[5] N. Dunford, *A mean ergodic theorem*, Duke Mathematical Journal 5 (1939), p. 635-646.

[6] N. Dunford, *Uniformity in linear spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 44 (1938), p. 305-356.

[7] G. Fichtenholz et L. Kantorovitch, *Quelques théorèmes sur les fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sc. U.R.S.S. 3 (1934), p. 310-312.

[8] V. Gantmacher, *Über schwache totalstetige Operatoren*, Recueil Math. Moscou 49 (1940), p. 301-308.

[9] V. Gantmacher et V. Šmulian, *Sur les espaces linéaires*, C. R. Acad. Sc. U. R. S. S. 17 (1937), p. 91-94.

[10] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Recueil Math. Moscou 46 (1938), p. 235-284.

[11] M. Krein and V. Šmulian, *On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space*, Annals of Mathematics 41 (1940), p. 556-583.

[12] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 70-84.

[13] E. H. Moore and H. L. Smith, *A general theory of limits*, American Journal of Mathematics 44 (1922), p. 102-121.

[14] W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Mathematica 1 (1929), p. 1-40.

[15] G. Sirvint, *Schwache Kompaktheit in den Banachschen Räumen*, C. R. Acad. Sc. U. R, S. S. 28 (1940), p. 199-202.

[16] A. Tychonoff, *Über einen Funktionenraum*, Mathematische Annalen 111 (1935), p. 762-766.

[17] J. V. Wehausen, *Transformations in linear topological spaces*, Duke Mathematical Journal 4 (1938), p. 157-169.

(Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1941).

Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique, discontinues sur la frontière du domaine de leur existence

par

M. KRZYŻAŃSKI (Kraków).

Introduction.

1. L'une des généralisations du problème classique de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un domaine ouvert borné consiste à admettre que la solution cherchée peut devenir discontinue en certains points de la frontière de ce domaine. On doit à Zaremba [1]) un théorème important, concernant l'unicité de la solution de ce problème. D'après son théorème, si la fonction $u(x,y)$ de deux variables indépendantes, harmonique dans D est continue et s'annule sur la frontière $\mathrm{Fr}(D)$ de ce domaine sauf aux points $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ appartenant à $\mathrm{Fr}(D)$, et si elle satisfait en outre à la condition

$$\lim_{r_\nu \to 0} \frac{u(x,y)}{\log r_\nu} = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = 1,2,\ldots,\mu \quad \text{et} \quad (x,y) \in D + \mathrm{Fr}(D),$$

r_ν désignant la distance du point (x,y) au point P_ν, elle est identiquement nulle dans D. Dans le cas de trois variables indépendantes, on doit remplacer la dernière condition par

$$\lim_{\overline{PP}_\nu \to 0} u(P) \cdot r_\nu = 0 \qquad \text{pour} \quad \nu = 1,2,\ldots,\mu,$$

---

[1]) S. Zaremba, *Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet*, Bulletin de l'Acad. des Sc. de Cracovie (1909), p. 561-563.

M. Picone [2]) et ensuite M. Leja [3]) se sont occupés récemment d'un problème analogue pour l'équation

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + c(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, u = 0,$$

c étant une fonction continue.

M. Picone a démontré que, D étant un domaine borné, d —, son diamètre, $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ — un système fini de points de sa frontière $\mathrm{Fr}(D)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ — des nombres positifs tels que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \alpha < \begin{cases} m-2 & \text{pour } m>2 \\ 1 & \text{pour } m=2, \end{cases}$$

si le coefficient c satisfait à la condition

$$(**) \qquad c < \begin{cases} \dfrac{\alpha(m-2-\alpha)}{d^2} & \text{pour } m>2, \\ \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{d^2} & \text{pour } m=2, \end{cases}$$

alors toute solution de l'équation (*) satisfaisant à la condition

$$(***) \qquad \left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{P\to P_0 \in \mathrm{Fr}(D)} u(P) \prod\limits_{i=1}^{\mu} \overline{P_i P}^{\alpha_i} & \text{pour } m>2 \\ \lim\limits_{P\to P_0 \in \mathrm{Fr}(D)} u(P) \prod\limits_{i=1}^{\mu} \left(\log \dfrac{e\,d}{\overline{P_i P}}\right)^{\alpha_i} & \text{pour } m=2 \end{array}\right\} = 0$$

est identiquement nulle dans D.

