Lindenbaum, A. and Tarski, A. [1] *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles.* Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol. 19, 1926, pp. 299-330.

Mostowski, A. [1] *On the principle of dependent choices.* Fundamenta Mathematicae, this volume.

Schoenflies, A. [1] *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen.* Part. I. Leipzig and Berlin 1913, X+288 pp.

Sierpiński, W. [1] *Leçons sur les nombres transfinis.* Paris 1928, VI+240 pp. [Collection de monographies sur la théorie des fonctions].

Stone, M. H. [1] *The theory of representations for Boolean algebras.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 40, 1936, pp. 37-111.

Tarski, A. [1] *Cardinal algebras.* New York. (In print).

— [2] *Ideale in vollständigen Mengenkörpern. I.* Fundamenta Mathematicae, vol. 32, 1939, pp. 45-63.

— [3] *Über Äquivalenz der Mengen in bezug auf eine beliebige Klasse von Abbildungen.* Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1930, vol. 2, pp. 186-205.

---

# Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites[1]).

Par

A. Alexiewicz et W. Orlicz (Poznań).

**0.** Nous désignons par $\underset{u}{E}\{w(u)\}$ l'ensemble des éléments $u$ qui satisfont à la condition $w(u)$.

$X$ désigne un espace de Banach, c. à d. un espace vectoriel normé et complet (Banach [1][2]), p. 52);

$\|x\|$ — la norme de l'élément $x \in X$;

$\Xi$ — l'espace conjugué à $X$, c. à d. l'ensemble linéaire des fonctionnelles linéaires $\xi(x)$ définies dans $X$ (la norme dans $\Xi$ étant définie par la formule $\|\xi\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \xi(x)$, l'espace $\Xi$ est un espace de Banach).

$\Xi_0$ — l'ensemble fondamental[3]) de fonctionnelles linéaires dans $X$ c. à d. un sous-ensemble de $\Xi$ satisfaisant à la condition suivante: pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe une combinaison linéaire $\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n$ d'éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de $\Xi_0$ telle que

$$(0.1) \qquad \|\xi\| \leqslant 1 \quad et \quad \xi(x) \geqslant \|x\| - \varepsilon;$$

$\Xi_0^*$ — l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\Xi_0$ qui satisfont à la condition (0.1).

---

[1]) Les résultats de cette Note ont été présentés à la séance du 14 décembre 1946 au IV Congrès Polonais de Mathématique à Wrocław.

[2]) Les nombres entre les crochets renvoient aux ouvrages cités à la fin de cette Note.

[3]) La notion d'un ensemble fondamental de fonctionnelles linéaires ne coïncide pas avec celle de l'ensemble fondamental d'éléments de l'espace conjugué, due à Banach ([1], p. 58).

La suite $x_n$ d'éléments de $X$ sera dite *faiblement convergente vers $x_0$ par rapport à $\Xi_0$* lorsque $\xi(x_n) \to \xi(x_0)$ pour chaque $\xi \in \Xi_0$. La suite faiblement convergente par rapport à $\Xi$ (cet ensemble est fondamental (Banach [1], p. 55, théorème 3) est dite *faiblement convergente*.

Nous désignerons de plus par:

$U, W, U_1, U_2, \ldots, U_n$ des espaces métriques complets;

$(u_1, u_2)$ la distance des éléments $u_1, u_2$ d'un espace métrique;

$S(u_0, \delta)$ la sphère fermée du centre $u_0$ et du rayon $\delta$ dans un espace métrique;

$\bar{E}$ la fermeture de l'ensemble $E$;

$E^\circ$ l'intérieur de l'ensemble $E$;

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ le produit cartésien des ensembles $E_1 E_2, \ldots, E_n$, c. à d. l'ensemble de toutes les suites formées de $n$ termes $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ telles que $u_i \in E_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Cet ensemble, metrisé de manière habituelle est un espace métrique; en particulier l'ensemble $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ est complet.

Le produit cartésien $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$ des sphères $K_i \subset U_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ sera dit *cube*; cet ensemble constitue un espace métrique et complet.

L'ensemble $E$ appartenant à un espace métrique complet est dit *résiduel* lorsque son complément est de 1-ère catégorie de Baire.

$U$ étant un espace métrique, $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{G}_0$ désigne respectivement les familles de tous les sous-ensembles fermés et ouverts de $U$; $\alpha$ étant un nombre transfini de 1-ère ou 2-ème classe, $\mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{G}_\alpha$ désignera respectivement la famille de tous les ensembles qui sont respectivement de la forme $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} H_n$, où l'on a respectivement $E_n \in \mathcal{G}_{\alpha_n}$, $H_n \in \mathcal{F}_{\alpha_n}$, $\alpha_n < \alpha$.

Nous considérons dans cette Note des fonctions $x(u)$ définies dans un ensemble métrique complet $U$, dont le contredomaine (c. à d. l'ensemble des valeurs de la fonction) appartient à $X$; nous appelons ces fonctions suivant Bochner ([2], p. 211) et Gelfand ([1], p. 235) *fonctions abstraites*. La fonction $x(u)$ est dite continue au point $u_0$ lorsque $(u, u_0) \to 0$ implique $\|x(u) - x(u_0)\| \to 0$. Les fonctions continues sont dites fonctions de classe 0. Pour tout nombre ordinal $\alpha$ de 1-ère ou 2-ème classe, les fonctions $x(u)$ qui sont des limites des suites convergentes composées de fonctions de classe inférieure



à $\alpha$ sont dites *fonctions de classe $\alpha$*. Si le contredomaine de la fonction $x(u)$ est séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $x(u)$ soit de classe $\alpha$ est que, $G$ étant un ensemble ouvert arbitraire dans $X$, l'ensemble

$$\underset{u}{E}\{x(u) \in G\} \tag{0.2}$$

soit un $\mathcal{G}_\alpha$ (Banach [2], p. 285) [4]).

**1.** La fonction abstraite $x(u)$ définie dans $U$ sera dite *faiblement continue par rapport à $\Xi_0$* au point $u_0$ si, $\xi(x)$ étant une fonctionnelle arbitraire de $\Xi_0$, la fonction réelle $\xi(x(u))$ est continue au point $u_0$. Si $\Xi_0 = \Xi$, la fonction $x(u)$ sera dite *faiblement continue* [5]) au point $u_0$. La fonction faiblement continue par rapport à $\Xi_0$ $[\Xi]$ dans chaque point sera dite *faiblement continue par rapport à $\Xi_0$* [*faiblement continue*].

***Théorème 1.*** *Si la fonction $x(u)$ dont le contredomaine est séparable est faiblement continue par rapport à $\Xi_0$, la fonction $x(u)$ est de 1-ère classe.*

Démonstration [6]). Soit $x_0$ un élément de $X$, $r$ un nombre positif. On a la formule

$$\underset{u}{E}\{\|x(u) - x_0\| \leqslant r\} = \prod_{\xi \in \Xi_0^*} \underset{u}{E}\{\xi(x(u) - x_0) \leqslant r\}. \tag{1.1}$$

En effet, si $u_0$ appartient au premier membre de (1.1), on a

$$\xi(x(u_0) - x_0) \leqslant \|\xi\| \cdot \|x(u_0) - x_0\| \leqslant r;$$

si $u_0$ appartient au second membre on a $\sup_{\xi \in \Xi_0^*} \xi(x(u_0) - x_0) \leqslant r$, d'où d'après (0.1) $\|x(u_0) - x_0\| \leqslant r$. La fonction $\xi(x(u))$ étant continue

[4]) En réalité, Banach a démontré que si $X$ est un espace séparable (métrique) satisfaisant à certaines conditions (qui sont remplies en particulier dans chaque espace de Banach), ce théorème est vrai pour chaque $\alpha$ s'il est vrai pour $\alpha = 1$; puis, il a ajouté sans démonstration que ce théorème est vrai pour $\alpha = 1$ lorsque $X$ est un espace de Banach. Dans le cas $\alpha = 1$, la démonstration s'obtient en faisant quelques modifications inessentielles dans la démonstration pour les fonctions réelles. Puis, on peut remplacer l'hypothèse de séparabilité de l'espace $X$ par celle que le contredomaine de la fonction soit séparable, car on peut restreindre les considérations au plus petit ensemble linéaire fermé, contenant le contredomaine de la fonction.

