdeckung der Ordnung 2 mit abgeschlossenen Mengen*;

(b) *K gestattet eine freie Überdeckung mit drei abgeschlossenen Mengen*;

(c) *K gestattet eine freie Abbildung auf eine eindimensionale Menge.*

Beweis. Daß jede der drei Bedingungen für die Multikohärenz hinreichend ist, ist der Inhalt der Sätze II a, b, c. Die Notwendigkeit werden wir aus dem folgenden Satz von K. Borsuk [24]) schließen können:

Satz B. *Jedes multikohärente lokal zusammenhängende Kontinuum K enthält eine einfach geschlossene Linie L, die ein Retrakt* [25]) *von K ist.*

Wir verstehen nun unter φ eine Abbildung, welche K auf L retrahiert, unter α die antipodische Abbildung von L auf sich — „antipodisch" in dem Sinn, daß man L als Kreislinie auffaßt — und unter f die Abbildung $f = \alpha\varphi$ von K in sich. Dann ist für jeden Punkt x von K

$$\varphi f(x) = \varphi\alpha\varphi(x) = \alpha\varphi(x) \neq \varphi(x),$$

also ist die Abbildung φ frei; K besitzt somit die Eigenschaft (c). Ferner verstehen wir unter F'_1, F'_2, F'_3 drei abgeschlossene Teilmengen von L, die entstehen, wenn man L — wieder bei Auffas-

[24]) K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII (1931), S. 171 (besonders Nr. 30).

[25]) D. h.: es gibt eine solche Abbildung φ von K auf L, daß $\varphi(x)=x$ für jeden Punkt x von L ist; φ heißt eine *retrahierende* Abbildung. Cf. K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. XVII (1931), S. 152.

sung von L als Kreislinie — in drei gleichlange Bögen einteilt, und unter F_i die Mengen $F_i = \varphi^{-1}(F_i')$, $i = 1, 2, 3$. Die drei abgeschlossenen Mengen F_i bilden eine Überdeckung der Ordnung 2 von K; diese Überdeckung ist frei; denn es ist $f(F_i) = \alpha(F_i') \subset L$, also $f(F_i) = L \cdot f(F_i)$ und $F_i \cdot f(F_i) = L \cdot F_i \cdot f(F_i) = F_i' \cdot f(F_i) = F_i' \cdot \alpha(F_i') = 0$. Folglich besitzt K auch die Eigenschaften (a) und (b).

20. In den Sätzen II a, b, c haben wir von dem betrachteten Kontinuum U zweierlei vorausgesetzt: 1° *den lokalen Zusammenhang*, 2° *die Unikohärenz*. Der Satz III lehrt, daß die Voraussetzung 2° für die Gültigkeit der Sätze II a, b, c unentbehrlich ist. Man wird fragen: Kann man, bei Beibehaltung der Voraussetzung 2°, auf die Voraussetzung 1° verzichten? Diese Frage ist zu verneinen, wie das folgende Beispiel[26]) zeigt: U sei das ebene Kontinuum, das aus einer Kreislinie K und aus einer Linie besteht, die in einem Punkt des Außengebietes von K beginnt und sich asymptotisch in Form einer Spirale dem Kreis K nähert; dieses Kontinuum U ist unikohärent, aber nicht lokal zusammenhängend; es besitzt, wie man leicht bestätigt, die Eigenschaften (a), (b), (c) aus dem Satz III; die Behauptungen der Sätze II a, b, c treffen also für dieses unikohärente Kontinuum U nicht zu.

Jedoch ist es zweckmäßig, unsere Frage anders zu wenden. Für lokal zusammenhängende Kontinuen ist ja die Unikohärenz gleichbedeutend mit dem Verschwinden der ersten Bettischen Zahl[4]), und man darf daher in den Sätzen II a, b, c die obige Voraussetzung 2° auch so formulieren: 2′ *die erste Bettische Zahl von U ist* 0. Jetzt lautet die Frage: *Bleiben die Sätze II a, b, c gültig, wenn man nur die Voraussetzung 2′ macht, auf die Voraussetzung 1° aber verzichtet?*

Die Antwort hierauf ist mir nicht bekannt[26a]). Falls die Frage für den Satz II a zu bejahen wäre, so würde man — analog wie das Korollar I in Nr. 15 — den folgenden Fixpunktsatz erhalten: Bei jeder Abbildung eines eindimensionalen Kontinuums, dessen erste Bettische Zahl 0 ist, in sich existiert ein Fixpunkt.

