Sur une propriété des ensembles ordonnés[1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

F. Hausdorff a démontré que tout ensemble ordonné peut être représenté comme une puissance à base 3[2]). Le but de cette Note est de démontrer qu'on peut remplacer le nombre 3 par le nombre 2. Je prouverai notamment que *tout ensemble ordonné est semblable à un ensemble de suites transfinies formées de nombres* 0 *et* 1 *et ordonnées d'aprés le principe de premières différences*. Plus précisément, je démontrerai les théorèmes:

Théorème I. *ν étant un nombre ordinal donné quelconque, tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$ est semblable à un ensemble de suites transfinies de type ω_ν formées de nombres* 0 *et* 1 *et ordonnées d'après le principe de premières différences*[3]).

Théorème II. *Dans le théorème I le nombre ω_ν ne peut pas être remplacé par un nombre ordinal (transfini) plus petit.*

Je démontrerai d'abord deux lemmes concernant les suites transfinies dyadiques qui par eux-mêmes présentent quelque intérêt.

---

[1]) Le résumé de cette Note a paru sous le même titre dans les Acta de la Pontificia Academia Scientiarum Vol. **4**, pp. 207-208.

[2]) *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 182. „Wichtig is — écrit F. Hausdorff — ... dass man jede geordnete Menge als lexikographisch geordnete Menge von Komplexen mit wohlgeordnetem Argument und wohlgeordneten Faktoren darstellen kann (sogar schon als Teilmenge einer Potenz mit der Basis 3 und einer regulären Anfangszahl als Argument)".

La condition que l'argument de cette puissance soit un nombre initial régulier n'est pas essentielle (tout au moins si l'on n'impose pas des conditions supplémentaires) puisqu'on peut toujours augmenter le nombre de termes d'une suite transfinie par l'adjonction des termes $=0$.

[3]) Pour $\nu=1$ j'ai démontré ce théorème (sans l'énoncer explicitement) dans Fund. Math. **18**, pp. 281-284. Notre démonstration est cependant basée sur une idée différente; le lemme I (l. c., p. 282) n'est pas valable p. e. pour $\nu=\omega$.

Lemme I. *Soit ϑ un nombre ordinal transfini donné quelconque* (pas nécessairement de seconde espèce) *et soit U_ϑ l'ensemble de toutes les suites transfinies de type ϑ formées de nombres* 0 *et* 1 *et ordonnées d'après le principe de premières différences.* Thèse: *L'ensemble U_ϑ est dépourvu de lacunes.*

Démonstration. Soit $[A,B]$ une coupure de l'ensemble ordonné U_ϑ (c.-à-d. une décomposition de U_ϑ en deux sous-ensembles non vides A et B, tels que tout élément de A précède dans U_ϑ tout élément de B). Nous définirons, pour $\xi<\vartheta$, les nombres c_ξ par l'induction transfinie comme il suit.

Posons $c_1=1$ s'il existe dans A des suites dont le premier terme est $=1$, et dans le cas contraire posons $c_1=0$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\vartheta$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres, c_ξ, où $\xi<\alpha$. Posons $c_\alpha=1$ s'il existe dans A une suite $\{x_\xi\}_{\xi<\vartheta}$, telle que $x_\xi=c_\xi$ pour $\xi<\alpha$ et $x_\alpha=1$, et posons $c_\alpha=0$ si une telle suite n'existe pas dans A.

La suite $c=\{c_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ est ainsi définie par l'induction transfinie.

Soit maintenant $x=\{x_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ une suite donnée quelconque de l'ensemble A. Si l'on avait dans U_ϑ, $c\prec x$, il existerait un indice $\alpha<\vartheta$ tel que

$$c_\xi=x_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha, \quad \text{et} \quad c_\alpha=0 \quad \text{et} \quad x_\alpha=1,$$

ce qui est, comme on voit sans peine, incompatible avec la définition du nombre c_α. On a donc soit $x=c$, soit $x\prec c$, donc ou bien c est le dernier élément de A, ou bien $c\in B$. Or, dans ce dernier cas je dis qu'il n'existe aucune suite y, telle que $y\in B$ et $y\prec c$. En effet, admettons que $y=\{y_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ est une telle suite. D'après $y\prec c$ il existe un nombre ordinal $\alpha<\vartheta$, tel que

$$(1) \qquad y_\xi=c_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha, \quad \text{et} \quad y_\alpha=0 \quad \text{et} \quad c_\alpha=1.$$

D'après $c_\alpha=1$ et la définition du nombre c_α il existe une suite $x\in A$ telle que

$$x_\xi=c_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha, \quad \text{et} \quad x_\alpha=1,$$

ce qui donne, d'après (1):

$$x_\xi=y_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha, \quad \text{et} \quad x_\alpha=1,\ y_\alpha=0,$$

et ceci est impossible, puisque $x\in A$, $y\in B$ et $x\prec y$. On ne peut donc avoir $y\prec c$ pour une suite $y\in B$. Par conséquent, si c appartient à B, c'est le premier élément de cet ensemble.

