Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik.

Von

Andrzej Mostowski (Warszawa).

In der vorliegenden Arbeit werden Lösungen mehrerer Probleme angegeben, die von Tarski im Zusammenhang mit seiner allgemeinen Metamathematik [1]) gestellt wurden und welche ich hauptsächlich wegen seiner Anregungen lösen konnte.

Die allgemeine Metamathematik ist ein Sonderfall der Booleschen Algebra. Es bestand daher immer die Möglichkeit, Sätze der allgemeinen Metamathematik als Sätze der Booleschen Algebra zu formulieren [2]). Diese Verallgemeinerung scheint um so zweckmäßiger zu sein, als Tarski im Zusammenhang mit den höchst interessanten Arbeiten von Stone [3]) gezeigt hat, daß die in der Metamathematik geschaffenen Begriffe ihre einfachen und wichtigen Entsprechungen in der allgemeinen Booleschen Algebra besitzen (s. Satz 2.). Deswegen ist es zweckdienlich, die folgenden Überlegungen auf die Boolesche Algebra und nicht auf eine ihrer Interpretationen (wie es ja die Metamathematik ist) zu beziehen.

Die Ergebnisse Stone's haben übrigens einen noch anderen Einfluß auf die im folgenden behandelten Sätze gehabt. Meine komplizierten und schwierigen Beweise dieser Sätze haben sich als überflüssig erwiesen, da die seit langem bekannten topologischen Überlegungen leichter und schneller zum selben Ziel führen. Der ganze Ballast meiner früheren Beweise ist in der gegenwärtigen Formulierung beseitigt und die hier angegebenen Überlegungen werden für einen Leser, der einige Kenntnis von den Elementen der Topologie besitzt, den Charakter unmittelbarer Folgerungen aus den Untersuchungen Stone's haben. Meine Überlegungen sind infolgedessen weniger als Entdeckungen zu werten. Sie können aber als eine anschauliche Schilderung des interessanten und ganz unerwarteten Zusammenhanges dienen, welcher zwischen scheinbar so entfernten Gebieten, wie der Metamathematik und der Topologie besteht.

[1]) Vgl. A. Tarski, *Grundzüge des Systemenkalküls*, Erster Teil, Fund. Math. XXV, pp. 503—526, und Zweiter Teil, Fund. Math. XXVI, pp. 283—301. Diese Arbeiten zitieren wir im folgenden als T_1 und T_2. Der größte Teil der in der vorliegenden Arbeit befindlichen Sätze ist in T_2, pp. 289—290, zitiert worden.

[2]) Vgl. T_2, Satz 4. und Bemerkungen auf S. 511.

[3]) Vgl. M. H. Stone, *Boole'an Algebras and their application to Topology*, Proc. Nat. Acad. Sc. 20, No 3., pp. 197—202.

§ 1. Wir präzisieren zunächst den Begriff der Booleschen Algebra, die Gegenstand unserer Untersuchungen sein soll.

Definition a. Wir nennen ein geordnetes Quadrupel $K=[A, \sim, \vee, ']$, das aus einer Menge A, einer zweigliedrigen Relation $\sim$, einer Operation mit zwei Argumenten $\vee$ und einer Operation mit einem Argumente $'$ besteht, *verallgemeinerten Booleschen Körper*, wenn es folgende Bedingungen erfüllt: wenn $a, b, c \in A$, so:

1. $a \sim a$,
2. wenn $a \sim b$, so $b \sim a$,
3. wenn $a \sim b$, $b \sim c$, so $a \sim c$,
4. a', $a \vee b \in A$,
5. wenn $a \sim b$, so $a' \sim b'$ und $a \vee c \sim b \vee c$,
6. $a \vee b \sim b \vee a$,
7. $(a \vee b) \vee c \sim a \vee (b \vee c)$,
8. $(a' \vee b')' \vee (a' \vee b)' \sim a$. [4])

Wenn die Relation $\sim$ die gewöhnliche Identität bedeutet, so sagen wir einfach, daß K ein *Boolescher Körper* ist. Ist $\overline{\overline{A}} \leqslant \aleph_0$, so nennen wir K einen *abzählbaren Booleschen Körper*.

[4]) Dies ist ein von Huntington angegebenes Axiomensystem der Algebra der Logik. Vgl. E. V. Huntington, *New Sets of independent Postulates for the Algebra of Logic, with special references to Whitehead and Russell's Principia Mathematica*, Trans. Amer. Math. Soc., 35., No 1., pp. 274—304 und desselben *Boole'an Algebra — a correction*, ibidem.

Wir wollen an die von Tarski angegebene Definition einer deduktiven Theorie erinnern:

Definition b. Wir nennen ein geordnetes Quadrupel $T=[S, L, \rightarrow, {}^{-}]$, das aus Mengen S, L, einer Operation mit zwei Argumenten $\rightarrow$ und einer Operation mit einem Argumente ${}^{-}$ besteht, *deduktive Theorie*, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

I. $0<\overline{\overline{S}}\leqslant\aleph_0$,
II. $L\subset S$,
III. wenn $x, y \in S$, so $\bar{x}, x\rightarrow y \in S$,
IV. wenn $x, y, z \in S$, so
$(x\rightarrow y)\rightarrow[(y\rightarrow z)\rightarrow(x\rightarrow z)]$, $(\bar{x}\rightarrow x)\rightarrow x$, $x\rightarrow(\bar{x}\rightarrow y)\in L$,
V. wenn $x, y \in S$ und $x, x\rightarrow y\in L$, so $y\in L$. [5])

Zwischen der Theorie der verallgemeinerten Booleschen Körper und der allgemeinen Metamathematik (d. h. der Theorie, welche die Eigenschaften der in b. definierten deduktiven Theorien festlegt) besteht ein enger Zusammenhang [6]). Um diesen Zusammenhang präzis auszudrücken, nehmen wir zwei folgenden Definitionen an, wobei $T=[S, L, \rightarrow, {}^{-}]$ eine beliebige deduktive Theorie bezeichnen möge:

Definition c. Für beliebige $a, b\in S$ ist:

(α) $a\leftrightarrow b \overset{Df}{=} \overline{(a\rightarrow b)\rightarrow\overline{(b\rightarrow a)}}$,

(β) $a\vee_T b \overset{Df}{=} \overline{a\rightarrow\bar{b}}$.

(γ) $a\sim_T b$ dann und nur dann, wenn $a\leftrightarrow b\in L$.

Definition d. K_T ist ein geordnetes Quadrupel $[S, \sim_T, \vee_T, {}^{-}]$.

Satz 1. *Ist T eine deduktive Theorie, so ist K_T ein verallgemeinerter abzählbarer Boolescher Körper.*

Für den Beweis bemerken wir vor allem, daß wenn wir den bekannten Überlegungen des Aussagenkalküls nachahmen, so kann die Richtigkeit folgender Sätze erwiesen werden:

Ist $T=[S, L, \rightarrow, {}^{-}]$ eine deduktive Theorie und $a, b, c\in S$, so gilt:

[5]) Vgl. T_1, p. 504, Fußnote [1]).

[6]) Vgl. T_1, Satz 4. Der angegebene Satz 1. ist eine kleine Abänderung des zitierten Satzes von Tarski.