Soviel ich weiß, ist die Gültigkeit dieses Satzes bis jetzt — sogar für *ebene* Kontinuen — unentschieden.

§ 4.

21. Dieser Paragraph handelt von einigen Fragen, welche die n-dimensionalen Sphären betreffen und durch die im Vorstehenden bewiesenen Sätze angeregt sind.

Wir knüpfen an den Satz A_2'' (Nr. 2) und das Korollar III (Nr. 16), das ihn verallgemeinert, an und fragen: *wie groß ist bei gegebenem n die kleinste Zahl ν, für welche eine freie Überdeckung der Sphäre S^n mit ν abgeschlossenen Mengen existiert?*

Diese Minimalzahl heiße $\nu(n)$.

---

[26]) Cf. K. Borsuk, l. c.[24]), Nr. 36.

[26a]) Für den Satz IIb ist die Frage inzwischen durch Herrn S. Eilenberg, S. 58 dieses Bandes, bejaht worden.

Erstens ist gewiß

(1) $$\nu(n) \leqq n+2 \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \text{ ad inf.};$$

denn projiziert man die $n+2$ $(n-1)$-dimensionalen Seiten eines regulären $(n+1)$-dimensionalen Simplexes, das der S^n einbeschrieben ist, vom Mittelpunkt aus auf die S^n, so erhält man eine Überdeckung der S^n mit $n+2$ abgeschlossenen Mengen, welche frei in bezug auf die antipodische Abbildung der S^n ist.

Zweitens wissen wir: *es ist*

(2) $$\nu(n) = n+2 \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2;$$

denn für $n=1$ und $n=2$ folgt (2) aus den Sätzen A_1^* (Nr. 1) und A_2'' (Nr. 2), und auch für $n=0$ ist (2) offenbar richtig.

Wir behaupten nun, daß im Gegensatz zu (2)

(3) $$\nu(n) \leqq n+1 \qquad \text{für} \quad n = 3, 4, \ldots$$

ist, daß es also für jedes $n \geqq 3$ eine freie Überdeckung der S^n mit $n+1$ abgeschlossenen Mengen gibt.

Beweis. Die S^n sei durch $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$ gegeben; die folgenden Gleichungen definieren für $n \geqq 3$ eine Abbildung f von S^n auf sich:

(f) $$x_0' = +x_2 \qquad x_1' = -x_3 \qquad x_2' = -x_0 \qquad x_3' = +x_1$$
$$x_k' = -x_k \qquad \text{für } k = 4, \ldots, n \text{ (falls } n \geqq 4).$$

Ferner bestimmen die folgenden Formeln eine Abbildung ψ der S^n in einen euklidischen Raum R^n, in dem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rechtwinklige Koordinaten sind:

(ψ) $$y_1 = 2(x_0 x_2 + x_1 x_3) \qquad y_2 = 2(x_1 x_2 - x_0 x_3) \qquad y_3 = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$
$$y_k = x_k \qquad \text{für } k = 4, \ldots, n \text{ (falls } n \geqq 4).$$

Dann ist

(4) $$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2;$$

folglich gehört der Nullpunkt o des R^n nicht zu dem Bilde $\psi(S^n)$. Ferner ist

(5) $$\psi f(x) = -\psi(x)$$

für jeden Punkt x von S^n; dabei bezeichnen wir, wenn y ein Punkt des R^n ist, mit $-y$ den Punkt, der aus y durch Spiegelung an o hervorgeht.