[5]) Comp. Gelfand ([1], p. 236).

[6]) L'idée de cette démonstration est due à M. Pettis ([1], p. 278).

pour tout $\xi \in \Xi_0^*$, les ensembles $\underset{u}{E}\{\xi(x(u)-x_0)\leqslant r\}$ sont fermés, et il en résulte que l'ensemble $\underset{u}{E}\{(x(u)\in S(x_0,r)\}$ est fermé. Désignons par $X_0$ le contredomaine de la fonction $x(u)$ et soit $G$ un ensemble ouvert dans $X$. Il existe une suite $S_n$ de sphères telle que $GX_0\subset\sum_{n=1}^{\infty}S_n\subset G$; il en résulte que l'ensemble

$$\underset{u}{E}\{(x(u)\in G\}=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{u}{E}\{x(u)\in S_n\}$$

est un $\mathcal{F}_\sigma$ c. à d. un $\mathcal{G}_1$. D'après Banach ([2], p. 285) la fonction $x(u)$ est donc de 1-ère classe.

Toute fonction limite d'une suite convergente de fonctions continues étant continue en chaque point d'un ensemble résiduel, on obtient le:

(1.2) ***Corollaire.*** *Dans les hypothèses du théorème 1, l'ensemble des points de continuité de la fonction $x(u)$ est résiduel.*

(1.3) ***Corollaire***[7]. *Si l'espace $U$ est séparable et si la fonction $x(u)$ est faiblement continue, la fonction $x(u)$ est de 1-ère classe.*

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de prouver que le contredomaine de la fonction $x(u)$ est séparable. Soit $u_n$ une suite de points dense dans $U$ et désignons par $X_1$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments $x(u_n)$. Soit $u_0\in U$; il existe une suite $u_{n_k}$ telle que $\xi(x(u_{n_k}))\to\xi(x(u_0))$ pour tout $\xi\in\Xi$. D'après un théorème connu (Banach [1], p. 134, théorème 2) il existe une suite d'éléments de $X_1$ qui converge vers $x(u_0)$; l'ensemble séparable $\overline{X}_1$ contient donc le contredomaine de la fonction $x(u)$.

**2.** La fonction abstraite $x(u)$ sera dite *de classe $\alpha$ faible par rapport à $\Xi_0$* lorsque, $\xi(x)$ étant une fonctionnelle arbitraire de $\Xi_0$, la fonction réelle $\xi(x(u))$ est de classe $\alpha$. Le théorème suivant constitue une généralisation du théorème 1.

***Théorème 2.*** *Si la fonction $x(u)$ dont le contredomaine est séparable est de classe $\alpha$ faible par rapport à $\Xi_0$, la fonction $x(u)$ est de classe $\alpha+1$.*

[7]) Ce théorème a été démontré par M. Gelfand ([1], p. 237) dans le cas où $U$ est l'ensemble des nombres réels.



Démonstration. Soit $X_0$ le contre-domaine de la fonction $x(u)$, $X_1$ le plus petit ensemble linéaire fermé contenant $X_0$; cet ensemble est séparable. D'après un théorème de Banach ([1], p. 124, théorème 4) il existe une suite $\xi_n$ d'éléments de $\Xi_0^*$ telle que pour tout $\xi\in\Xi_0^*$ il existe une suite partielle $\xi_{n_k}$ telle que pour tout $x\in X_1$ on a $\xi_{n_k}(x)\to\xi(x)$. L'ensemble $\Xi_0'$ composé des fonctionnelles $\xi_1,\xi_2,\dots$ est donc fondamental (dans l'espace $X_1$). On montre comme dans la démonstration du théorème 1 qu'on a

$$(2.1)\qquad \underset{u}{E}\{x(u)\in S(x_0,r)\}=\underset{u}{E}\{\|x(u)-x_0\|\leqslant r\}=\prod_{\xi\in\Xi_0'}\underset{u}{E}\{\xi(x(u)-x_0)\leqslant r\}.$$

La fonction $x(u)$ étant de classe $\alpha$ faible par rapport à $\Xi_0$, les ensembles $\underset{u}{E}\{\xi(x(u)-x_0)\leqslant r\}$ sont de classe $\mathcal{F}_\alpha$. De la formule (2.1), il suit que l'ensemble $\underset{u}{E}\{x(u)\in S(x_0,r)\}$ est aussi un $\mathcal{F}_\alpha$. La démonstration s'achève de la même manière que celle du théorème 1.

Comme application du théorème 2, démontrons le théorème suivant qui constitue d'ailleurs sa généralisation:

***Théorème 3.*** *Soient $x_n(u)$ des fonctions de classe $\alpha$ $(\alpha\geqslant 0)$ faible par rapport à $\Xi_0$, dont les contredomaines sont séparables. Admettons que la suite $x_n(u)$ converge vers $x(u)$; la fonction $x(u)$ est alors de classe $\alpha+1$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $Z$ des suites convergentes $z=\{x_n\}$ dont les éléments appartiennent à $X$; l'addition des éléments et la multiplication par des nombres réels étant définies de la manière habituelle, l'espace $Z$ normé par la formule $\|z\|=\sup\|x_n\|$ devient un espace de Banach. L'ensemble $\mathfrak{Z}_0$ composé de toutes les fonctionnelles linéaires $\zeta(z)$ de la forme $\zeta(z)=\xi(x_n)$, où $\xi\in\Xi_0$ et $n=1,2,\dots$ est évidemment un ensemble fondamental dans $Z$. Considérons la suite $x_n(u)$ comme fonction abstraite qui fait correspondre à chaque élément $u\in U$ l'élément $z(u)=\{x_n(u)\}\in Z$. Le contredomaine de la fonction est séparable: en effet, désignons par $X_n$ un ensemble dénombrable dense dans le contredomaine de la fonction $x_n(u)$, on peut admettre que $X_1\subset X_2\subset\dots$; l'ensemble des suites $z=\{x_n\}$ où $x_n\in X_n$ et dont presque tous les éléments sont égaux est dénombrable et dense dans le contredomaine de la fonction $z(u)$.

Les hypothèses du théorème entraînent le fait que la fonction $z(u)$ est de classe $\alpha$ faible par rapport à $\mathfrak{Z}_0$ et que la même propriété possède la fonction $z^{(n)}(u)=\{x_n(u),x_{n+1}(u),\ldots\}$. D'après le théorème 2, la fonction $z^{(n)}(u)$ est de classe $\alpha+1$, il en résulte que, $z^0=\{x_n^0\}$ où $x_n^0=x_0$ étant un élément de $Z$, on a

$$\underset{u}{E}\{\|z^{(n)}(u)-z^0\|<\varepsilon\}=\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{\nu=n}^{\infty}\underset{u}{E}\left\{\|x_\nu(u)-x_0\|<\varepsilon\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\}\epsilon\, \mathcal{G}_{\alpha+1}.$$

De la formule

$$\underset{u}{E}\{\|x(u)-x_0\|<\varepsilon\}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{\nu=n}^{\infty}\underset{u}{E}\left\{\|x_\nu(u)-x_0\|<\varepsilon\left(1-\frac{1}{m}\right)\right\},$$

il résulte que, $K$ étant une sphère ouverte arbitraire dans $X$, l'ensemble $\underset{u}{E}\{x(u)\,\epsilon\,K\}$ est une somme dénombrable d'ensembles $\mathcal{G}_{\alpha+1}$ donc un ensemble $\mathcal{G}_{\alpha+1}$. Le contredomaine de la fonction $x(u)$ appartient à $\overline{\sum_{n=1}^{\infty}X_n}$, est donc séparable. On achève la démonstration de la même manière que celles des théorèmes précédents.