M. Leja a démontré que la condition (**) peut être remplacée par

$$c < \begin{cases} \dfrac{\alpha(m-2-\alpha)}{\delta^2} & \text{lorsque } m>2, \\ \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{\delta^2} e^2 & \text{lorsque } m=2, \end{cases}$$

[2]) M. Picone, *Intorno alla teoria di una classica equazione a derivate parziali*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 21 (1948), p. 161-169.

[3]) F. Leja, *Remarques sur le travail de M. Picone*, ibidem, p. 170-172.

δ désignant cette fois un nombre supérieur à d, mais en différant peu à volonté, et la condition (***) par

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{P\to P_0 \in \mathrm{Fr}(D)} u(P) \Big/ \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\dfrac{1}{\overline{P_i P}}\right)^{\alpha} & \text{pour } m>2 \\ \lim\limits_{P\to P_0 \in \mathrm{Fr}(D)} u(P) \Big/ \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\log \dfrac{\delta}{\overline{P_i P}}\right)^{\alpha} & \text{pour } m=2 \end{array}\right\} = 0.$$

J'ai aperçu que non seulement les résultats de Zaremba, Picone et Leja se laissent étendre aux solutions de l'équation linéaire du type elliptique dans sa forme générale (pourvu que ses coefficients satisfassent à certaines conditions exposées dans la suite), mais qu'ils se prêtent en outre à en déduire certains théorèmes d'existence, en particulier un théorème analogue à celui que j'avais établi dans mon travail antérieur [4]) sur le problème de Dirichlet dans les domaines non bornés [5]).

Théorèmes généraux d'existence et d'unicité.

2. Soit

$$(1) \qquad \mathscr{E}[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

une équation linéaire du type elliptique, les coefficients a_{ij}, b_j, c et la fonction f étant des fonctions continues du point $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ d'un domaine ouvert borné D et la forme $\sum\limits_{ij=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ étant supposée définie positive.

$\mathrm{Fr}(D)$ désignant la frontière du domaine D, et $\bar{D}$ — sa fermeture $D+\mathrm{Fr}(D)$, soit $\varphi(P)$ une fonction continue sur $\mathrm{Fr}(D)$, sauf aux points d'un ensemble fermé $E \subset \mathrm{Fr}(D)$.

Considérons le problème suivant: chercher une fonction $u(P)$ qui soit dans $\bar{D}-E$ une solution *régulière* (c'est-à-dire continue

[4]) M. Krzyżański, *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné*, Rendiconti dell'Accad. Nazion. dei Lincei, Serie VIII, vol. 4 (1948), p. 408-416.

[5]) La plupart des résultats de ce travail ont été communiqués par moi à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Cracovie (séances du 20. IV. et du 16. X. 1948).

dans $\bar{D}-E$ et admettant des dérivées du 2me ordre continues dans D) de l'équation (1) et telle que

$$u(P)=\varphi(P) \qquad \text{pour} \quad P\in \mathrm{Fr}(D)-E. \tag{2}$$

C'est le problème de Dirichlet généralisé, qui sera appelé brièvement *problème* DG.

La *distance* du point P à l'ensemble E, c'est-à-dire le nombre $\inf_{P\in E}\overline{PP}_0$, sera désignée dans la suite par $\delta(P,E)$.

Soit $\{D_n\}$ une suite croissante de domaines ouverts contenus dans D; admettons que la frontière $\mathrm{Fr}(D_n)$ de tout D_n se compose de deux parties: la partie $S_n=\mathrm{Fr}(D)\cdot\mathrm{Fr}(D_n)$, située sur $\mathrm{Fr}(D)$, et la partie σ_n qui reste. Désignons par Σ_n la somme $\sigma_n+\mathrm{Fr}(D)-S_n$ et posons

$$d_n=\sup_{P\in\Sigma_n}\delta(P,E);$$

on supposera que la suite $\{D_n\}$ est choisie de manière que $d_n\to 0$ lorsque $n\to\infty$.

D'après un théorème de Lebesgue [6]), étant donnée une fonction continue $\varphi(P)$, définie dans un ensemble fermé et borné F, on peut définir une fonction $\Phi(P)$ continue dans l'espace tout entier et telle que $\Phi(P)=\varphi(P)$ pour $P\in F$. De plus, lorsque les bornes supérieure et inférieure de $\varphi(P)$ dans F sont égales respectivement a M et m, on peut s'arranger de façon que la condition $m\leqslant\Phi(P)\leqslant M$ soit satisfaite dans l'espace tout entier. En effet, si la fonction $\Phi_1(P)$ est continue dans l'espace tout entier et coïncide avec $\varphi(P)$ dans F, la fonction

$$f(P)=\begin{cases} m & \text{si} \quad \Phi_1(P)<m,\\ \Phi_1(P) & \text{si} \quad m\leqslant\Phi_1(P)\leqslant M,\\ M & \text{si} \quad \Phi_1(P)>M \end{cases}$$

est aussi continue dans l'espace tout entier, coïncide avec $\varphi(P)$ dans F et y satisfait à la condition en question. On en déduit le

[6]) H. Lebesgue, Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo 24 (1907), p. 371-402; voir aussi G. Bouligand, *Sur le problème de Dirichlet*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 4 (1925), p. 59-112.