La coupure $[A,B]$ n'admet donc pas de lacune, c. q. f. d.

Lemme II. *Soit U_ϑ le même ensemble que dans le lemme I.* Thèse: *U_ϑ ne contient aucun sous-ensemble bien ordonné (dans U_ϑ) de puissance $>\bar{\vartheta}$.*

Démonstration. Supposons, par contre, que l'ensemble U_ϑ contienne un sous-ensemble bien ordonné (dans U_ϑ) de puissance $>\bar{\vartheta}$, soit $E=\{x^\alpha\}_{\alpha<\vartheta_1}$, où $\bar{\vartheta}_1>\bar{\vartheta}$ et où $x^\alpha=\{x_\xi^\alpha\}_{\xi<\vartheta}$, pour $\alpha<\vartheta_1$.

$x=\{x_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ et $y=\{y_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ étant deux suites différentes de l'ensemble U_ϑ, nous désignerons par $\varphi(x,y)$ le plus petit nombre ordinal ξ, tel que $x_\xi\neq y_\xi$. On a donc, pour $x\in U_\vartheta$, $y\in U_\vartheta$, $x\neq y$: $\varphi(x,y)<\vartheta$.

Comme $x^\alpha\prec x^{\alpha+1}$ pour $\alpha+1<\vartheta_1$, on a $\varphi(x^\alpha,x^{\alpha+1})<\vartheta$ pour $\alpha+1<\vartheta_1$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux α tels que $\alpha+1<\vartheta_1$ étant de puissance $\bar{\vartheta}_1$, et celui de tous les nombres ordinaux $<\vartheta$ étant de puissance $\bar{\vartheta}<\bar{\vartheta}_1$, il existe (vu que $\bar{\vartheta}\cdot\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}$) un nombre ordinal $\lambda<\vartheta$ pour lequel l'ensemble $\underset{\alpha}{E}[\alpha+1<\vartheta_1,\ \varphi(x^\alpha,x^{\alpha+1})=\lambda]$ est de puissance $>\bar{\vartheta}$.

Il existe donc une suite transfinie croissante de puissance $>\bar{\vartheta}$, $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\gamma}$, où $\bar{\gamma}>\bar{\vartheta}$, de nombres ordinaux $\alpha_\eta<\vartheta_1$, telle que

$$\varphi(x^{\alpha_\eta},x^{\alpha_\eta+1})=\lambda \quad \text{pour} \quad \eta<\gamma,$$

et nous pouvons évidemment supposer que γ est un nombre ordinal initial (c.-à-d. $\bar{\xi}<\bar{\gamma}$ pour $\xi<\gamma$).

Posons encore $\beta_\eta=\alpha_\eta+1$ pour $\eta<\gamma$; nous aurons, pour $\eta<\gamma$, $\alpha_\eta<\beta_\eta$ et, pour $\eta<\zeta<\gamma$: $\alpha_\eta<\alpha_\zeta$, et aussi $\alpha_\eta+1\leqslant\alpha_\zeta$ et $\alpha_\eta\leqslant\beta_\eta$. Par conséquent:

Il existe un nombre ordinal $\lambda<\vartheta$ pour lequel il existe deux suites transfinies $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\gamma}$ et $\{\beta_\eta\}_{\eta<\gamma}$ de type γ, où γ est un nombre initial $>\vartheta$, formées de nombres ordinaux et telles que

$$(2)\qquad \alpha_\eta<\beta_\eta\leqslant\alpha_\zeta \quad \text{pour} \quad \eta<\zeta<\gamma$$

et

$$(3)\qquad \varphi(x^{\alpha_\eta},x^{\beta_\eta})=\lambda \quad \text{pour} \quad \eta<\gamma.$$

Désignons par λ le plus petit nombre ordinal λ jouissant de ces propriétés.

