Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires ordinaires

par

Z. BUTLEWSKI (Poznań).

1. Nous considérons dans cet article un système d'équations différentielles ordinaires

$$(1)\qquad \frac{dx_k}{dt}+\sum_{l=1}^{n} a_{kl}(t)\,x_l=f_k(t), \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

où $a_{kl}(t)$ et $f_k(t)$ sont des fonctions continues de la variable complexe t pour $|t|\geqslant|t_0|$ et $\arg t=\omega=\text{const}$.

Nous obtenons des conditions suffisantes pour que les modules des intégrales $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ du système (1) soient bornés à l'infini dans une direction déterminée[1]).

Posons dans le système (1):

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} x_k=\nu_k e^{\varphi_k i}, & a_{kl}=\varrho_{kl}\, e^{\alpha_{kl} i}, & f_k=\Phi_k\, e^{\psi_k i}, \\ t=\tau\, e^{\omega i}, & \omega=\text{const.}, & i=\sqrt{-1}. \end{array}$$

D'après (2), le système (1) prend la forme suivante:

$$(3)\qquad e^{(\varphi_k-\omega)i}\frac{d\nu_k}{d\tau}+i\nu_k e^{(\varphi_k-\omega)i}\frac{d\varphi_k}{d\tau}+\sum_{l=1}^{n}\varrho_{kl}\nu_l\, e^{(\alpha_{kl}+\varphi_l)i}=\Phi_k e^{\psi_k i}, \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

En utilisant l'égalité $e^{mi}=\cos m+i\sin m$, on peut remplacer (3) par le système des équations:

[1]) Cf. E. Picard, *Traité d'Analyse*, Volume III, Chapitre XIV, Paris 1928, 3-me édition, p. 382-387; L. Cesari, *Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari*, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa 18 (1940), p. 163-186.

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{d\nu_k}{d\tau}\cos(\varphi_k-\omega)-\nu_k\frac{d\varphi_k}{d\tau}\sin(\varphi_k-\omega)+\sum_{l=1}^{n}\varrho_{kl}\nu_l\cos(\alpha_{kl}+\varphi_l)=\Phi_k\cos\psi_k,\\ &\frac{d\nu_k}{d\tau}\sin(\varphi_k-\omega)+\nu_k\frac{d\varphi_k}{d\tau}\cos(\varphi_k-\omega)+\sum_{l=1}^{n}\varrho_{kl}\nu_l\sin(\alpha_{kl}+\varphi_l)=\Phi_k\sin\psi_k,\\ &\qquad\qquad k=1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Multiplions pour tout k la première des équations (4) respectivement par $\cos(\varphi_k-\omega)$, la deuxième par $\sin(\varphi_k-\omega)$ et ajoutons-les membre à membre. On obtient le système des équations

$$(5)\qquad \frac{d\nu_k}{d\tau}+\sum_{l=1}^{n}\varrho_{kl}\nu_l\cos(\alpha_{kl}+\varphi_l-\varphi_k+\omega)=\Phi_k\cos(\psi_k-\varphi_k+\omega), \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

2. Considérons maintenant le système des équations (1) sans membres droits:

$$(6)\qquad \frac{dx_k}{dt}+\sum_{l=1}^{n}a_{kl}(t)\,x_l=0, \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Le système (5) correspondant prend alors la forme

$$(7)\qquad \frac{d\nu_k}{d\tau}+\sum_{l=1}^{n}\varrho_{kl}\nu_l\cos(\alpha_{kl}+\varphi_l-\varphi_k+\omega)=0, \qquad k=1,2,\ldots,n.$$

En multipliant les équations (7) respectivement par $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ et en ajoutant leurs premiers membres, on obtient l'équation

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\nu_k\frac{d\nu_k}{d\tau}+\sum_{k=1}^{n}\varrho_{kk}\nu_k^2\cos(\alpha_{kk}+\omega)+\\ &+\sum_{\substack{k,l=1\\ k<l}}^{n}\nu_k\nu_l\left[\varrho_{kl}\cos(\alpha_{kl}+\varphi_l-\varphi_k+\omega)+\varrho_{lk}\cos(\alpha_{lk}+\varphi_k-\varphi_l+\omega)\right]=0. \end{aligned}$$

Posons

$$(9)\qquad R=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\ldots+\nu_n^2},$$

où les modules $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ sont des fonctions réelles de la variable τ pour $\tau\geqslant\tau_0$. La fonction $R(\tau)$ est évidemment positive parce que nous excluons l'intégrale $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ du système (6).