Lemme [7]). *Si la fonction $\varphi(P)$ est continue sur $\mathrm{Fr}(D)-E$ et la fonction $\Gamma(P)$ l'est dans $\bar{D}-E$, la borne inférieure de $\Gamma(P)$ y étant positive, la condition*

$$m\Gamma(P)\leqslant\varphi(P)\leqslant M\Gamma(P) \quad \textit{sur} \quad \mathrm{Fr}(D)-E$$

entraîne l'existence d'une fonction $\Phi(P)$ continue dans $\bar{D}-E$ et telle que

$$m\Gamma(P)\leqslant\Phi(P)\leqslant M\Gamma(P) \quad \textit{dans} \quad \bar{D}-E.$$

En particulier, si $m\leqslant\varphi(P)\leqslant M$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$, on a

$$m\leqslant\Phi(P)\leqslant M \quad \textit{dans} \quad \bar{D}-E.$$

Démonstration. Admettons d'abord, que $\Gamma(P)\equiv 1$. La fonction $\varphi(P)$ étant continue sur S_1, elle peut être prolongée à D_1; elle est alors continue dans D_1+S_2 et peut être prolongée à D_2, et ainsi de suite. On détermine ainsi une fonction $\Phi(P)$ continue dans $\bar{D}-E$ et telle que $m\leqslant\Phi\leqslant M$ dans $\bar{D}-E$.

Dans le cas général, soit

$$\psi(P)=\varphi(P)/\Gamma(P).$$

C'est une fonction continue sur l'ensemble $\mathrm{Fr}(D)-E$ et l'on a $m\leqslant\psi(P)\leqslant M$. On peut donc déterminer une fonction $\Psi(P)$ continue dans $\bar{D}-E$ et telle que l'on y ait $m\leqslant\Psi(P)\leqslant M$. Soit

$$\Phi(P)=\Psi(P)\Gamma(P).$$

La fonction $\Phi(P)$ étant ainsi définie dans $\bar{D}-E$, on peut remplacer la condition (2) par

$$u(P)=\Phi(P) \qquad \text{pour} \quad P\in \mathrm{Fr}(D)-E. \tag{2'}$$

On a le théorème I suivant, dont la démonstration est en réalité identique à celle du théorème I de mon travail precité:

Théorème I. *Admettons que*

1° *l'ensemble $\bar{D}-E$ est la somme des fermetures $\bar{D}_n$ des domaines ouverts croissants $D_n\subset D$, réguliers [8]) par rapport au pro-*

[7]) Je dois à M. T. Ważewski la suggestion d'une telle modification du théorème de Lebesgue.

[8]) Un domaine Δ est dit *régulier* par rapport au problème de Dirichlet relatif à l'équation (1) lorsque ce problème est résoluble dans Δ pour (1) toutes les fois que les conditions aux limites sont exprimées par une fonction continue. Nous convenons alors de dire que la fermeture $\bar{\Delta}$ est régulière, elle aussi, par rapport à ce problème.

blème de Dirichlet pour l'équation (1) *et tels que* $d_n \to 0$ *pour* $n \to \infty$;

2^0 $\Phi(P)$ *est une fonction continue dans* $\bar{D}-E$;

3^0 $\{u_n\}$ *est la suite de solutions du problème de Dirichlet relatif à l'équation* (1) *dans* $\bar{D}_n$, *avec les conditions aux limites*

$$u_n(P)=\Phi(P) \quad \text{sur} \quad \mathrm{Fr}(D_n);$$

4^0 *il existe une fonction* $H(P,k)$ *du point* $P \in \bar{D}-E$ *et du paramètre* k, *définie pour* $0<k<k_0$, *de classe* $c^{(2)}$ (c'est-à-dire admettant les dérivées du second ordre continues par rapport aux x_i) *dans* D, *continue et positive dans* $\bar{D}-E$ *et telle que*

