cartésiennes sous la forme

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n+1} \bar{c}_{ik} x_k \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

et laissent invariante la forme quadratique positive définie de ces coordonnées $\bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_{n+1}, 0)$. Cette forme est donc constante sur la surface $\bar{S}$. Par conséquent, celle-ci est un ellipsoïde. La surface $S$ est donc aussi un ellipsoïde.

*(Reçu par la Rédaction le 22. 11. 1939).*

## Характеристична властивість еліпсоїду

Г. Ауербах (Львів).

(Резюме)

Нехай $S$ позначує обмежену і замкнену поверхню, положену в $(n+1)$-розмірностнім афіннім просторі, що має таку властивість: якщо $P$ і $P'$ довільні, лежачі на $S$ точки, то існує проективна трансформація, що перетворює поверхню $S$ в себе, і при якій точка $P$ переходить в точку $P'$.

Тоді поверхня $S$ є еліпсоїдом.

---

# Une propriété des familles d'ensembles bien ordonnés linéaires

par

G. KUREPA (Glina).

## Introduction.

**1.** J'avais posé le problème[1]) de savoir si chaque famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels contient une sous-famille non dénombrable dont aucun élément n'est segment initial d'un autre élément de la sous-famille.

Dans ce qui suit, je prouverai que la réponse au problème précédent est affirmative (v. lemme 1), ce qui me permettra de prouver — pour justifier le titre de l'Article — que *toute famille non dénombrable $F$ d'ensembles linéaires bien ordonnés contient une sous-famille $\Phi$ de même puissance que la famille $F$ et jouissant de la propriété qu'aucun élément de $\Phi$ n'est un segment initial d'un autre élément de $\Phi$* (v. lemme 2), fait qui à son tour entraîne la normalité[2]) de tout tableau ramifié[3]) dans lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante

---

[1]) G. Kurepa, Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse, Paris, 1935; aussi Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935) p. 1—138, en particulier p. 3 et p. 134 en bas.

[2]) Un ensemble partiellement ordonné est dit *normal* s'il est fini ou a même puissance que l'un de ses sous-ensembles $F$ jouissant de la propriété suivante: quel que soit le point $a$ de $F$, l'ensemble $[a]_F$ des points de $F$ comparables à $a$ est un sous-ensemble ordonné de $F$.

[3]) Un ensemble $E$ partiellement ordonné par une relation d'ordre $<$ est dit un *tableau ramifié* par rapport à $<$ si, quel que soit le point $a$ de $E$, l'ensemble $(\,.\,, a)_E$ des points $x$ de $E$ vérifiant $x < a$ est vide ou un sous-ensemble bien ordonné de $E$.

(v. théorème 1) ou même une opération uniforme croissante transformant ce tableau en un ensemble ordonné séparable (v. théorème $2^{\text{bis}}$)[4]).

**2.** D'une manière générale, $E$ étant un ensemble ordonné quelconque, soit[5])

$$\sigma E \tag{1}$$

la famille de tous les sous-ensembles bien ordonnés de $E$, ordonnée partiellement par la relation $\prec$ que voici: $A, B$ étant deux ensembles bien ordonnés quelconques,

$$A \prec B \tag{2}$$

équivaut à ce que $A$ est un segment initial de $B$ sans que $B$ soit un segment initial de $A$, avec la convention que, quel que soit l'ensemble bien ordonné non vide $B$, l'ensemble ordonné vide $L$ vérifie $L \prec B$.

On vérifie sans peine que $\sigma E$ est, par rapport à $\prec$, un tableau ramifié normal[2])[3]); mais le problème de savoir, si tout sous-ensemble du tableau $\sigma E$ est normal, est bien difficile[6]).

Dans le présent Article, le problème sera traité pour les quatre cas où l'ensemble ordonné $E$ vérifie l'une des conditions suivantes:

I. $E$ est au plus dénombrable, donc, d'après G. Cantor, semblable à un ensemble de nombres rationnels;

[4]) En convenant qu'un ensemble $E$ partiellement ordonné par $\varrho$ vérifie la condition $(\beta_0)$ s'il existe: un ensemble ordonné séparable $F$ et un procédé faisant correspondre à tout point $a$ de $E$ un seul point $f(a)$ de $F$ de manière que, pour tout point $b$ de $E$ vérifiant $a \varrho b$, on ait $f(a) \leqslant f(b)$, l'inégalité $f(a) < f(a_0)$ ayant lieu alors pour au moins un point $a_0$ de $E$ vérifiant $a \varrho a_0$ (bien entendu, $<$ désigne la relation par rapport à laquelle $F$ est ordonné séparable), nous avons prouvé ailleurs la normalité de tout tableau ramifié $T$ vérifiant la condition $(\beta_0)$, pourvu que la puissance du rang $\gamma T$ de $T$ soit de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ $(\alpha \geqslant 0)$.

[5]) Sous le nom de *procédé* $\sigma$ *sur* $E$ on a introduit (loc. cit.[1]) p. 99) $\sigma E$ avec la restriction que tout élément de $\sigma E$ soit non vide et borné.

[6]) et équivalent à l'ainsi dite *hypothèse de ramification* (cf. loc. cit.[1]) p. 130).



II. $E$ est parfaitement séparable au sens de M. Fréchet[7]), donc, d'après A. Denjoy[8]), semblable à un ensemble linéaire;

III. $E$ est séparable au sens de M. Fréchet, donc semblable à un ensemble pseudo-linéaire[9]);

IV. $E$ vérifie la condition de Souslin, à savoir que toute famille d'intervalles non vides de $E$ est au plus dénombrable[10]).

Alors que, dans les trois premiers cas, le problème de la normalité de tout sous-ensemble du tableau $\sigma E$ sera résolu par l'affirmative, le problème analogue concernant le quatrième cas, étant équivalent au problème bien connu de Souslin, reste ouvert; c'est qu'on peut démontrer ceci:

*Soit $E$ un ensemble ordonné tel que chaque famille d'intervalles non vides de $E$ est au plus dénombrable; pour que $E$ soit séparable, il faut et il suffit que chaque famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés extraits de $E$ contienne une sous-famille non dénombrable ne contenant aucun couple d'éléments distincts dont l'un est un segment initial de l'autre* (v. théorème 3).