A. $a\leftrightarrow a\in L$,
B. $(a\leftrightarrow b)\rightarrow(b\leftrightarrow a)\in L$,
C. $(a\leftrightarrow b)\rightarrow[(b\leftrightarrow c)\rightarrow(a\leftrightarrow c)]\in L$,
D. $(a\leftrightarrow b)\rightarrow(\bar{a}\leftrightarrow\bar{b})\in L$,
E. $(a\leftrightarrow b)\rightarrow(\overline{a\rightarrow\bar{c}}\leftrightarrow\overline{b\rightarrow\bar{c}})\in L$,
F. $\overline{a\rightarrow\bar{b}}\leftrightarrow\overline{b\rightarrow\bar{a}}\in L$,
G. $\overline{a\rightarrow\overline{\overline{\bar{b}\rightarrow\bar{c}}}}\leftrightarrow\overline{\overline{a\rightarrow\bar{b}}\rightarrow\bar{c}}\in L$,
H. $\overline{\overline{\overline{\bar{a}\rightarrow\bar{\bar{b}}}}\rightarrow\overline{\overline{\overline{\bar{a}\rightarrow\bar{b}}}}}\leftrightarrow a\in L$. [7])

Wenn wir uns darauf stützen, so können wir leicht nachprüfen, daß K_T ein abzählbarer, verallgemeinerter Boolescher Körper ist. Aus der Bedingung I. der Definition b. folgern wir nämlich vor allem, daß S eine höchstens abzählbare Menge ist. Aus dem Satze A. und der Definition c. folgern wir, daß wenn $a\in S$, so 1. $a\sim_T a$ ist. Die Bedingungen: 2. wenn $a\sim_T b$, so $b\sim_T a$ und 3. wenn $a\sim_T b$ und $b\sim_T c$, so $a\sim_T c$ (für $a, b, c\in S$) folgen aus den Sätzen B. und C. bei Berücksichtigung der Bedingung V. der Definition b. Die Bedingung 4.: wenn $a, b\in S$, so $\bar{a}$, $a\vee_T b\in S$, folgt direkt aus den Definitionen b. und c. Aus den Sätzen D. und E. folgern wir, daß für $a, b, c\in S$ 5. wenn $a\sim_T b$, so $\bar{a}\sim_T\bar{b}$ und $a\vee_T c\sim_T b\vee_T c$. Schließlich, sind für $a, b, c\in S$ die Bedingungen: 6. $(a\vee_T b)\sim_T(b\vee_T a)$, 7. $[(a\vee_T b)\vee_T c]\sim_T[a\vee_T(b\vee_T c)]$ und 8. $\overline{(\bar{a}\vee_T\bar{b})}\vee_T\overline{(\bar{a}\vee b)}\sim_T a$ direkte Folgen aus den Sätzen F., G. und H. Daraus ergibt sich der Satz 1. auf Grund der Definition a.

Der Satz 1. zeigt, daß jeder deduktiven Theorie ein verallgemeinerter Boolescher Körper in einer bestimmten Weise zugeordnet werden kann. Also jeder Satz, der solche Körper betrifft, ist zugleich ein metamathematischer Satz; auf Grund des Satzes 1. erhalten wir oben erwähnten Zusammenhang zwischen der Theorie der Booleschen Körper und der allgemeinen Metamathematik.

Es ist klar, daß zwischen diesen Gebieten auch ein umkehrbarer Zusammenhang leicht festgelegt werden kann, der metamathematische Sätze als Sätze über Boolesche Körper zu deuten gestattet. Davon werden wir aber weiters nicht Gebrauch machen.

[7]) Wie leicht ersichtlich, folgt aus den Bedingungen II.—V. der Definition b., daß jeder Satz, der durch Einsetzung in eine wahre Formel des Aussagenkalküls entsteht, ein Element der Menge L ist. Um einen solchen Satz abzuleiten, genügt es sich auf die Aussagen zu stützen, die durch Einsetzungen in die Axiome des Aussagenkalküls entstehen (sie gehören nach IV. zu L) und auf die durch V. gelieferte Abtrennungsregel.

Ehe wir an den eigentlichen Stoff herangehen, wollen wir kurz an einige algebraische Definitionen erinnern.

Sei $K=[A,\sim,\vee,']$ ein verallgemeinerter Boolescher Körper.

Definition e. $a\cdot b \overset{Df}{=} (a'\vee b')'$. [8]

Definition f. Wir nennen eine Menge I *Ideal in* K dann und nur dann, wenn I eine nichtleere Teilmenge von A ist, welche folgende Bedingungen erfüllt:

ist $a, b \in I$, so $a\vee b\in I$,
ist $a\in I$ und $a\sim b$, so $b\in I$,
ist $a\in I$, $b\in A$, so $a\cdot b\in I$.

Definition g. Wir nennen I *Primideal in* K dann und nur dann, wenn I ein Ideal in K, I nicht identisch mit A ist und dabei jedes Ideal J, das I enthält, entweder identisch mit A oder identisch mit I ist.

Definition h. Wir nennen a *erzeugendes Element* des Ideals I dann und nur dann, wenn I ein Ideal in K ist, $a\in I$ und für jedes Element b von I ein Element c des Körpers K existiert derart, daß $a\sim b\cdot c$.

Definition i. Wir nennen I *Hauptideal* des Körpers K dann und nur dann, wenn I ein Ideal im Körper K ist und es ein erzeugendes Element des Ideals I gibt.

Wir wollen noch die Begriffe der Isomorphie, Homomorphie und des Teilkörpers definieren. Mögen

$$K=[A,\sim,\vee,'] \qquad \text{und} \qquad L=[B,\equiv,+,^{\bullet}]$$

zwei verallgemeinerte Boolesche Körper bezeichnen.

Definition j. Wir nennen den Körper L *homomorph mit dem Körper* K dann und nur dann, wenn eine Relation ϱ existiert, deren Vorbereich die Menge A, Nachbereich die Menge B ist und die dabei folgende Eigenschaften besitzt:

(α) ist $a, b\in A$, $c, d\in B$, $a\sim b$, $c\equiv d$ und $a\,\varrho\, c$, so $b\,\varrho\, d$
(β) ist $a\,\varrho\, b$ und $a\,\varrho\, c$, so $b\equiv c$
(γ) ist $a\,\varrho\, b$ und $c\,\varrho\, d$, so $(a\vee b)\,\varrho\,(c+d)$
(δ) ist $a\,\varrho\, b$, so $a'\,\varrho\, b^{\bullet}$.

[8]) Die Definition e. ist nicht korrekt, denn in ihr ist die Abhängigkeit der Operation $^{\bullet}$ vom Körper K nicht gekennzeichnet. Doch wird dieser kleine Mangel weiterhin nicht zu Mißverständnissen führen.

Definition k. Wir nennen den Körper K *isomorph mit dem Körper* L dann und nur dann, wenn eine Relation ϱ mit Vorbereich A und Nachbereich B existiert, welche die in der Definition j. erwähnten Eigenschaften (α), (β), (γ), (δ) besitzt und außerdem die Bedingung erfüllt:

(ε) ist $b\,\varrho\, a$ und $c\,\varrho\, a$, so $b\sim c$.

Definition l. Wir nennen L *Teilkörper* von K dann und nur dann, wenn $B\subset A$ und dabei die Operationen $\vee$, $'$ sowie die Relation $\sim$ im Bereiche der Menge B mit den Operationen $+$, $^{\bullet}$ und der Relation $\equiv$ beziehungsweise identisch sind.

In Bezug auf die Booleschen Körper decken sich diese Definitionen mit den gewöhnlich angenommenen.