(2.2) **Corollaire.** *Admettons que $x_n(u)$ est une suite de fonctions faiblement continues par rapport à $\Xi_0$, dont les contredomaines sont séparables, convergente vers $x(u)$. Dans ces hypothèses:*

(2.3) *les fonctions $x_n(u)$ sont équicontinues dans chaque point d'un ensemble résiduel;*

(2.4) *l'ensemble des points de continuité de la fonction $x(u)$ est résiduel.*

Le problème s'impose de savoir, si la limite d'une suite faiblement convergente de fonctions continues jouit aussi de la propriété (2.4). La réponse est négative. Voici un exemple. Soit $\Delta$ un rectangle, $\Delta\subset[0,1]\times[0,1]=I$; soit $\eta(t,\vartheta;\Delta)$ une fonction réelle des variables réelles $(t,\vartheta)\,\epsilon\,I$, égale à 1 au centre $c$ du rectangle $\Delta$, égale à 0 sur la frontière $F$ de $\Delta$, linéaire sur chaque ségment liant le centre $c$ avec un point de $F$ et nulle dans $I-\Delta$. Cette fonction est continue. Soit $w_1,w_2,\ldots$ une suite dense dans l'intervalle $(0,1)$ $(w_i\neq 0,1, w_i\neq w_j)$, posons

$$\delta_n=\min_{\substack{i,j=1,2,\ldots,n\\ i\neq j}}\left(\frac{1}{n},|w_i-1|,|w_i|,|w_i-w_j|\right)$$

et soit $\Delta_{in}$ le rectangle $|t-w_i|\leqslant\delta_n$, $\left|\vartheta-\frac{1}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2i(i+1)}$. Posons

$$F_n(t,\vartheta)=\eta(t,\vartheta;\Delta_{1n})+\eta(t,\vartheta;\Delta_{2n})+\ldots+\eta(t,\vartheta;\Delta_{nn}).$$



La suite $F_n(t,\vartheta)$ composée de fonctions continues est bornée et converge vers une fonction $F(t,\vartheta)$ qui est continue sur chaque ségment $t=t_0=\text{const}$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$. Considérons les fonctions $F_n(t,\vartheta)$ et $F(t,\vartheta)$ comme des fonctions abstraites $x_n(t)$, $x(t)$ qui font correspondre à chaque $t$ de l'intervalle $[0,1]$ une fonction continue $F_n(t,\vartheta)$, $F(t,\vartheta)$ c. à d. un élément de l'espace $C$. La fonction $F_n(t,\vartheta)$ étant continue en $t,\vartheta$, la fonction abstraite $x_n(t)$ est continue et on voit sans peine que la suite $x_n(t)$ converge faiblement vers $x(t)$ pour $t\,\epsilon\,[0,1]$. Or, la fonction abstraite $x(t)$ n'est continue nulle part, car la continuité de la fonction $x(t)$ au point $t_0$ entraîne la relation

$$\lim_{t\to t_0}\max_{0\leqslant\vartheta\leqslant 1}|F(t,\vartheta)-F(t_0,\vartheta)|=0$$

et il en résulterait que la fonction $F(t,\vartheta)$ serait continue par rapport à $t,\vartheta$ en chaque point du segment $t=t_0$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$; mais ceci est impossible car chaque point $(t,0)$ est un point de discontinuité de la fonction $F(t,\vartheta)$.

De façon analogue, le problème s'impose de savoir si la proposition analogue au corollaire (1.3) est vraie pour les fonctions de classe $\alpha$ faible par rapport à $\Xi$. La réponse est aussi négative. Remarquons d'abord qu'on peut démontrer aisément par l'induction transfinie que, l'espace $U$ étant séparable, le contredomaine de chaque fonction de classe $\alpha$ est séparable. Nous allons construire maintenant un exemple d'une fonction qui est de classe 1 faible par rapport à $\Xi$ et qui n'appartient à aucune classe $\alpha$. Soit $X$ l'espace $M$ des fonctions réelles bornées $x=x(\vartheta)$ définies dans l'intervalle $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$; la norme de l'élément $x=x(\vartheta)$ étant définie par la formule $\|x\|=\sup_{0\leqslant\vartheta\leqslant 1}|x(\vartheta)|$, l'espace $M$ est un espace de Banach. Chaque fonctionnelle linéaire définie dans $M$ est de la forme

$$\xi(x)=\int_0^1 x(\vartheta)\,d\Phi,$$

où l'intégrale est prise au sens de Fréchet-Radon et $\Phi(E)$ désigne une fonction d'ensemble bornée, définie pour tous les ensembles $E\subset[0,1]$, et additive au sens restreint (Fichtenholz-Kantorovitch [1] p. 76]). Soit $F(t,\vartheta)=1$ pour $t=\vartheta$ et soit $F(t,\vartheta)=0$ pour $t\neq\vartheta$. Considérons $F(t,\vartheta)$ comme une fonction $x(t)$ qui fait correspondre à chaque $t\,\epsilon\,[0,1]$ l'élément $F(t,\vartheta)\,\epsilon\,M$. Soit $\xi(x)=\int_0^1 x(\vartheta)\,d\Phi$ une fonctionnelle arbitraire de $\Xi$. Désignons par $(t)$ l'ensemble composé du seul point $t$, on a alors

$$\xi(x(t))=\Phi((t)).$$

La fonction $\xi(x(t))$ est de 1-ère classe; cela résulte du fait que l'ensemble des nombres $t$ tels que $\Phi((t))\neq 0$ est au plus dénombrable, car chaque ensemble $\underset{t}{E}\left\{|\Phi((t))|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$ contient au plus $2Kn$ éléments, où $K$ désigne la borne supérieure de la fonction $\Phi(E)$. La fonction $x(t)$ n'appartient à aucune classe $\alpha$, car l'ensemble des valeurs de cette fonction n'est pas séparable, ce qui est évident vu que $\|x(t_1)-x(t_2)\|=1$ pour $t_1\neq t_2$.

***Théorème 4.*** *Toute fonction de classe $\alpha$ faible par rapport à $\Xi_0$, dont le contredomaine est compact, est de classe $\alpha$.*

Démonstration. Soit $X_0$ le contredomaine de la fonction $x(u)$ et désignons par $X_1$ l'ensemble des éléments $x=x_1-x_2$, où $x_1,x_2 \in X_0$; l'ensemble $X_1$ est aussi compact. Remarquons d'abord que, $p$ étant un nombre entier positif quelconque, il existe des fonctionnelles $\xi_{1p},\xi_{2p},\dots,\xi_{r_pp} \in \Xi_0^*$ telles qu'on a pour tout $x \in X_1$

$$\max_{i=1,2,\dots,r_p} \xi_{ip}(x) \geqslant \|x\|-\frac{1}{p}.$$

Il existe, en effet, des éléments $x_{1p},x_{2p},\dots,x_{r_pp}$ tels que $\min\limits_{i=1,2,\dots,r_p}\|x-x_{ip}\|<\dfrac{1}{3p}$ pour tout $x\in X_1$. Soit $\xi_{ip}$ une fonctionnelle appartenant à $\Xi_0^*$ telle que $\xi_{ip}(x_{ip})\geqslant\|x_{ip}\|-\dfrac{1}{3p}$. Soit $x_0$ un élément arbitraire de $X_1$; il existe un nombre $\nu$ tel que $\|x_0-x_{\nu p}\|<\dfrac{1}{3p}$, par conséquent

$$\begin{aligned}\xi_{\nu p}(x_0)=\xi_{\nu p}(x_{\nu p})-\xi_{\nu p}(x_{\nu p}-x_0)\geqslant\|x_{\nu p}\|-\frac{1}{3p}-\|x_{\nu p}-x_0\|\geqslant\\ \geqslant\|x_0-(x_0-x_{\nu p})\|-\frac{1}{3p}-\|x_{\nu p}-x_0\|\geqslant\\ \geqslant\|x_0\|-\|x_0-x_{\nu p}\|-\frac{1}{3p}-\|x_0-x_{\nu p}\|>\|x_0\|-\frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Soit $x_0$ un élément de $X_0$; on démontre aisément la formule

$$\mathop{E}_{u}\{\|x(u)-x_0\|<r\}=\sum_{p=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{r_p}\mathop{E}_{u}\left\{\xi_{ip}(x(u)-x_0)<r-\frac{1}{p}\right\}.$$

Les ensembles $\mathop{E}\limits_{u}\left\{\xi_{ip}(x(u)-x_0)<r-\dfrac{1}{p}\right\}$ appartiennent à $\mathcal{G}_\alpha$, l'ensemble $\mathop{E}\limits_{u}\{x(u)\in S(x_0,r)^\circ\}$ est donc aussi un $\mathcal{G}_\alpha$. Pour achever la démonstration, on procède comme dans la démonstration du théorème 1.

