où $\int_0^1 x_i(t)dt = p$ pour $i=1,2,\ldots$, les fonctions $x_1(t), x_2(t), \ldots$ étant supposées indépendantes et à distributrices égales, se laisse établir déjà sous l'hypothèse de l'indépendance de tout système de 4 fonctions (puisque les démonstrations usuelles n'exigent pas davantage).

Est-ce que cette hypothèse peut être atténuée, en réduisant le nombre en question à 3 par exemple?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 42, 15. III. 1947.

V. JARNÍK (PRAGUE)

P60. Nous disons qu'un système

$$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s \qquad (s>1) \tag{*}$$

de nombres réels admet l'*approximation* φ (la fonction $\varphi(x)$ étant supposée positive et définie pour des x suffisamment élevés) lorsque le système d'inégalités

$$|\vartheta_i - p_i/q| < \varphi(q) \qquad (i=1,\ldots,s)$$

admet des solutions en p_i et q entiers pour q aussi grand que l'on veut.

Soit $\eta > \varepsilon > 0$. Existe-t-il un système (*) qui admet l'approximation $1/x^{\frac{s+1}{s}}\log^{\varepsilon} x$ sans admettre l'approximation $1/x^{\frac{s+1}{s}}\log^{\eta} x$?

La réponse est affirmative pour $s\eta > 1$ [1]); pour $s\eta \leqslant 1$ on l'ignore.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 75, 29. IX. 1948.

[1]) V. Jarník, *Über die simultanen diophantischen Approximationen*, Mathematische Zeitschrift 33 (1931), p. 505-543, en particulier p. 511, Satz 5.

COMPTES RENDUS

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE
SECTION DE WROCŁAW

SÉANCE DU 16 AVRIL 1948

E. Marczewski, *Concerning the symmetric difference in the theory of sets and Boolean algebras* (voir ce volume, p. 199-202).

Henry Helson (Cambridge, Mass.), *On the symmetric difference of sets as a group operation* (voir ce volume, p. 203-205).

H. Fast (présenté par S. Hartman), *Un théorème sur les fonctions périodiques* (voir S. Hartman, H. Steinhaus et H. Fast, *Sur les presque-périodes des fonctions périodiques*, ce fascicule, p. 297-304, en particulier p. 302-304).

SÉANCE DU 23 AVRIL 1948

J. Łoś, *Sur les matrices logiques.*

Soit S la classe de toutes les expressions d'une logique arbitraire des propositions dans laquelle on a les foncteurs $F_{1,k_1}, F_{2,k_2}, \ldots, F_{n,k_n}$ et les variables $p_1, p_2, \ldots$ Pour tout $i=1,2,\ldots,n$, le foncteur F_{i,k_i} est à k_i arguments.

Une classe $X \subset S$ sera dite *système*, en symbole: $X \epsilon \mathfrak{S}$, lorsqu'elle est close par rapport à la substitution, c'est-à-dire que $\alpha \epsilon X$ implique $\alpha^* \epsilon X$ toutes les fois que α^* s'obtient par substitution d'expressions de la logique considérée à des variables de α.

On sait que les systèmes de la logique des propositions se laissent interpréter par les matrices logiques. Soit

$$\mathfrak{M} = \{A, B, f_{1,k_1}, f_{2,k_2}, \ldots, f_{n,k_n}\}$$

une telle matrice, f_{i,k_i} étant pour tout $i=1,2,\ldots,n$ une fonction de k_i variables [1]).

Désignons par $E(\mathfrak{M})$ la classe des expressions satisfaites par toute suite de valeurs de la matrice $\mathfrak{M}$.

[1]) Pour la définition de la matrice logique, voir J. Łukasiewicz und A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 23 (1930), p. 33.

On sait que $E(\mathfrak{M})\epsilon\mathfrak{S}$ pour toute matrice $\mathfrak{M}$. On a le théorème [2]):

Pour toute classe $X\epsilon\mathfrak{S}$, il existe une matrice $\mathfrak{M}$ telle que $E(\mathfrak{M})=X$ et $\overline{\overline{A+B}}\leqslant\aleph_0$.

