Sur une suite egalement répartie

par

R. FORTET (Paris).

Introduction.

Considérons les nombres x de l'intervalle $(0,1)$; a étant un entier supérieur à 1, les nombres

$$(S) \qquad x_0 \equiv x, \quad x_1 \equiv ax, \quad \ldots, \quad x_n \equiv a^n x \quad (\text{mod. } 1)$$

avec $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ et $i = 0, 1, 2, \ldots$ forment une suite que nous appellerons la suite S. Les arithméticiens ont démontré, depuis assez longtemps déjà[1]), que la suite S est *„également répartie (gleichverteilt) au sens faible"*, c'est à dire que si I est un intervalle quelconque de l'intervalle $(0,1)$, et si sur les n premiers termes de la suite S il y en a N_n qui appartiennent à I, on a

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = \text{mes } I,$$

sauf peut être si x appartient à un certain ensemble de mesure nulle, indépendant de I. On en déduit que si $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Riemann sur $(0,1)$, on a (presque partout)

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Nous dirons qu'une suite est *également répartie au sens fort* si pour elle la propriété (1) subsiste lorsque l'on remplace

[1]) Voir par exemple, Van der Corput, Diophantische Ungleichungen, Acta Math. 56 (1931) p. 373.

l'intervalle I par un ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) quelconque E, à ceci près que l'ensemble exceptionnel de mesure nulle pourra cette fois dépendre de E.

Récemment, M. RAÏKOV a démontré que la suite S est également répartie au sens fort[2]); mieux même, il a demontré que si $f(x)$ est une fonction sommable (au sens de Lebesgue), mais quelconque par ailleurs et en particulier non nécessairement bornée, la propriété (2) subsiste presque partout.

Nous nous proposons: dans un premier chapitre, de signaler quelques remarques relatives à la théorie des chaînes stationnaires et auxquelles nous rattacherons le résultat de M. RAÏKOV, dans un deuxième chapitre, d'étudier avec plus de précision la propriété (2) lorsque $f(x)$ est suffisamment régulière; dans un troisième chapitre, d'étendre les résultats du chapitre II aux suites S' extraites de S.

Chapitre I.

Nous établirons d'abord un résultat extrêmement simple, mais cependant utile et qui n'a pas encore été signalé à notre connaissance, sur les variables aléatoires liées en chaîne stationnaire.

§ 1. Calcul de l'écart quadratique moyen d'une somme de variables aléatoires liées en chaîne stationnaire.

Soit une suite continue de variables aléatoires x_t $(0 \leqslant t < +\infty)$ telles que $E(x_t) = 0$, $E(x_t^2) = 1$ ($E(X)$ désigne la valeur probable de X) et liées en chaine stationnaire, ou tout au moins (cela est moins restrictif et sera suffisant) telles que

$$(3) \qquad E(x_t x_{t+u}) = R(u) \qquad (u \geqslant 0)$$

ne dépende que de u. (Il y aurait chaîne stationnaire si, plus strictement, la loi de probabilité du couple (x_t, x_{t+u}) ne dépendait que de u). On sait[3]) qu'alors $R(u)$ est de la forme

$$(4) \qquad R(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \; dF(x)$$

où $F(x)$ est une fonction de répartition.

[2]) D. Raïkov, On some arithmetical properties of summable functions Rec. Math. de Moscou 1 (43; 3) (1936) p. 384.

[3, 4]) A. Khintchine, Korrelationstheorie der stationnären stochastischen Prozesse, Math. Ann. 109 (1934) p. 604—615.

M. Khintchine[4]) a prouvé que la moyenne

$$\mathcal{E}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T x_t\,dt$$

converge en moyenne quadratique en probabilité vers une variable aléatoire limite $\mathcal{E}$ lorsque T croît indéfiniment. Il en résulte que $E[\mathcal{E}^2(T)]$ tend vers $E(\mathcal{E}^2)$. Nous nous proposons d'abord de calculer $E(\mathcal{E}^2)$, en supposant connue $F(x)$.

