[12] S. Mazur et W. Orlicz, *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Erste Mitteilung, ibidem 5 (1935), p. 50-68, Zweite Mitteilung, ibidem, p. 179-189.

[13] O. Nikodym, *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 131-179.

[14] W. Orlicz, *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 33-37.

[15] W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (V)*, ibidem 4 (1933), p. 20-38.

[16] B. J. Pettis, *Absolutely continuous functions in vector spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 45 (1939), p. 667.

[17] S. Saks, *On some functionals*, Transactions of the American Mathematical Society 35 (1933), p. 549-556.

[18] S. Saks, *Addition to the note on some functionals*, ibidem, p. 965-970.

[19] W. Sierpiński, *Sur le plus petit corps contenant une famille donnée d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae 30 (1938), p. 14-16.

(Reçu par la Rédaction le 31. 5. 1947).

Sur les moyennes

par

C. RYLL-NARDZEWSKI (Lublin)

1. M. Aczél a démontré [1]) que toute fonction $M(x,y)$ qui est

(i) croissante par rapport à chacune des variables x,y,

(ii) continue,

(iii) bisymétrique: $M[M(x,y),M(z,u)]=M[M(x,z),M(y,u)]$,

(iv) refléxive: $M(x,x)=x$,

(v) symétrique: $M(x,y)=M(y,x)$

est de la forme

$$M(x,y)=f^{-1}\left[\frac{f(x)+f(y)}{2}\right]. \tag{1}$$

Je me propose de montrer que l'hypothèse (iii) peut être remplacée dans le théorème de M. Aczél par la suivante:

$$M[x,M(y,z)]=M[M(x,y),M(z,x)] \tag{2}$$

et que les hypothèses (iv) et (v) deviennent alors superflues. De plus, il suffit de supposer la continuité de $M(x,y)$ seulement *sur la droite* $x=0$, ce qui entraîne déjà la continuité partout.

Plus précisément, je vais démontrer le théorème suivant:

Si une fonction $M(x,y)$, croissante par rapport à chacune des variables x,y et continue sur la droite $x=0$, satisfait à l'équation (2), *pour tous x et y réels, elle est de la forme* (1), *où $f(x)$ est une fonction continue croissante.*

Pour déduire de ce théorème celui de M. Aczél, il suffit évidemment de montrer que toute fonction $M(x,y)$ satisfaisant aux conditions (i)-(v) satisfait à la condition (2).

[1]) J. Aczél, *On mean values*. Bulletin of the American Mathematical Society 54 (1948), p. 392-400.

Or, en effet, (2) résulte aussitôt de (iii) en posant $x=y$ et en profitant ensuite de (iv) et (v).

L'étude de l'équation (2) m'a été suggérée par M. J. G.-Mikusiński.

2. Les relations (iv), (v) et

$$\min(x,y) \leqslant M(x,y) \leqslant \max(x,y) \tag{3}$$

se déduisent facilement de (2), en tenant compte de la monotonie stricte de $M(x,y)$.

Fixons arbitrairement un nombre positif a et posons:

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=M(0,a), \quad F\left(\frac{\alpha}{2}\right)=M[0,F(\alpha)], \quad F\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=M[a,F(\alpha)]. \tag{4}$$

La fonction F se trouve ainsi définie dans l'ensemble A des nombres $\alpha=m2^{-n}$, où m et n sont des entiers positifs et $m<2^n$; elle est évidemment positive. Montrons d'abord que

$$M[M(0,x),M(a,y)]=M[M(0,a),M(x,y)] \quad \text{pour} \quad x,y\in F(A). \tag{5}$$

En effet, si $y=F\left(\frac{1}{2}\right)=M(0,a)$, on a en vertu de (2) et (3)

$$M\{M(0,x),M[a\,M(0,a)]\}=M\{M[M(0,x),a],M[M(0,a),M(0,x)]\}=$$
$$=M\{M[M(0,a),M(a,x)],M[M(0,a),M(0,x)]\}=$$
$$=M\{M(0,a),M[M(a,x),M(0,x)]\}=M\{M(0,a),M[x,M(0,a)]\}.$$

La formule (5) est donc vraie pour $y=F\left(\frac{1}{2}\right)$. Il suffit maintenant de montrer que si elle l'est pour $y=F\left(\frac{1}{2^n}\right), \ldots, F\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$, elle l'est encore pour $y=F\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \ldots, F\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)$.