En suivant la méthode de démonstration de ce théorème [3]), on peut établir, entre autres, les théorèmes suivants sur les systèmes de la logique des propositions:

I. *$X\epsilon\mathfrak{S}$ étant défini axiomatiquement à l'aide des directives quelconques et l'expression $\alpha\epsilon X$ ne contenant que les variables $p_1, p_2, \ldots, p_l$, il existe une suite d'expressions constituant une démonstration de α et dont chacune est ou bien un axiome de X ou bien contient tout au plus les l variables sus-indiquées.*

II. *Si $\alpha\epsilon S$ et $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{S}$ est la classe de tous les systèmes qui ne contiennent pas l'expression α, on a $(\sum_{X\epsilon\mathfrak{K}} X)\epsilon\mathfrak{S}$ et il existe une matrice $\mathfrak{M}$ telle que $E(\mathfrak{M})=\sum_{X\epsilon\mathfrak{K}} X$ et $\overline{\overline{A+B}}<\aleph_0$.*

III. *Pour tout $X\epsilon\mathfrak{S}$, il existe une matrice $\mathfrak{M}$ et une suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ d'éléments de $A+B$ telles que $E(\mathfrak{M})=X$ et que pour tout $\alpha\epsilon S$ ne contenant que les variables $p_1, p_2, \ldots, p_l$ et vérifié par $a_1, a_2, \ldots, a_l$, on a $\alpha\epsilon X$.*

Toute matrice $\mathfrak{M}$ ayant la propriété exprimée dans le théorème III sera dite matrice de décision *simple* pour le système X.

La notion de matrice se laisse généraliser de façon à embrasser non seulement les logiques des propositions, mais aussi d'autres systèmes logiques dépourvus de quantificateurs, tels par exemple qui contiennent, outre les variables propositionnelles, des variables $x_1, x_2, \ldots$ parcourant les classes d'ensembles d'individus et des relations $R_{1,r_1}, R_{2,r_2}, \ldots, R_{k,r_k}$ (où R_{i,r_i} est une relation à r_i membres pour $i=1,2,\ldots,k$).

J'appelle une *syllogistique* tout système de ce genre, parce que de tels systèmes constituent un schème général de la syllogistique sans quantificateurs construite par Łukasiewicz [4]). Ils renferment toujours une logique des propositions, considérée comme système primitif. On peut démontrer pour ces syllogistiques, à l'aide de la méthode de Lindenbaum, le théorème suivant:

IV. *Pour toute syllogistique axiomatiquement donnée et basée sur le calcul propositionnel usuel à deux valeurs, il existe (d'une façon effective) une méthode de décision.*

[2]) Ce théorème est dû à A. Lindenbaum; voir le mémoire précité de Łukasiewicz et Tarski, où il est signalé sans démonstration.

[3]) L'idée directrice de la démonstration du théorème de Lindenbaum est contenue dans le travail de J. C. C. McKinsey, *A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with an application to topology*, The Journal of Symbolic Logic 6 (1941), p. 122-123.

SÉANCE DU 2 MAI 1948

Z. Charzyński (Varsovie), *Sur les transformations isométriques du plan* (à paraître dans Studia Mathematica).

W. Janowski (Łódź), *Sur la meilleure estimation du troisième coefficient des fonctions univalentes bornées* (présenté par Z. Charzyński).

Déduction des estimations strictes connues pour les coefficients a_2 et a_3 des fonctions univalentes bornées à l'aide des nouvelles méthodes basées sur les résultats de Charzyński (voir *IV Congrès Polonais de Mathématique*, ce volume, p. 168-170).

SÉANCE DU 7 MAI 1948

A. Bielecki (Lublin), *Sur un espace abstrait.*

Considérons un espace vectoriel M dans lequel la convergence des suites d'éléments est définie comme suit.