D'après (2), on a, pour $\eta<\gamma$, $x^{\alpha_\eta}<x^{\beta_\eta}$, donc, d'après (3)

$$(4)\qquad x_\lambda^{\alpha_\eta}=0,\quad x_\lambda^{\beta_\eta}=1, \quad \text{pour} \quad \eta<\gamma.$$

Or, d'après (2), $\beta_\eta\leqslant\alpha_{\eta+1}$, et, comme, d'après (4), $x^{\alpha_{\eta+1}}=0$, on trouve

$$(5)\qquad x_\lambda^{\beta_\eta}=1,\quad x_\lambda^{\alpha_{\eta+1}}=0 \quad \text{pour} \quad \eta<\gamma,$$

donc $\beta_\eta\neq\alpha_{\eta+1}$, et (vu que $\beta_\eta\leqslant\alpha_{\eta+1}$):

$$(6)\qquad \beta_\eta<\alpha_{\eta+1} \quad \text{pour} \quad \eta<\gamma,$$

d'où $x^{\beta_\eta}\prec x^{\alpha_{\eta+1}}$ et, d'après (5), comme on voit sans peine

$$\varphi(x^{\beta_\eta},x^{\alpha_{\eta+1}})<\lambda \quad \text{pour} \quad \eta<\gamma.$$

L'ensemble de tous les nombres ordinaux $\eta<\gamma$ étant de puissance $\bar{\gamma}$ et celui de tous les nombres ordinaux $<\lambda$ étant (vu que $\lambda<\vartheta$) de puissance $\leqslant\bar{\vartheta}$, il existe (vu que $\bar{\vartheta}\cdot\bar{\vartheta}<\bar{\gamma}$) un nombre ordinal $\lambda_1<\lambda$ pour lequel l'ensemble $\underset{\eta}{E}[\eta<\gamma,\ \varphi(x^{\beta_\eta},x^{\alpha_{\eta+1}})=\lambda_1]$ est de puissance $>\bar{\vartheta}$. Il existe donc une suite transfinie croissante de nombres ordinaux $<\gamma$, $\{\eta_\mu\}_{\mu<\gamma_1}$, où $\bar{\gamma}_1>\bar{\vartheta}$, telle que

$$(7)\qquad \varphi(x^{\beta_{\eta_\mu}},x^{\alpha_{\eta_\mu+1}})=\lambda_1 \quad \text{pour} \quad \mu<\gamma_1.$$

Posons

$$\alpha'_\mu=\beta_{\eta_\mu},\quad \beta'_\mu=\alpha_{\eta_\mu+1} \quad \text{pour} \quad \mu<\gamma_1;$$

d'après (6) et (2) nous aurons (vu que $\beta_\eta=\alpha_\eta+1$ et la suite $\{\eta_\mu\}_{\mu<\gamma_1}$ étant croissante):

$$\alpha'_\mu<\beta'_\mu\leqslant\alpha'_\nu \quad \text{pour} \quad \mu<\nu<\gamma_1,$$

et, d'après (7)

$$\varphi(x^{\alpha'_\mu},x^{\beta'_\mu})=\lambda_1 \quad \text{pour} \quad \mu<\gamma_1,$$

contrairement à la définition du nombre λ.

L'hypothèse que le lemme II n'est pas vrai implique donc une contradiction.

Démonstration du théorème I.

Soit E un ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$, et soit

$$(8)\qquad u_1,u_2,\ldots,u_\omega,u_{\omega+1},\ldots,u_\xi,\ldots \qquad (\xi<\omega)$$

une suite transfinie de type ω_ν formée de tous les éléments de E. Nous définirons, par l'induction transfinie, une suite transfinie double de nombres 0 et 1, $\{a_\eta^\xi\}$ $(\xi<\omega_\nu,\ \eta<\omega_\nu)$ comme il suit.

Posons $a_1^1=a_2^1=a_3^1=0$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\omega_\nu$, et supposons que nous ayons déjà défini tous les nombres $a_{2\eta}^\xi$ et $a_{2\eta+1}^\xi$ pour $\xi<\alpha$ et $\eta<\alpha$. S'il n'existe aucun élément u_ξ de E, tel que $u_\xi \precsim u_\alpha$ et $\xi<\alpha$, posons $a_{2\eta}^\alpha=a_{2\eta+1}^\alpha=0$ pour $\eta<\alpha$. Si des tels éléments u_ξ de E existent, soit $A_{2\alpha}$ l'ensemble des suites $\{a_\eta^\xi\}_{\eta<2\alpha}$ correspondantes. D'après le lemme I, il existe dans $U_{2\alpha}$ une suite qui est la première ne précédant aucune suite de $A_{2\alpha}$; soit $\{a_\eta^\alpha\}_{\eta<2\alpha}$ cette suite. (S'il n'existe pas de suites de $U_{2\alpha}$ qui suivent toute suite de $A_{2\alpha}$, on aura évidemment $a_\eta^\alpha=1$ pour $\eta<2\alpha$). Posons ensuite, pour $\xi<\alpha$, $a_{2\alpha}^\xi=a_{2\alpha+1}^\xi=0$ si $u_\xi\precsim u_\alpha$ et $a_{2\alpha}^\xi=a_{2\alpha+1}^\xi=1$, si $u_\xi\succsim u_\alpha$. Enfin posons $a_{2\alpha}^\alpha=0$ et $a_{2\alpha+1}^\alpha=1$. Les nombres $a_{2\eta}^\xi$ et $a_{2\eta+1}^\xi$ sont ainsi définis pour $\xi\leqslant\alpha$ et $\eta\leqslant\alpha$.