**3.** La notion de mesurabilité faible introduite par MM. Gelfand ([1], p. 238) et Pettis ([1], p. 277) peut être relativisée par rapport à l'ensemble $\Xi_0$. Précisons d'abord les définitions.

Soit $\Lambda$ un ensemble abstrait et soit $\mathfrak{E}$ un corps borelien de sous-ensembles de $\Lambda$. Admettons de plus que $\mu(E)$ est une mesure complètement additive, définie pour chaque ensemble $E\in\mathfrak{E}$. La fonction abstraite $x(\lambda)$ définie dans $\Lambda$ à contredomaine dans $X$ est dite *simple* si elle n'admet qu'un nombre fini de valeurs $x_1,x_2,\dots,x_n$ respectivement dans les ensembles $E_1,E_2,\dots,E_n$, dont chacun appartient à $\mathfrak{E}$. La fonction $x(\lambda)$ est dite *mesurable* lorsqu'il existe une suite de fonctions simples $x_n(\lambda)$ telle que $\|x_n(\lambda)-x(\lambda)\|\to 0$ presque partout, c. à d. exception faite d'un ensemble $E\in\mathfrak{E}$ tel que $\mu(E)=0$. Le contredomaine de la fonction $x(\lambda)$ est dit *presque séparable* s'il existe un ensemble $E\in\mathfrak{E}$ de mesure 0 tel que l'ensemble $\mathop{E}\limits_{u}\{u=x(\lambda);\lambda\in\Lambda-E\}$ est séparable. La fonction $x(\lambda)$ s'appelle *mesurable faiblement par rapport à* $\Xi_0$, si $\xi(x)$ étant une fonctionnelle arbitraire de $\Xi_0$, la fonction réelle $\xi(x(\lambda))$ est mesurable.

En s'appuyant sur la formule (2.1) et en répétant le raisonnement de M. Pettis, on peut démontrer la généralisation suivante d'un théorème de M. Pettis ([1], p. 278):

***Théorème 5.*** *Toute fonction mesurable faiblement par rapport à $\Xi_0$ et dont le contredomaine est presque séparable est mesurable.*

**4.** Toute fonction abstraite de $n$ variables $x(u_1,u_2,\dots,u_n)$ où $u_i\in U_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ peut être envisagée comme une fonction $x(w)$ d'une seule variable $w=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ qui parcourt l'espace $U_1\times U_2\times\dots\times U_n=W$. La continuité et la classe d'une fonction $x(u_1,u_2,\dots,u_n)$ sera entendue relativement à l'espace $W$; ainsi par exemple, par fonction continue, on entend une fonction continue en toutes les variables simultanément.

***Théorème 6.*** *Toute fonction $x(u_1,u_2,\dots,u_n)$ faiblement continue par rapport à $\Xi_0$ relativement à chaque variable séparément et dont le contredomaine est séparable, est de classe $n$.*

Démonstration. D'un théorème de M. Montgomery ([1], p. 531, théorème 3), il résulte sans peine que chaque fonction réelle $\gamma(u_1,u_2,\dots,u_n)$ continue relativement à chaque variable séparément est de classe $n-1$. Soit $\xi(x)$ une fonctionnelle arbitraire de $\Xi_0$. La fonction $\xi(x(u_1,u_2,\dots,u_n))$ est, par l'hypothèse, continue relativement à chaque variable séparément, donc de classe $n-1$. Le contredomaine de la fonction $x(u_1,u_2,\dots,u_n)$ étant séparable, la fonction est en vertu du théorème 2 de classe $n$.

Par un raisonnement analogue, en s'appuyant sur le théorème cité de M. Montgomery, on peut démontrer aussi ce

***Théorème 7.*** *Toute fonction $x(u_1,u_2)$ qui est de classe $\alpha$ faible par rapport à $\Xi_0$ relativement à la variable $u_1$ et faiblement continue par rapport à $\Xi_0$ relativement à la variable $u_2$ et dont le contredomaine est séparable, est de classe $\alpha+2$.*

Nous allons démontrer que la proposition analogue au corollaire (1.2) est vraie pour les fonctions de $n$ variables. Nous allons démontrer d'abord quelques lemmes.

(4.1) *La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble de points de continuité d'une fonction $x(u)$ dont le contredomaine est séparable soit résiduel, est que, $K$ étant une sphère ouverte arbitraire dans $X$, l'ensemble $\underset{u}{E}\{x(u)\in K\}$ puisse être représenté dans la forme $H+P$ où $H$ est un ensemble ouvert et $P$ est de 1-ère catégorie.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Admettons que l'ensemble $Q$ des points $u$ où la fonction $x(u)$ n'est pas continue est de 1-ère catégorie. On a $E=\underset{u}{E}\{x(u)\in K\}=E^\circ+(E-E^\circ)$ et il suffit de montrer que $E-E^\circ\subset Q$ ou, ce qui revient au même, que $E(U-Q)\subset E^\circ$. En effet, si $u_0\in E(U-Q)$, on a $x(u_0)\in K$ et la fonction est continue au point $u_0$; il existe une sphère $S(u_0,\delta)=S$ telle que $x(u)\in K$ pour tout $x\in S$. Il s'en suit que $u_0\in E^\circ$.

La condition est suffisante. Désignons par $X_0$ le contredomaine de la fonction $x(u)$ et soit $x_1,x_2,\ldots$ une suite dense dans $X_0$. Soit $S_1,S_2,\ldots$ une suite composée de toutes les sphères $S\left(x_n,\dfrac{1}{m}\right)$ où $n,m=1,2,\ldots$ On a

$$E_n=\underset{u}{E}\{x(u)\in S_n^\circ\}=H_n+P_n,$$

où $H_n$ est un ensemble ouvert et $P_n$ est un ensemble de 1-ère catégorie. Posons $P=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n$; cet ensemble est aussi de 1-ère catégorie. Soit $u_0\in U-P$; il existe une suite de sphères $S_{l_n}$ dont les rayons tendent vers 0 telle que l'ensemble $\prod\limits_{n=1}^{\infty}S_{l_n}^\circ$ ne contient que l'élément $x(u_0)$. On a $u_0\in H_{l_n}$; il existe donc un nombre $\delta_n$ tel que l'inégalité $(u,u_0)<\delta_n$ entraîne $x(u)\in S_{l_n}^\circ$. Il en résulte que la fonction $x(u)$ est continue au point $u_0$.

***Remarque.*** Nous pouvons maintenant démontrer le corollaire (1.2) sans faire appel à la théorie de la représentation analytique. En effet, de la démonstration du théorème 1 il suit que, $G$ étant un ensemble ouvert dans $X$, l'ensemble $\underset{u}{E}\{x(u)\in G\}$ est un $\mathcal{G}_1$. Pour démontrer que la fonction $x(u)$ est continue en chaque point d'un ensemble résiduel, il suffit de prouver que:

(4.2) *Chaque ensemble $\mathcal{G}_1$ est somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble de 1-ère catégorie.*



Soit, en effet, $E$ un ensemble $\mathcal{G}_1$; il existe donc des ensembles fermés $F_n$ tels que $E=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. La formule

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^\circ+\sum_{n=1}^{\infty}(F_n-F_n^\circ)$$

donne la décomposition désirée de l'ensemble $E$, car l'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n^\circ$ est ouvert et l'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(F_n-F_n^\circ)$ est de 1-ère catégorie.

Nous allons nous appuyer dans la suite sur le théorème suivant de Hahn ([1], p. 334, 39·3·3)

(4.3) *Soit $\gamma(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\gamma(w)$ une fonction réelle continue relativement à chaque variable séparément. Cette fonction est quasicontinue*[8]*, c. à d. $K$ étant une sphère arbitraire dans $W=U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$, il existe pour tout nombre $\varepsilon>0$ et tout $w\in K$ une sphère $K_1\subset K$ telle que*

$$|\gamma(w)-\gamma(\overline{w})|<\varepsilon \quad \textit{pour} \quad \overline{w}\in K_1.$$

On tire aisément de (4.3):

(4.4) *Soit $\gamma(w)=\gamma(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ une fonction réelle continue relativement à chaque variable séparément; admettons que l'ensemble*

$$E=\underset{w}{E}\{\gamma(w)-\gamma_0\leqslant\varepsilon\}$$

*est dense la sphère $K$; on a alors $K\subset E$.*

Démonstration. Il faut démontrer que l'ensemble

$$\underset{w}{E}\{w\in K;\gamma(w)-\gamma_0>\varepsilon\}=H$$

est vide. Supposons que $w_0\in H$; on a

$$\gamma(w_0)-\gamma_0>\varepsilon;$$

il existe alors, d'après (4.3), une sphère $K_1\subset K$ telle que

$$|\gamma(w)-\gamma(w_0)|<\delta=\gamma(w_0)-\gamma_0-\varepsilon \quad \textit{pour} \quad w\in K_1.$$

On a par conséquent pour tout $w\in K_1$

$$\gamma(w)-\gamma_0=\gamma(w)-\gamma(w_0)+\gamma(w)-\gamma_0>\gamma(w_0)-\gamma_0-\delta=\varepsilon,$$

d'où $EK_1=0$, ce qui est impossible, car $K_1\subset K$.