Zwischen den Begriffen der allgemeinen Metamathematik und den oben angeführten algebraischen Begriffen besteht ein enger Zusammenhang, der — wie schon erwähnt — von Tarski festgestellt worden ist. Dieser Zusammenhang kommt zum Ausdruck im folgenden

Satz 2 (von Tarski). *Sind* $T=[S,L,\rightarrow,\overline{\ \ }]$ *und* $T_0=[S_0,L_0,<,^{*}]$ *zwei deduktive Theorien, so gilt:*

a) *Die Menge X ist ein deduktives System der Theorie T* [9]) *dann und nur dann, wenn die Menge X ein Ideal im Körper K_T ist.*

b) *Die Menge X ist ein vollständiges deduktives System der Theorie T* [10]) *dann und nur dann, wenn X ein Primideal im Körper K_T ist.*

c) *Die Menge X ist ein axiomatisierbares deduktives System der Theorie T* [11]) *dann und nur dann, wenn X ein Hauptideal des Körpers K_T ist.*

d) *Die Theorien T und T_0 haben denselben strukturellen Typus* [12]) *dann und nur dann, wenn die Körper K_T und K_{T_0} miteinander isomorph sind.*

[9]) Vgl. T_1, Definition 5.
[10]) Vgl. T_2, Definition 13.
[11]) Vgl. T_1, Definition 9.
[12]) Vgl. T_2, p. 288.

e) *Die Homomorphie des Körpers K_{T_0} mit dem Körper K_T ist gleichbedeutend mit folgender Bedingung: es existiert ein deduktives System X der Theorie T, so daß die Theorie $T_X=[S, X, \to, {}^{-}]$* [13]) *mit der Theorie T_0 denselben strukturellen Typus hat.*

Beweis: a) Wir setzen voraus, daß X ein deduktives System der Theorie T ist, d. h.

$$(\alpha)\qquad L\subset X\subset S,$$

$$(\beta)\qquad \text{aus } x, x\to y\,\epsilon\, X \text{ folgt } y\,\epsilon\, X$$ [14]).

Wir wollen zeigen, daß X ein Ideal im Körper K_T ist. Für beliebige Elemente $x, y\,\epsilon\, S$ gilt $x\to[y\to\overline{(x\to\bar{y})}]\,\epsilon\, L$; es gilt daher auf Grund von (α) $x\to[y\to\overline{(x\to\bar{y})}]\,\epsilon\, X$. Daraus folgern wir unter Anwendung von (β) und Definition c., daß

$$(\gamma)\qquad \text{wenn } x, y\,\epsilon\, X, \text{ so } x\vee_T y\,\epsilon\, X.$$

Ist $x, y\,\epsilon\, S$ und $x\leftrightarrow y\,\epsilon\, L$, so $x\to y\,\epsilon\, L$; gemäß (β) und Definition c. erhalten wir also daraus die Folgerung

$$(\delta)\qquad \text{ist } x\,\epsilon\, X, \; x\sim_T y, \text{ so } y\,\epsilon\, X.$$

Für beliebige Elemente $x, y\,\epsilon\, S$ gilt schließlich $x\to\overline{\overline{\bar{x}\to\bar{y}}}\,\epsilon\, L$, was auf Grund der Definition c. und der in der Definition e. angenommenen Bezeichnung in der Gestalt $x\to x\cdot y\,\epsilon\, L$ geschrieben werden kann. Auf Grund von (α) und (β) schließen wir daraus, daß

$$(\varepsilon)\qquad \text{wenn } x\,\epsilon\, X, \; y\,\epsilon\, S, \text{ so } x\cdot y\,\epsilon\, X.$$

Die Bedingungen (γ), (δ), (ε) stellen fest, daß die Menge X ein Ideal im Körper K_T ist.

Setzen wir umgekehrt voraus, daß die Menge X ein Ideal im Körper K_T ist. Da die Menge der Elemente dieses Körpers mit der Menge S identisch ist, so schließen wir, daß:

$$(\zeta)\qquad X\subset S.$$

Wir bemerken, daß wenn $x, y\,\epsilon\, S$, dann $x\to[y\to(x\leftrightarrow y)]\,\epsilon\, L$ ist. Daraus schließen wir, daß wenn $x, y\,\epsilon\, L$, dann $x\leftrightarrow y\,\epsilon\, L$ gilt. Da für $x\,\epsilon\, S$, stets $x\cdot\bar{x}\,\epsilon\, L$ ist, so gilt, der Definition c. gemäß,

$$(\eta)\qquad \text{wenn } x\,\epsilon\, S, \; y\,\epsilon\, L, \text{ so } x\cdot\bar{x}\sim_T y.$$

[13]) Wir vernachlässigen hier den leichten Beweis des Satzes, daß das Quadrupel $[S, X, \to, {}^{-}]$ tatsächlich eine deduktive Theorie ist. Dieser Beweis ist implizit in der Arbeit von Tarski enthalten. Vgl. T_1, Satz 21 und Anmerkungen auf S. 522.

[14]) Vgl. T_1, Satz 5.

Auf Grund der Voraussetzung und der Definition f. ist X eine nichtleere Menge; x sei ein beliebiges Element von X. Es gilt gemäß der Voraussetzung: $x\cdot\bar{x}\,\epsilon\, X$, woraus sich auf Grund von (η) und der Definition f. ergibt, daß wenn $y\,\epsilon\, L$, so $y\,\epsilon\, X$ ist. Anders formuliert:

$$(\vartheta)\qquad L\subset X.$$

Schließlich, setzen wir voraus, daß $x, y\,\epsilon\, X$ und $x, x\to y\,\epsilon\, S$ ist. Gemäß der Definitionen c. und e. gilt dann $\bar{x}\cdot y=\overline{(\bar{\bar{x}}\vee_T\bar{y})}=\overline{\overline{\bar{\bar{x}}\to\bar{\bar{y}}}}\sim_T x\to y$, was nach Definition f. $\bar{x}\cdot y\,\epsilon\, X$ ergibt. Aus $x\,\epsilon\, X$ erhalten wir $x\cdot y\,\epsilon\, X$; daher gilt $x\cdot y\vee_T\bar{x}\cdot y\,\epsilon\, X$. Da aber $x\cdot y\vee_T\bar{x}\cdot y\sim_T y$ ist, so gilt auf Grund der Definition f. $y\,\epsilon\, X$. Daraus ergibt sich in Verbindung mit (ζ) und (ϑ), daß X ein deduktives System ist.

b) folgt einfach aus der Definition des vollständigen Systems und der Definition g.

c) Wir bemerken vor allem, daß für $x, y\,\epsilon\, S$ gilt

$$(\iota)\qquad (x\to y)\leftrightarrow[(\bar{x}\to y)\leftrightarrow y]\,\epsilon\, L.$$

Wir setzen voraus, daß X ein axiomatisierbares System der Theorie T ist, d. h., daß X ein System ist und ein Element $x\,\epsilon\, X$ existiert, derart, daß für jedes $y\,\epsilon\, X$ $x\to y\,\epsilon\, L$ gilt. Gemäß (ι) können wir dieser Bedingung folgende Gestalt geben:

$$(\varkappa)\qquad \text{für } y\,\epsilon\, X \text{ ist } (\bar{x}\to y)\sim_T y.$$

Da $x\cdot y=\overline{(\bar{x}\vee_T\bar{y})}=\overline{\overline{\bar{x}\to\bar{\bar{y}}}}\sim_T\bar{x}\to y$, so schließen wir aus $(\varkappa)$, daß $y\sim_T x\cdot y$, also x ein erzeugendes Element des Ideals X ist.