On a

$$[\mathcal{E}(T)]^2=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T x_u x_v\,du\,dv,$$

$$E[\mathcal{E}(T)]^2=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(|v-u|)\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\Big[\int_0^v R(v-u)\,du+\int_v^T R(u-v)\,du\Big]dv$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\int_0^T\Big[\int_0^v\cos[(v-u)x]\,du+\int_v^T\cos[(u-v)x]\,du\Big]dv\Big\}dF(x)$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos Tx}{T^2x^2}\,dF(x).$$

Or, d'après un lemme de M. Khintchine, lorsque T croît indéfiniment cette quantité tend vers

$$E(\mathcal{E})^2=F(+0)-F(-0).$$

Il est d'ailleurs facile de voir que l'on a aussi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R(u)\,du=F(+0)-F(-0).$$

Pour que $E[\mathcal{E}(T)^2]$ tende vers 0, il est donc nécessaire et suffisant que $\frac{1}{T}\int_0^T R(u)\,du$ tende vers 0 avec $1/T$; or cela a lieu en particulier si $R(u)$ tend vers 0 avec $1/u$; d'où le résultat suivant, qu'il nous paraît intéressant de dégager:

Théorème 1. *La moyenne* $\frac{1}{T}\int_0^T x_t\,dt$ *de variables aléatoires* x_t, *liées en chaîne stationnaire et de valeur moyenne nulle, tend vers* 0 *en moyenne quadratique si le coefficient de corrélation* $R(u)$ *tend vers* 0 *avec* $1/u$.

Ce résultat reste évidemment valable pour une suite non plus continue, mais discrète, de variables aléatoires liées en chaîne stationnaire. (Il suffit d'ailleurs pour la validité de ce résultat que $E(x_t x_{t+u})$, sans être indépendant de t, soit borné supérieurement en module par une quantité $H(u)$ tendant vers 0 avec $1/u$).

Ajoutons qu'on a prouvé[5]) d'autre part que, s'il s'agit des variables en chaînes stationnaires, $\mathcal{E}(T)$ tend presque surement vers $\mathcal{E}$; mais ce résultat ne subsiste pas forcément si l'on a seulement fait l'hypothèse moins restrictive que $E(x_t x_{t+u})$ ne dépend que de u. A ce sujet signalons toutefois le résultat très simple suivant:

Pour une suite discrète de variables aléatoires x_n *telle que* $E(x_n^2)=1$, $E(x_n x_{n+u})=R(u)$, *s'il existe un nombre positif* α *tel que, pour* u *assez grand, on ait* $|R(u)|<\frac{1}{u^{\alpha}}$, *la moyenne* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ *tend presque sûrement vers* 0.

Et très vraisemblablement ce résultat subsiste pour une suite continue.

§ 2. Démonstration du résultat de M. Raïkov relatif à la suite S.

Posons $\varphi^n(x)=\dfrac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n+1}$, les x_n désignant les termes de la suite S et $f(x)$ une fonction sommable sur $(0,1)$. On peut imaginer que $x=x_0$ est choisi au hasard sur $(0,1)$ avec densité de probabilité uniforme égale à 1; les x_n sont alors des variables aléatoires liées en chaîne stationnaire, et il en est de même des variables $x_n=f(x_n)$; d'après le théorème de M. Kolmogoroff signalé plus haut[5]), la moyenne $\varphi^n(x)$ tend alors presque sûrement,

[5]) A. Kolmogoroff, Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff-Khintchineschen Ergodensatzes, Rec. Math. de Moscou, (2 44; 2) (1937) p. 367.

c'est à dire presque partout, vers une certaine limite $\varphi(x)$. Tout revient à établir que, presque partout,

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(y)\,dy.$$

Pour cela, *nous ferons la restriction que* $\int_0^1 f^2(y)\,dy<+\infty$.

Par ailleurs, on peut toujours supposer

$$\int_0^1 f(y)\,dy=E(X_n)=0,\qquad \int_0^1 f^2(y)\,dy=E^2(X_n)=1.$$

Calculons

$$R(u)=E(X_n\cdot X_{n+u})=E(X_0\cdot X_u)=\int_0^1 f(x)f(x_u)\,dx.$$

Pour pousser le calcul de $R(u)$, supposons un instant qu'au lieu de $(0,1)$ on considère $(0,2\pi)$ et que $f(x)$ soit périodique de période 2π — ce qui ne change rien au fond du problème. On aura

$$R(u)=\int_0^{2\pi} f(x)f(a^u x)\,dx.$$

Considérons la série de Fourier relative à $f(x)$:

$$A_0+A_1\cos x+B_1\sin x+\ldots+A_k\cos kx+B_k\sin kx+\ldots$$

On voit sans difficulté que l'on a

$$\begin{aligned}R(u)&=\lim_{k\to\infty}[(A_{a^u}A_1+B_{a^u}B_1)+\ldots+(A_{ka^u}A_k+B_{ka^u}B_k)]\\ &\leqslant\{\sum_l(A_l^2+B_l^2)\}\cdot\{\sum_l(A_{la^u}^2+B_{la^u}^2)\}.\end{aligned}\tag{5}$$