## I. Familles d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels.

Lemme 1. *Chaque famille non dénombrable $F$ d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels contient une famille $\Phi$ de même puissance que la famille $F$ et telle qu'aucun de ses éléments n'est un segment initial d'un autre élément de $\Phi$.*

**3.** Pour démontrer le lemme, nous traiterons la famille $F$ comme un tableau ramifié par rapport à la relation $\prec$, définie

[7]) Un ensemble ordonné $E$ est dit *parfaitement séparable* s'il y a une famille au plus dénombrable $F$ d'intervalles de $E$ telle que tout intervalle non vide de $E$ soit la réunion de certains intervalles appartenant à $F$.

[8]) Voir A. Denjoy, Sur les ensembles ordonnés. Comptes Rendus 192 (1931) p. 1011–1014.

[9]) Voir G. Kurepa, Sur les relations d'ordre, Bull. Académie Zagreb (1937). En désignant par $2 \times [0,1]$ l'ensemble des couples $(a, b)$, $(a \varepsilon [0,1]$, $b = 0$ ou $1)$, ceux-ci étant ordonnés par le principe de première différence, tout sous-ensemble de $2 \times [0,1]$ est appelé *pseudo-linéaire*. Remarquons que $2 \times [0,1]$ est séparable sans être parfaitement séparable.

[10]) Nous ne savons pas résoudre le problème, s'il existe un ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin et contenant, au point de vue de l'ordre, tout ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin (bien entendu, si la réponse au problème de Souslin est affirmative, l'ensemble $2 \times [0,1]$ de tout à l'heure est un pareil ensemble).

par (2), et remarquerons qu'alors le lemme 1 s'exprime encore en disant que le tableau ramifié $F$ contient un sous-ensemble disjonctif[11]) $\Phi$ vérifiant $pF = p\Phi$[12]).

Manifestement, tout sous-ensemble ordonné du tableau $F$ est au plus dénombrable; dès lors[13]) $\gamma F \leqslant \Omega$.

Or[14]), tout tableau ramifié non dénombrable dont chaque sous-ensemble ordonné est au plus dénombrable a la même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs[11]), pourvu que la puissance du tableau soit supérieure à celle du rang du tableau[13]). C'est pourquoi, dans le cas qui nous occupe, nous pouvons ne traiter que le cas où

$$pF = \aleph_1, \quad \gamma F = \Omega. \tag{3}$$

**4.** Soient

$$r, A \tag{4}$$

un nombre rationnel et un ensemble bien ordonné non vide de nombres rationnels respectivement. $\alpha$ désignant le type d'ordre de l'ensemble $A$, celui-ci peut être écrit comme il suit:

$$A = (a_0, a_1, \ldots a_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha} \text{ avec } a_\xi < a_\eta \text{ pour tout } \xi < \eta < \alpha; \tag{5}$$

bien entendu, pour tout $\xi < \alpha$, $a_\xi$ est un nombre rationnel bien défini appartenant à $A$.

Définissons la fonction

$$\varphi(r, A) \tag{6}$$

de la façon suivante: si $r \in A$, $\varphi(r, A)$ désignera l'indice vérifiant,

[11]) Un ensemble partiellement ordonné est dit *disjonctif* s'il ne contient aucun couple de points distincts comparables.

[12]) $pX$ veut dire *puissance de* $X$.

[13]) $T$ étant un tableau ramifié, on désigne, pour tout indice $\alpha$, par $R_\alpha T$ l'ensemble des points $a$ de $T$ pour chacun desquels l'ensemble $(.\,, a)_T$ des points de $T$ précédant $a$ est de type d'ordre $\alpha$. Le rang de $T$, en signes $\gamma T$, est le premier nombre ordinal $\alpha$ vérifiant $R_\alpha T = 0$.

[14]) Voir loc. cit.[1]) pp. 107 et 108, où nous avons prouvé la normalité (voir[2])) de tout tableau ramifié $T$ vérifiant $pT > p\gamma T$ (voir[13])), c'est-à-dire, si $pT > \aleph_0$, il y a un $F \leqslant T$ tel que, d'une part $pF = pT$, et de l'autre, pour tout $a \varepsilon F$, l'ensemble $[a]_F$ des points de $F$ comparables à $a$ est ordonné, donc bien ordonné; si, de plus, $pT > \aleph_0$ d'une part et si tout sous-ensemble ordonné de $T$ est au plus dénombrable d'autre part, il est manifeste que l'ensemble disjonctif $R_0 F$ (voir[13])) vérifie $pR_0 = pT$.



dans (5),

$$a_{\varphi(r, A)} = r; \tag{7}$$

si $r$ non $\in A$, on posera $\varphi(r, A) = 0$. On aura donc

$$0 \leqslant \varphi(r, A) < \alpha. \tag{8}$$

En posant

$$\varphi(r, F) = \underset{A \in F}{\text{borne sup}}\, \varphi(r, A), \tag{9}$$

on obtient

$$0 \leqslant \varphi(r, F) \leqslant \Omega. \tag{10}$$

Démontrons qu'il existe un nombre rationnel $r_0$ vérifiant

$$\varphi(r_0, F) = \Omega; \tag{11}$$

bien entendu, nous supposons que $F$ vérifie (3) et que tout élément de $F$ est non vide.

Or, si l'on avait

$$\varphi(r, F) < \Omega \tag{12}$$

pour tout nombre rationnel $r$, alors, en posant

$$\delta = \underset{r}{\text{borne sup}}\, \varphi(r, F), \tag{13}$$

où $r$ parcourt l'ensemble des nombres rationnels, la dénombrabilité de celui-ci entraînerait, vu (12), que

$$\delta < \Omega. \tag{14}$$

Or, par supposition (3), $\gamma F = \Omega$, ce qui entraîne, $F$ étant un tableau ramifié, l'existence, pour tout $\alpha < \Omega$, d'un sous-ensemble bien ordonné de $F$ de type ordinal $\alpha$. En particulier, $A$ étant un élément de $R_{\delta+2} F$, en écrivant $A$ sous la forme (5), on aurait $\alpha \geqslant \delta + 2$. Mais $a_{\delta+1}$ est un nombre rationnel vérifiant $\varphi(a_{\delta+1}, A) = \delta + 1$, ce qui est en contradiction avec la définition (13).