Deux cas sont à distinguer:

1⁰ $y=F\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right)$ et $0<m<2^n$. On peut écrire $y=M(0,y')$, où $y'=F\left(\frac{m}{2^n}\right)$. On a alors en vertu de (2), (3) et (5)

$$M[M(0,x),M(a,y)]=M\{M(0,x),M[a,M(0,y')]\}=$$
$$=\{M(0,x),M[M(0,a),M(a,y')]\}=$$
$$=M\{M[M(0,x),M(0,a)],M[M(0,x),M(a,y')]\}=$$
$$=M\{M[M(0,x),M(0,a)],M[M(0,a),M(0,y')]\}=$$
$$=M\{M(0,a),M[M(0,x),M(x,y')]\}=$$
$$=M\{M(0,a),M[x,M(0,y')]\}=M[M(0,a),M(x,y)].$$

2⁰ $y=F\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right)$ et $2^n<m<2^{n+1}$. On peut écrire $y=M(a,y')$, où $y'=F\left(\frac{m}{2^n}\right)$, et on a alors pareillement

$$M[M(0,x),M(a,y)]=M\{M(0,x),M[a,M(a,y')]\}=$$
$$=M\{M[M(0,x),a],M[M(0,x),M(a,y')]\}=$$
$$=M\{M[M(0,a),M(a,x)],M[M(0,a),M(x,y)]\}=$$
$$=M\{M(0,a),M[M(a,x),M(x,y')]\}=M\{M(0,a),M[x,M(a,y')]\}=$$
$$=M[M(0,a),M(x,y)].$$

3. Montrons ensuite que

$$M[F(\alpha),F(\beta)]=F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \text{pour} \quad \alpha,\beta\in A. \tag{6}$$

En effet, si $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, l'égalité (6) est un cas particulier de (3).

Si $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{m}{2^{n+1}}<\frac{1}{2}$, on a

$$M[F(\alpha),F(\beta)]=M\left\{M(0,a),M\left[0,F\left(\frac{m}{2^n}\right)\right]\right\}=M\left\{0,M\left[a,F\left(\frac{m}{2^n}\right)\right]\right\}=$$
$$=M\left[0,F\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{2^{n+1}}\right)\right]=M[0,F(\alpha+\beta)]=F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Enfin, si $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{m}{2^{n+1}}>\frac{1}{2}$, on a

$$M[F(\alpha),F(\beta)]=M\left\{M(0,a),M\left[a,F\left(\frac{m-2^n}{2^n}\right)\right]\right\}=M\left\{a,M\left[a,F\left(\frac{m-2^n}{2^n}\right)\right]\right\}=$$
$$=M\left[a,F\left(\frac{m}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}\right)\right]=M\left[a,F\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\right]=F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

La formule (6) est ainsi établie pour $a=\frac{1}{2}$ et β arbitraire; en vertu de (3), elle subsiste donc pour $\beta=\frac{1}{2}$ et a arbitraire. Il suffit donc de montrer que si l'égalité (6) est satisfaite pour certains a et β, on a aussi:

$$M\left[F\left(\frac{a}{2}\right),F\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]=F\left(\frac{a+\beta}{4}\right),\qquad M\left[F\left(\frac{a}{2}\right),F\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\right]=F\left(\frac{a+\beta+1}{4}\right),$$
$$M\left[F\left(\frac{a+1}{2}\right),F\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\right]=F\left(\frac{a+\beta+2}{4}\right).$$