L'espace M contient un ensemble M^* satisfaisant aux postulats:

1* *$\Theta\epsilon M^*$, où Θ est l'élément nul;*

2* *Si $a, b\epsilon M^*$, on a $a+b\epsilon M^*$;*

3* *Si $a\epsilon M^*$ et $b-qa\epsilon M^*$ pour tout entier positif q, on a $a=\Theta$;*

Il existe une opération, dite *module*, qui fait correspondre à tout $a\epsilon M$ un élément $|a|\epsilon M^*$ et qui satisfait aux postulats:

1^0 *$|a|=a$ pour tout $a\epsilon M^*$;*

2^0 *Si $|a|=\Theta$, on a $a=\Theta$;*

3^0 *$|\lambda a|=|\lambda||a|$ pour tout nombre réel λ;*

4^0 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,

[4]) J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, Cours lithographié rédigé par M. Pressburger (en polonais), Warszawa 1929, p. 170-190.

où le signe $\leqslant$ est à entendre en ce sens que $a_1 \leqslant a_2$ veut dire $a_2 - a_1 \in M^*$.

Une suite d'éléments $a_n \in M$ sera dite *convergente vers un élément* $a \in M$, lorsqu'il existe un élément $c \in M^*$ tel que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on a

$$|a_n - a| \leqslant \varepsilon c$$

à partir d'un certain indice n.

De tels espaces M ont été considérés par M. Mikusiński [5]).

Dans les espaces $\mathcal{L}$ de Fréchet, on peut définir la *fermeture* $\bar{E}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes d'éléments de E. Pour qu'un espace $\mathcal{L}$ soit espace topologique au sens de Kuratowski, il faut et il suffit que les points de cet espace satisfassent à la condition:

Si $a^i \to a$ *avec* $i \to \infty$ *et* $a^i_n \to a^i$ *avec* $n \to \infty$, *il existe deux suites d'indices*, $i(\lambda)$ *et* $n(\lambda)$, *pour lesquels* $a^{i(\lambda)}_{n(\lambda)} \to a$ *avec* $\lambda \to \infty$.

L'espace M étant évidemment un espace $\mathcal{L}$ de Fréchet, on en déduit la suivante *condition nécessaire et suffisante pour que l'espace M soit un espace topologique au sens de Kuratowski:*

(*) *Si* $a_i \in M^*$ *pour* $i = 1, 2, \ldots$, *il existe un* $b \in M^*$ *et une suite de nombres positifs* α_i *tels que* $\alpha_i a_i \leqslant b$.

Les postulats adoptés pour l'espace M sont en particulier satisfaits lorsque M est l'ensemble des fonctions réelles $f(x)$ définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et que l'on prend pour M^* l'ensemble des fonctions $f(x)$ non négatives (en entendant par $|f(x)|$ le module au sens ordinaire). Cependant on peut construire dans cet espace une suite d'éléments qui ne satisfait pas à la condition (*).

Il y a donc des espaces satisfaisant aux postulats 1^*-4^0 *et qui ne sont pas topologiques au sens de Kuratowski.*

En faisant appel à l'axiome de Zermelo et à l'hypothèse du continu, on peut construire dans le même espace fonctionnel une suite $f_n(x)$ convergente vers 0 au sens ordinaire, mais qui n'est pas convergente suivant la définition adoptée pour l'espace M. Plus encore, quelle que soit la fonction $g(x) \geqslant 0$, la condition que

[5]) J. G.-Mikusiński, *Sur quelques espaces abstraits*, Fundamenta Mathematicae 36 (1949), à paraître.

$|f_n(x)| \leqslant \varepsilon \cdot g(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ à partir d'un certain indice n n'est satisfaite que pour un ensemble fini ou dénombrable des x. Sans l'axiome de Zermelo et sans l'hypothèse du continu, on peut construire un exemple effectif dans lequel la même condition est en défaut au moins pour une valeur de x, $g(x)$ étant, comme auparavant, une fonction non négative quelconque.

SÉANCE DU 14 MAI 1948

S. Drobot, *Sur un problème de la théorie des corps convexes.*

Une démonstration pour l'espace à n dimensions du théorème suivant, dû pour $n=3$ à H. Auerbach, S. Banach, S. Mazur et S. Ulam [6]), mais non publié:

Deux nombres positifs d *et* v *étant arbitrairement donnés, il existe un cube qui peut renfermer toute suite de corps convexes dont les diamètres ne dépassent pas* d *et dont le volume total n'excède pas* v, *sans qu'ils empiètent les uns sur les autres.*