**5.** La relation (11) étant établie, on en déduit ceci: Quel que soit le nombre ordinal $\nu < \Omega$, il existe un élément $A^\nu \in F$ vérifiant

$$\varphi(r_0, A^\nu) \geqslant \nu. \tag{15}$$

Ceci étant, soit $A^0$ un élément quelconque de $F$ vérifiant

(16) $$r_0 \in A^0\ ^{15});$$

soit $0 < \alpha < \Omega$ et supposons que, pour tout $\xi < \alpha$, $A^\xi$ soit un élément de $F$ tel que

(17) $$\varphi(r_0, A^\eta) < \varphi(r_0, A^\xi) \quad \text{pour tout } \eta < \xi;$$

alors $A^\alpha$ désignera un élément quelconque de $F$ tel que

(17′) $$\varphi(r_0, A^\xi) < \varphi(r_0, A^\alpha) \qquad (\xi < \alpha).$$

D'après la remarque de tout à l'heure, $A^\alpha$ existe: pour s'en convaincre, il suffit de poser $\nu = \text{borne}\sup_{\xi<\alpha} \varphi(r_0, A^\xi)$ et $A^\alpha = A^\nu$.

Bref, nous avons prouvé l'existence d'une suite transfinie d'éléments de $F$

(18) $$A^0, A^1, \ldots, A^\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

telle que

(19) $$\varphi(r_0, A^\xi) < \varphi(r_0, A^\eta) \quad \text{pour tout } \xi < \eta < \Omega.$$

Et voici la conclusion: l'ensemble des $A^\alpha$ $(\alpha < \Omega)$ est un sous-ensemble disjonctif du tableau $F$, c'est-à-dire, quels que soient $\xi < \eta < \Omega$, les $A^\xi$, $A^\eta$ sont deux éléments distincts de $F$ ne vérifiant ni $A^\xi \prec A^\eta$ ni $A^\eta \prec A^\xi$.

En effet, soient

$$A^\xi = (a_0^\xi, \ldots a_\zeta^\xi, \ldots)_{\zeta < \alpha^\xi}$$
$$A^\eta = (a_0^\eta, \ldots a_\zeta^\eta, \ldots)_{\zeta < \alpha^\eta}$$

les représentations de la forme (5) de $A^\xi$, $A^\eta$; on a donc

(20) $$a_0^\xi < a_1^\xi < \ldots a_\zeta^\xi < \ldots, \quad (\zeta < \alpha^\xi)$$

(20′) $$a_0^\eta < a_1^\eta < \ldots a_\xi^\eta < \ldots, \quad (\zeta < \alpha^\eta).$$

Puisque

(21) $$a^\xi_{\varphi(r_0, A^\xi)} = r_0, \quad a^\eta_{\varphi(r_0, A^\eta)} = r_0,$$

on aura

(22) $$a^\xi_{\varphi(r_0, A^\xi)} = a^\eta_{\varphi(r_0, A^\eta)}.$$

[15]) $r_0$ désigne un certain nombre rationnel vérifiant (11).



Si, alors, l'on avait par exemple $A^\xi \preceq A^\eta$, c'est-à-dire

$$a_\zeta^\xi = a_\zeta^\eta \quad \text{pour tout } \zeta < \alpha^\xi,$$

on obtiendrait en particulier, puisque $\varphi(r_0, A^\xi) < \alpha^\xi$,

$$a^\xi_{\varphi(r_0, A^\xi)} = a^\eta_{\varphi(r_0, A^\xi)} = r_0,$$

ce qui est impossible à cause des deux inégalités suivantes:

$$\varphi(r_0, A^\xi) \neq \varphi(r_0, A^\eta) \qquad \text{(voir (18) et (19))}$$
$$a^\eta_{\varphi(r_0, A^\xi)} \neq a^\eta_{\varphi(r_0, A^\eta)} \qquad \text{(voir (20′))}.$$

L'impossibilité de $A^\eta \preceq A^\xi$ pouvant être démontrée d'une façon analogue, le lemme 1 est complètement établi.

## II. Familles d'ensembles bien ordonnés linéaires.

**6.** Lemme 2. *Chaque famille non dénombrable $F$ d'ensembles bien ordonnés linéaires contient une famille $\Phi$ de puissance égale à celle de $F$ et telle qu'aucun élément de $\Phi$ n'est un segment initial d'un autre élément de $\Phi$* (cf. lemme 1).

Posons pour tout ensemble bien ordonné non vide $A$ de nombres réels

(23) $$f(A) = \text{borne}\sup_{a \in A} a.$$

On aura

(24) $$-\infty < f(A) \leq \infty;$$

de plus, quels que soient les ensembles bien ordonnés non vides linéaires $A$ et $B$,

(25) $$A \preceq B \quad \text{entraîne} \quad f(A) \leq f(B),$$

l'égalité $f(A) = f(B)$ ne pouvant avoir lieu que dans le cas où $A = B - f(A)$, ce qui, en particulier, entraîne que le type ordinal $\alpha$ de $A$ est de seconde espèce et que le type ordinal de $B$ est $\alpha + 1$.

Comme ci-dessus, nous pouvons supposer que $F$ vérifie (3) et que, de plus,

$$p R_\alpha F \leq \aleph_0 \quad \text{pour tout } \alpha < \Omega.$$

Désignons par

$$F_0, F_1$$

respectivement la famille des éléments de $R_{\alpha+1}F$ et $R_{\omega\alpha}F$ $(\alpha<\Omega)$; par conséquent $F_1=F-F_0$.

$i$ désignant l'un des deux nombres 0,1, la famille $F_i$ jouit de la propriété que pour tout couple d'éléments $A, B$ de $F_i$ vérifiant $A \prec B$, on aura $f(A)<f(B)$, propriété qu'on peut exprimer en disant que $f(A)$ $(A\in F_i)$, est une fonction réelle uniforme croissante dans le tableau ramifié $F_i$.