Setzen wir nun voraus, daß X ein Hauptideal des Körpers K_T ist, so schließen wir auf Grund von a), daß X ein System der Theorie T ist. Sei x ein erzeugendes Element des Ideals X. Für jedes $y\,\epsilon\, X$ existiert also ein Element $z\,\epsilon\, S$, so daß $y\sim_T x\cdot z$ ist; wir folgern daraus nach bekannten Regeln der Booleschen Algebra, daß $x\cdot y\sim_T x\cdot(x\cdot z)\sim_T x\cdot z\sim_T y$, d. h. daß $y\sim_T x\cdot y$ ist, woraus sich auf Grund von (ι) $x\to y\,\epsilon\, L$ ergibt. Das System X ist daher axiomatisierbar.

d) Wir setzen voraus, daß die Theorien T und T_0 denselben strukturellen Typus haben. Es existiert dann eine (mehrmehrdeutige) Relation ϱ mit der Menge S als Vorbereich und der Menge S_0 als Nachbereich, und welche folgende Eigenschaft besitzt:

(λ) ist $x\varrho x_0$, $y\varrho y_0$, so sind die Bedingungen $x\to y\in L$ und $x_0<y_0\in L_0$ äquivalent [15]).

Wir machen die Voraussetzung: $x\varrho x_0$, $y\varrho y_0$ und $x\vee_T y\,\varrho z_0$. Da $(x\vee_T y)\to x\in L$, so ergibt sich gemäß (λ) $z_0<x_0\in L_0$ und analog $z_0<y_0\in L_0$, woran sich zeigt, daß $z_0<(x_0\vee_{T_0} y_0)\in L_0$. Es bedeute z ein (beliebiges) ϱ-Urbild des Elementes $x_0\vee_{T_0}y_0$, d. h. $z\varrho x_0\vee_{T_0}y_0$. Da $(x_0\vee_{T_0}y_0)<x_0\in L_0$, so $z\to x\in L$ und $z\to y\in L$, woraus $z\to(x\vee_T y)\in L$. Auf Grund von (λ) schließen wir, daß $(x_0\vee_{T_0}y_0)<z_0\in L_0$, woran sich zeigt, daß

(μ) wenn $x\varrho x_0$, $y\varrho y_0$, $x\vee_T y\,\varrho z_0$, dann $z_0\sim_{T_0} x_0\vee_{T_0}y_0$ ist.

Ganz analog wird bewiesen:

(μ') wenn $x\varrho x_0$, $y\varrho y_0$, $z\varrho x_0\vee_{T_0}y_0$, dann $z\sim_T x\vee_T y$ ist.

Ferner setzen wir voraus: $x\varrho x_0$, $\bar x\varrho y_0$ und bezeichnen mit y ein beliebiges Element, das die Bedingung $y\varrho x_0^*$ erfüllt. Für ein beliebiges $t\in S$ gilt $(x\vee_T\bar x)\to t\in L$, woran sich auf Grund von (λ) und (μ) zeigt, daß für jedes $t_0\in S_0$ $(x_0\vee_{T_0}y_0)<t_0\in L_0$ gilt. Wir erhalten daraus die Bedingung

(ν) $$y_0<x_0^*\in L_0.$$

Für jedes $t_0\in S_0$ gilt $(x_0\vee_{T_0}x_0^*)<t_0\in L_0$, woraus auf Grund von (λ) und (μ') $(x\vee_T y)\to t\in L$ für beliebiges $t\in S$, d. h. $y\to\bar x\in L$ folgt. Daraus ergibt sich auf Grund von (λ) $x_0^*<y_0\in L_0$; daher gilt gemäß (ν) $x_0^*\sim_{T_0}y_0$. So haben wir bewiesen:

(ξ) wenn $x\varrho x_0$, $\bar x\varrho y_0$, dann $y_0\sim_{T_0}x_0^*$ ist.

Wir definieren nun folgendermaßen die Relation $\bar\varrho$:

$x\bar\varrho x_0$ dann und nur dann, wenn es Elemente y, y_0 gibt, so daß $y\varrho y_0$, $y\sim_T x$ und $y_0\sim_{T_0}x_0$ ist.

Die auf diese Weise definierte Relation $\bar\varrho$ erfüllt offenbar folgende Bedingungen:

(ο) der Vorbereich von $\bar\varrho$ ist S, der Nachbereich ist S_0;

(π) ist $x\bar\varrho x_0$, $y\sim_T x$, $y_0\sim_{T_0}x_0$, so $y\bar\varrho y_0$.

15) Vgl. T_2, p. 289.

Wir setzen voraus: $x\bar\varrho x_0$ und $x\bar\varrho y_0$. Es gibt dann vier Elemente u, v, u_0, v_0 für welche $x\sim_T u$, $x\sim_T v$, $u_0\sim_{T_0}x_0$, $v_0\sim_{T_0}y_0$ und $u\varrho u_0$, $v\varrho v_0$ gilt. Es gilt daher $u\to v\in L$ und $v\to u\in L$, woraus auf Grund von (λ) $u_0<v_0\in L_0$, $v_0<u_0\in L_0$, d. h. $x_0\sim_{T_0}y_0$ folgt. Wir haben also gezeigt, daß

(ρ) wenn $x\bar\varrho x_0$, $x\bar\varrho y_0$, dann $x_0\sim_{T_0}y_0$ gilt.

Ähnlicherweise beweist man, daß

(σ) wenn $x\bar\varrho x_0$, $y\bar\varrho x_0$, dann $x\sim_T y$ gilt.

Aus (μ) und (π) schließen wir, daß

(τ) wenn $x\bar\varrho x_0$, $y\bar\varrho y_0$, dann $(x\vee_T y)\,\bar\varrho\,(x_0\vee_{T_0}y_0)$,

und aus (π) und (ξ) daß

(υ) wenn $x\bar\varrho x_0$, dann $\bar x\bar\varrho x_0^*$ ist.

Die Bedingungen (ο), (π), (ρ), (σ), (τ), (υ) beweisen gemäß der Definition k., daß die Körper K_T und K_{T_0} miteinander isomorph sind.

Nun setzen wir voraus, daß eine Relation $\bar\varrho$ existiert, die die Bedingungen (ο), (π), (ρ), (σ), (τ), (υ) erfüllt und daß $x\bar\varrho x_0$, $y\bar\varrho y_0$. Die Bedingung $x\to y\in L$ ist mit der Bedingung $x\sim_T(x\vee_T y)$ und diese ihrerseits mit der Relation $x_0\sim_{T_0}(x_0\vee_{T_0}y_0)$ äquivalent. In der Tat: aus (π) folgt, daß wenn $x\sim_T(x\vee_T y)$, so $(x\vee_T y)\bar\varrho x_0$ ist, woraus sich auf Grund von (τ) und (ρ) $x_0\sim_{T_0}(x_0\vee_{T_0}y_0)$ ergibt. Analog folgern wir aus der Voraussetzung $x_0\sim_{T_0}(x_0\vee_{T_0}y_0)$, daß $x\sim_T(x\vee_T y)$. Daraus folgt:

(φ) ist $x\bar\varrho x_0$, $y\bar\varrho y_0$, so sind die Bedingungen $x\to y\in L$ und $x_0<y_0\in L_0$ äquivalent.

Wir haben also gezeigt, daß die Isomorphie der Körper K_T und K_{T_0} die Identität der strukturellen Typen der Theorien T und T_0 nach sich zieht.

e) Wir bezeichnen mit X ein deduktives System der Theorie T, mit T_X die Theorie $[S, X, \to, \overline{\ \ }]$. Wie wir in a) bewiesen haben, ist X ein Ideal im Körper K_T. Wir definieren die Relation ϱ auf folgende Weise:

$a\varrho b$ gilt dann und nur dann, wenn a ein Element des Körpers K_T/X [16]), b ein Element des Körpers K_{T_X} und $b\in a$ ist.