On a d'après (9):

$$\left|\frac{\nu_k\nu_l}{R^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{\nu_k}{R}\right|\leqslant 1.$$

En dérivant l'égalité (9), il vient

$$R\frac{dR}{d\tau}=\sum_{k=1}^{n}\nu_k\frac{d\nu_k}{d\tau}.$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (8) sous la forme

$$\frac{dR}{d\tau}+R\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\nu_k}{R}\right)^2\varrho_{kk}\cos(\alpha_{kk}+\omega)+ \tag{10}$$

$$+\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n}\frac{\nu_k\nu_l}{R^2}[\varrho_{kl}\cos(\alpha_{kl}+\varphi_l-\varphi_k+\omega)+\varrho_{lk}\cos(\alpha_{lk}+\varphi_k-\varphi_l+\omega)]\Bigg\}=0.$$

Posons pour abréger

$$A(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\nu_k}{R}\right)^2\varrho_{kk}\cos(\alpha_{kk}+\omega)+ \tag{11}$$

$$+\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n}\frac{\nu_k\nu_l}{R^2}[\varrho_{kl}\cos(\alpha_{kl}+\varphi_l-\varphi_k+\omega)+\varrho_{lk}\cos(\alpha_{lk}+\varphi_k-\varphi_l+\omega)].$$

On peut alors écrire l'équation (10) sous la forme

$$\frac{dR}{d\tau}+A(\tau)R=0. \tag{12}$$

En intégrant l'équation différentielle (12), on trouve

$$R(\tau)=R(\tau_0)\,e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}A(\tau)d\tau}. \tag{13}$$

Admettons que

$$c\leqslant\int_{\tau_0}^{\infty}A(\tau)\,d\tau\leqslant l,$$

où les constantes c et l peuvent être évaluées au moyen des intégrales

$$\int_{\tau_0}^{\infty}|a_{kl}(\tau e^{\omega i})|\,d\tau \qquad (\omega=\text{const.}).$$

Nous obtenons alors l'inégalité

$$R(\tau_0)e^{-c}\geqslant R(\tau)\geqslant R(\tau_0)\,e^{-l}.$$

Nous pouvons donc énoncer le

Lemme. *Si* $c\leqslant\int_{\tau_0}^{\tau}A(\tau)\,d\tau\leqslant l$, *les intégrales* $x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)$ *du système* (6) *satisfont à la relation*

$$e^{-c}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k(t_0)|^2\right)^{1/2}\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k(t)|^2\right)^{1/2}\geqslant e^{-l}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k(t_0)|^2\right)^{1/2}$$

pour $k=1,2,\dots,n$, $|t|\geqslant|t_0|$ *et* $\arg t=\omega=\text{const.}$

3. On déduit de (11)

$$\left|\int_{\tau_0}^{\tau}A(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau}\varrho_{kl}(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

On déduit des formules (13) et (14) les inégalités[2])

$$R(\tau_0)\exp\left[-\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau}\varrho_{kl}\,d\tau\right]\leqslant R(\tau)\leqslant R(\tau_0)\exp\left[\sum_{k,l=1}^{n}\int_{\tau_0}^{\tau}\varrho_{kl}\,d\tau\right]. \tag{15}$$

En posant avec Rosenblatt[3])

$$M(\tau)=\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant n}}\int_{\tau_0}^{\tau}\varrho_{kl}\,d\tau,$$

on obtient en particulier

$$R(\tau_0)\exp[-n^2M(\tau)]\leqslant R(\tau)\leqslant R(\tau_0)\exp[n^2M(\tau)].$$

Nous parvenons ainsi au

Théorème I. *Si* $\arg t=\omega=\text{const.}$ *et* $\int_{|t_0|}^{+\infty}|a_{kl}(t)|\,d|t|<\infty$ *où* $k=1,2,\dots,n$ *et* $l=1,2,\dots,n$, *toutes les intégrales* $x_1(t)$, $x_2(t),\dots,x_n(t($ *du système* (6) *ont les modules bornés, mais ne tendent pas tous vers* 0 *avec* $|t|\to+\infty$.

Considérons à présent le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_k}{dt}+\sum_{l=1}^{n}a_{kl}(t)\,x_l=0, \qquad k=1,2,\dots,n \tag{16}$$

[2]) Cf. A. Rosenblatt, *On the growth of the solutions of ordinary differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), p. 723-727.