Par conséquent, le lemme 2 est un cas particulier du

Théorème 1. *Tout tableau ramifié non dénombrable $T$ sur lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante est de même puissance que l'un de ses sous-ensembles composé de points deux à deux incomparables.*

**7.** Démontrons le théorème 1. En désignant par

$$f(a) \qquad (a\in T) \tag{26}$$

une fonction réelle uniforme croissante dans $T$, on aura $\gamma T\leqslant\Omega$, et, comme dans (3), nous pouvons supposer que $\gamma T=\Omega$ et que chacun des ensembles $R_\alpha T$ $(\alpha<\Omega)$[15]) est au plus dénombrable.

En rappelant que tout sous-ensemble maximum $N$ de $T$ tel que les relations $a\in N$, $b\in N$ entraînent $(.\,,a)=(.\,,b)_T$[16]) s'appelle un *noeud de* $T$, observons que tout noeud de $T$ appartient à un et un seul des ensembles $R_\alpha T$ $(\alpha<\gamma T)$; il est alors commode de qualifier $N$ *de première* ou *de seconde espèce*, suivant que l'est le nombre $\alpha$ vérifiant $N\leqslant R_\alpha T$. De même, un point $a$ de $T$ sera dit un *point de $T$ de première* ou *de seconde espèce dans $T$*, suivant que $\alpha$ vérifiant $a\in R_\alpha T$ est de première ou de seconde espèce.

**8.** Ceci fait, dans l'étude de la distribution des valeurs de la fonction $f(a)$ $(a\in T)$, le cas où tout noeud de seconde espéce de $T$ est composé d'un seul point est de beaucoup le plus simple.

C'est pour cette raison que nous allons associer à $T$ un tableau ramifié $T_0$ dont tout noeud de seconde espèce n'aura qu'un point.

Nous désignerons par

$$T_0 \tag{27}$$

[16]) Rappelons que $(.\,,a)_T$ désigne l'ensemble des points de $T$ précédant $a$.



la famille des ensembles $A$ où $A$ parcourt d'une part tous les sous-ensembles de $T$ dont chacun est composé d'un seul point de première espèce de $T$ et d'autre part tous les noeuds de seconde espèce du tableau $T$. Nous conviendrons que, pour tout couple d'éléments $A, B$ de $T_0$, le signe

$$A\,\varrho\,B \tag{28}$$

voudra dire l'existence d'un $a\in A$ et d'un $b\in B$ tels que $a\prec b$ ($\prec$ désignant la relation d'ordre par rapport à laquelle $T$ est un tableau ramifié et $f(a)$ $(a\in T)$ une fonction croissante dans $T$).

On démontre sans peine que $T_0$ est, par rapport à $\varrho$, un tableau ramifié vérifiant

$$\gamma T_0=\gamma T,\qquad pR_\alpha T_0\leqslant pR_\alpha T \qquad (\alpha<\gamma T_0), \tag{29}$$

ce qui, vu n°7, donne

$$pT_0=\aleph_1,\qquad \gamma T_0=\Omega,\qquad pR_\alpha T_0\leqslant\aleph_0 \qquad (\alpha<\Omega). \tag{30}$$

De plus, tout noeud de seconde espèce de $T_0$ est composé d'un seul point.

Pour démontrer l'existence, dans $T$, d'un sous-ensemble disjonctif non dénombrable, il suffit de prouver l'existence d'un sous-ensemble disjonctif non dénombrable dans le tableau $T_0$. En effet, $F_0$ étant un sous-ensemble disjonctif quelconque du tableau $T_0$, soit $F$ un sous-ensemble quelconque du sous-ensemble $\sum\limits_A A$ $(A\in F_0)$ du tableau $T$, ayant avec chacun des sous-ensembles $A$ de $T$ un et un seul point en commun; manifestement $F$ sera un sous-ensemble disjonctif de $T$ vérifiant $pF=pF_0$.

**9.** Prouvons donc que $T_0$ contient un sous-ensemble disjonctif non dénombrable[17]); nous le ferons en nous servant du lemme 1.

Il existe une fonction réelle uniforme, croissante dans $T_0$ et univalente dans tout noeud de $T_0$[17]); de plus, à cause de

[17]) La démonstration de ce fait fera usage d'une part de ce que tout noeud de seconde espèce de $T_0$ est composé d'un seul point et d'autre part de l'existence d'une fonction réelle uniforme croissante dans $T_0$.

D'ailleurs, en modifiant légèrement les raisonnements des n$^{\text{os}}$ 9 et 10, on démontre ceci:

$p R_\alpha T_0 \leqslant \aleph_0$ $(\alpha < \gamma T_0)$, il en existe une ne prenant, dans un noeud de première espèce quelconque de $T_0$, que des valeurs rationnelles.

Pour tout $A \in T_0$, posons

$$F(A) = f(a) \tag{30}$$

si $A$ est un point $a$ de première espèce de $T$, et

$$F(A) = \underset{a}{\text{borne sup}}\, f(a), \tag{30'}$$

$a$ parcourant tous les points de $T$ dont chacun précède tout point du noeud $A$ de $T$ si $A$ est un noeud de seconde espèce de $T$ (bien entendu, $f(a)$ $(a \in T)$, a la signification (26)).

Manifestement $F(A)$ $(A \in T_0)$ est une fonction réelle uniforme et croissante dans $T_0$.

**10.** Soit $N$ un noeud quelconque de première espèce de $T_0$; à la suite de (30), $N$ est au plus dénombrable; alors, $k(N)$ désignant le nombre des points de $N$ ou $\omega$, suivant que $N$ est fini ou infini, soient

$$A_0, \ldots, A_n, \ldots \qquad (n < k(N)) \tag{31}$$

où $A_n \neq A_{n'}$ pour tout $n < n' < k(N)$, tous les points du noeud $N$.