Comme $\sum_l(A_l^2+B_l^2)=\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dx$, le second facteur de (5) tend vers 0 avec $1/u$: il en est de même par conséquent de $R(u)$ et, en revenant à l'intervalle $(0,1)$, on déduit du théorème 1 que

$$\int_0^1\varphi^2(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1(\varphi^n(x))^2\,dx=0.$$

On a donc presque partout

$$\varphi(x)=0=\int_0^1 f(x)\,dx$$ [6]).

Chapitre II.

Dans ce deuxième chapitre nous considérons toujours la suite S, mais nous supposons que la fonction $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre quelconque. Au lieu des x_n, considérons la chaîne en quelque sorte inverse, définie de la façon suivante: x_0' est une variable aléatoire, de densité de probabilité uniforme $(=1)$ sur $(0,1)$; x_1' se déduit de x_0' par l'une ou l'autre des a formules

$$x_1'=\frac{x_0'}{a}+\frac{i}{a}\qquad(i=0,1,\ldots,a-1).$$

La formule à employer est choisie au hasard, avec probabilité $1/a$ pour chaque formule; x_2' se déduit de x_1' comme x_1' se déduit de x_0'; et ainsi de suite. On constate aisément que la variable aléatoire

$$\varphi'^n(x)=\frac{f(x_0')+f(x_1')+\ldots+f(x_n')}{n+1}\tag{6}$$

a la même fonction der répartition que $\varphi^n(x)$, défini au début du § 2 (Chap. I), et l'étude de $\varphi^n(x)$ se ramène à celle de $\varphi'^n(x)$. Posons

$$\Psi_i(x)=\frac{x}{a}+\frac{i}{a}\qquad(i=0,\ldots,a-1).$$

Désignons par $W(f)$ la transformation linéaire fonctionnelle

$$W(f)=\sum_{i=0}^{a-1}\frac{1}{a}f[\Psi_i(x)].\tag{7}$$

---

[6]) Cette démonstration ne diffère pas essentiellement de celle de M. Raïkov, parce que le théorème de M. Kolmogoroff sur lequel elle s'appuie fait appel au même odre d'idées que le travail de M. Raïkov; nous l'indiquons pour donner une application de notre théorème 1.

Nous avons étudié ailleurs [7]) une classe d'opérations linéaires dans laquelle rentre l'opération (7); le résultat essentiel de cette étude est que l'itération de W est exactement analogue à l'itération d'une substitution linéaire finie, dont les propriétés sont bien connues. En remarquant que l'équation

$$f - \lambda W(f) = 0$$

n'admet qu'une valeur caractéristique de module 1, $\lambda = 1$, parce que $W^n(f)$ tend, quel que soit f, vers $\int_0^1 f\,dx$, et en posant

$$W_1(f) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

on peut écrire

$$W = W_1 + W_2$$

avec $W_1 \cdot W_2 = W_2 \cdot W_1 = 0$; notre résultat s'exprime par le fait que, quel que soit n, on a

$$\| W_2^n \| < \frac{M}{\varrho^n}$$

où $\varrho > 1$ est un certain nombre.

Considérons alors le $\nu^{\text{ième}}$ moment:

$$N^{\nu}_{i,n}(x) = E_{x'_i = x}[f(x'_i) + f(x'_{i+1}) + \dots + f x'_{i+n})]^{\nu}.$$

Il ne dépend pas de i en réalité, et nous l'écrirons $N^{\nu}_n(x)$; on trouve facilement l'équation de recurrence

(8) $$N^{\nu}_n(x) = W[N^{\nu}_{n-1}] + \dots + C^{\gamma}_{\nu} f(x)^{\gamma} W[N^{\nu-\gamma}_{n-1}] + \dots$$

Cette équation est analogue à celle établie par M. Fréchet [8]) et qui lie les moments des variables aléatoires en chaînes de Markoff, l'opération W jouant le rôle de la substitution linéaire définie par la matrice de probabilité de Markoff; et comme les propriétés d'itération de W sont les mêmes que celles de ladite substitution linéaire, il s'en suit que les méthodes de M. Fréchet dans l'ouvrage cité plus haut sont applicables ici. Nous ne pouvons songer à développer les calculs, fort longs et qui ne feraient que répéter, *mutatis mutandis*, ceux de M. Fréchet.