S. Hartman, *Sur une généralisation de la notion d'indépendance stochastique.*

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies sur la demi-droite $0 \leqslant x < \infty$ s'appellent selon MM. Kac et Steinhaus [7]) *stochastiquement indépendantes* lorsqu'on a, quels que soient les intervalles I_1 et I_2 (ouverts, demi-ouverts ou fermés, bornés ou non bornés):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |f^{-1}(I_1) \cdot g^{-1}(I_2) \cdot \langle 0, T \rangle| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |f^{-1}(I_1) \cdot \langle 0, T \rangle| \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |g^{-1}(I_2) \cdot \langle 0, T \rangle|, \tag{1}$$

où $|\ |$ désigne la mesure de Lebesgue et où l'on suppose l'existence des limites indiquées, c'est-à-dire la mesurabilité relative des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dans leur ensemble.

La notion d'indépendance stochastique proposée par l'auteur ne suppose pas l'existence de ces limites. Elle n'est donc pas restreinte qu'aux fonctions relativement mesurables. Elle est définie par la condition:

[6]) Livre Écossais (cf. ce volume, p. 57-58), problème dit „de sac à pommes de terre".

[7]) M. Kac et H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes (IV) (Intervalle infini)*, Studia Mathematica 7 (1938), p. 1-15, en particulier p. 3-4.

$$(2)\quad \lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{T}|f^{-1}(I_1)\cdot g^{-1}(I_2)\cdot\langle 0,T\rangle|-\frac{1}{T^2}|f^{-1}(I_1)\cdot\langle 0,T\rangle|\cdot|g^{-1}(I_2)\cdot\langle 0,T\rangle|\right|=0$$

pour tout couple d'intervalles I_1, I_2.

Evidemment, (1) entraîne (2), mais on montre, même en négligeant le cas banal où $f(x)=\text{const.}$, qu'il existe des fonctions indépendantes au sens (2) sans qu'elles le soient au sens (1), l'une ou les deux n'étant par relativement mesurables.

Soit de façon générale

$$M_B(\varphi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\,dx$$

la *valeur moyenne* de la fonction $\varphi(x)$.

MM. Kac et Steinhaus ont montré [8]) que l'on a pour tout couple de fonctions bornées indépendantes au sens (1):

$$(3)\qquad M_B(f\cdot g)=M_B(f)\cdot M_B(g),$$

l'existence des moyennes à droite et à gauche faisant partie de la thèse.

En modifiant leur démonstration et en supposant l'existence des moyennes à droite, on peut établir l'égalité (3) pour les fonctions bornées indépendantes au sens (2), seule l'existence de la moyenne à gauche faisant partie de la thèse.

L'hypothèse de l'existence des moyennes à droite est inévitable, puisqu'elles peuvent faire défaut pour les fonctions qui ne sont pas relativement mesurables. Mais on montre par des exemples qu'il existe des fonctions bornées indépendantes au sens (2), non relativement mesurables et admettant pourtant les valeurs moyennes en question.

SÉANCE DU 21 MAI 1948

Henry Helson (Cambridge, Mass.), *Remark on measures in almost-independent fields* (voir Studia Mathematica 10 (1948), p. 182-183).

M. Stark, *On a functional equation* (voir ce volume, p. 230-231).

[8]) ibidem, p. 5-7.

SÉANCE DU 28 MAI 1948

W. Wolibner, *Sur une relation entre les singularités des fonctions analytiques* (à paraître dans le volume II de Colloquium Mathematicum).

M. Warmus, *Sur l'estimation des corrections dans les évaluations des aires planes au moyen du réseau des triangles équilatéraux.*

En relation avec sa communication antérieure du 18 avril 1947 (voir ce volume, p. 45-46), l'auteur déduit une estimation analogue des corrections pour le cas du réseau formé de triangles équilatéraux. Il montre que la triangulation en question est plus avantageuse vis-à-vis du carrage, car l'erreur maximum qu'elle peut donner est moindre de $2{,}5\%$ environ.

SÉANCE DU 4 JUIN 1948

M. Warmus, *Sur certains algorithmes* (voir Matematyka, périodique polonais pour maîtres de lycées, I. 1 (1948), p. 16-18 et I. 2 (1948), p. 9-12).

SÉANCE DU 18 JUIN 1948

K. Borsuk (Varsovie), *Sur l'approximation topologique des polyèdres* (à paraître dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique).