Les nombres a_η^ξ, où $\xi<\omega_\nu$ et $\eta<\omega_\nu$ sont ainsi définis par l'induction transfinie.

Soit

$$a^\xi=\{a_\eta^\xi\}_{\eta+\omega_\nu} \quad \text{pour} \quad \xi<\omega_\nu; \quad T=\{a^\xi\}_{\xi<\omega_\nu}$$

et ordonnons l'ensemble T d'après le principe de premières différences. Je dis que $E\simeq T$.

Je démontrerai notamment que, pour $\alpha<\beta<\omega_\nu$:

1° *la formule* $u_\alpha\precsim u_\beta$ *entraîne* $a^\alpha\precsim a^\beta$.

D'après la définition de la suite double $\{a_\eta^\xi\}$, la suite $\{a_\eta^\beta\}_{\eta<2\beta}$ ne précède pas la suite $\{a_\eta^\alpha\}_{\eta<2\beta}$; on a donc ou bien $a^\alpha<a^\beta$ ou bien

$$(9) \qquad a_\eta^\alpha=a_\eta^\beta \quad \text{pour} \quad \eta<2\beta.$$

Or, comme $u_\alpha\precsim u_\beta$ et $\alpha<\beta$, on a d'après la définition de $a_{2\beta}^\alpha$ et $a_{2\beta+1}^\alpha$, $a_{2\beta}^\alpha=a_{2\beta+1}^\alpha=0$ et, comme $a_{2\beta}^\beta=0$ et $a_{2\beta+1}^\beta=1$, on trouve encore, dans le cas (9), $a^\alpha\precsim a^\beta$.

2° *la formule* $u_\beta\precsim u_\alpha$ *entraîne* $a^\beta\precsim a^\alpha$.

Admettons que ça ne soit pas le cas. Il existe alors, comme on voit sans peine, deux nombres ordinaux, α et β $\alpha<\beta<\omega_\nu$ qui sont les plus petits tels que

$$(10) \qquad u_\beta\precsim u_\alpha$$

et

$$(11) \qquad a^\alpha\leqq a^\beta,$$

donc les formules $\zeta<\alpha$ et $u_\zeta\precsim u_\alpha$ entraînent toujours la formule

$$(12) \qquad a^\zeta\precsim a^\alpha$$

et les formules $\alpha<\zeta<\beta$ et $u_\zeta<u_\alpha$ entraînent encore la formule (12).

D'après (10) nous pouvons donc dire que les formules

$$(13) \qquad \zeta<\beta \quad \text{et} \quad u_\zeta\precsim u_\beta$$

entraînent la formule

$$(14) \qquad a^\zeta\leqq a^\alpha.$$

Or, d'après la définition de la suite double $\{a_\eta^\xi\}$, on a ou bien $a_{2\eta}^\beta=a_{2\eta+1}^\beta=0$ pour $\eta<\beta$, et, dans ce cas, évidemment

$$(15) \qquad \{a_\eta^\beta\}_{\eta<2\beta}\leqq\{a^\alpha\}_{\eta<2\beta}$$

(dans $U_{2\beta}$), ou bien la suite $\{a_\eta^\beta\}_{\eta<2\beta}$ est la première dans $U_{2\beta}$ qui ne précède aucune suite de $A_{2\beta}$. Vu la définition de l'ensemble $A_{2\beta}$, les formules (13) entraînant la formule (14), on trouve

$$\{a_\eta^\zeta\}_{\eta<2\beta}\leqq\{a_\eta^\alpha\}_{\eta<2\beta} \quad \text{pour} \quad \{a_\eta^\zeta\}_{\eta<2\beta}\in A_{2\beta};$$

la suite $\{a_\eta^\alpha\}_{\eta<2\beta}$ est donc une des suites de $U_{2\beta}$ qui ne précèdent aucune suite de $A_{2\beta}$; la suite $\{a_\eta^\beta\}_{\eta<2\beta}$ étant (dans $U_{2\beta}$) la première de telles suites, on trouve encore la formule (15). Comme $\alpha<\beta$ et, d'après (10), on a, vu la définition de $a_{2\beta}^\eta$:

$$(16) \qquad a_{2\beta}^\alpha=1 \quad \text{et} \quad a_{2\beta}^\beta=0.$$

Les formules (15) et (16) prouvent que

$$a^\beta\precsim a^\alpha,$$

contrairement à (11).