En effet, on a en tenant compte de (5):

$$M\left[F\left(\frac{a}{2}\right),F\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]=M\{M[0,F(a)],M[0,F(\beta)]\}=$$
$$=M\{0,M[F(a),F(\beta)]\}=M\left[0,F\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right]=F\left(\frac{a+\beta}{4}\right),$$
$$M\left[F\left(\frac{a}{2}\right),F\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\right]=M\{M[0,F(a)],M[a,F(\beta)]\}=$$
$$M\{M(0,a),M[F(a),F(\beta)]\}=M\left[F\left(\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right]=F\left(\frac{a+\beta+1}{4}\right),$$
$$M\left[F\left(\frac{a+1}{2}\right),F\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\right]=M\{M[a,F(a)],M[a,F(\beta)]\}=$$
$$=M\{a,M[F(a),F(\beta)]\}=M\left[a,F\left(\frac{a+\beta}{2}\right)\right]=F\left(\frac{a+\beta+2}{4}\right).$$

4. La fonction $F(a)$ est *croissante* dans A. En effet, si $a<\beta$, on a

$$M[0,F(\beta)]=F\left(\frac{\beta}{2}\right)=M[F(\beta-a),F(a)]>M[0,F(a)], \tag{7}$$

d'où $F(a)<F(\beta)$.

Si $a\to 0$, la seconde des égalités (4) devient $F(0+)=M[0,F(0+)]$, d'où $F(0+)=0$ en vertu de (3).

Si a et β s'approchent de ξ de manière que $a<\xi<\beta$, on tire de (7) l'égalité $M[0,F(\xi+)]=M[0,F(\xi-)]$ et on a par suite $F(\xi+)=F(\xi-)$.

La fonction $F(a)$ se laisse donc prolonger continuement sur l'intervalle $0\leqslant a\leqslant 1$ tout entier. En désignant par $f(x)$ la fonction inverse de $F(x)$, la formule (6) conduit à l'égalité (1), qu'il s'agissait d'établir.

5. La fonction $f(x)$, qui figure dans (1), peut évidemment être remplacée par une fonction quelconque de la forme

$$\bar{f}(x)=pf(x)+q \tag{8}$$

où $p\neq 0$ et q sont des constantes arbitraires.

Réciproquement, si deux fonctions f et $\bar{f}$ satisfont à (1), on a nécessairement (8).

En effet, en posant $\varphi(a)=\bar{f}[f^{-1}(a)]$, on a

$$\varphi(a)+\varphi(\beta)=2\varphi\left(\frac{a+\beta}{2}\right),$$

d'où, toute fonction convexe mesurable étant continue [2]), il vient $\varphi(a)=pa+q$ et, par conséquent, l'égalité (8).

La fonction $\bar{f}(x)$ est déterminée univoquement dès que ses valeurs $f(0)$ et $f(a_1)$, où $0<a_1<a$, sont déterminées. Or, étant donnée une suite indéfiniement croissante $\{a_n\}$ de nombres positifs, on peut déterminer, pour chacun des intervalles $0\leqslant x\leqslant a_n$, une fonction $f_n(x)$ satisfaisant à (1) de manière que $f_n(0)=0$ et $f_n(a_1)=1$ pour $n=1,2,\ldots$ Alors la fonction $f(x)=\lim\limits_{n=\infty}f_n(x)$ satisfait à (1) pour tous les $x,y\geqslant 0$.

6. On voit facilement que — par raison de symétrie — on peut définir une fonction $\bar{f}(x)$ continue et croissante pour tout x réel, nulle au point $x=0$ et telle que la relation (1) ait lieu pour $xy\geqslant 0$. Alors la fonction

$$\bar{M}(a,\beta)=\bar{f}\{M[\bar{f}^{-1}(a),\bar{f}^{-1}(\beta)]\} \tag{9}$$

sera croissante et satisfera aux relations (2) et (3) dans l'ensemble I des valeurs de $f(x)$. De plus, elle sera continue sur les droites $a=0$ et $\beta=0$ et l'on aura

$$\bar{M}(a,\beta)=\frac{a+\beta}{2}\quad\text{pour } a\beta\geqslant 0.$$

---

[2]) Voir W. Sierpiński, *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 127, théorème 2.