$\alpha$ vérifiant $R_\alpha T_0 \geqslant N$, distinguons deux cas, suivant que $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, soit $\varphi_N(A_0) < F(A_0)$ un nombre rationnel quelconque; soit $0 < n < k(N)$. Les nombres rationnels

$$\varphi_N(A_0), \ldots, \varphi_N(A_{n-1}) \tag{32}$$

étant définis de manière que d'une part

$$\varphi_N(A_i) \leqslant F(A_i) \quad \text{pour tout } i < n \tag{33}$$

et d'autre part

$$\varphi_N(A_i) \neq \varphi_N(A_j) \quad \text{pour tout } i < j < n, \tag{33'}$$

soit $\varphi_N(A_n)$ un nombre rationnel quelconque vérifiant

$$\varphi_N(A_n) \leqslant F(A_n), \quad \varphi_N(A_n) \neq \varphi_N(A_i) \text{ pour } i < n. \tag{34}$$

Si $\alpha > 0$, on définira $\varphi_N(A_n)$ $(n < k(N))$ comme il suit: en désignant, pour tout $n < k(N)$, par $A'_n$ le point de $R_{\alpha-1} T_0$ vérifiant $A'_n \varrho A_n$, $\varphi_N(A_0)$ sera un point rationnel quelconque vérifiant

$$F(A'_0) < \varphi_N(A_0) = F(A_0); \tag{35}$$

d'une manière générale, pour tout $0 < n < k(N)$, $\varphi_N(A_n)$ sera un point rationnel quelconque tel que

$$F(A'_n) < \varphi_N(A_n) \leqslant F(A_n), \quad \varphi_N(A_n) \neq \varphi_N(A_i) \text{ pour } i < n. \tag{36}$$

Définissons, pour tout $A \in T_0$, le nombre réel $\varphi(A)$:

$$\varphi(A) = F(A) \text{ ou } \varphi_N(A), \tag{37}$$

suivant que $A$ est un noeud de seconde espèce de $T$ ou un ensemble composé d'un point de première espèce de $T$, $N$ désignant, dans le second cas, le noeud de $T_0$ contenant le point $A$ de $T_0$.

$\varphi(A)$ $(A \in T_0)$ est une fonction réelle uniforme croissante; en plus, elle est univalente dans tout noeud de $T_0$ et ne prend que des valeurs rationnelles dans tout point de première espèce du tableau $T_0$.

**11.** Et voici la conclusion:

$A$ étant un élément de $T_0$, soit $E(A)$ l'ensemble des nombres réels $\varphi(X)$, $X$ parcourant tous les points de première espèce de $T_0$ vérifiant $X \varrho A$ (voir (28)), auquel on ajoute le point $\varphi(A)$ dans le cas où $A$ est un point de première espèce de $T_0$.

$E(A)$ est un ensemble bien ordonné non vide de nombres rationnels, bien déterminé par $A$.

$A, B$ étant deux éléments quelconques de $T_0$ tels que $A \varrho B$, on a $E(A) \mathrel{\prec\!\!\!)} E(B)$; si $A, B$ sont incomparables par rapport à la relation $\varrho$ définie dans (28), $E(A)$, $E(B)$ sont incomparables par rapport à la relation $\mathrel{\prec\!\!\!)}$ définie par (2); autrement dit, en désignant par $E(T_0)$ l'ensemble des $E(A)$ $(A \in T_0)$ partiellement ordonné par $\mathrel{\prec\!\!\!)}$, les deux ensembles partiellement ordonnés $T_0$, $E(T_0)$ sont semblables, la transformation $E(A)$ $(A \in T_0)$ étant une similitude entre eux.

---

$T$ étant un tableau ramifié de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ sur lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante, si tout noeud de seconde espèce de $T$ est composé d'un seul point, il existe une fonction réelle uniforme croissante dans $T$ et univalente dans chacun des noeuds de $T$ (la question si, alors, il en existe une fonction univalente dans $T$ tout entier, reste ouverte).

Or, $E(T_0)$ est une famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels; elle contient donc, d'après le lemme 1, une sous-famille non dénombrable $\Phi$ d'éléments deux à deux incomparables par rapport à $\prec$; en désignant par $F$ l'ensemble des $A \in T_0$ vérifiant $E(A) \in \Phi$, $F$ est un sous-ensemble disjonctif non dénombrable de $T_0$, c. q. f. d.

**12.** En nous reportant aux définitions et notations de l'Introduction, le lemme 2 entraîne le

Lemme $2^{\text{bis}}$. *$E$ étant un ensemble ordonné parfaitement séparable quelconque, tout sous-ensemble $T$ du tableau ramifié $\sigma E$ est normal; en particulier, dans le cas où $T$ est non dénombrable, $T$ est de même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs.*

## III. Familles d'ensembles bien ordonnés pseudo-linéaires [9]).

**13.** Théorème 2. *Quel que soit l'ensemble ordonné séparable $E$, tout sous-ensemble du tableau ramifié $\sigma E$ est normal; en particulier, tout sous-ensemble non dénombrable de $\sigma E$ est de même puissance que l'un de ses sous-ensembles disjonctifs.*

$E$ étant séparable, on aura $\gamma(\sigma E) \leqslant \Omega$; dès lors, pour prouver la normalité de tout $F \leqslant \sigma E$, nous pouvons, comme ci-dessus, nous borner au cas où

$$\gamma F = \Omega, \quad p R_\alpha F \leqslant \aleph_\alpha \qquad (\alpha < \Omega); \tag{38}$$

c'est ce que nous ferons; de plus, nous supposerons que l'ensemble vide n'est pas élément de $F$.

Soit

$$lE \tag{39}$$

l'ensemble ordonné qu'on obtient de $E$ en comblant chaque lacune de l'ensemble ordonné $E$ par un point [18]); posons, pour tout $A \in F$

$$f(A) = \underset{a \in A}{\text{borne sup}}\, a \ (\text{rel. } lE); \tag{40}$$

$f(A)$ est un point bien déterminé de $lE$ tel que

(41) les relations $A \in F$, $B \in F$, $A \not\prec B$ entraînent $f(A) \leqslant f(B)$,

[18]) Notons que, $E$ étant séparable, $lE$ l'est aussi.



avec la même remarque que celle à (25) dans n° 6. Notamment, en désignant par $F_1$ l'ensemble des éléments de $F$ dont le type d'ordre est un ordinal de première espèce — rappelons que tout élément de $F$ est un sous-ensemble bien ordonné de $E$ — et en posant $F_2 = F - F_1$, on aura ce qui suit: $i$ désignant l'un des nombres 1, 2,

(41′) les relations $A \in F_i$, $B \in F_i$, $A \not\prec B$ entraînent $f(A) < f(B)$;

bien entendu, $<$ désigne la relation d'ordre ordonnant $lE$.