16) Wir bezeichnen, wie üblich, mit K_T/X den Restklassenkörper modulo X.

Wir können dann ganz leicht beweisen, daß diese Relation die Bedingungen der Definition k. erfüllt. Es folgt daraus, daß die Körper K_T/X und K_{T_X} isomorph sind.

Nun setzen wir voraus, daß für ein gewisses System X der Theorie T die Theorie T_X mit der Theorie T_0 denselben strukturellen Typus hat. Auf Grund von d) sind die Körper K_{T_X} und K_{T_0} isomorph, daher sind — gemäß der oben bewiesenen Isomorphie zwischen den Körpern K_{T_X} und K_T/X — die Körper K_{T_0} und K_T/X isomorph. Da aber der Körper K_T/X mit dem Körper K_T homomorph ist [17]), so ist auch der Körper K_{T_0} mit dem Körper K_T homomorph.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß der Körper K_{T_0} mit dem Körper K_T homomorph ist. Es existiert dann im Körper K_T ein Ideal X derart, daß der Restklassenkörper K_T/X mit K_{T_0} isomorph ist [17]). Aus der Isomorphie der Körper K_T/X und K_{T_X} folgt, daß die Körper K_{T_0} und K_{T_X} isomorph sind, was auf Grund von d) die Identität der strukturellen Typen der Theorien T_0 und T_X beweist.

Wie aus den Sätzen 1. und 2. hervorgeht, besitzt jeder für abzählbare Boolesche Körper bewiesener Satz sein Gegenstück in der allgemeinen Metamathematik. Unsere weiteren Überlegungen werden sich daher auf die Boolesche Algebra beziehen.

§ 2. Vor allem führen wir nach Stone [3]) folgende Definition ein:

Definition m. Für jeden Booleschen Körper $K=[A,\sim,\vee,']$ ist $\mathfrak{S}(K)$ ein aus allen Primidealen des Körpers K gebildeter topologischer Raum, in welchem der Begriff der Umgebung folgendermaßen erklärt wird: ist I ein Primideal in K, so ist die Menge U der Primideale in K eine Umgebung von I dann und nur dann, wenn $I\in U$ und ein Element $x\in A$ existiert derart, daß U mit der Menge aller Primideale in K, die x nicht enthalten, identisch ist.

Mehrere den Raum $\mathfrak{S}(K)$ betreffende Sätze befinden sich in der Arbeit von Stone. Sie sind — soweit man es aus seiner knappen Abhandlung ersehen kann — lediglich für die Booleschen Körper im eigentlichen Sinn formuliert und nicht für die verallgemeinerten Booleschen Körper. Es besteht aber keine Schwierigkeit, die Stoneschen Ergebnisse auf diese Körper auszudehnen; daher werden wir uns im weiteren auf diese Sätze stützen.

[17]) Dieser Satz folgt aus dem bekannten algebraischen Satze über Homomorphie der Ringe unter Bezugnahme auf den von Stone entdeckten Zusammenhang zwischen der Booleschen Algebra und der Theorie der Ringe. Vgl. M. H. Stone, *Subsumption of the theory of Boole'an Algebras under the theory of Rings*, Proc. Nat. Acad. of Sci. 21, No 2., pp. 103—105.

Zunächst führen wir hier folgenden Satz von Stone [3]) an:

Satz 3. *Ist K ein Boolescher Körper, so ist:*

a) *der Raum $\mathfrak{S}(K)$ bikompakt und total unzusammenhängend* [18]),

b) *jede Umgebung eines beliebigen Punktes offen und abgeschloßen.*

Aus b) erhalten wir das

Korollar 3c. *Der Raum $\mathfrak{S}(K)$ ist nulldimensional* [19]).

Wie aus der Definition m. hervorgeht, ist die Mächtigkeit des Umgebungssystems des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ nicht größer als die Mächtigkeit der Menge A. Es folgt daraus, daß wenn der Körper K abzählbar, dann der Raum $\mathfrak{S}(K)$ separabel ist. Daher ist der Raum $\mathfrak{S}(K)$ (für ein abzählbares K) mit einer Teilmenge der Cantorschen Menge C homöomorph [20]).

Die Klasse derjenigen Teilmengen der Menge C, die mit $\mathfrak{S}(K)$ homöomorph sind, wird mit $S(K)$ bezeichnet.

Wir beweisen folgenden:

Hilfssatz 4. *Ist K ein verallgemeinerter abzählbarer Boolescher Körper und $X\in S(K)$, so ist X im Intervall $[0,1]=I$ abgeschloßen.*

Beweis. Wir setzen voraus $x_n\in X$ $(n=1, 2, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Da die Menge X bikompakt ist, so gibt es ein Element $y\in X$ derart, daß jede in X offene Menge V, die y enthält, unendlich viele Elemente x_n enthält [18]). Wäre die Identität $x=y$ falsch, dann würden zwei disjunkte, in I offene Mengen W_x, W_y existieren, so daß $x\in W_x$,

[18]) Ein topologischer Raum E heißt *bikompakt*, wenn in jeder Klasse $\mathfrak{K}$ der in E offenen Mengen, die die Bedingung $\sum_{X\in\mathfrak{K}} X=E$ erfüllt, ein endlicher Teil $\mathfrak{K}^*$ existiert derart, daß $\sum_{x\in\mathfrak{K}^*} X=E$ ist. Man beweist, daß es für jeden Teil X eines bikompakten, unendlichen Raumes E einen Punkt $x\in E$ gibt derart, daß jede in E offene Menge U die x enthält, die Bedingung $\overline{\overline{X\cdot U}}=\overline{\overline{X}}$ erfüllt.

Ein topologischer Raum E heißt *total unzusammenhängend*, wenn es für je zwei verschiedene Elemente $x, y\in E$ zwei in E abgeschloßene und einander fremde Mengen X, Y gibt, die die Bedingungen $x\in X$, $y\in Y$, $X+Y=E$ erfüllen.

[19]) Man kann leicht beweisen, daß die Bedingung $\dim\mathfrak{S}(K)=0$ aus der Bedingung a) folgt.

[20]) Vgl. z. B. K. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 124, Th. VI.

$y \epsilon W_y$ wäre. Da $x = \lim x_n$, so gehören fast alle Elemente x_n zu W_x, d. h. höchstens nur endlichviele zu $W_y \cdot X$, obzwar diese Menge in X offen ist und y enthält. Die Voraussetzung $x \neq y$ ergibt also einen Widerspruch, woraus $x = y$ und daher $x \epsilon X$ folgt.

Korollar 5. *Jeder abzählbare Körper K ist mit dem Körper aller abgeschloßenen und offenen Teilmengen einer gewissen abgeschloßenen, nulldimensionalen linearen Menge isomorph.*

Beweis. Sei $X \epsilon S(K)$; der Körper K ist — nach Stone[3]) — mit dem Körper der abgeschloßenen und offenen Teilmengen des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ isomorph. Aus der Homöomorphie der Mengen $\mathfrak{S}(K)$ und X folgt nun, daß der Körper aller in $\mathfrak{S}(K)$ abgeschlossenen und offenen Mengen mit dem Körper aller in X abgeschloßenen und offenen Mengen isomorph ist, w. z. b. w.