Si $0<\alpha_1\leqslant\beta\leqslant\alpha_2$, on a $\bar{M}(0,\beta)=\frac{\beta}{2}\geqslant\frac{\alpha_1}{2}>0$; alors l'inégalité $|\alpha|<\delta$ entraîne $\bar{M}(\alpha,\beta)>0$ pour δ suffisamment petit.

Si $\alpha_1\leqslant\beta$, $\gamma\leqslant\alpha_2$ et $|\alpha|<\delta$, la relation (2) peut s'écrire, grâce à (3) et (9), sous la forme

$$\bar{M}\left(\alpha,\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\bar{M}(\alpha,\beta)+\frac{1}{2}\bar{M}(\alpha,\gamma).$$

Or, la fonction $\bar{M}(\alpha,\beta)$ étant croissante, on a

$$\bar{M}(\alpha,\beta)=P(\alpha)\cdot\beta+Q(\alpha) \text{ pour } |\alpha|<\delta \text{ et } \alpha_1\leqslant\beta\leqslant\alpha_2. \tag{10}$$

Si maintenant $|\gamma|<\delta$, $\alpha=\alpha_1$ et $\beta=\alpha_2$, on tire de (2) et (3)

$$\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}[P(\gamma)\alpha_2+Q(\gamma)]=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)+\frac{1}{2}[P(\gamma)\alpha_1+Q(\gamma)],$$

d'où $\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_1)\left[P(\gamma)-\frac{1}{2}\right]=0$. Ainsi

$$P(\gamma)=\frac{1}{2} \text{ pour tout } |\gamma|<\delta. \tag{11}$$

D'autre part, si $|\beta|,|\gamma|<\delta$ et $\alpha=\alpha_1$, on tire de (2) et (3) en vertu de (8) (10) et (11)

$$Q[\bar{M}(\beta,\gamma)]=\frac{1}{2}Q(\beta)+\frac{1}{2}Q(\gamma) \tag{12}$$

et, en particulier, $Q\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}Q(\beta)+\frac{1}{2}Q(\gamma)$ pour $|\beta|,|\gamma|\leqslant\delta$ et $\beta\gamma\geqslant 0$; comme la fonction $Q(u)$ est croissante, on a donc

$$Q(\alpha)=\begin{cases} p_1\alpha+q & \text{pour } 0\leqslant\alpha<\delta,\\ p_2\alpha+q & \text{pour } -\delta<\alpha\leqslant 0,\end{cases}$$

où $p_1,p_2>0$.

En posant $u=0$ dans (2), il vient $\frac{1}{2}\bar{M}(\beta,\gamma)=\bar{M}\left(\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\right)$ d'après (9), d'où, généralement, $\bar{M}(\alpha,\beta)=2^{-n}\bar{M}(\alpha 2^{-n},\beta 2^{-n})$ pour $n=1,2,\ldots$

On a donc d'après (12) pour tout couple $\alpha,\beta\,\epsilon\, I$

$$\bar{M}(\alpha,\beta)=2^n Q^{-1}\left[\frac{Q(\alpha 2^{-n})+Q(\beta 2^{-n})}{2}\right]$$

à partir d'un n suffisamment grand, d'où

$$\bar{M}(\alpha,\beta)=Q^{-1}\left[\frac{Q(\alpha)+Q(\beta)}{2}\right],$$

la fonction Q étant prolongée linéairement à droite et à gauche.

En posant $f(x)=Q[\bar{f}(x)]$, la relation (9) se transforme en (1).

(Reçu par la Rédaction le 14. I. 1949).