$A$ parcourant $F_i$, soit

$$f(F_i) \tag{42}$$

l'ensemble des points $f(A)$ de $lE$; désignons pour tout $a \in f(F_i)$ par

$$f_i^{-1}(a) \tag{43}$$

la totalité des $A \in F_i$ vérifiant $f(A) = a$; manifestement les éléments de $f_i^{-1}(a)$, s'il y en a plus d'un, sont deux à deux incomparables. Dès lors, l'une au moins des familles $F_1, F_2$, soit $F_i$, étant non dénombrable, on a

$$pF_i = pF; \tag{44}$$

s'il y avait un point $a$ de $f(F_i)$ tel que $f_i^{-1}(a)$ était non dénombrable, $f_i^{-1}(a)$ serait un sous-ensemble disjonctif non dénombrable du tableau ramifié $F_i$, et à fortiori de $F$, ce qui prouverait le théorème 2.

**14.** Examinons le cas où pour tout $a \in f(F_i)$, $f_i^{-1}(a)$ est au plus dénombrable; puisque $F_i = \sum_a f_i^{-1}(a)$ $(a \in f(F_i))$, on a

$$pf(F_i) = pF_i = \aleph_i. \tag{45}$$

Soit, pour tout $a \in f(F_i)$, $k_i(a)$ un certain élément de $F_i$ vérifiant

$$f(k_i(a)) = a; \tag{46}$$

soit

$$K_i \text{ la famille des } k_i(a) \qquad (a \in f(F_i)). \tag{47}$$

Manifestement la transformation

(48) $$a \rightleftarrows k_i(a) \qquad (a \in f(F_i))$$

est biunivoque, ce qui, vu (45), donne

(49) $$p K_i = \aleph_1 .$$

**15.** Considérons le sous-ensemble $f(F_i)$ de l'ensemble ordonné séparable $lE$. Soit

(50) $$\varDelta_i$$

l'ensemble des extrémités gauches des sauts de seconde espèce de l'ensemble ordonné $f(F_i)$[19].

On aura

(51) $$p\varDelta_i \leqslant \aleph_1 .$$

Dans le cas où $p\varDelta_i \leqslant \aleph_0$, on sait que l'ensemble ordonné $f(F_i)$ est semblable à un ensemble linéaire[20]). Si alors $\varphi_i(a)$, $(a \in f(F_i))$, est une similitude transformant $f(F_i)$ dans un ensemble linéaire, la transformation

$$\varphi_i(f(A)) \qquad (A \in F_i)$$

sera une fonction réelle uniforme croissante dans le tableau $F_i$, ce qui, d'après le théorème 1, entraîne la normalité de $F_i$.

**16.** Examinons le cas où

(52) $$p\varDelta_i = \aleph_1 .$$

Tout d'abord, $lE$ étant séparable, la relation $\varDelta_i \leqslant lE$ entraîne la séparabilité de $\varDelta_i$; d'autre part, on vérifie que, quel que soit le couple de points distincts $a$, $b$ de $\varDelta_i$, l'ensemble des points de $lE$ (et de $E$) entre $a$, $b$ est non vide; dès lors, l'ensemble des couples de points consécutifs de $\varDelta_i$ est au plus dénombrable, ce qui, vu la séparabilité de $\varDelta_i$, entraîne l'existence d'une transformation par similitude, soit $\psi_i(a)$ $(a \in \varDelta_i)$, de l'ensemble ordonné $\varDelta_i$ dans un ensemble linéaire. En désignant alors par $F_i^i$ l'ensemble des éléments $A \in K_i$ vérifiant $f(A) \in \varDelta_i$, la transformation

$$\psi_i(f(A)) \qquad (A \in F_i^i)$$

est une fonction réelle uniforme croissante dans le tableau $F_i^i$. Or, à la suite de (48)

$$pF_i^i = p\varDelta_i, \qquad F_i^i \leqslant F_i,$$

donc, vu (52),

$$pF_i^i = \aleph_1;$$

à cause du théorème 1, le tableau $F_i^i$, et à fortiori le tableau $F_i$, donc le tableau $F$, contient un sous-ensemble disjonctif non dénombrable, c. q. f. d.

[19]) Rappelons que tout couple de points consécutifs d'un ensemble ordonné $F$ dont chacun est un point d'accumulation de $F$ s'appelle un *saut de seconde espèce* de l'ensemble $F$.

[20]) En effet, pour qu'un ensemble ordonné soit semblable à un ensemble linéaire, il faut et il suffit qu'il soit séparable et que la famille de ses sauts de seconde espèce[19]) soit au plus dénombrable (voir loc. cit.[8])).



**17.** La démonstration du théorème 2 s'applique pour démontrer le

Théorème $2^{\text{bis}}$. *Tout tableau ramifie auquel on peut attacher un ensemble ordonné séparable $E$ et une transformation uniforme et croissante du tableau dans $E$, est normal.*

Corollaire. *Est normal tout tableau ramifié dont l'ordre partiel peut être élargi de manière que le tableau devienne un ensemble ordonné séparable.*

## IV. Familles d'ensembles bien ordonnés extraits d'un ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin.

La question se pose si, dans les théorèmes 2, $2^{\text{bis}}$ (et dans le corollaire précédent), l'on peut remplacer la condition de séparabilité de $E$ par celle que $E$ vérifie la condition de Souslin, c'est-à-dire que toute famille d'intervalles non vides de $E$ deux à deux disjoints soit au plus dénombrable.

La question est délicate; en effet, d'une part, on ne sait pas si tout ensemble ordonné vérifiant la condition de Souslin est nécessairement séparable, et de l'autre, on peut prouver le

Théorème 3. *Pour qu'un ensemble ordonné $E$ vérifiant la condition de Souslin soit séparable, il faut et il suffit que tout* *sous-ensemble du tableau ramifié $\sigma E$ soit normal*[21]) (cf. théorème 2).