Nun sei Y^n ein n-dimensionales Simplex des R^n, das o im Inneren enthält, und für jeden von o verschiedenen Punkt y des R^n sei $\pi(y)$ der Schnittpunkt des Strahles $\overrightarrow{oy}$ mit dem Rande $\dot{Y}^n$ von Y^n. Dann ist, da o nicht zu $\psi(S^n)$ gehört, $\varphi = \pi\psi$ eine eindeutige und stetige Abbildung von S^n auf $\dot{Y}^n$. Die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von Y^n seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}$; wir setzen $X_i = \varphi^{-1}(Y_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n+1$; dann bilden die $n+1$ abgeschlossenen Mengen X_i eine Überdeckung von S^n. Sie ist frei; denn aus (5) ist ersichtlich, daß die Punkte $\varphi(x)$ und $\varphi f(x)$ niemals derselben Menge Y_i, also die Punkte x und $f(x)$ niemals derselben Menge X_i angehören. Damit ist (3) bewiesen.

Aus dem Korollar III (Nr. 16) folgt ferner

(6) $$\nu(n) \geqq 4 \qquad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Aus (3) und (6) ergibt sich speziell

$$\nu(3) = 4.$$

Dagegen bleibt für beliebiges n die Frage, wie groß $\nu(n)$ ist, offen. Bereits für $n=4$ wissen wir — aus (3) und (6) — nur, daß $\nu(4)$ entweder gleich 4 oder gleich 5 ist.

22. Die in Nr. 21 konstruierte Abbildung φ der Sphäre S^n, $n \geqq 3$, auf den $(n-1)$-dimensionalen Rand des Simplexes Y^n ist, wie aus (5) folgt, frei in bezug auf f. Andererseits gilt das Korollar IV (Nr. 18), und außerdem ist eine Abbildung φ der Kreislinie S^1 auf einen nulldimensionalen Raum niemals frei, da das Bild $\varphi(S^1)$ nur aus einem Punkt besteht. Somit sehen wir:

Für jede Dimensionszahl $n \geqq 3$, jedoch nicht für $n \leqq 2$, existieren freie Abbildungen der Sphäre S^n, welche die Dimension erniedrigen.

Die folgende Frage erhebt sich: *Wie stark kann man die Dimension der Sphäre S^n durch eine freie Abbildung erniedrigen?*

23. Wir werden hier nicht auf diese allgemeine Frage, sondern nur auf ihren Spezialfall eingehen, der sich bei Beschränkung auf *antipodenfreie* Abbildungen der S^n ergibt, d. h. solche Abbildungen φ, daß $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ für jedes Antipodenpaar $\{x, y\}$ ist. *Für jedes n bezeichne $\lambda(n)$ die kleinste Zahl λ mit folgender Eigenschaft: S^n läßt sich antipodenfrei auf eine λ-dimensionale Menge abbilden.* Dann wissen wir (vgl. Nr. 22):

(7) $$\lambda(n) = n \qquad \text{für} \quad n = 0, 1, 2;$$

jedoch ist, wie wir sehen werden,

(7′) $$\lambda(n) \leqq n-1 \qquad \text{für} \quad n = 3, 4, \ldots.$$

Wir behaupten aber mehr als (7′), nämlich:

(8a) $$\lambda(n) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{für ungerades } n,$$

(8b) $$\lambda(n) = \frac{n}{2} \quad \text{oder} \quad = \frac{n+2}{2} \qquad \text{für gerades } n.$$

Gemäß (7) trifft in (8b) für $n=0$ die erste, für $n=2$ die zweite der beiden Möglichkeiten zu; *für jedes gerade $n \geqq 4$ bleibt die Frage unbeantwortet, ob $\lambda(n) = \frac{n}{2}$ oder $\lambda(n) = \frac{n+2}{2}$ ist.*

Die Behauptungen (8a) und (8b) werden in Nr. 24 bewiesen werden. Jetzt sei auf eine zweite Deutung der Zahl $\lambda(n)$ hingewiesen, die sich unmittelbar aus dem Zusatz zum Hilfssatz 3 (Nr. 17) ergibt:

Jede endliche Überdeckung der S^n mit abgeschlossenen Mengen, von denen keine ein Antipodenpaar enthält, hat eine Ordnung $\geqq \lambda(n)+1$, und andererseits gibt es derartige Überdeckungen, deren Ordnung gleich $\lambda(n)+1$ ist.