[3]) loc. cit., p. 724.

et admettons que les coefficients $a_{kl}(t)$ soient des fonctions réelles et continues de la variable réelle t pour $t \geqslant t_0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (16) soit identique à son adjoint est que l'on ait $a_{kl}+a_{lk}=0$ quels que soient k et l (donc en particulier $a_{kk}=0$)[4]. En tenant compte de la formule (13), on peut par conséquent énoncer le

Corollaire. *Si le système* (18) *est identique à son adjoint, on a la relation*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) \qquad \textit{pour } t \geqslant t_0 > 0\ ^{5}).$$

4. Etant donné un système d'équations différentielles (1), désignons par

$$\varphi_{k1}(\tau), \varphi_{k2}(\tau), \ldots, \varphi_{kn}(\tau), \qquad k=1,2,\ldots,n$$

un *système fondamental* des intégrales du système des équations différentielles (7). L'intégrale générale du système des équations différentielles (5) peut être écrite sous la forme

$$(17) \qquad v_k(\tau)=\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{\nu k}(\tau)\left(\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\Delta_\nu}{\Delta}\, d\tau + C_\nu\right), \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

où C_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ sont des constantes d'intégration,

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = C \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} \left[\sum_{k=1}^{n} \varrho_{kk} \cos(\alpha_{kk}+\omega)\, d\tau\right]\right)$$

(C étant une constante déterminée différente de 0) et Δ_ν s'obtient de Δ en y remplaçant les termes de la ν-ème colonne respectivement par $\Phi_k \cos(\psi_k-\varphi_k+\omega)$ pour $k=1,2,\ldots,n$. Ainsi

$$\Delta_\nu = A_{1\nu}\Phi_1 \cos(\psi_1-\varphi_1+\omega)+\ldots+A_{n\nu}\cos(\psi_n-\varphi_n+\omega),$$

où les coefficients $A_{k\nu}$ sont des déterminants du $(n-1)$-ème ordre formés de φ_{kl}.

[4]) Cf. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, Volume II, Chapitre XX, 4-ème édition, Paris 1924, p. 503-504.

[5]) Cette relation est bien connue; voir E. Goursat, loc. cit., p. 504,

Sous les hypothèses du théorème I, les fonctions φ_{lk} sont bornées pour $|t| \geqslant |t_0|$ et $\arg t=\omega=\text{const.}$; il en est donc de même des déterminants $A_{k\nu}$. En tenant compte des formules (17), le théorème I entraîne par conséquent le suivant:

Théorème II. *Si* $\arg t=\omega=\text{const.}$ *et*

$$\int_{|\tau_0|}^{\infty} |a_{kl}(t)|\, d|t| < +\infty, \qquad \int_{|\tau_0|}^{\infty} |f_k(t)|\, d|t| < +\infty$$

pour tout k *et* l, *chacune des intégrales* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ *du système* (1) *a le module borné pour* $|t| \to +\infty$.

5. On peut appliquer une autre méthode afin d'obtenir des conditions suffisantes pour que toute intégrale $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ du système des équations defférentielles (1) soit bornée à l'infini dans une direction déterminée. Posons[6]):

$$x_k=u_k+iv_k, \qquad a_{kl}=b_{kl}+ic_{kl}, \qquad f_k=g_k+ih_k,$$
$$t=\tau e^{\omega i}, \qquad \omega=\text{const.}, \qquad i=\sqrt{-1}.$$

Nous obtenons un système de $2n$ équations:

$$(18) \qquad u'_k+\sum_{l=1}^{n}(b_{kl}u_l-c_{kl}v_l)=g_k, \qquad v'_k+\sum_{l=1}^{n}(c_{kl}u_l+b_{kl}v_l)=h_k,$$
$$k=1,2,\ldots,n,$$

où les coefficients b_{kl} et c_{kl} sont des fonctions réelles de la variable réelle τ pour $\tau \geqslant \tau_0$.

J'ai démontré le théorème suivant[7]), complété ensuite par Rosenblatt[8]):

Etant donné un système d'équations différentielles (6) *où les coefficients* a_{kl} *sont des fonctions continues et réelles de la variable réelle* t *pour* $t \geqslant t_0$, *posons:*

$$R(t)=\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+\ldots+x_n^2(t)},$$

$$\alpha_{kk}=\int_{t_0}^{t} |a_{kk}(t)|\, dt, \qquad \beta_{kl}=\int_{t_0}^{t} |a_{kl}(t)+a_{lk}(t)|\, dt,$$

[6]) Cf. E. Picard, loc. cit., p. 386.

[7]) Z. Butlewski, *O całkach rzeczywistych równań różniczkowych zwyczajnych*, Wiadomości Matematyczne 44 (1937), p. 61-62 (en polonais).