**18.** Puisque tout ensemble ordonné séparable vérifie la condition de Souslin, le théorème 2 dit que la condition du théorème 3 est suffisante; prouvons que la condition du théorème 3 est nécessaire: il s'agit donc de prouver la séparabilité de tout ensemble ordonné $E$ vérifiant la condition de Souslin et tel que tout sous-ensemble de $\sigma E$ est normal[21]).

**19.** Prouvons qu'on peut supposer que l'ensemble ordonné $E$ soit continu.

Tout d'abord, $\Delta$ étant l'ensemble des extrémités gauches des sauts de seconde espèce de $E$[19]), soit

$$s(E-\Delta) \tag{53}$$

l'ensemble ordonné qui s'obtient de l'ensemble ordonné $E-\Delta$ en plaçant entre tout couple de points consécutifs de $E-\Delta$ (c'est-à-dire dans tout saut de $E-\Delta$) un ensemble ordonné semblable à l'ensemble des nombres réels; enfin, désignons par

$$ls(E-\Delta) \tag{54}$$

l'ensemble ordonné qu'on obtient de $s(E-\Delta)$ en comblant chaque lacune de $s(E-\Delta)$ par un point.

On démontre sans peine que, d'une part, si $E$ vérifie la condition de Souslin, il en est de même de chacun des ensembles

$$E-\Delta, \qquad s(E-\Delta), \qquad ls(E-\Delta)$$

et, d'autre part, que la normalité de tout tableau extrait du tableau $\sigma E$ entraîne celle de tout tableau ramifié appartenant à n'importe lequel des tableaux ramifiés

$$\sigma(E-\Delta), \qquad \sigma(s(E-\Delta)), \qquad \sigma(ls(E-\Delta)).$$

Réciproquement, on démontre de proche en proche que la séparabilité de l'ensemble ordonné $ls(E-\Delta)$ entraîne celle de chacun des ensembles

$$s(E-\Delta), \qquad E-\Delta, \qquad E.$$

[21]) Pour la terminologie, voir Introduction.



Or, toutes les fois que $E$ se compose de plus d'un point, l'ensemble ordonné $ls(E-\Delta)$ est continu, ce qui prouve qu'on peut bien supposer que l'ensemble ordonné $E$ dont il est question dans le théorème 3 soit continu; c'est ce que nous ferons.

Pour prouver la séparabilité de $E$, nous allons nous servir d'une $\vartheta$-partition complète de $E$[22]) en l'adaptant aux besoins de notre cause.

**20.** Désignons, pour tout segment $S$ de $E$ ayant plus d'un point, par

$$\varphi(S) \tag{55}$$

un sous-ensemble quelconque de $S$ semblable au segment $[0,1]$ des nombres réels et tel que, quel que soit le point $a$ de $S$ différant des deux extrémités $r, s$ de $S$, il y ait deux points de $\varphi(S)$ (variant avec $a$) distincts de $r$ et $s$, et dont l'un précède le point $a$ alors que l'autre succède à $a$.

On en déduit que $S$ et $\varphi(S)$ ont mêmes extrémités.

Si, pour tout point $a \in \varphi(S)$, l'on désigne par $S_a$ une portion de $S$ contenant le point $a$ et si $S_a S_{a'} = 0$ pour tout couple de points distincts $a, a'$ de $\varphi(S)$, la décomposition

$$S = \sum_a S_a \qquad (a \in \varphi(S)) \tag{56}$$

est bien déterminée et on vérifie que, pour tout $a \in \varphi(S)$, $S_a$ est un segment de $S$ pouvant se réduire à un point.

Ceci étant, soit $D_0$ la famille composée de l'ensemble continu $E$ lui-même; d'une manière générale, soit $\alpha > 0$ un nombre ordinal et supposons que pour tout $\xi < \alpha$ l'on ait déterminé la famille $D_\xi$ composée de portions de $E$ de manière qu'il y ait un point $a$ de $E$ tel que l'ensemble $(a)$ composé du point $a$ ne figure comme élément dans aucune famille $D_\xi$ $(\xi < \alpha)$.

Définissons maintenant $D_\alpha$.

Si $\alpha$ est de première espèce et $S$ parcourt les éléments de $D_{\alpha-1}$ dont chacun se compose de plus d'un point, alors, en écrivant comme ci-dessus $S = \sum_a S_a$ $(a \in \varphi(S))$, soit $D_\alpha$ la famille des $S_a$.

Si $\alpha$ est de seconde espèce, $D_\alpha$ désignera la famille des ensembles

[22]) Voir loc. cit. [1]) p. 114 et p. 118.

$$\prod_{\xi<\alpha} E_0 E_1 \dots E_\xi,$$

les $E_\xi$ étant tels que $E_\xi \in D_\xi$ et $E_\xi > E_\eta$ pour tout $\xi < \eta < \alpha$.

En désignant par

(57) $$\gamma$$

le premier ordinal tel que, quel que soit le point $a$ de $E$, l'ensemble $(a)$ figure dans l'une des familles $D_\alpha$ $(\alpha < \gamma)$, la famille $D$ des éléments des $D_\alpha$ $(\alpha < \gamma)$, s'appelle une *$\vartheta$-partition complète de $E$.*

Soient pour tout $\alpha < \gamma$:

(58) $$\Psi D_\alpha$$

la famille des éléments de $D_\alpha$ dont chacun a plus d'un point, et

(59) $$\Psi D$$

la famille de tous les éléments des $\Psi D_\alpha$ $(\alpha < \gamma)$.