[7]) W. Doeblin et R. Fortet, Sur des chaînes à liaisons complètes. Bull. Soc. Math. de France 65 (1937) p. 132. Cette étude suppose la condition de Lipschitz d'odre 1, mais ce n'est pas essentiel. Je démontre que l'opération W a un „rayon polaire" supérieur à 1; fait dont j'ai indiqué le sens et les conséquences dans une note: Sur des opérations linéaires non complètement continues, C. R. 1937, p. 1543; pour les démonstrations, voir: R. Fortet, Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables, Revista de Ciencias (Lima, Pérou), n° de Juin 1938.

[8]) M. Fréchet, Traité du Calcul des probabilités, T. 1, fasc. III, second livre (1938) p. 146.

On obtient les résultats suivants:

1° *$\varphi'^n(x)$, et par suite $\varphi^n(x)$, tend presque sûrement, c'est à dire presque partout, vers $\int_0^1 f(x)\,dx$.*

2° *La loi de répartition de la variable aléatoire*

$$\frac{(n+1)\,\varphi'^n(x) - (n+1)\int_0^1 f(x)\,dx}{\sqrt{n+1}},$$

et par suite celle de

$$\frac{(n+1)\,\varphi^n(x) - (n+1)\int_0^1 f(x)\,dx}{\sqrt{n+1}},$$

tend, lorsque n croit indéfiniment, vers une loi de Gauss, pourvu que l'écart quadratique moyen-limite σ défini par la formule

(9) $$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{f(x'_0) + f(x'_1) + \dots + f(x'_n) - (n+1)\int_0^1 f(x)\,dx}{\sqrt{n+1}}\right]^2$$

ne soit pas nul.

3° *Sous la même condition, la variable aléatoire $\sum_{i=0}^{n} f(x'_i)$, et par suite la variable $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)$, vérifie la loi du logarithme itéré* [9]).

Le résultat 1° est un cas particulier du théorème de M. Raïkov; 2° peut être considéré comme une extension d'un résultat de

[9]) Telle que l'énoncé M. Doeblin pour les variables aléatories liées en chaînes de Markoff; cf. W. Doeblin, Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples, Bull. Math. Soc. Roum. des Sci. 39 (1937) p. 98.

M. KAC[10]): M. KAC a trouvé la loi de Gauss non pour la suite S, mais pour une suite où la dépendance est moins stricte, obtenue en posant

$$x_n \equiv a^{n(n-1)/2} x \pmod{1} \qquad (0 \leqslant x_n \leqslant 1).$$

Le résultat 3° peut s'établir selon les méthodes utilisées par M. DOEBLIN pour établir le théorème du logarithme itéré dans les chaînes de Markoff [9]).

Fonctions pour lesquelles l'écart quadratique moyen limite est nul. Etant donnés nos résultats 2° et 3°, il est intéressant de trouver les fonctions (satisfaisant à une condition de Lipschitz) pour lesquelles $\sigma = 0$. On peut toujours supposer $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, où $W_1(f) = 0$. Posons

$$V(f) = \sum_{i=1}^{\infty} W_2^i(f);$$

on a

$$W + W V = W_1 + V.$$

Or σ^2 peut s'écrire

$$\sigma^2 = W_1[f^2 + 2 f V(f)].$$

Selon une idée due à M. FRÉCHET, qui l'a appliquée aux variables aléatoires liées en chaînes de Markoff, nous allons décomposer σ^2 en carrés:

$$\sigma^2 = W_1\{[f+V(f)]^2 - [V(f)]^2\} = W_1\{W[f+V(f)]^2 - [V(f)]^2\}.$$

Observons que

$$W[f+V(f)] = W_1(f) + V(f) = V(f).$$

Soit t un nombre donné, entre 0 et 1; $V(f)$ est une fonction de x, que nous pouvons représenter par $\overline{V}(x)$; quel que soit t, et en posant $\overline{V}(t) = \alpha$, on peut écrire