Eine in I abgeschloßene Menge hat bekanntlich die Mächtigkeit $\leqslant \aleph_0$ oder $2^{\aleph_0}$ [21]). Mit Rücksicht auf den Hilfssatz 4. schließen wir daraus, daß wenn K abzählbar ist, dann $\overline{\overline{\mathfrak{S}(K)}} \leqslant \aleph_0$ oder $\overline{\overline{\mathfrak{S}(K)}} = 2^{\aleph_0}$ ist. Da die Menge der Elemente des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ mit der Menge aller Primideale des Körpers K identisch ist, so ist auch diese Menge entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Wenn wir uns nun auf den Satz 2b. stützen, gelangen wir zum folgenden (in T_2, S. 289 angeführten)

Satz 6. *Die Mächtigkeit der Menge der vollständigen Systeme einer beliebigen deduktiven Theorie ist entweder $\leqslant \aleph_0$ oder $2^{\aleph_0}$.*

Setzen wir jetzt voraus, daß der Körper K abzählbar ist und bezeichnen: mit $\mathfrak{S}^{(\xi)}(K)$, wo $\xi \leqslant \Omega$, die Ableitung ξ-ter Ordnung des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ und mit α die kleinste Ordnungszahl, für welche $\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K) = \mathfrak{S}^{(\Omega)}(K)$ ist. Gemäß dem Cantorschen Satz gilt dann die Gleichheit:

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{S}(K) = \sum_{\xi < \alpha} [\mathfrak{S}^{(\xi)}(K) - \mathfrak{S}^{(\xi+1)}(K)] + \mathfrak{S}^{(\alpha)}(K) \quad {}^{22}).$$

Dieser Zerlegung entspricht die Zerlegung der Menge der Primideale des Körpers K.

---

[21]) Vgl. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit u. Comp. 1914, p. 320, Satz IV.

[22]) Vgl. K. Kuratowski, l. c., p. 115

Hilfssatz 7. *Die Menge $\mathfrak{S}^{(0)}(K) - \mathfrak{S}^{(1)}(K)$ ist mit der Menge aller Hauptprimideale des Körpers K identisch.*

Beweis: Betrachten wir ein erzeugendes Element a des Hauptprimideals I und die Menge U aller derjenigen Primideale J des Körpers K, für welche $a' \bar{\epsilon} J$ ist. Gemäß Definition m. gehört die Menge U zum Umgebungssystem des Raumes $\mathfrak{S}(K)$, wobei offenbar $I \epsilon U$ ist. Ist $J \epsilon U$, so $a' \bar{\epsilon} J$, daher gilt gemäß einer bekannten Eigenschaft der Primideale [23]) $a \epsilon J$, also $I \subset J$. Das Ideal I besitzt — als Primideal — keine Teiler; wir schließen daraus, daß $I = J$; daher $U = \{I\}$. Demgemäß besitzt der Punkt I des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ eine aus einem einzigen Punkt bestehende Umgebung; er ist daher ein isolierter Punkt dieses Raumes, d. h. $I \epsilon \mathfrak{S}^{(0)}(K) - \mathfrak{S}^{(1)}(K)$.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß I ein isolierter Punkt von $\mathfrak{S}(K)$ ist, also daß eine einpunktige Umgebung von I existiert. Es folgt daraus auf Grund der Definition von Umgebung im Raume $\mathfrak{S}(K)$, daß es ein a gibt, so daß $a \bar{\epsilon} I$ und $a \epsilon J$ für jedes von I verschiedene Primideal J gilt. Das Ideal (a') [24]) ist dem Durchschnitt aller derjenigen Primideale des Körpers K gleich, die a' enthalten [25]). Da I das einzige so beschaffene Ideal ist, so gilt $I = (a')$ und I ist damit ein Hauptideal w. z. b. w.

Wir geben im folgenden eine Anwendung der Cantorschen Zerlegung an.

Vorausgesetzt sei, daß T eine deduktive Theorie ist. Aus dem Hilfssatz 7. und dem Satz 2. schließen wir vor allem, daß das Kardinalzahlenpaar

$$\overline{\overline{\mathfrak{S}^{(0)}(K_T) - \mathfrak{S}^{(1)}(K_T)}}, \qquad \overline{\overline{\sum_{1 \leqslant \xi < \alpha} [\mathfrak{S}^{(\xi)}(K_T) - \mathfrak{S}^{(\xi+1)}(K_T)] + \mathfrak{S}^{(\alpha)}(K_T)}}$$

mit dem charakteristischen Paar $(\mathfrak{a}, \mathfrak{u})$ der Theorie T identisch ist [26]). Daraus ist es leicht zu schließen, welche Werte von den Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{u}$ angenommen werden können. Ist namentlich $\mathfrak{a} < \aleph_0$ (d. h. im Raum $\mathfrak{S}(K_T)$ ist nur eine endliche Anzahl von isolierten Punkten enthalten), so gilt $\mathfrak{S}^{(1)}(K_T) = \mathfrak{S}^{(\Omega)}(K_T)$ und demgemäß $\mathfrak{u} = \overline{\overline{\mathfrak{S}^{(\Omega)}(K_T)}}$. Daher ist entweder $\mathfrak{u} = 0$ oder $\mathfrak{u} = 2^{\aleph_0}$, weil $\mathfrak{S}^{(\Omega)}(K_T)$, als eine perfekte Menge

---

[23]) Vgl. T_2, Satz 30 (3).

[24]) Wir bezeichnen mit (x) das Hauptideal, für welches x ein erzeugendes Element ist.

[25]) Vgl. T_2, Satz 36.

[26]) Vgl. T_2, p. 289.

im separablen Raum, die Mächtigkeit 0 oder $2^{\aleph_0}$ hat. Ist $\mathfrak{a}=\aleph_0$, so enthält der Raum $\mathfrak{S}(K_T)$ mindestens einen nichtisolierten Punkt und daher $\mathfrak{u}\geqslant 1$ gilt; dabei ist $\mathfrak{u}\leqslant\aleph_0$, wenn $\mathfrak{S}^{(\Omega)}(K_T)=0$ und $\mathfrak{u}=2^{\aleph_0}$, wenn $\mathfrak{S}^{(\Omega)}(K_T)\neq 0$. So gelangen wir zum folgenden

Satz 8. *Das charakteristische Paar einer beliebigen deduktiven Theorie besitzt einen der folgenden Werte* (wobei n eine endliche Kardinalzahl bedeutet):

$$(n,0),\quad (n,2^{\aleph_0}),\quad (\aleph_0,n),\quad (\aleph_0,\aleph_0),\quad (\aleph_0,2^{\aleph_0}) \; [27].$$

Wir wollen uns hier mit der weiteren Untersuchung der Zerlegung (A) (deren wichtigste Aufgabe die Erläuterung der metamathematischen Bedeutung der zu den Mengen $\mathfrak{S}^{\xi}(K)-\mathfrak{S}^{(\xi+1)}(K)$ $(\xi\geqslant 1)$ bzw. zu der Menge $\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K)$ gehörenden Systeme wäre) nicht befassen, da die auf diesem Wege erhaltenen Begriffe, ziemlich kompliziert und — wie es scheint — ohne größere Bedeutung für die allgemeine Metamathematik sind.