La proposition 2° est donc vraie. On a (d'après 1° et 2°) $E\simeq T$, et le théorème I est démontré.

Démonstration du théorème II.

Admettons que le théorème II soit faux, c.-à-d. que (pour un nombre ordinal ν donné) on puisse remplacer dans le théorème I le nombre ω_ν par un nombre ordinal $\vartheta<\omega_\nu$. En particulier, l'ensemble bien ordonné de type ω_ν serait semblable à un sous-ensemble de l'ensemble U_ϑ (ordonné d'après le principe de premières différences). Or, comme $\overline{\omega}_\nu>\overline{\vartheta}$ (puisque $\vartheta<\omega_\nu$ et ω_ν est le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_\nu$), cela contredit le lemme II.

Le théorème II est ainsi démontré.

L'ensemble U_{ω_ν} étant évidemment de puissance $2^{\aleph_\nu}$, il résulte de notre théorème I qu'il existe, pour tout nombre ordinal ν, un ensemble ordonné de puissance $2^{\aleph_\nu}$ qui contient, pour tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$ un sous-ensemble semblable. Or, je démontrerai le

Théorème III. *Si ν est un nombre ordinal de première espèce, $\nu=\mu+1$, il existe un ensemble ordonné de puissance $2^{\aleph_\mu}$* (d'éléments de U_{ω_ν}) *qui contient, pour tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$ un sous-ensemble semblable.*

Démonstration. Soit $\nu=\mu+1$, où μ est un nombre ordinal donné $\geqslant 0$, et désignons par H_ν l'ensemble de toutes les suites $\{a_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$ de U_{ω_ν} pour lesquelles il existe un indice (variable) $\lambda<\omega_\nu$ tel que

(17) $$a_\lambda=1 \quad \text{et} \quad a_\eta=0 \quad \text{pour} \quad \lambda<\eta<\omega_\nu.$$

Désignons respectivement par P_1^ν et P_2^ν les deux propriétés suivantes d'un ensemble ordonné U:

P_1^ν. E étant un sous-ensemble de U de puissance $<\aleph_\nu$, il existe deux éléments a et b de U tels que

(18) $$a\precsim c\precsim b \quad \text{pour} \quad c\in E.$$

P_2^ν. E_1 et E_2 étant deux sous-ensembles de U tels que $\overline{\overline{E}}_1<\aleph_\nu$, $\overline{\overline{E}}_2<\aleph_\nu$ et que (dans U)

(19) $$a\precsim b \quad \text{pour} \quad a\in E_1,\ b\in E_2,$$

il existe un élément c de U tel que

(20) $$a\precsim c\precsim b \quad \text{pour} \quad a\in E_1,\ b\in E_2$$

(ainsi P_1^ν veut dire que l'ensemble U n'est ni coïnitial ni confinal avec un sous-ensemble de puissance $<\aleph_\nu$ et P_2^ν veut dire que U ne contient pas de sous-ensembles consécutifs de puissance $<\aleph_\nu$).

On appelle, d'après F. Hausdorff, *ensemble η_ν* tout ensemble ordonné jouissant des propriétés P_1^ν et P_2^ν.

Je démontrerai que l'ensemble H_ν est un ensemble η_ν.

Soit, en effet, E un sous-ensemble de H_ν de puissance $<\aleph_\nu$, donc, vu que $\nu=\mu+1$, de puissance $\leqslant\aleph_\mu$. Comme $E\subset H_\nu\subset U_{\omega_\nu}$ nous pouvons poser $E=\{a^\xi\}_{\xi<\varphi}$, où $\overline{\varphi}\leqslant\aleph_\mu$, et $a^\xi=\{a_\eta^\xi\}_{\eta<\omega_\nu}$. Comme $a^\xi\in H_\nu$ pour $\xi<\varphi$, il existe, pour tout $\xi<\varphi$, un nombre ordinal $\lambda_\xi<\omega_\nu$ tel qu'on a

$$a_{\lambda_\xi}^\xi=1 \quad \text{et} \quad a_\eta^\xi=0 \quad \text{pour} \quad \lambda_\xi<\eta<\omega_\nu.$$

L'ensemble de tous les nombres λ_ξ, où $\xi<\varphi$ étant de puissance $\overline{\varphi}\leqslant\aleph_\mu$, il existe un nombre ordinal $\lambda<\omega_{\mu+1}=\omega_\nu$ tel que

$$\lambda_\xi<\lambda \quad \text{pour} \quad \xi<\varphi.$$

Posons

$$a_\eta=0 \quad \text{pour} \quad \eta\neq\lambda,\ a_\lambda=1,$$
$$b_\eta=1 \quad \text{pour} \quad \eta\leqslant\lambda,\ b_\eta=0 \quad \text{pour} \quad \lambda<\eta<\omega_\nu,$$
$$a=\{a_\eta\}_{\eta<\omega_\nu},\quad b=\{b_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}.$$

On a évidemment $a\in H_\nu$, $b\in H_\nu$ et la formule (18).