$$\begin{aligned} W[f(x)+\overline{V}(x)]^2 &= W\{[f(x)+\overline{V}(x)-\overline{V}(t)]+\overline{V}(t)\}^2 \\ &= W\{[f+V(f)-\alpha]+\alpha\}^2 \\ &= W[f+V(f)-\alpha]^2 + 2\alpha W[f+V(f)-\alpha] + \alpha^2 \\ &= W[f+V(f)-\alpha]^2 - \alpha^2 + 2\alpha V(f). \end{aligned}$$

[10]) M. Kac, Sur les fonctions indépendantes (V), Studia Math. 7 (1938) p. 96; voir chapitre III du présent mémoire.

Cette dernière égalité étant vraie quels que soient t et x, on en déduit pour $t = x$

$$W[f+V(f)] = [\overline{V}(x)]^2 + A(x), \qquad \sigma^2 = W_1(A) = \int_0^1 A(x)\,dx.$$

$A(x)$ est ce que devient $W[f+V(f)-\alpha]^2$, fonction des deux variables x et t, lorsque l'on y fait $t = x$. Evidemment σ^2 ne sera nul que si $A(x)$ est nul quel que soit x. D'ailleurs, en posant

$$B(x,t) = f(x) + \overline{V}(x) - \overline{V}(t),$$

on a

$$A(x) = \sum_i \frac{1}{a} B\left(\frac{x}{a} + \frac{i}{a}, x\right)^2 = \sum_i \frac{1}{a} H_i[B(x,t)]^2_{t=x},$$

H_i désignant la transformation qui fait passer de $f(x)$ à $f[\Psi_i(x)]$.

On voit ainsi que, pour que $\sigma^2 = 0$, il faut avoir, quel que soit i,

$$H_i[f+V(f)] = V(f); \tag{10}$$

or, E désignant la transformation identique, on a

$$f + V(f) = (E - W_2)^{-1}(f).$$

Posons

$$g = (E - W_2)^{-1}(f) \qquad \text{où} \quad f = g - W_2(g).$$

On a

$$V(f) = g - f = W_2(g).$$

Enfin posons

$$g = W_1(g) + g' = \int_0^1 g\,dx + g' \quad \text{avec} \quad \int_0^1 g'\,dx = 0;$$

$$W_2(g) = W_2(g') = W(g').$$

(10) s'écrit

$$H_i(g) = H_i(g') + W_1(g) = W_2(g) = W(g'). \tag{11}$$

Il résulte de (11) que $H_i(g')$ ne dépend pas de i, donc

$$g'[\Psi_1(x)] = g'[\Psi_2(x)] = \ldots = g'[\Psi_{a-1}(x)];$$

g' doit donc être une fonction périodique de période $1/a$; on a alors

$$H_i(g') = W(g')$$

et d'après (11), $W_1(g)=0$, $g'=g$, $f=g'-W(g')$; de sorte que f doit être de la forme

$$f(x)=g(x)-g\left(\frac{x}{a}\right), \tag{12}$$

où $g(x)$ est périodique de période $\frac{1}{a}$, avec $\int_0^1 g(x)\,dx=0$, mais cette dernière condition peut être omise, puisque si l'on ajoute une constante k à $g(x)$ dans (12), $f(x)$ n'est pas modifié. D'autre part, ceci supposé, $\int_0^1 f(x)\,dx=0$; pour revenir au cas général, il suffit d'ajouter une constante au deuxième membre de (12).

La condition nécessaire et suffisante pour que σ^2 soit nul est que $f(x)$ soit de la forme

$$f(x)=k+g(x)-g\left(\frac{x}{a}\right), \tag{13}$$

où k est une constante et $g(x)$ une fonction périodique de période $1/a$.