[8]) Cette notion est due à Kempisty ([1], p. 186).

***Théorème 8.*** *Soit $x(u_1, u_2, \ldots, u_n) = x(w)$ une fonction faiblement continue par rapport à $\Xi_0$ relativement à chaque variable séparément, et dont le contredomaine est séparable. Dans ces hypothèses, l'ensemble des points de continuité de la fonction $x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est résiduel.*

Démonstration. D'après (4.1), il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E = \underset{w}{E}\{\|x(w) - x_0\| < \varepsilon\}$ est la somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble de 1-ère catégorie ou, en d'autres termes, que l'ensemble $E - E^\circ$ est de 1-ère catégorie. Supposons que, au contraire, cet ensemble soit de 2-ème catégorie. De la formule

$$E - E^\circ = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underset{w}{E}\left\{\|x(w) - x_0\| \leqslant \varepsilon\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\} - E^\circ\right],$$

il suit qu'il existe un $m$ tel que l'ensemble

$$H_m = \underset{w}{E}\left\{\|x(w) - x_0\| \leqslant \varepsilon\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right\} - E^\circ$$

est dense dans une sphère $K$; par conséquent, l'ensemble

$$E^* = \underset{w}{E}\left\{\|x(w) - x_0\| \leqslant \varepsilon\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \varepsilon'\right\}$$

est dense dans la même sphère. On a

$$\underset{w}{E}\{\|x(w) - x_0\| \leqslant \varepsilon'\} = \prod_{\xi \in \Xi_0^*} \underset{w}{E}\{\xi(x(w) - x_0) \leqslant \varepsilon'\}. \tag{4.5}$$

Soit $\xi \in \Xi_0^*$; posons $\gamma(w) = \xi(x(w))$, $\gamma_0 = \xi(x_0)$. La fonction $\gamma(w) = \gamma(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est continue relativement à chaque variable séparément et d'après (4.5) l'ensemble $E_\xi = \underset{w}{E}\{\gamma(w) - \gamma_0 \leqslant \varepsilon'\} \supset E^*$. D'après (4.3) on a alors $K \subset E_\xi$, par conséquent $E^* = \prod_{\xi \in \Xi_0^*} E_\xi \supset K$. Or, c'est impossible, car l'inclusion $E^* \subset E$ entraîne $E^{*\circ} \subset E^\circ$, d'où $K^\circ \subset E^\circ$ et $(E - E^\circ)K^\circ = 0$, contrairement à l'hypothèse que l'ensemble $E - E^\circ$ est dense dans la sphère $K$.

Dans le cas où les espaces considérés sont séparables, ce théorème peut être demontré sans faire appel au théorème de Hahn (4.3). Soit $E = \underset{w}{E}\{\|x(w) - x_0\| \leqslant \varepsilon\}$. Il suffit de montrer que si l'ensemble $E$ est de 2-ème catégorie dans un cube $S$, cet ensemble contient un cube $S' \subset S$. L'ensemble $E$ est borelien; il existe donc un cube $Q = K_1 \times \ldots \times K_n \subset S$ dans lequel cet ensemble est résiduel. En vertu de la formule (4.5), il suffit d'admettre que la fonction $x$ est réelle et continue relativement à chaque variable. Il suffit de montrer que (*) *si l'ensemble $E$ est résiduel dans un cube $Q$, on a $Q^\circ \subset E$.* Cette proposition est évidente pour les fonctions d'une variable. Admettons cette proposition vraie pour les fonctions de $n-1$ variables. Posons

$$T = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_{n-1} \qquad v = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}).$$

Soit $u_n^0 \in K_n^\circ$, $L_\delta = S(u_n^0, \delta) \subset K_n$. L'ensemble $R_\delta = E(T \times L_\delta)$ est résiduel dans $T \times L_\delta$. La projection $P_\delta$ de $R_\delta$ sur $T$ est un ensemble résiduel, car dans le cas contraire l'ensemble $T - P_\delta$ serait de 2-ème catégorie et, par conséquent l'ensemble $(T - P_\delta) \times L_\delta$ serait aussi de 2-ème catégorie, ce qui est impossible, puisque $(T - P_\delta) \times L_\delta \subset (T \times L_\delta) - R_\delta$. L'ensemble $P = \prod_{n=1}^{\infty} P_{1/n}$ est donc résiduel dans $T$ et pour chaque $v \in P$ il existe une suite $u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^m \ldots \to u_n^0$ telle que $(v, u_n^i) \in E$ pour $i = 1, 2, \ldots$ La fonction $x$ étant continue relativement à $u_n$, on a $(x, u_n^0) \in E$. Si l'on pose $\bar{x}(v) = x(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n^0)$, on a alors $P \subset \underset{v}{E}\{|\bar{x}(v) - x_0| \leqslant \varepsilon\} = E_1$. La proposition (*) étant supposée vraie pour des fonctions de $n-1$ variables, il en résulte que $T \subset E_1$. L'élément $u_n^0$ étant arbitraire, on a $T^\circ \times K_n^\circ = Q^\circ \subset E$.



Il est à remarquer que dans les hypothèses du théorème 8 la fonction $x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ n'est pas en général de 1-ère classe.

***Théorème 9.*** *Soit $x_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une suite de fonctions faiblement continues par rapport à $\Xi_0$ relativement à chaque variable séparément, dont les contredomaines sont séparables. Admettons que la suite converge vers une fonction $x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$; dans ces hypothèses, on a:*

(4.6) *l'ensemble des points de continuité de la fonction $x(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est résiduel;*

(4.7) *les fonctions $x_p(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont équicontinues en chaque point d'un ensemble résiduel $R \subset U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.*

Démonstration. Soient $Z$ l'espace et $\mathfrak{Z}_0$ l'ensemble fondamental de fonctionnelles linéaires défini au cours de la démonstration du théorème 3. Considérons la suite $x_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ comme fonction abstraite $z(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ qui fait correspondre à chaque élément $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de l'espace $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ l'élément $\{x_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)\}$ de l'espace $Z$. On démontre aisément (comp. la démonstration du théorème 3) que le contredomaine de la fonction $z(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est séparable.

Nos hypothèses impliquent que la fonction $z(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est faiblement continue par rapport à $\mathfrak{Z}_0$ relativement à chaque variable séparément. En vertu du théorème 7, la fonction $z(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est continue en chaque point d'un ensemble $R$ qui est résiduel dans

$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, c. à d. pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour tout élément $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$((u_1', u_2', \ldots, u_n'), (u_1, u_2, \ldots, u_n)) < \delta$$

entraîne

$$\sup_{\nu=1,2,\ldots} \|x_\nu(u_1', u_2', \ldots, u_n') - x_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| < \varepsilon.$$

Les fonctions $x_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont donc *équicontinues* en chaque point de l'ensemble $R$. Il s'en suit que la fonction limite est continue en chaque point de $R$.

**5.** Dans ce paragraphe et dans les suivants nous allons considérer quelques exemples.

Soit $U_n$ un espace métrique compact. Désignons par $C(U_n)$ l'espace linéaire de toutes les fonctions réelles continues définies dans $U_n$; l'addition d'éléments et la multiplication par des nombres réels étant définies de manière habituelle et la norme de l'élément $z = z(u_n)$ étant définie par la formule $\|z\| = \max_{u_n \in U_n} |z(u_n)|$, l'espace $C(U_n)$ est un espace séparable de Banach (comp. Banach [1], p. 217). Soit $W$ un ensemble d'éléments dense dans $U_n$; l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires de la forme $\xi(z) = z(u_n)$, où $u_n \in W$, est fondamental dans $C(U_n)$. Nous désignerons cet ensemble dans ce paragraphe par $\Xi_0$.