**21.** Nous allons prouver que

(60) $$p\,\Psi D \leqslant \aleph_0.$$

Tout d'abord, on démontre que tout élément de $\Psi D$ est un segment de $E$ ayant plus d'un point et que, quels que soient deux éléments distincts $A, B$ de $\Psi D$, ils n'ont aucune extrémité en commun et sont tels que

(61) ou bien $A < B$, ou bien $B < A$, ou bien $AB = 0$;

enfin, pour tout $\xi < \eta < \gamma$, on a

$$\Psi D_\xi \,.\, \Psi D_\eta = 0.$$

Ceci étant, désignons pour tout $A \in \Psi D$ par

(62) $$k(A)$$

l'ensemble des extrémités gauches des éléments $X$ de $\Psi D$ vérifiant la relation

$$A \leqslant X;$$

on voit que, $\alpha$ étant défini par $A \in \Psi D_\alpha$, $k(A)$ est un sous-ensemble bien ordonné de type $\alpha+1$ de $E$; de plus, pour tout couple d'éléments distincts $A, B$ de $\Psi D$, les relations

$$A < B, \quad B < A, \quad AB = 0$$



entraînent respectivement

$$k(A) \mathrel{\ast\!\!<} k(B), \quad k(B) \mathrel{\ast\!\!<} k(A), \quad k(A) \parallel_{\ast<} k(B),$$

le signe $k(A) \parallel_{\ast<} k(B)$ voulant dire que $k(A)$ et $k(B)$ sont deux ensembles bien ordonnés incomparables par rapport à la relation $\ast\!\!<$ définie par (2).

Par conséquent, en désignant par

(63) $$k(D)$$

la famille des $k(A)$ $(A \in \Psi D)$, on aura

(64) $$p\,\Psi D = p\,k(D).$$

**22.** Or,

(65) $$k(D) \leqslant \sigma E;$$

donc, par hypothèse, le tableau ramifié $k(D)$ est normal. Tout sous-ensemble bien ordonné de $E$ (donc aussi tout sous-ensemble ordonné du tableau $\sigma E$) étant au plus dénombrable, on en déduit que tout sous-ensemble non dénombrable du tableau $\sigma E$ contient un sous-ensemble disjonctif non dénombrable.

Si, alors, on avait $p\,\Psi D > \aleph_0$, la relation (64) entraînerait $p\,k(D) > \aleph_0$, et, comme nous venons de voir, le tableau $k(D)$ contiendrait un sous-ensemble, soit $K$, non dénombrable et composé d'éléments deux à deux incomparables par rapport à $\ast\!\!<$; en désignant par $D^0$ la famille des $A \in \Psi D$ vérifiant $k(A) \in K$, on aurait $p\,D^0 = p\,K$, donc $p\,D^0 > \aleph_0$. Tout élément de $D^0$ est un segment de $E$ ayant plus d'un point; en désignant donc par $D^1$ la famille des intervalles de l'ensemble ordonné continu $E$ dont chacun a mêmes extrémités que l'un des segments appartenant à $K$, $D^1$ serait une famille non dénombrable d'intervalles non vides de $E$, ce qui est impossible, $E$ vérifiant la condition de Souslin.

On a donc $p\,k(D) \leqslant \aleph_0$ ce qui, vu (64), démontre (60).

**23.** Ceci étant, considérons la famille des ensembles $\varphi(S)$ $(S \in \Psi(D))$ définis par (55); tout $\varphi(S)$ étant semblable au segment $[0,1]$, désignons par

(66) $$\varphi_0(S)$$

l'ensemble des points de $S$ correspondant, dans une similitude entre $S$ et $[0,1]$, à l'ensemble des points rationnels de $[0,1]$; on démontre facilement [23]) que l'ensemble

$$\sum_S \varphi_0(S) \qquad (S \in \Psi(D)) \tag{67}$$

est un sous-ensemble de $E$ partout dense sur $E$.

Or, l'ensemble (67) est dénombrable ce qui est une conséquence de (60) d'une part et de l'identité $p\varphi_0(S) = \aleph_0$ $(S \in \Psi D)$ d'autre part; bref, l'ensemble ordonné $E$ est séparable, c. q. f. d.

**24.** En modifiant légèrement la démonstration précédente du théorème 3, on démontre le

Théorème $3^{\text{bis}}$. *Pour qu'un ensemble ordonné $E$ vérifiant la condition de Souslin soit séparable, il faut et il suffit que tout tableau ramifié, transformable en un sous-ensemble de $E$ par une transformation uniforme croissante, soit normal* (cf. théorème $2^{\text{bis}}$).

---

[23]) Voir loc. cit. [1]) p. 120.

*(Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1937).*

## Властивість сімій добре упорядкованих лінійних множин

Г. Курепа (Гліна).

(Резюме)

Автор розв'язує одну проблему, яку поставив в попередній своїй праці [1]), а з її розвязки випроваджує між іншим такий висновок: Кожна несчисленна сім'я $F$ добре упорядкованих лінійних множин містить у собі сім'ю $\Phi$, рівної сили з сім'єю $F$, і якої жодний елемент не є початковим відрізком іншого елементу сім'ї $\Phi$.

---

# Ramanujan sums and almost periodic functions

by

P. ERDÖS, M. KAC, E. R. van KAMPEN and A. WINTNER (Baltimore).

Introduction. Several classical formal trigonometrical expansions of the analytic theory of numbers have recently been shown [1]) to be periodic or almost periodic Fourier series of the functions which they represent. The object of the present paper is to prove a corresponding result for an extensive class of multiplicative arithmetical sequences.

In particular, it will be shown that the celebrated formal *trigonometrical series* of Ramanujan [2]) are almost periodic *Fourier series* in the sense of Besicovitch [3]). Hence the Ramanujan coefficients will turn out to be Fourier averages which vanish for incommensurable values of the frequency parameter, the almost periodic functions in question being always limit-periodic. It should be emphasized that the fact that Ramanujan's trigonometrical expansions turn out to be Fourier expansions leads without any further device to his explicit formulae, if one writes down the Fourier average representation of the coefficients.

Although the arithmetical functions $f(n)$ will only be considered for $n=1,2,\ldots$, one can realize the usual assumption of the Besicovitch theory by placing $f(-n)=f(n)$ for $n=1,2,\ldots$

---

[1]) A. Wintner, Amer. Jour. Math. 57 (1935) p. 534—538; Duke Math. Jour. 2 (1936) p. 443—446; Amer. Jour. Math. 59 (1937) p. 629—634; P. Hartman and A. Wintner, Travaux Inst. Math. Tbilissi 3 (1938) p. 113—119; P. Hartman, Amer. Jour. Math. 61 (1938) p. 66—74.

[2]) S. Ramanujan, Collected Papers, Cambridge, 1927, p. 179—199.

[3]) A. S. Besicovitch, Almost Periodic Functions, Cambridge, 1932, p. 91—112.