Si $f(x)$ est de la forme $k+g(x)-g(\frac{x}{a})$, $g(x)$ étant périodique et de période $\frac{1}{a}$, $g(x)-g(\frac{x}{a})$ est périodique de période 1, et par suite $f(x)$ aussi; on a alors

$$\begin{aligned}
f(x)&=k+g(x)-g\left(\frac{x}{a}\right),\\
f(ax)&=k+g(ax)-g(x),\\
f(a^2x)&=k+g(a^2x)-g(ax),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
f(a^nx)&=k+g(a^nx)-g(a^{n-1}x),
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{i=0}^{n} f(a^ix)=(n+1)\int_0^1 f(x)\,dx+g(a^nx)-g(\frac{x}{a})$, ce qui précise ce qui se passe dans ce cas particulier.

Remarque. Un cas particulièrement intéressant est celui où $f(x)$ est une fonction égale à 1 sur un intervalle (a,b) et à 0 partout ailleurs. Soit F la famille de ces fonctions. Or une fonction de la famille F, bien que très simple, ne satisfait pas à une condition de Lipschitz et n'est même pas continue.

Mais nos résultats supposent seulement que f est telle que si on lui applique l'opération W, on peut écrire

$$W(f)=\int_0^1 f\,dx+W_2(f)=W_1(f)+W_2(f), \qquad \left[W_1(f)=\int_0^1 f\,dx\right],$$

avec les conditions

$$W_1.[W_2(f)=W_2.[W_1(f)]=0, \qquad \|W_2^n(f)\|\leqslant\frac{M}{\varrho^n} \text{ où } \varrho>1.$$

Or, ces conditions sont satisfaites pour une fonction de la famille F et les résultats en question lui sont applicables; plus généralement, ces résultats seront applicables à une fonction égale à 1 sur un ensemble composé d'un nombre fini d'intervalles et à 0 en dehors de cet ensemble.

Chapitre III.

Considérons maintenant une suite S' quelconque extraite de S, c'est à dire que $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ étant une suite d'entiers croissants, on pose

$$(S') \qquad x_0\equiv x, \quad \dots, \quad x_n\equiv a^{l_n}x \qquad (\text{mod. } 1)$$

avec $0\leqslant x_n\leqslant 1$; $f(x)$ étant toujours une fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz, on pose toujours

$$W(f)=\sum_{i=0}^{a-1}\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}+\frac{i}{a}\right)$$

et, d'autre part, $x_0'=x_0$ et, plus généralement, x_n' est donné aléatoirement à partir de x_{n-1}' avec probabilité $1/a$ par l'une ou l'autre des $a^{l_n-l_{n-1}}$ formules

$$x_n'=\frac{x_{n-1}'}{a^{l_n-l_{n-1}}}+\frac{i}{a^{l_n-l_{n-1}}}.$$

Observons que si l'on prend $l_n=\frac{n(n-1)}{2}$, on obtient la suite spéciale considérée par M. Kac.

Nous poserons

$$B_n^2 = E\left\{\frac{[\sum_{i=0}^{n} f(x_i')]^2}{n+1}\right\},$$

en supposant $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, $\int_0^1 f(x)^2\,dx = 1$.

Evaluation de B_n^2.

(14) $$B_n^2 = \int_0^1 f(x)^2\,dx + \frac{2}{n+1}\sum_{i<J}^{n} E[f(x_i')\,f(x_J')].$$

Considérons les différences $l_J - l_i$ $(i<J, i\leqslant n, J\leqslant n)$; il y en a $\alpha_k(n)$ qui sont égales à k; on a évidemment

(15) $$\alpha_k(n) \leqslant (n+1-k).$$

D'ailleurs, si $l_J - l_i = k$, on a

(16) $$|E[f(x_i')\,f(x_J')]| < \frac{M}{\varrho^k},$$

M et ϱ étant certains nombres déterminés, avec $\varrho > 1$: ceci d'après les propriétés de l'opération W. Si donc l'on pose

$$A(n) = \frac{2}{n+1}\sum_{i<J}^{n} E[f(x_i')\,f(x_J')],$$

on a

$$|A(n)| \leqslant 2M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1-k)}{n+1}\,\frac{1}{\varrho^k}.$$

B_n^2 est donc de la forme $B_n^2 = 1 + A(n)$, où $A(n)$ est une quantité bornée en module. Toutefois, en général, on ne peut pas affirmer que $A(n)$ a une limite pour $n\to\infty$. On peut former des exemples où une telle limite n'existe pas. Cependant, si l_n est de l'ordre de n^α avec $\alpha > 1$, ou d'un ordre supérieur, il est clair que $\alpha_k(n)$ reste borné lorsque n croit indéfiniment, et par suite $\frac{\alpha_k(n)}{n+1}$ tend vers 0; de sorte que $A(n)$ tend vers 0. Finalement:

B_n^2 reste borné lorsque n croit indéfiniment, et en particulier tend vers 1 si l_n est de l'ordre de n^α avec $\alpha > 1$, ou d'un ordre supérieur.