Soient maintenant E_1 et E_2 deux sous-ensembles de H_ν de puissance $<\aleph_\nu$, donc $\leqslant\aleph_\mu$, tels qu'on ait la formule (19).

L'ensemble U_{ω_ν} n'admettant pas, d'après le lemme I, de lacunes, il existe, comme on voit sans peine, une suite de U_{ω_ν}, soit $p=\{p_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$, qui est la première (dans U_{ω_ν}) telle que

(21) $$a\leqq p \quad \text{pour} \quad a\in E_1.$$

On aura donc, d'après (19):

(22) $$p\leqq b \quad \text{pour} \quad b\in E_2.$$

Si on avait $p\in E_2$, on aurait, d'après $E_2\subset H_\nu$, $p\in H_\nu$ et il existerait un indice $\varrho<\omega_\nu$, tel que

$$p_\varrho=1 \quad \text{et} \quad p_\eta=0 \quad \text{pour} \quad \varrho<\eta<\omega_\nu.$$

Posons

$$p'_\eta=p_\eta \quad \text{pour} \quad \eta<\varrho,\ p'_\varrho=0 \quad \text{et} \quad p'_\eta=1 \quad \text{pour} \quad \varrho<\eta<\omega_\nu.$$

On a évidemment $p'\precsim p$ dans U_{ω_ν} et il n'existe dans U_{ω_ν} aucune suite u, telle que $p'\precsim u\precsim p$: d'après (21), et vu que $p\in E_2$, on aurait donc

$$a\leqq p' \quad \text{pour} \quad a\in E_1,$$

contrairement à la définition de la suite p.

On a donc p non $\in E_2$, et d'après (22):

(23) $$p\precsim b \quad \text{pour} \quad b\in E_2.$$

Comme $\overline{\overline{E}}_1\leqslant\aleph_\mu$, $\overline{\overline{E}}_2\leqslant\aleph_\mu$, nous pouvons poser $E_1=\{a^\xi\}_{\xi<\varphi_1}$, où $\overline{\varphi}_1\leqslant\aleph_\mu$, $E_2=\{b^\xi\}_{\xi<\varphi_2}$, où $\overline{\varphi}_2\leqslant\aleph_\mu$. Comme $E_1\subset H_\nu$ et $E_2\subset H_\nu$, nous trouvons, comme auparavant, un nombre ordinal $\lambda<\omega_\nu$ tel que

(24) $$a_\eta^\xi=0 \quad \text{pour} \quad \xi<\varphi_1,\ \lambda\leqslant\eta<\omega_\nu,$$

et

(25) $$b_\eta^\xi=0 \quad \text{pour} \quad \xi<\varphi_2,\ \lambda\leqslant\eta<\omega_\nu.$$

Posons

(26) $c_\eta = p_\eta$ pour $\eta < \lambda$, $c_\lambda = 1$, $c_\eta = 0$ pour $\lambda < \eta < \omega_\nu$,

et $c = \{c_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$; évidemment $c \in H_\nu$. Soient $a = \{a_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$ et $b = \{b_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$ deux suites transfinies, $a \in E$, $b \in E_2$; d'après (21) et (23) on a

$$a \leqq p \prec b,$$

ce qui donne, d'après (25), comme on voit tout de suite (dans U_λ)

(27) $$\{a_\eta\}_{\eta<\lambda} \leqq \{p_\eta\}_{\eta<\lambda} \prec \{b_\eta\}_{\eta<\lambda}.$$

Or, d'après (24) on a $a_\lambda = 0$ et, d'après (26) et (27) on trouve

$$\{a_\eta\}_{\eta<\lambda} \prec \{c_\eta\}_{\eta<\lambda},$$

donc aussi

$$a \prec c.$$

Comme $p \prec b$, et d'après (25), il existe un nombre ordinal $\varkappa < \lambda$, tel que

$$p_\eta = b_\eta \quad \text{pour} \quad \eta < \varkappa, \; p_\varkappa = 0, \; b_\varkappa = 1,$$

donc, d'après (26) (comme $\varkappa < \lambda$):

$$c_\eta = b_\eta \quad \text{pour} \quad \eta < \varkappa, \; c_\varkappa = p_\varkappa = 0, \; b_\varkappa = 1,$$

et (dans $U_{\varkappa+1}$):

$$\{c_\eta\}_{\eta\leqq\varkappa} \prec \{b_\eta\}_{\eta\leqq\varkappa}$$

ce qui donne

$$c \prec b.$$

On a donc $a \prec c \prec b$, et l'ensemble H_ν jouit de la propriété P_2^ν.