Man kann dies auch durch die Urysohnschen Konstanten d_k (vgl. Nr. 14) und den Durchmesser δ der S^n ausdrücken: es ist

(9a) $$d_k(S^n) = \delta(S^n) \qquad \text{für} \quad k \leqq \lambda(n),$$

(9b) $$d_k(S^n) < \delta(S^n) \qquad \text{für} \quad k > \lambda(n).$$

In (9a), (9b), (7), (7′) ist insbesondere enthalten:

$$d_n(S^n) = \delta(S^n) \qquad \text{für} \quad n=1 \text{ und } n=2,$$

$$d_n(S^n) < \delta(S^n) \qquad \text{für} \quad n=3, 4, \ldots.$$

24. Beweis von (8a) und (8b). Es gibt eine antipodenfreie Abbildung der S^n auf eine $\lambda(n)$-dimensionale Menge; diese Menge darf man nach dem Menger-Nöbelingschen Einbettungssatz[27]) als Teilmenge des euklidischen Raumes der Dimension $2\lambda(n)+1$ annehmen. Nun gilt aber der folgende Satz von Borsuk-Ulam[28]):

Satz C_n. *Die Sphäre S^n gestattet keine antipodenfreie Abbildung in den n-dimensionalen euklidischen Raum R^n.*

Folglich ist $2\lambda(n)+1>n$, das heißt:

$$\lambda(n) \geqq \frac{n}{2}. \tag{10}$$

Um (8a) und (8b) zu beweisen, haben wir daher nur zu zeigen:

$$\lambda(n) \leqq \frac{n+1}{2} \qquad \text{für ungerades } n,$$

$$\lambda(n) \leqq \frac{n+2}{2} \qquad \text{für gerades } n;$$

wir haben also antipodenfreie Abbildungen der S^n auf Mengen der Dimensionen $\frac{n+1}{2}$ bezw. $\frac{n+2}{2}$ zu konstruieren.

Wir geben eine solche Konstruktion zunächst für die ungeraden n an, und zwar der Reihe nach für $n=1, 3, 5, \ldots$. Zum Zwecke der Induktion verschärfen wir unsere Aufgabe zu der folgenden: die S^n soll antipodenfrei auf ein $\frac{n+1}{2}$-dimensionales Polyeder abgebildet werden, welches *sternförmig* ist, d. h. welches eine solche Simplizialzerlegung besitzt, daß in ihr alle Grundsimplexe einen gemeinsamen Eckpunkt haben. In einem sternförmigen Polyeder ist offenbar jede Punktmenge stetig auf einen Punkt zusammenziehbar; hieraus folgt in bekannter Weise: jede Abbildung der Randsphäre eines Elementes E in P läßt sich zu einer Abbildung von E in P erweitern[29]).

P^1 sei ein Polygon, das aus drei Strecken $|a' b_1'|$, $|a' b_2'|$, $|a' b_3'|$ mit dem gemeinsamen Eckpunkt a' besteht. Auf einer Kreislinie S^1 seien a_1, a_2, a_3 drei Punkte, die S^1 in gleichlange Bögen zerlegen, und b_1, b_2, b_3 die Mittelpunkte dieser Bögen. Wir definieren eine Abbildung φ von S^1 auf P^1, indem wir festsetzen: $\varphi(a_i)=a'$ für $i=1, 2, 3$; $\varphi(b_k)=b_k'$ für $k=1, 2, 3$; jeder der sechs Bögen $b_k a_i$ (wobei b_k und a_i benachbarte unter den sechs Punkten sind) wird proportional auf die Strecke $|b_k' a'|$ abgebildet. Diese Abbildung φ ist offenbar antipodenfrei.

[27]) Cf. z. B. A.-H., S. 369.

[28]) K. Borsuk, wie unter [1]), sowie A.-H., wie unter [1]).

[29]) Cf. z. B. A.-H., S. 502, Hilfssatz II. Unter einem *Element* verstehen wir das topologische Bild eines euklidischen Simplexes.