Soit $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une fonction réelle définie dans $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ continue relativement à la variable $u_n$ et continue relativement à chacune des variables $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ séparément lorsque $u_n$ est un élément fixe de $W$. Considérons la fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ comme fonction abstraite $x(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ faisant correspondre à tout élément $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ de l'espace $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n-1}$ l'élément $f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ de l'espace $C(U_n)$. On voit aisément que notre fonction abstraite est faiblement continue par rapport à $\Xi_0$ relativement à chaque variable séparément; d'après le théorème 8 cette fonction est continue en chaque point d'un ensemble résiduel $R \subset U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n-1}$. En d'autres termes, les relations

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \in R, \quad \lim_{\nu \to \infty} (x_i^\nu, x_i^0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

entraînent

$$\lim_{\nu \to \infty} \max_{u_n \in U_n} |f(u_1^\nu, u_2^\nu, \ldots, u_{n-1}^\nu, u_n) - f(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_{n-1}^0, u_n)| = 0.$$

On obtient ainsi une généralisation du théorème 39·3·6 de Hahn ([1], p. 337):



***Théorème 10.*** *Soient $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ des espaces métriques complets* [9]*, $U_n$ un espace métrique compact. Admettons que $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une fonction réelle définie dans $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n-1} \times U_n$, continue relativement à la variable $u_n$ et continue relativement à chacune des variables $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ lorsque $u_n$ est un élément fixe d'un ensemble $W$ dense dans $U_n$. Dans ces hypothèses, il existe un ensemble résiduel $R \subset U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n-1}$ tel que la fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est continue en chaque point de l'ensemble $R \times U_n$* [10]*.*

Remarquons que ce théorème est une conséquence d'un théorème général dont la démonstration n'est pas tout-à-fait simple. Or, dans le cas de fonctions de deux variables, ce théorème résulte immédiatement du théorème 1 dont la démonstration est simple.

Du théorème 9 on déduit:

(5.1) *Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des espaces métriques complets, $f_p(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une suite de fonctions réelles continues relativement à chaque variable séparément, convergente vers une fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. La fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est alors continue dans chaque point d'un ensemble résiduel* [11] *et les fonctions $f_p(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont équicontinues dans chaque point d'un ensemble résiduel.*

[9]) Il est essentiel de remarquer que ces espaces ne sont pas supposés séparables.

[10]) Ce théorème a été démontré par Hahn dans l'hypothèse que la fonction $f$ est continue relativement à chaque variable séparément. Après avoir rédigé cette Note nous avons pris connaissance du travail de M. Kershner [1]. Le théorème de Hahn y est démontré dans le cas où les espaces sont euclidiens. M. Kershner remarque que ses méthodes peuvent être appliquées dans le cas des espaces arbitraires (sc. métriques). Or, si l'on admet que les espaces $U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}$ sont compacts, c'est évident, mais ce n'est pas ainsi si les espaces considérés ne sont pas séparables.

[11]) Ce théorème a été démontré pour des fonctions de variables réelles par Kempisty ([1], p. 194). De ce théorème résultent quelques propositions concernant les dérivées partielles. Ainsi p. ex.: *si la fonction $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ admet les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ dans un domaine ouvert $D$, la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}$ existe alors dans un ensemble résiduel $R \subset D$ et l'on a $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}$ dans $R$.*

En effet, il suffit d'admettre que $D$ est un rectangle $n$-dimensionnel; on a

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{h_p} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} f(u_1 + h_p, u_2, \ldots, u_n) - \frac{\partial}{\partial u_2} f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2},$$

où $h_p \to 0$; la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$ étant limite de fonctions continues relativement à chaque variable séparément, elle est continue dans un ensemble résiduel $R \subset D$. Il suffit d'appliquer le théorème de Schwarz.

Du théorème 2 on obtient le

***Théorème 11.*** *Soit $U_1$ un espace métrique complet, $U_2$ un espace métrique compact et soit $f(u_1,u_2)$ une fonction réelle continue relativement à la variable $u_2$, et de classe $a$ relativement à la variable $u_1$ lorsque $u_2$ est un élément fixe d'un ensemble $W$ dense dans $U_2$. La fonction $f(u_1,u_2)$ est alors de classe $a+1$.*

Soit maintenant $U_n=[0,1]$. Désignons comme d'habitude, l'espace $C([0,1])$ par $C$. L'ensemble $\Xi_1$ de fonctionnelles linéaires de forme

$$\xi(x)=\int_\alpha^\beta x(t)dt \quad \text{où} \quad \alpha,\beta\in[0,1],$$

est fondamental dans $C$.

***Théorème 12.*** *Soient $U_1,U_2,\dots,U_{n-1}$ des espaces métriques complets et soit $f(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)$ une fonction réelle définie dans $U_1\times U_2\times\dots\times U_{n-1}\times[0,1]$ continue relativement à la variable $t$ et telle que la relation*

$$\lim_{m=\infty}(u_i^m,u_i^0)=0 \qquad (i=1,2,\dots,n-1)$$

*entraîne (les variables $u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_{n-1}$ étant fixes)*

$$\text{(5.2)}\qquad \lim_{m\to\infty}\text{as}\, f(u_1,\dots,u_{i-1},u_i^m,u_{i+1},\dots,u_{n-1},t)=$$
$$=f(u_1,\dots,u_{i-1},u_i^0,u_{i+1},\dots,u_{n-1},\ t)^{12)}.$$

*Dans ces hypothèses, il existe un ensemble résiduel*

$$R\subset U_1\times U_2\times\dots\times U_{n-1}$$

*tel que la fonction $f(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)$ est continue en chaque point de l'ensemble $R\times[0,1]$.*

Démonstration. Posons

$$\omega(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)=\frac{f(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)}{1+|f(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)|}$$

[12]) $\lim_{m\to\infty}\text{as}\,\varphi_m(t)$ désigne la limite „en mesure" de la suite $\varphi_m(t)$.



et considérons cette fonction comme fonction abstraite $x(u_1,u_2,\dots,u_{n-1})$ définie dans $U_1\times U_2\times\dots\times U_{n-1}$, dont les valeurs appartiennent à $C$. Ces valeurs sont des fonctions continues inférieures à 1 en valeur absolue. Soit $\lim_{m\to\infty}(u_i^m,u_i^0)=0$; on a d'après (5.2), en passant à la limite sous le signe d'intégrale de Lebesgue

$$\lim_{m\to\infty}\int_\alpha^\beta\frac{f(u_1,u_2,\dots,u_{i-1},u_i^m,u_{i+1},\dots,u_{n-1},t)}{1+|f(u_1,u_2,\dots,u_{i-1},u_i^m,u_{i+1},\dots,u_{n-1},t)|}dt=$$
$$=\int_\alpha^\beta\frac{f(u_1,u_2,\dots,u_{i-1},u_i^0,u_{i+1},\dots,u_{n-1},t)}{1+|f(u_1,u_2,\dots,u_{i-1},u_i^0,u_{i+1},\dots,u_{n-1},t)|}dt.$$

La fonction $x(u_1,u_2,\dots,u_{n-1})$ est donc faiblement continue par rapport à $\Xi_1$ relativement à chaque variable séparément. D'après le théorème 8, cette fonction abstraite est continue en chaque point d'un ensemble résiduel $R\subset U_1\times U_2\times\dots\times U_{n-1}$. Pour obtenir notre thèse, il suffit de remarquer que

$$f(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)=\frac{\omega(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)}{1-|\omega(u_1,u_2,\dots,u_{n-1},t)|}.$$

Par le raisonnement appliqué au cours de la démonstration du théorème 12, on peut démontrer sans peine la proposition suivante:

(5.3) *Soit $f(t,\lambda)$ une fonction réelle bornée définie dans $[a,b]\times[A,B]$, continue relativement à la variable $t$ et telle qu'on ait*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_\alpha^\beta f(t,\lambda)dt=\int_\alpha^\beta f(t,\lambda_0)dt,$$