Nous avons démontré ainsi que l'ensemble H_ν est un ensemble η_ν.

Or, F. Hausdorff a démontré que *tout ensemble η_ν contient, pour tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$, un sous-ensemble semblable*[4]).

En effet, soit E un ensemble ordonné de puissance $\aleph_\nu$ et soit (8) une suite transfinie de type ω_ν formée de tous les éléments de E. Or, soit H un ensemble η_ν et soit

(28) $$h_1, h_2, \ldots, h_\omega, h_{\omega+1}, \ldots, h_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie (de type φ) formée de tous les éléments de H.

[4]) l. c., pp. 181-182.

Posons $f(u_1) = h_1$. Soit α un nombre ordinal donné, $1 < \alpha < \omega_\nu$, et supposons que nous ayons déjà défini tous les éléments $f(u_\xi)$ pour $\xi < \alpha$ et qu'on ait $f(u_\xi) \prec f(u_\eta)$, si $\xi < \alpha$, $\eta < \alpha$ et $u_\xi \prec u_\eta$.

L'ensemble de ces éléments est de puissance $\overline{\overline{\alpha}} < \aleph_\nu$ (puisque $\alpha < \omega_\nu$). Nous définissons $f(u_\alpha)$ comme le premier terme h de la suite (28) qui, pour tout indice $\xi < \alpha$, a les mêmes relations d'ordre dans H par rapport à $f(u_\xi)$ que u_α a dans E par rapport à u_ξ. Il résulte des propriétés P_1^ν et P_2^ν de H qu'un tel élément h existe toujours dans la suite (28). Les éléments $f(u_\xi)$, où $\xi < \omega_\nu$ sont ainsi définis par l'induction transfinie, et on voit sans peine que leur ensemble est semblable à l'ensemble E.

Calculons maintenant la puissance de l'ensemble H_ν. Vu la définition de H_ν, on a évidemment

(29) $$H_\nu \subset \sum_{\vartheta<\omega_\nu} T_\vartheta,$$

où T_ϑ désigne l'ensemble de toutes les suites $\{a_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$ de U_{ω_ν}, où $a_\eta = 0$ pour $\vartheta \leqslant \eta < \omega_\nu$. Or, on a

$$\overline{\overline{T_\vartheta}} = 2^{\overline{\overline{\vartheta}}} \leqslant 2^{\aleph_\mu},$$

puisque, d'après $\vartheta < \omega_\nu = \omega_{\mu+1}$, on a $\overline{\overline{\vartheta}} \leqslant \aleph_\mu$. Vu (29) on a:

$$\overline{\overline{H_\nu}} \leqslant \aleph_\nu \cdot 2^{\aleph_\mu} \leqslant 2^{\aleph_\mu} \cdot 2^{\aleph_\mu} = 2^{\aleph_\mu},$$

puisque $\aleph_\nu = \aleph_{\mu+1} \leqslant 2^{\aleph_\mu}$.

D'autre part, on a évidemment $\overline{\overline{H_\nu}} \geqslant 2^{\aleph_\mu}$, puisque toute suite $\{a_\eta\}_{\eta<\omega_\nu}$ de U_{ω_ν}, où $a_{\omega_\mu} = 1$ et $a_\eta = 0$ pour $\omega_\mu < \xi < \omega_\nu$, appartient à H_ν. On a

$$\overline{\overline{H_\nu}} = 2^{\aleph_\mu}.$$

L'ensemble H_ν satisfait donc aux conditions du théorème III qui se trouve ainsi démontré. En même temps nous avons démontré le:

Théorème IV. *Il existe, pour tout nombre ordinal $\mu \geqslant 0$, un ensemble $\eta_{\mu+1}$ de puissance $2^{\aleph_\mu}$.*

Or, je démontrerai le

Théorème V. *Tout ensemble $\eta_{\mu+1}$ est de puissance $\geqslant 2^{\aleph_\mu}$* (pour tout nombre ordinal $\mu \geqslant 0$).

Démonstration. Soit μ un nombre ordinal donné $\geqslant 0$. Il suffira de démontrer que si H est un ensemble $\eta_{\mu+1}$, H contient un sous-ensemble semblable à l'ensemble U_{ω_μ} (qui est de puissance $2^{\aleph_\mu}$).

Soit donc H un ensemble $\eta_{\mu+1}$ et soit (28) une suite transfinie (de type φ) formée de tous les éléments de H, et

$$a^1, a^2, \ldots, a^\omega, a^{\omega+1}, \ldots, a^\xi, \ldots \qquad (\xi<\psi)$$

une suite transfinie (de type ψ) formée de toutes les suites de U_{ω_μ}.