§ 3. Nun wollen wir die Frage der Isomorphie zweier abzählbarer Boolescher Körper näher untersuchen. Zuerst werden solche Körper behandelt, in denen es eine bloß abzählbare Menge von Primidealen gibt. Folgende Definition erweist sich hier als zweckmäßig:

Definition n. Wir nennen *Charakteristik* eines abzählbaren Körpers K, der eine nur abzählbare Menge von Primidealen besitzt, das Zahlenpaar $(\alpha(K),n(K))$, wobei $\alpha(K)$ die Ordung und $n(K)$ die Mächtigkeit der letzten nichtleeren Ableitung des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ bezeichnet.

Es ist klar, daß $0<n(K)<\aleph_0$.

Mögen K und L zwei Körper mit nur abzählbaren Mengen von Primidealen sein. Seien ferner $X_1\epsilon S(K)$ und $X_2\epsilon S(L)$. Die Mengen X_1 und X_2 sind also lineare abzählbare abgeschloßene Mengen. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Homöomorphie dieser Mengen ist nach Mazurkiewicz und Sierpiński[28]) durch das Bestehen der Gleichheiten

$$(*)\qquad \alpha(K)=\alpha(L),\qquad n(K)=n(L)$$

gegeben. Die Homöomorphie der Mengen X_1, X_2 (oder — was auf dasselbe hinauskommt — der Räume $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}(L)$) ist nach

[27]) Vgl. T_2, p. 289.

[28]) Vgl. S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*; Fund. Math. I., pp. 17—27.

Stone[29]) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Isomorphie der Körper K und L. Die Identitäten (*) drücken demgemäß eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Isomorphie der Körper K und L aus. Wir erhalten so folgenden

Satz 9. *Zwei abzählbare (verallgemeinerte) Boolesche Körper mit einer abzählbaren Anzahl von Primidealen sind dann und nur dann isomorph, wenn ihre Charakteristiken einander gleich sind.*

Wir geben einige Folgerungen aus diesem Satze an:

Korollar 10. *Jeder abzählbare Boolesche Körper mit einer höchstens abzählbaren Menge von Primidealen ist mit dem Körper von Mengen isomorph, die in einer abgeschloßenen, wohlgeordneten linearen Menge zugleich abgeschloßen und offen sind.*

Beweis. Möge K einen abzählbaren Booleschen Körper mit einer höchstens abzählbaren Menge von Primidealen bezeichnen. Es existiert offenbar eine lineare abgeschloßene und wohlgeordnete Menge X, für welche $\overline{\overline{X^{(\alpha(K))}}}=n(K)$ gilt. Die Menge X ist also auf Grund des unter [28]) zitierten Satzes von Mazurkiewicz und Sierpiński mit jeder Menge der Klasse $S(K)$, also mit dem Raume $\mathfrak{S}(K)$ homöomorph. Aus der Homöomorphie der Mengen $\mathfrak{S}(K)$ und X folgt die Isomorphie zwischen dem Körper aller in X offenen und abgeschloßenen und dem Körper aller in $\mathfrak{S}(K)$ abgeschloßenen und offenen Mengen. Der letzte Körper ist aber nach dem Satze IV_3 von Stone[3]) mit K isomorph, was die Richtigkeit des Korollars beweist.

Korollar 11. a) *Es gibt $\aleph_1$ verschiedene Typen der Isomorphie abzählbarer Körper, die höchstens $\aleph_0$ Primideale besitzen.*

b) *Es gibt $\aleph_1$ verschiedene strukturelle Typen deduktiver Theorien, die höchstens $\aleph_0$ vollständige Systeme besitzen* [30]).

Beweis: a) erhalten wir aus dem Satz 9. mit Rücksicht darauf, daß die Menge der Paare (α, n), wo $0\leqslant\alpha<\Omega$ und $0\leqslant n<\aleph_0$ ist, von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist.

b) folgt aus a) und den Sätzen 1 und 2d.

[29]) M. H. Stone, *Boole'an Algebras* etc. (Vgl. [3]), Theorem IV_1).

[30]) Vgl. T_2, p. 289.

Korollar 12. *Sind die charakteristischen Paare der Theorien T und T_0 gleich $(\aleph_0, n)$ (wo $0<n<\aleph_0$), so haben die Theorien T und T_0 denselben strukturellen Typus* [31]).

Beweis: Aus Satz 2. folgt, daß die Körper K_T und K_{T_0} $\aleph_0$ Hauptprimideale und n Primideale, die keine Hauptideale sind, enthalten. Nach Hilfssatz 7. enthält jeder der Räume $\mathfrak{S}(K_T)$ und $\mathfrak{S}(K_{T_0})$ eine abzählbare Menge von isolierten Punkten und n Häufungspunkte. Die beiden Körper besitzen daher die Charakteristik $(1, n)$. Gemäß Satz 9. sind daher die Körper K_T und K_{T_0} isomorph, was auf Grund des Satzes 2d. die Gleichheit der strukturellen Typen der Theorien T und T_0 gewährleistet.

Betrachten wir nun die Isomorphie abzählbarer Körper, die $2^{\aleph_0}$ Primideale besitzen. Mögen K und L zwei solche Körper und $\mathfrak{S}(K)$, $\mathfrak{S}(L)$ die ihnen entsprechenden topologischen Räume bezeichnen. Gemäß der Formel (A) haben wir

$$\mathfrak{S}(K)=\sum_{\xi<\alpha}[\mathfrak{S}^{(\xi)}(K)-\mathfrak{S}^{(\xi+1)}(K)]+\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K),$$

$$\mathfrak{S}(L)=\sum_{\xi<\beta}[\mathfrak{S}^{(\xi)}(L)-\mathfrak{S}^{(\xi+1)}(L)]+\mathfrak{S}^{(\beta)}(L).$$

Die Kerne $\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K)$ und $\mathfrak{S}^{(\beta)}(L)$ sind miteinander homöomorph; denn sie sind zwei nichtleere, perfekte, nulldimensionale Mengen.

Sind die Räume $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}(L)$ homöomorph, so gilt

$$\alpha=\beta \tag{1}$$

wie auch (falls α keine Grenzzahl ist)

$$\overline{\overline{\mathfrak{S}^{(\alpha-1)}(K)-\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K)}}=\overline{\overline{\mathfrak{S}^{(\beta-1)}(L)-\mathfrak{S}^{(\beta)}(L)}}, \tag{2}$$

denn die Homöomorphie zweier bikompakter Räume die Homöomorphie aller ihrer Ableitungen bestimmt. An Hand einfacher Beispiele kann man sich überzeugen, daß (1) und (2) keine hinreichenden Bedingungen für Isomorphie der Körper K und L sind, da sie nicht die Homöomorphie der Räume $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}(L)$ nach sich ziehen.

Eine hinreichende Bedingung verhältnismäßig allgemeiner Art, erhalten wir aber, indem wir außer Gleichheiten (1) und (2) noch die Abgeschloßenheit der zerstreuten Teile der Räume $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}(L)$ voraussetzen. Um zu beweisen, daß die so verstärkte Bedingung schon hinreichend ist, genügt es sich auf den in der Fußnote [28]) erwähnten Satz von Mazurkiewicz und Sierpiński zu berufen und den bekannten topologischen Satz anzuwenden, der besagt, daß aus der Homöomorphien zwischen abgeschloßenen Mengen X und Y sowie X^* und Y^* falls X mit X^* und Y mit Y^* disjunkt sind, die Homöomorphie der Summen $X+X^*$ und $Y+Y^*$ folgt.