*$(\lambda_0,\alpha,\beta)$ étant un élément arbitraire de $[A,B]\times[a,b]\times[a,b]$. Dans ces hypothèses, la fonction $f(t,\lambda)$ est continue en chaque point d'un ensemble $D=[a,b]\times R$, où $R$ désigne un ensemble résiduel dans $[A,B]$.*

***Théorème 13.*** *Soit $x(t_1,t_2)$ une fonction abstraite définie dans $[A_1,B_1]\times[A_2,B_2]$, dont le contredomaine est séparable. Admettons que la fonction $x(t_1,t_2)$ soit continue relativement à $t_2$ et mesurable relativement à $t_1$ lorsque $t_2$ est un élément fixe d'un ensemble $W$ dense dans $[A_2,B_2]$. Dans ces hypothèses, la fonction $x(t_1,t_2)$ est mesurable dans $[A_1,B_1]\times[A_2,B_2]$.*

Démonstration. Soit $X_1$ le plus petit ensemble linéaire fermé contenant le contredomaine de la fonction $x(t_1,t_2)$; cet ensemble constitue un espace séparable de Banach. Considérons l'espace $X^*$ des fonctions abstraites $x(t_2)$ continues, définies dans $[A_2,B_2]$, à valeurs dans $X_1$; l'addition, la multiplication et la norme étant définies comme dans l'espace $C(U)$, l'espace $X^*$ est un espace séparable de Banach. L'ensemble $\Xi_*$ des fonctionnelles linéaires de la forme $\xi(x)=x(w)$, où $w \in W$ est fondamental dans $X^*$. Les hypothèses du théorème impliquent que la fonction $x(t_1,t_2)$, considérée comme fonction abstraite définie dans $[A_1,B_1]$, à contredomaine dans $X^*$, est mesurable faiblement par rapport à $\Xi_*$, donc d'après le théorème 5, mesurable. Toute fonction abstraite simple considérée comme fonction de deux variables étant évidemment mesurable, la fonction $x(t_1,t_2)$ est mesurable.

Le théorème de Lusin étant vrai pour les fonctions abstraites de variable réelle, mesurables, on obtient:

(5.4) *Dans les hypothèses du théorème 13, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un ensemble $R\subset[A_1,B_1]$ tel que $|[A_1,B_1]-R|<\varepsilon$ et tel que la fonction $x(t_1,t_2)$ est continue relativement à l'ensemble $R\times[A_2,B_2]$.*

Soit $f(x,y)$ une fonction réelle continue définie dans le rectangle $[a,b]\times[A,B]$ et désignons par $M$ le maximum de cette fonction. Soit $(x_0,y_0)$ un point arbitraire de $(a,b)\times(A,B)$; l'équation différentielle

$$y'=f(x,y) \tag{5.4}$$

admet alors des intégrales passant par ce point. Chacune de ces intégrales est définie au moins dans l'intervalle $|x-x_0|\leqslant\delta(x_0)$, où

$$\delta(x_0)=\min\left(|x_0-a|,|x_0-b|,\frac{|y_0-A|}{M},\frac{|y_0-B|}{M}\right).$$

Si l'on désigne par $\bar{y}(x;x_0,y_0)$ la borne supérieure des intégrales de l'équation (5.4) dans l'intervalle $|x-x_0|\leqslant\delta$, on obtient une fonction qui satisfait à l'équation (5.4) (c'est l'*intégrale supérieure* de l'équation (5.4)). Soit $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ un point fixe; tous les intégrales supérieures $\bar{y}(x;x_0,y_0)$, où $|x_0-\bar{x}_0|<\frac{1}{4}\delta(\bar{x}_0)$, $|y-\bar{y}_0|<\dfrac{M}{4}\delta(x_0)$ ont alors un intervalle commun d'existence qui est au moins égal à $|x-\bar{x}_0|\leqslant\frac{1}{4}\delta(\bar{x}_0)$. Considérons la fonction $\bar{y}(x;x_0,y_0)$ comme fonction abstraite des variables $x_0,y_0$, définie dans le rectangle $|x_0-\bar{x}_0|\leqslant\dfrac{\delta(\bar{x}_0)}{4}$, $|y_0-\bar{y}_0|\leqslant\dfrac{M\delta(\bar{x}_0)}{4}$, dont les valeurs sont des éléments de l'espace $C(U)$, où $U=\left[\bar{x}_0-\dfrac{\delta(\bar{x}_0)}{4},\bar{x}_0+\dfrac{\delta(\bar{x}_0)}{4}\right]$. De l'identité

$$\bar{y}(x;x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\vartheta,\bar{y}(\vartheta;x_0,y_0))d\vartheta,$$

il suit que le contredomaine de cette fonction abstraite est compact. M. Montel a démontré ([1], p. 272) que $x$ étant un point fixe, l'intégrale $\bar{y}(x;x_0,y_0)$ considérée comme fonction de $x_0,y_0$ est sémi-continue supérieurement. Il 'en suit que pour chaque fonctionnelle $\xi(x)$ appartenant à l'ensemble fondamental $\Xi_0$, la fonction $\xi(x)$ est de classe 1, notre fonction abstraite est donc de classe 1 faible par rapport à $\Xi_0$. En vertu du théorème 4 nous obtenons le

**Théorème 14.** *Soit $f(x,y)$ une fonction continue dans le rectangle $[a,b]\times[A,B]$ et désignons par $\bar{y}(x;x_0,y_0)$ l'intégrale supérieure de l'équation différentielle (5.4) passant par le point $(x_0,y_0)$. Alors la fonction $\bar{y}$ $(x;x_0,y_0)$, considérée comme fonction de valeurs initiales, est continue dans chaque point d'un ensemble résiduel $R$ — plus précisément — $(x_0,y_0)$ étant un point de $R$, on a*

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to x_0\\ \bar{y}\to y_0}}\bar{y}(x;\bar{x},\bar{y})=y(x;x_0,y_0),$$

*la limite étant uniforme (par rapport à $x$) dans un certain voisinage du point $x_0$.*

**6.** Considérons à présent comme l'espace $X$ l'espace $C^p$ des fonctions réelles $x(u_n)$ définies dans l'intervalle $U_n=[A_n,B_n]$ et admettant la dérivée $\dfrac{d^p}{du_n^p}x(u_n)$ continue (Banach [1], p. 11); la norme étant définie par la formule

$$\|x\|=\max_{A_n\leqslant u_n\leqslant B_n}|x(u_n)|+\max_{A_n\leqslant u_n\leqslant B_n}\left|\frac{d^p}{du_n^p}x(u_n)\right|,$$

l'espace $C^p$ est un espace séparable de Banach.

Désignons par $\Xi_0$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires de la forme $\xi(x)=x(u_n)$, où $u_n$ est un nombre rationnel de l'intervalle $[A_n, B_n]$. *L'ensemble $\Xi_0$ est fondamental.*

Posons, en effet, $\Delta_1^h x(u_n)=x(u_n+h)-x(u_n)$, et

$$\Delta^p_{h_1\ldots h_p}x(u_n)=\Delta^1_{h_p}[\Delta^{p-1}_{h_1\ldots h_{p-1}}x(u_n)].$$

On peut montrer que (Mazur-Orlicz [1], p. 52)

$$\Delta^p_{h_1\ldots h_p}x(u_n)=\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p=0,1}(-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)}x(u_n+\varepsilon_1h_1+\ldots+\varepsilon_ph_p). \tag{6.1}$$

On a la formule

$$\Delta^p_{h_1\ldots h_p}x(u_n)=h_1\ldots h_n\frac{d^p}{du_n^p}x(u_n+\vartheta_1h_1+\ldots+\vartheta_ph_p), \tag{6.2}$$

où $0<\vartheta_i<1$ $(i=1,2,\ldots,p)$. Il s'en suit que la norme de la fonctionnelle:

$$\xi(x)=\pm x(a)\pm\frac{\Delta^p_{h_1\ldots h_p}x(u_n)}{h_1\ldots h_p} \quad \text{où } h_i\neq 0 \ (i=1,2,\ldots,p),\ a\in U_n \tag{6.3}$$

ne surpasse pas 1. Or, si $a, u_n, h_1,\ldots,h_p$ sont des nombres rationnels, la fonctionnelle (6.3) appartient en vertu de (6.1) à $\Xi_0^*$. Soit maintenant $x=x(u_n)$ un élément arbitraire de $C^p$. Il existe des nombres rationnels

$$\bar{u}_n\in U_n \quad\text{et}\quad a\in U_n \quad\text{tels que}\quad |x(a)|+\left|\frac{d^p}{du_n^p}x(\bar{u}_n)\right|\geqslant\|x\|-\varepsilon;$$

en choisissant convenablement des nombres $h_1,h_2,\ldots,h_p$ (suffisamment petits) et des signes $\pm$, on obtient en vertu de (6.2) et (6.3)

$$\xi(x)=|x(a)|+\frac{|\Delta^p_{h_1\ldots h_p}x(\bar{u}_n)|}{|h_1\ldots h_p|}\geqslant|x(a)|+\left|\frac{d^p}{du_n^p}x(\bar{u}_n)\right|\geqslant\|x\|-2\varepsilon.$$