SÉANCE DU 25 JUIN 1948

Z. Moroń, *Sur la décomposition des polynômes en facteurs premiers.*

Une amélioration de la méthode de Mandl [9]) déstinée pour vérifier l'irréductibilité de polynômes du degré n de p variables et à coefficients entiers. Si le polynôme est réductible, cette méthode permet d'évaluer effectivement tous les facteurs premiers. L'amélioration en question consiste dans un ordre différent de l'évaluation des facteurs et dans une schématisation convenable des calculs qui les rend beaucoup plus rapides.

J. Intrator, *Recherches sur partitio numerorum* (cf. Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław 3 (1949), communication à la séance du 26. II. 1948, à paraître).

[9]) M. Mandl, *Über die Zerlegung von Funktionen mehreren Variabeln in irreduktible Faktoren,* Journal für reine und angewandte Mathematik 131 (1906), p. 40-48.

Soient: $A_n(c)$ le nombre des décompositions de c naturel en n sommandes différents deux à deux, $P_n^i(c)$ le nombre de celles d'entre elles qui ont i pour sommande le plus petit, et $K_n(c)$ la plus grande valeur de i pour laquelle $P_n^i(c)$ n'est pas nul. Alors:

$$K_n(c)=\mathrm{E}\left(\frac{c}{n}-\frac{n-1}{2}\right), \tag{1}$$

E désignant l'entier;

$$A_n(c)=\sum_{a_1=1}^{K_n(c)}\ \sum_{a_2=a_1+1}^{K_{n-1}(c-a_1)} \cdots \sum_{a_{n-2}=a_{n-1}+1}^{K_2(c-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1})} 1 = \frac{c^{n-1}}{n!(n-1)!}, \tag{2}$$

le dernier signe d'égalité étant entendu au sens asymptotique;

(3) $A_n(c)$ est un polynôme du $(n-1)^{\text{me}}$ degré, commun à tous les nombres c congruents deux à deux $\bmod B_n$, où B_n est le plus petit commun multiple des nombres $1, 2, \ldots, n$.

C H R O N I Q U E

VI CONGRÈS POLONAIS DE MATHÉMATIQUE

Du 20 au 23 septembre 1948 délibérait à Varsovie le VI Congrès Polonais de Mathématique qui a réuni plus de 110 participants. Les 10 invités de l'étranger, à savoir P. Alexandroff (Moscou), G. Alexits (Budapest), B. Bydžovsky, E. Čech, V. Jarník (Prague), A. Kolmogoroff (Moscou), V. Kořinek (Prague), K. Mardjalichevili (Moscou), S. Stoïlow (Bucarest) et J. H. C. Whitehead (Oxford), ont pris une part active surtout aux séances plénières qui leur doivent 9 conférences sur 14 prononcées à ces séances. Les travaux des sections ont apporté plus de 50 communications. Une séance solennelle, tenue dans l'aula provisoire de l'Université de Varsovie, a été consacrée au jubilé du professeur W. Sierpiński. Le Congrès s'est occupé, en outre, des questions didactiques et éditoriales: une réunion des mathématiciens qui professent aux écoles techniques supérieures, convoquée par le Comité du Congrès pour le 21 septembre 1948, a élaboré et voté des résolutions concernant les programmes et les manuels de mathématique pour ces écoles.

Les „Annales de la Société Polonaise de Mathématique" se sont chargées de publier le compte rendu du Congrès.

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

Le 23 septembre 1948 a eu lieu à Varsovie l'Assemblée Générale biennale de la Société Polonaise de Mathématique, réunie au cours du VI Congrès Polonais de Mathématique. Le rapport de la Société a été lu par K. Kuratowski, son président. La Société compte 149 membres dans le pays et 63 membres étrangers. Elle se compose de 6 Sections qui sont: celle de Cracovie, de Lublin, de Łódź, de Poznań, de Varsovie et de Wrocław. Les Sections ont tenu des séances scientifiques hebdomadaires auxquelles les membres des autres Sections ont été souvent invités à faire des communications. Ce nouveau mode de l'activité scientifique de la Société, subventionné par son Bureau, s'est montré fécond.