[31]) Vgl. T_2, p. 290.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir den Satz: *ist $\alpha=\beta\leqslant 1$ und $\overline{\overline{\mathfrak{S}^{(\alpha-1)}(K)-\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K)}}=\overline{\overline{\mathfrak{S}^{(\beta-1)}(L)-\mathfrak{S}^{(\beta)}(L)}}<\aleph_0$, so sind die Körper K und L isomorph.* Auf Grund von Hilfssatz 7. ist dieser Satz folgender algebraischer Deutung fähig:

Satz 13. *Besitzen die abzählbaren Körper K und L $2^{\aleph_0}$ Primideale und unter diesen eine nur endliche Anzahl von Hauptidealen, so sind die Körper K und L dann und nur dann isomorph, wenn sie dieselbe Anzahl von Hauptprimidealen enthalten.*

Auf Grund der Sätze 2. und 1. erhalten wir eine metamathematische Deutung dieses Satzes:

Satz 14. *Alle deduktiven Theorien mit dem charakteristischen Paar $(n, 2^{\aleph_0})$, wo $0\leqslant n<\aleph_0$, haben denselben strukturellen Typus.*

Als Gegenstück zum Korollar 11. geben wir hier noch folgenden Satz an:

Satz 15. a) *Es gibt $2^{\aleph_0}$ verschiedene Typen der Isomorphie abzählbarer Körper, die $2^{\aleph_0}$ Primideale besitzen.*

b) *Es gibt $2^{\aleph_0}$ verschiedene strukturelle Typen deduktiver Theorien.*

Um a) zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß es wenigstens $2^{\aleph_0}$ verschiedene Homöomorphietypen unter den abgeschloßenen Teilmengen der Cantorschen Menge C gibt. Die im folgenden angegebene Konstruktion ist eine fast genaue Wiederholung der Konstruktion von Mazurkiewicz und Sierpiński [32]).

Sei A eine abgeschloßene beschränkte lineare Menge, Z und P entsprechend der zerstreute und der perfekte Teil von A. Wir bezeichnen für $\xi<\Omega$ mit Z_ξ die ξ-te Kohärenz [33]) der Menge Z. Ein Punkt $x\in A$ wird *Punkt α-ter Ordnung* dann und nur dann genannt, wenn $x\in P$, $x\,\bar{\in}\,Z'_\alpha$ und $x\in Z'_\xi$ für $\xi<\alpha$ ist. Wir wollen beweisen, daß falls eine Menge A^* homöomorphes Bild von A und der Punkt x

[32]) Vgl. S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, l. c., pp. 23—27.

[33]) Vgl. F. Hausdorff, l. c., p. 227

ein Punkt α-ter Ordnung der Menge A ist, so ist das Bild x^* von x ein Punkt α-ter Ordnung der Menge A^*. Mögen Z^* bzw. P^* den zerstreuten bzw. perfekten Teil der Menge A^* bezeichnen. Aus der Homöomorphie zwischen A und A^* folgt bekanntlich, daß P^* ein homöomorphes Bild von P und Z^* ein ebensolches von Z ist. Die Kohärenzen der Menge Z (bzw. ihre Ableitungen) gehen durch eine homöomorphe Abbildung in die Kohärenzen (bzw. ihre Ableitungen), der Bildmenge über. Daraus schließen wir, daß wenn $x \in P \cdot \prod_{\xi<\alpha} Z'_\xi - Z'_\alpha$ ist, so ist $x^* \in P^* \cdot \prod_{\xi<\alpha} Z^{*\prime}_\xi - Z^{*\prime}_\alpha$, w. z. b. w.

Möge nun $[i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots]$ eine beliebige Folge von den Zahlen 0 oder 1 und k eine natürliche Zahl bedeuten. Betrachten wir nun die im Intervall $\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right]$ enthaltene, abzählbare, abgeschloßene Menge T_k, deren $2k+i_k$-te Ableitung die aus einem Element bestehende Menge $\left\{\frac{1}{2k+1}\right\}$ ist und bezeichnen mit C_k die Cantorschen Mengen in den Intervallen $\left[\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right]$, wobei sich die Endpunkte der C_k mit den Endpunkten der entsprechenden Intervalle decken mögen. Wie leicht festzustellen, sind die Punkte $\frac{1}{2k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$ die einzigen Punkte endlicher Ordnung der abgeschloßenen Menge

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots} = \sum_{k=1}^{\infty} (T_k + C_k) + \{0\},$$

wobei der Punkt $\frac{1}{2k+1}$ die Ordnung $2 \cdot k + i_k$ hat. Auf Grund des oben bewiesenen Hilfssatzes folgt, daß die Mengen $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n \ldots}$ und $A_{j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots}$ nur dann homöomorph sind, wenn die Folgen $[i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots]$ und $[j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots]$ identisch sind. Da dabei die Menge $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots}$ für jede Folge $[i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots]$ nulldimensional ist, d. h. in die Cantorsche Menge C topologisch eingebettet werden kann, so gibt es wenigstens $2^{\aleph_0}$ topologische Typen unter den abgeschloßenen Teilmengen der Cantorschen Menge C.

Aus dem Satz 15 a) schließen wir, daß es $2^{\aleph_0}$ verschiedene strukturelle Typen unter den Theorien gibt, die $2^{\aleph_0}$ vollständige Systeme besitzen, voraus der Satz 15 b) unmittelbar folgt.

§ 4. Wir wollen uns zum Schluß mit den „Universalitätseigenschaften" der Körper befassen, die $2^{\aleph_0}$ Primideale besitzen.

Satz 16. *Ist K ein abzählbarer Körper mit $2^{\aleph_0}$ Primidealen und L ein beliebiger abzählbarer Körper, so ist L mit K homomorph.*

Beweis. Wir untersuchen die den beiden Körpern zugeordneten topologischen Räume $\mathfrak{S}(K)$ und $\mathfrak{S}(L)$. Der Raum $\mathfrak{S}(L)$ ist bekanntlich mit einer abgeschloßenen Teilmenge der Menge C homöomorph. Der Kern $\mathfrak{S}^{(\alpha)}(K)$ des Raumes $\mathfrak{S}(K)$ ist mit C homöomorph, wobei die Differenz $\mathfrak{S}(K) - \mathfrak{S}^{(\alpha)}(K)$ in $\mathfrak{S}(K)$ ersichtlich offen ist. Es folgt daraus, daß der Raum $\mathfrak{S}(L)$ mit dem Komplement in Bezug auf $\mathfrak{S}(K)$ einer in $\mathfrak{S}(K)$ offenen Menge homöomorph ist. Daraus ergibt sich aber auf Grund des Satzes IV_3 von Stone[3]) die Homöomorphie der Körper K und L.

Wie v. Neumann und Stone[34]) bewiesen haben, enthält ein abzählbarer Körper K, mit dem der Körper L homomorph ist, einen mit L isomorphen Teilkörper. Aus dem Satz 16. erhalten wir daher folgenden

Satz 17. *Ist K ein abzählbarer Körper mit $2^{\aleph_0}$ Primidealen und L ein beliebiger abzählbarer Körper, so gibt es einen mit L isomorphen Teilkörper M von K.*

Wie aus Satz 2d hervorgeht, ist folgender Satz ein metamathematisches Gegenstück des Satzes 16:

Satz 18. *Ist T eine Theorie, die $2^{\aleph_0}$ vollständige Systeme besitzt, und T_0 eine beliebige, deduktive Theorie, so existiert ein System X der Theorie T derart, daß die strukturellen Typen der Theorien T_0 und T_X gleich sind.*

[34]) J. v. Neumann and M. H. Stone, *The determination of representative elements in the residual classes of a Boole'an algebra*, Fund. Math. XXV, pp. 353—378, Theorem 17.