[8]) Voir A. Rosenblatt, loc. cit., p. 724.

Alors:

1° $R(t_0)\exp\Big(-\sum_1^n \alpha_{kk} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^n \beta_{kl}\Big) \leqslant R(t) \leqslant R(t_0)\exp\Big(\sum_1^n \alpha_{kk} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^n \beta_{kl}\Big)$;

2° *Si les intégrales* $\int\limits_{t_0}^{\infty} |a_{kk}(t)|\,dt$ *et* $\int\limits_{t_0}^{\infty} |a_{kl}(t)+a_{lk}(t)|\,dt$ *sont finies, les valeurs absolues des fonctions* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, *qui sont des intégrales des équations* (6), *sont bornées pour* $t \to +\infty$.

Considérons maintenant le système (6) avec les coefficients a_{kl} qui sont des fonctions continues de la variable complexe t pour $|t| \geqslant t_0$ et $\arg t = \omega = \text{const}$. Dans ce cas, le système (18) prend la forme

$$u'_k + \sum_{l=1}^n (b_{kl}u_l - c_{kl}v_l) = 0, \qquad v'_k + \sum_{l=1}^n (c_{kl}u_l + b_{kl}v_l) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

En posant

$$R = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2},$$

$$\lambda_{kk} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} |b_{kk}(\tau)|\,d\tau, \quad \mu_{kl} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} |b_{kl}(\tau) + b_{lk}(\tau)|\,d\tau, \quad \nu_{kl} = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} |c_{kl}(\tau) - c_{lk}(\tau)|\,d\tau$$

et en appliquant mon théorème précité, on obtient le

Théorème III. 1° *Si* $\arg t = \omega = \text{const.}$ *et* $|t| \geqslant |t_0|$, *on a*

$$C\exp\Big(-\sum_1^n \lambda_{kk} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^n (\mu_{kl} + \nu_{kl})\Big) \leqslant R \leqslant C\exp\Big(\sum_1^n \lambda_{kk} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^n (\mu_{kl} + \nu_{kl})\Big).$$

2° *Si*

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} |b_{kk}(\tau)|\,d\tau < \infty, \quad \int\limits_{\tau_0}^{\infty} |b_{kl}(\tau) + b_{lk}(\tau)|\,d\tau < \infty \quad \textit{et} \quad \int\limits_{\tau_0}^{\infty} |c_{kl}(\tau) - c_{lk}(\tau)|\,d\tau < \infty,$$

toute intégrale $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ *du système* (6) *a le module borné pour* $\arg t = \omega = \text{const.}$ *et* $|t| \to +\infty$.

Soit

$$\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{k2n} \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n \tag{20}$$

un *système fondamental* des intégrales du système (19). L'intégrale générale $\overline{\varphi}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ du système (18) peut s'écrire sous la forme

$$\overline{\varphi}_k = \sum_{\nu=1}^{2n} \varphi_{\nu k}(\tau)\Big(\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\Delta_\nu}{\Delta}\,d\tau + C_\nu\Big), \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{21}$$

où C_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 2n)$ sont des constantes d'intégration,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1\,2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{2n1} & \cdots & \varphi_{2n2n} \end{vmatrix} = C\exp\Big[-2\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \sum_{k=1}^n b_{kk}(\tau)\,d\tau\Big]$$

(C étant une constante déterminée différente de 0) et Δ_ν s'obtient de Δ en y remplaçant la ν-ème colonne par les termes $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n$. Alors:

$$\Delta_\nu = A_{1\nu}\,g_1 + \ldots + A_{n\nu}g_\nu + A_{n+1\nu}h_1 + \ldots + A_{2n\nu}h_n,$$

où les coefficients sont des déterminants du $(2n-1)$-ème ordre formés de φ_{kl}.

En tenant compte du théorème III 2° et des formules (21), nous pouvons énoncer le

Théorème IV. *Si* $\arg t = \omega = \text{const.}$, $\tau = |t|$, $\tau_0 = |t_0|$ *et toutes les intégrales*

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} |b_{kk}(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_{\tau_0}^{\infty} |b_{kl}(\tau) + b_{lk}(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_{\tau_0}^{\infty} |c_{kl}(\tau) - c_{lk}(\tau)|\,d\tau,$$

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} |g_k(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_{\tau_0}^{\infty} |h_k(\tau)|\,d\tau$$

sont finies, le module de toute intégrale $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ *du système des équations* (1) *est borné pour* $|t| \to \infty$.

(Reçu par la Rédaction le 3. 4. 1947).