Es sei jetzt bereits eine antipodenfreie Abbildung φ der Sphäre S^{n-2} auf ein sternförmiges Polyeder $P^{\frac{n-1}{2}}$ bekannt; eine antipodenfreie Abbildung der S^n auf ein sternförmiges Polyeder $P^{\frac{n+1}{2}}$ soll konstruiert werden. Die S^n sei durch $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ gegeben; durch $x_1=x_2=0$ wird auf S^n eine Sphäre S^{n-2} bestimmt; diese sei durch φ antipodenfrei auf $P^{\frac{n-1}{2}}$ abgebildet, wobei $P^{\frac{n-1}{2}}$ sternförmig ist. Setzen wir $x_1=r\cos\alpha$, $x_2=r\sin\alpha$, so bilden die Punkte der S^n, für welche α einen festen Wert hat, eine $(n-1)$-dimensionale Halbkugel, die von S^{n-2} berandet wird. Entsprechend unserer obigen Bemerkung über die Erweiterbarkeit von Abbildungen kann man die auf S^{n-2} gegebene Abbildung φ zu einer Abbildung jeder derartigen Halbkugel auf $P^{\frac{n-1}{2}}$ erweitern; wir tun dies für die drei Halbkugeln, die zu den Werten $\alpha=i\cdot\frac{2\pi}{3}$, $i=0, 1, 2$, gehören. Auf der Vereinigungsmenge H dieser drei (abgeschlossenen) Halbkugeln gibt es keine anderen Antipodenpaare der S^n als diejenigen, die auf S^{n-2} liegen; folglich ist die Abbildung π von H auf $P^{\frac{n-1}{2}}$ antipodenfrei.

S^n wird durch H in die drei Gebiete G_k zerlegt, die durch

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{3} < \alpha < \left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{3}, \qquad k=1, 2, 3,$$

bestimmt sind. Man bestätigt leicht die folgenden beiden Eigenschaften der G_k: erstens gehört der Antipode eines Punktes x von G_k immer zu $S^n-\overline{G}_k$ (wobei $\overline{G}_k$ die abgeschlossene Hülle von G_k ist); zweitens: ist $x \in G_k$, $y \in \overline{G}_k - G_k$, so liegt der Großkreisbogen, der x mit y verbindet und $<\pi$ ist, mit Ausnahme seines Endpunktes y ganz in G_k.

Nun konstruieren wir ein Polyeder $P^{\frac{n+1}{2}}$, indem wir mit drei Punkten b_1', b_2', b_3' als Spitzen drei Kegel $P_1^{\frac{n+1}{2}}, P_2^{\frac{n+1}{2}}, P_3^{\frac{n+1}{2}}$ über $P^{\frac{n+1}{2}}$ errichten, von denen je zwei außer den Punkten von $P^{\frac{n-1}{2}}$ keinen Punkt gemeinsam haben, und $P_1^{\frac{n+1}{2}}+P_2^{\frac{n+1}{2}}+P_3^{\frac{n+1}{2}}=P^{\frac{n+1}{2}}$ setzen. Aus der Sternförmigkeit von $P^{\frac{n-1}{2}}$ folgt, daß auch $P^{\frac{n+1}{2}}$ sternförmig ist.

Jetzt definieren wir die Abbildung φ von S^n auf $P^{\frac{n+1}{2}}$: die Abbildung φ von H auf den Teil $P^{\frac{n-1}{2}}$ von $P^{\frac{n+1}{2}}$ ist bereits erklärt, in jedem der drei Gebiete G_k wählen wir einen Punkt b_k und setzen $\varphi(b_k)=b_k'$; und schließlich bestimmen wir: ist q ein Punkt der Begrenzung von G_q (also $q \in H$), so soll der Großkreisbogen, der b_k mit q verbindet und $<\pi$ ist, durch φ proportional auf die Strecke

$|b'\varphi(q)|$ abgebildet werden. Daß φ hiermit eindeutig und stetig definiert ist, folgt aus der zweiten der oben ausgesprochenen Eigenschaften der G_k. Aus der ersten dieser Eigenschaften ergibt sich die Antipodenfreiheit von φ: denn ist etwa $x \in G_1$, so besagt diese Eigenschaft, daß der Antipode von x zu $S^n - G_1$ gehört; es ist aber $\varphi(G_1) = P_1^{\frac{n+1}{2}} - P^{\frac{n-1}{2}} = P^{\frac{n+1}{2}} - (P_2^{\frac{n+1}{2}} + P_3^{\frac{n+1}{2}})$ und $\varphi(S^n - G_1) = P_2^{\frac{n+1}{2}} + P_3^{\frac{n+1}{2}}$.