En posant

$$\varphi^n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{n+1}, \quad \varphi'^n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i')}{n+1},$$

$\varphi^n(x)$ et $\varphi'^n(x)$ ont même loi de probabilité; on démontre alors facilement que

La moyenne $\varphi'^n(x)$, et par suite $\varphi^n(x)$, tend presque sûrement, c'est à dire pour $\varphi^n(x)$ presque partout, vers 0 — résultat déja connu d'ailleurs[11]).

Loi de Gauss. Nous allons établir le résultat suivant:

Si B_n reste borné inférieurement par un nombre positif B, et en particulier si l_n est de l'ordre de n^α avec $\alpha > 1$[12]) *où d'un ordre supérieur, la loi de probabilité des variables aléatoires*

$$\frac{(n+1)\,\varphi'^n(x)}{B_n}, \quad \frac{(n+1)\,\varphi^n(x)}{B_n}$$

tend vers la loi de Gauss réduite.

Pour l'etablir, on peut suivre la méthode de M. Doeblin pour les chaînes de Markoff[13]). On pose

$$n_1 = \text{partie entière de } n^{2/3},$$
$$n_2 = \text{partie entière de } n^{1/36},$$

$$y_1 = \sum_{i=0}^{n_1-1} f(x_i'), \quad y_2 = \sum_{i=n_2+n_1-1}^{n_2+2n_1-2} f(x_i'), \;\ldots,\; y_h = \sum_{i=\beta_h}^{\gamma_h} f(x_i')$$

avec

$$\beta_h = (h-1)\,n_2 + (h-1)\,n_1 - 1, \qquad \gamma_h = (h-1)\,n_2 + h\,n_2 - 2;$$

de même:

$$z_h = \sum_{i=\delta_h}^{\varphi_h} f(x_i')$$

---

[11]) H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916) p. 312—352.

[12]) Ce qui a lieu dans le cas de M. Kac ($\alpha = 2$).

[13]) W. Doeblin, loc. cit. p. 76.

avec

$$\delta_h = h\,n_1 + (h-1)\,n_2, \quad \varphi_h = h\,n_1 + h\,n_2 - 1,$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i') = y_1 + \mathfrak{z}_1 + y_2 + \mathfrak{z}_2 + \ldots + y_\mu + \mathfrak{z}_\mu'.$$

$\mathfrak{z}_\mu'$, qui groupe les termes résiduels de la décomposition, a au plus $n_1 + n_2 - 1$ termes.

$$S_n' = \sum_{i=0}^{\mu} y_i, \qquad S_n'' = \sum_{i=0}^{\mu} \mathfrak{z}_i,$$

$$S_n = S_n' + S_n'' \quad \text{ou} \quad \frac{S_n}{B_n\sqrt{n+1}} = \frac{S_n'}{B_n\sqrt{n+1}} + \frac{S_n''}{B_n\sqrt{n+1}}.$$

On calcule facilement que $E\,[S_n'']^2$ est au plus de l'ordre de μn_2, c'est à dire de l'ordre de $n^{13/36}$, et par suite $\frac{S_n''}{B_n\sqrt{n+1}}$ a un écart-type qui tend vers 0 au moins comme $n^{-5/36}$; l'écart-type de $\frac{S_n'}{B_n\sqrt{n+1}}$ tend alors vers celui de $\frac{S_n}{B_n\sqrt{n+1}}$, c'est à dire vers 1. En posant

$$E(S_n')^2 = B_n'^{\,2}\mu n_1,$$

on voit que B_n'/B_n tend vers 1, donc B_n' reste borné inférieurement et supérieurement par des nombres positifs. On montre alors, à peu près comme M. Doeblin, que $\frac{S_n'}{B_n'\,\mu n_1}$ a, à la limite, comme loi de probabilité, une loi de Gauss réduite, et $\frac{S_n''}{B_n\sqrt{n+1}}$ étant „négligeable", il en est de même de $\frac{S_n}{B_n\sqrt{n+1}}$.