Toute fonction réelle $f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ définie dans

$$[A_1,B_1]\times[A_2,B_2]\times\ldots\times[A_n,B_n]$$

et admettant la dérivée partielle $\frac{\partial^p}{\partial u_n^p}f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ continue relativement à la variable $u_n$ peut être considérée comme fonction abstraite définie dans $[A_1,B_1]\times[A_2,B_2]\times\ldots\times[A_{n-1},B_{n-1}]$, dont les valeurs appartiennent à $C^p$.



Du théorème 8 on obtient alors:

***Théorème 15.*** *Soit $f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ une fonction réelle définie dans $[A_1,B_1]\times[A_2,B_2]\times\ldots\times[A_n,B_n]$, continue par rapport à chacune des variables $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}$ séparément lorsque $u_n$ est un nombre rationnel fixe, et admettant la dérivée partielle $\frac{\partial^p}{\partial u_n^p}f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ continue par rapport à $u_n$. Dans ces hypothèses, il existe un ensemble résiduel $R\subset[A_1,B_1]\times[A_2,B_2]\times\ldots\times[A_{n-1},B_{n-1}]$ tel que pour tout $(u_1^0,u_2^0,\ldots,u_{n-1}^0)\in R$ on a*

$$\lim_{(u_1-u_1^0)\to0,\ldots,(u_{n-1}-u_{n-1}^0)\to0}\ \max_{A_n\leqslant u_n\leqslant B_n}\left|\frac{\partial^p}{\partial u_n^p}f(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},u_n)-\frac{\partial^p}{\partial u_n^p}f(u_1^0,u_2^0,\ldots,u_{n-1}^0,u_n)\right|=0.$$

*Par conséquent, la fonction $\frac{\partial^p}{\partial u_n^p}f(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ est continue en tout point de l'ensemble $R\times[A_n,B_n]$.*

**8.** Appliquons maintenant les résultats du paragraphe 1 aux fonctions abstraites dont les valeurs sont des éléments de l'espace $L^p$ où $1\leqslant p<\infty$ des fonctions sommables $x(u_2)$ dans $0\leqslant u_2\leqslant1$ avec la $p$-ième puissance (Banach [1], p. 12). L'ensemble des fonctionnelles linéaires de la forme

$$\xi(x)=\int_0^s x(u_2)du_2 \quad (0<s<1)$$

est fondamental dans $L^p$. Du corollaire (1.2) on obtient:

***Théorème 16.*** *Soit $f(u_1,u_2)$ une fonction réelle définie dans le rectangle $[0,1]\times[0,1)$ telle que pour chaque $u_1$:*

$$\int_0^1|f(u_1,u_2)|^p du_2<+\infty.$$

*Admettons que pour tout $u_1^0$ et $s$*

$$\lim_{u_1\to u_1^0}\int_0^s f(u_1,u_2)du_2=\int_0^s f(u_1^0,u_2)du_2.$$

*Il existe alors un ensemble résiduel $R\subset[0,1]$ tel que pour chaque $u_1^0\in R$ on a*

$$\lim_{u_1\to u_1^0}\int_0^1|f(u_1,u_2)-f(u_1^0,u_2)|^p du_2=0.$$

Considérons enfin comme l'espace $X$ l'espace $l^p$ $(p \geqslant 1)$ composé de toutes les suites réelles $x=\{x_n\}$ telles que $|x_1|^p+|x_2|^p+\ldots<+\infty$ (Banach [1], p. 12). La norme est définie par la formule $\|x\|=(|x_1|^p+|x_2|^p+\ldots)^{1/p}$; cet espace est séparable. L'ensemble $\Xi_0$ des fonctionnelles linéaires de la forme $\xi(x)=x_n$, où $n=1,2,\ldots$, est fondamental dans $l^p$. Comme dans les cas précédents on obtient le

***Théorème 17.*** *Soit $f_n(u)$ une suite de fonctions réelles continues telle que $|f_1(u)|^p+|f_2(u)|^p+\ldots<+\infty$ pour tout $u \in [a,b]$. Il existe alors un ensemble résiduel $R$ tel que pour tout $u_0 \in R$ on a*

$$\lim_{u\to u_0} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(u)-f_n(u_0)|^p=0.$$

## Ouvrages cités.

Banach, S. [1] *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Matematyczne, Warszawa (1932).

— [2] *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen.* Fund. Math. **17** (1931), p. 283-295.

Bochner, S. [1] *Integration von Funktionen, deren Werte Elemente eines Vektorraumes sind.* Fund. Math. **20** (1933), p. 262-276.

— [2] *Absolut additive abstrakte Mengenfunktionen.* Fund. Math. **21** (1933), p. 211-213.

Gelfand, I. [1] *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren.* Recueil Math. **4** (**46**) (1938), p. 235-286.

Fichtenholz, G. et Kantorovitch, L. [1] *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math. **5** (1934), p. 69—98.

Hahn, H. [1] *Reelle Funktionen.* Erster Teil: *Punktfunktionen.* Leipzig (1932).

Kempisty, S. [1] *Sur les fonctions quasicontinues.* Fund. Math. **19** (1932), p. 184-197.

Kershner, R. [1] *The continuity of functions of many variables.* Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), p. 83-100.

Mazur, S. und Orlicz, W. [1] *Grundlegende Eigenschaften der Polynomischen Operationen.* Erste Mitteilung. Studia Math. **5** (1934), p. 50-68.

Montel, P. [1] *Sur les suites infinies de fonctions.* Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup., 3 sér. **24** (1907), p. 233-334.

Montgomery, D. [1] *Non separable metric spaces.* Fund. Math. **25** (1935), p. 527-533.

Pettis, B. J. [1] *On integration in vector spaces.* Trans. Am. Math. Soc. **44** (1938), p. 277-304.

# On the principle of dependent choices.

By

Andrzej Mostowski (Warszawa).

Let us consider the following weakened form of the axiom of choice:

$(T)$ $\begin{cases} \textit{if } R \textit{ is a binary relation and } B \textit{ a set } \neq 0 \textit{ and if for every } x \in B \\ \textit{there is a } y \in B \textit{ such that } xRy, \textit{ then there is a sequence } x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \\ \textit{of elements of } B \textit{ such that } x_n R x_{n+1} \textit{ for } n=1,2,\ldots \end{cases}$ [1]).

It will be proved here that *the general axiom of choice* (which we shall denote by $(Z)$) *is independent of* $(T)$, i. e., cannot be proved from $(T)$ and the usual axioms of set-theory.

An independence-proof has sense only with respect to a well defined formal system whose consistency is either proved or assumed as an hypothesis. Our proof applies only to such systems of set-theory as remain self-consistent after adjunction of the following axiom

$(N)$ *there is a non-denumerable set of elements which are not sets.*

It can be shown without difficulty that the system $\mathfrak{S}$ described in one of my former papers [2]) satisfies this condition. Hence we shall take $\mathfrak{S}$ as a basis for our proof.

In order to prove that $(Z)$ is independent of $(T)$ we have to construct in a self-consistent theory $\mathfrak{S}_1$ a model in which all the axioms of $\mathfrak{S}$ as well as the axiom $(T)$ are fulfilled and in which the axiom of choice is false.

[1]) This axiom has been considered by A. Tarski in his recent paper *Axiomatic and algebraic aspects of two theorems on sums of cardinals,* this volume, p. 79—104. Tarski calls $(T)$ *the principle of dependent choices.*

[2]) Fundamenta Mathematicae **32** (1939), pp. 201-252.