Posons $g(a^1)=h_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\psi$, et supposons que nous ayons déjà défini tous les éléments $g(a^\xi)$, pour $\xi<\alpha$, et que $g(a^\xi)\prec g(a^\eta)$ dans H, si $\xi<\alpha$, $\eta<\alpha$ et $a^\xi<a^\eta$ dans U_{ω_μ}. Soit M_α l'ensemble de toutes les suites a^ξ où $\xi<\alpha$ et $a^\xi\prec a^\alpha$ dans U_{ω_μ}, et soit N_α l'ensemble de toutes les suites a^ξ, où $\xi<\alpha$ et $a^\xi\succ a^\alpha$ dans U_{ω_μ}. Si l'ensemble ordonné M_α (comme dans U_{ω_μ}) n'est pas vide, il existe, comme on le sait, un sous-ensemble bien ordonné de M_α, soit M'_α qui est confinal avec M_α. Pareillement, si $N_\alpha\neq 0$, il existe un sous-ensemble bien ordonné de N_α, soit N'_α, coïnitial avec N_α. D'après le lemme II (et vu que $M'_\alpha\subset U_{\omega_\mu}$ et $N'_\alpha\subset U_{\omega_\mu}$), on a $\overline{\overline{M'_\alpha}}\leqslant\aleph_\mu$ et $\overline{\overline{N'_\alpha}}\leqslant\aleph_\mu$. On aura donc aussi $\overline{\overline{g(M'_\alpha)}}\leqslant\aleph_\mu$ et $\overline{\overline{g(N'_\alpha)}}\leqslant\aleph_\mu$. Or, si $h'\in g(M'_\alpha)$, $h''\in g(N'_\alpha)$, il existe un $\xi<\alpha$ et un $\eta<\alpha$, tels que $h'=g(a^\xi)$, $h''=g(a^\eta)$ et $a^\xi\in M'_\alpha$, $a^\eta\in N'_\alpha$, donc $a^\xi\prec a^\alpha\prec a^\eta$ et $a^\xi\prec a^\eta$ (dans U_{ω_μ}), ce qui donne, d'après notre hypothèse (vu que $\xi<\alpha$ et $\eta<\alpha$): $g(a^\xi)\prec g(a^\eta)$, c.-à-d. $h'\prec h''$ (dans H). On a donc, dans H, $g(M'_\alpha)\prec g(N'_\alpha)$ et, d'après la propriété $P_2^{\mu+1}$ de H il existe un élément h de H, tel que $g(M'_\alpha)\prec h\prec g(N'_\alpha)$. Le premier élément h de la suite (28) remplissant cette condition sera, par définition, l'élément $g(a^\alpha)$.

Dans le cas, où l'un des ensembles M_α et N_α est vide, la définition de $g(a^\alpha)$ doit être modifiée d'une façon évidente (avec recours à la propriété $P_1^{\mu+1}$ de H au lieu de la propriété $P_2^{\mu+1}$).

On voit sans peine que, pour $\xi<\alpha$, $g(a^\alpha)$ aura dans H les mêmes relations d'ordre par rapport à $g(a^\xi)$ que a^α a dans U_{ω_μ} par rapport à a^ξ. On a donc $g(a^\alpha)\neq g(a^\xi)$ pour $\xi<\alpha$.

La suite transfinie $\{g(a^\xi)\}_{\xi<\psi}$ est ainsi définie par l'induction transfinie et leurs termes sont des éléments distincts de H. Comme $\overline{\psi}=\overline{\overline{U_{\omega_\mu}}}=2^{\aleph_\mu}$, on trouve $\overline{\overline{H}}\geqslant 2^{\aleph_\mu}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en même temps nous avons démontré que *tout ensemble $\eta_{\mu+1}$ contient un sous-ensemble ordonné de type $2^{\omega_\mu^*}$* (c.-à-d. de même type que U_{ω_μ}).

Les théorèmes IV et V nous donnent tout de suite le

Théorème VI. *μ étant un nombre ordinal donné $\geqslant 0$, la plus petite puissance des ensembles $\eta_{\mu+1}$ est $2^{\aleph_\mu}$.*

Il en résulte le

Corollaire. *Soit μ un nombre ordinal donné $\geqslant 0$. Pour qu'il existe un ensemble $\eta_{\mu+1}$ de puissance $\aleph_{\mu+1}$, il faut et il suffit qu'on ait $2^{\aleph_\mu}=\aleph_{\mu+1}$.*

Cette dernière proposition a été démontrée par F. Hausdorff sur une voie différente [5]).

---

[5]) l. c., p. 182.