Loi du logarithme itéré. Enfin, on peut établir, moyennant la même restriction sur B_n, la loi du logarithme itéré, telle que l'énonce M. Doeblin pour les variables en chaîne de Markoff (loc. cit.) et en suivant sa méthode.

Note.

M. Raïkov a aussi examiné le cas des suites Σ, plus générales que les suites S ou S', définies de la façon suivante: $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ étant une suite d'entiers positifs croissants quelconques, on a

$$(\Sigma) \qquad x_n \equiv l_n . x \ (\text{mod. } 1) \qquad (0 \leqslant x_n < 1).$$

On sait (cf. H. Weyl, loc. cit.[11]) que ces suites sont „également réparties au sens faible". Mais M. Raïkov a pu démontrer que, $f(x)$ étant une fonction sommable (au sens de Lebesgue) quelconque, périodique et de période 1, on a

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big| \frac{\sum_{i=1}^{n} f(l_i x)}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx \Big|\,dx = 0.$$

On peut d'ailleurs démontrer que, si $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$, on a

$$(17)' \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big| \frac{\sum_{i=1}^{n} f(l_i x)}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx \Big|^2 dx = 0,$$

propriété qui est plus stricte. On peut alors se demander, si l'on a presque partout

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(l_i x)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

propriété qui entraînerait que Σ est „également répartie au sens fort" si elle avait lieu quelle que soit f; signalons à ce sujet que l'on peut prouver que (18) à lieu, du moins pour des fonctions de carré sommable, pourvu que les l_n croissent assez vite, mais cette croissance dépendant de f.

(Reçu par la Rédaction le 1. 3. 1939).

Про одну рівно розложену послідовність

Р. Фортет (Париж).

(Резюме)

Послідовність $\{a^n x\}$, де $a > 1$ натуральне число, є за модулом 1 рівно розложена (в розумінні Вейля) для майже всіх x, то значить, що числа членів тої послідовності, які падають в рівні проміжки (mod 1), є асимптотично рівні. Райков довів сильнішу властівість, впроваджуючи замість проміжків множини рівної міри (L). Якщо через $\{x_n\}$ позначимо послідовність $\{a^n x\}$ зредуковану mod 1, то (Райков) реляція (2) заходить для інтегровної функції $f(x)$. Автор випроваджує ті висновки з теорії льосових змінних залежних і прецизує висновки Райкова; досліджує також частинні послідовності з послідовності $\{x_n\}$.

Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité

par

W. DOEBLIN (Paris).

1. Introduction. Soient $x_1, \ldots\ldots, x_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité L. De nombreux auteurs ont étudié depuis presque deux siècles la forme de la loi de probabilité de $S_n = \sum_1^n x_i$ ou, ce qui revient au même, la forme de la fonction de répartition $F_n(x)$ de S_n, lorsque $n \to \infty$. Ce problème peut être considéré comme résolu à l'heure actuelle (au moins en première approximation) et ne fait pas l'objet de ce mémoire. Les premières recherches avaient pour but de montrer que, sous des hypothèses très larges, la loi de probabilité de $[S_n - nE(x)]/\sqrt{n}$ converge vers la loi de Gauss; toutefois l'exemple de la loi de Cauchy montrait qu'il pouvait y avoir d'autres lois limites. Dans son livre „Calcul des Probabilités“ [1]) M. P. LÉVY a indiqué toute une famille de lois de probabilités — les lois stables — qui sont, lorsque L satisfait à certaines conditions, les limites des lois de $(S_n - a_n)/b_n$, a_n et b_n étant choisis convenablement. Le même auteur montrait plus tard [2]) que, si pour une suite d'entiers $\{n_\varrho\}$ la loi de $(S_{n_\varrho} - a_{n_\varrho})/b_{n_\varrho}$ tend vers une loi limite, celle-ci est indéfiniment divisible et M. KHINTCHINE [3]) a prouvé que toutes les lois indéfiniment divisibles peuvent être obtenues de cette façon. Une expression asymptotique de la loi de S_n a été indiquée

---

[1]) Gauthier-Villars, 1925.

[2]) Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

[3]) Zur Theorie der unendlich-teilbaren Verteilungsgesetze. Rec. Math. Moscou 1 (nouvelle série) (1937) p. 71-120.