Damit ist unsere Aufgabe für alle ungeraden n gelöst. Nun sei n gerade. c_1, c_2 seien zwei antipodische Punkte von S^n, und S^{n-1} sei die zu ihnen gehörige Äquatorsphäre. Da $n-1$ ungerade ist, existiert eine antipodenfreie Abbildung φ von S^{n-1} auf ein Polyeder $P^{\frac{n}{2}}$. Wir konstruieren ein Polyeder $P^{\frac{n+2}{2}}$, indem wir über $P^{\frac{n}{2}}$ zwei solche Kegel $P_1^{\frac{n+2}{2}}$ und $P_2^{\frac{n+2}{2}}$ mit Spitzen c_1', c_2' errichten, daß sie außer den Punkten von $P^{\frac{n}{2}}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Dann sei $\varphi(c_1) = c_1'$, $\varphi(c_2) = c_2'$, und für jeden Großkreisbogen (der Länge $\pi/2$), der c_i mit einem Punkt q von S^{n-1} verbindet, sei φ die proportionale Abbildung auf die Strecke $|c_i' \varphi(q)|$. Dann ist φ eine antipodenfreie Abbildung von S^n auf $P^{\frac{n+2}{2}} = P_1^{\frac{n+2}{2}} + P_2^{\frac{n+2}{2}}$.

25. Analog der Verallgemeinerung des Satzes A_1 durch den Satz A_1^* (Nr. 1) gibt es auch von dem Satz C_1 (Nr. 24) eine starke Verallgemeinerung, die zugleich ein — nahezu triviales — Gegenstück zu unserem Satz IIc (Nr. 3) ist:

Satz C_1^*. *Ein kompakter und zusammenhängender topologischer Raum R gestattet niemals eine freie Abbildung in die Gerade R^1.*

Beweis. Eine Abbildung φ von R in R^1 kann man als reelle stetige Funktion auffassen. Sie besitzt, da R kompakt ist, ein Maximum und ein Minimum, das sie in den Punkten a bezw. b von R erreichen möge. Ist f irgend eine Abbildung von R in sich, so ist $\varphi(a) \geqq \varphi f(a)$, $\varphi(b) \leqq \varphi f(b)$. Dann folgt aus der Stetigkeit von φ und f sowie aus dem Zusammenhang von R: es gibt einen Punkt c von R, in dem $\varphi(c) = \varphi f(c)$ ist.

Man wird nun — analog unserer Fragestellung in Nr. 1 — auch hier fragen, ob der Satz C_1^* in irgend einer Form auf die Dimensionszahlen $n > 1$ übertragen werden kann, und insbesondere, ob der Satz C_n (Nr. 24) auch für $n > 1$ gültig bleibt, wenn man in ihm den Begriff der *Antipodenfreiheit* durch den allgemeineren der *Freiheit* einer Abbildung ersetzt. In der Tat ist eine solche Vermutung oder Behauptung gelegentlich ausgesprochen worden [30]); sie ist aber falsch; denn die Abbildung ψ, die wir in Nr. 21 angegeben haben, ist für jedes $n \geqq 3$ eine freie Abbildung der S^n in den euklidischen Raum R^n. Diese Konstruktion versagt zwar für $n = 2$, und daher lassen die Ergebnisse dieser Arbeit die Frage offen, ob man die Kugelfläche S^2 frei in die Ebene R^2 abbilden kann. Jedoch ist auch diese Frage zu bejahen; Fräulein E. Pannwitz hat mir ein Beispiel einer solchen freien Abbildung mitgeteilt. *Somit darf man zwar für $n = 1$, jedoch für keine einzige Dimensionszahl $n \geqq 2$, in dem Satz C_n das Wort „antipodenfrei“ durch „frei“ ersetzen.*

Auch hier bleiben manche Fragen unbeantwortet; zum Beispiel: *Für welche Zahlen μ kann man die Sphäre S^n frei in den euklidischen Raum R^μ abbilden?* Ich weiß nicht einmal, ob es Sphären S^n gibt, die sich nicht frei in die Ebene R^2 abbilden lassen.

[30]) M. H. A. Newman, *On Abelian continuous groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. XXVII (1931), S. 387, Theorem 5.