(i) $\lim\limits_{P \to P_0 \in E} H(P,k)=\infty$,

(ii) *si* $k_1<k_2<k_0$ *on a* $\lim\limits_{\delta(P,E)\to 0} \dfrac{H(P,k_1)}{H(P,k_2)}=0$,

(iii) *à toute valeur de* k *correspond un nombre* $\delta(k)>0$ *tel que* $\mathscr{E}[H(P,k)]<-\delta(k)\cdot H(P,k)<0$;

5^0 *il existe deux nombres positifs* M *et* $\bar{k}<k_0$, *tels que*

(i) $|\Phi(P)| \leqslant M \cdot H(P,\bar{k})$ *pour* $P \in \bar{D}-E$ [9]),

(ii) $|f(P)| \leqslant M \cdot H(P,\bar{k})$ *pour* $P \in D$.

Alors la suite $\{u_n\}$ *converge dans* $\bar{D}-E$ *vers une solution* $u(P)$ *du problème* DG *pour l'équation* (1) *dans* D *avec les conditions aux limites* (2') *sur* $\mathrm{Fr}(D)$, *la convergence étant uniforme dans tout ensemble fermé* $F \subset \bar{D}-E$.

En outre, la fonction $u(P)$ *satisfait dans* $\bar{D}-E$ *à l'inégalité suivante:*

$$|u(P)| \leqslant M \cdot H(P,\bar{k})\left[1+\frac{1}{\delta(\bar{k})}\right].$$

C'est la seule solution du problème DG *pour l'équation* (1) *avec les conditions aux limites* (2') *sur* $\mathrm{Fr}(D)$ *dans la classe* (C) *de fonctions* $\bar{u}(P)$ *pour lesquelles il existe deux nombres positifs* M' *et* k' *tels que* $\bar{u}(P)<M' \cdot H(P,k')$.

[9]) D'après l'hypothèse 5°(i), la fonction H dépend de la fonction $\Phi(P)$, c'est-à-dire de la manière dont on a prolongé la fonction $\varphi(P)$ à l'ensemble $\bar{D}-E$. Or, on peut éliminer la fonction $\Phi(P)$ de l'énoncé du théorème I (voir le théorème IA). Ces remarques sont dues à M. Ważewski.

Démonstration. Commençons par démontrer la convergence de la suite $\{u_n\}$. J'introduis à cet effet les fonctions

$$v_n=u_n/H(P,\bar{k}) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Elles satisfont dans D_n à l'équation linéaire

$$\mathscr{E}^*[v] \equiv \sum_{ij=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{m} b_j^* \frac{\partial v}{\partial x_j}+c^* v=f^*, \tag{3}$$

où

$$c^*=\frac{1}{H}\mathscr{E}[H]<-\delta(\bar{k}) \quad \text{et} \quad f^*(P)=f(P)/H(P,\bar{k}).$$

On a $|f^*| \leqslant M$ en vertu de 5^0(ii).

J'introduis ensuite les fonctions

$$z_n^{(1)}=v_n-M[1+1/\delta(\bar{k})], \qquad z_n^{(2)}=v_n+M[1+1/\delta(\bar{k})] \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Ces fonctions satisfont dans D_n aux équations

$$\mathscr{E}^*[z_n^{(r)}]=f^*+(-1)^r M[1+\delta^{-1}(\bar{k})]c^* \quad (r=1,2;\ n=1,2,\ldots).$$

Or, $c^*<-\delta(\bar{k})$. Par suite

$$\mathscr{E}^*[z_n^{(1)}] \geqslant M\cdot\delta(\bar{k}) \quad \text{et} \quad \mathscr{E}^*[z_n^{(2)}] \leqslant -M\cdot\delta(\bar{k}),$$

de sorte que $z_n^{(1)}$ ne peut atteindre dans D_n un maximum positif, pas plus que $z_n^{(2)}$ n'y peut atteindre un minimum négatif [10]). Comme $|v_n| \leqslant M$ sur $\mathrm{Fr}(D_n)$, on a $z_n^{(1)} \leqslant -M\delta^{-1}(\bar{k})<0$ et $z_n^{(2)} \geqslant M\delta^{-1}(\bar{k})>0$ sur $\mathrm{Fr}(D_n)$ et, par suite, $z_n^{(1)} \leqslant 0$ et $z_n^{(2)} \geqslant 0$ dans $\bar{D}_n$, c'est-à-dire

$$|v_n| \leqslant M[1+\delta^{-1}(\bar{k})] \qquad \text{dans } \bar{D}_n. \tag{4}$$

Soit $p<q$; on a $|v_q| \leqslant M[1+\delta^{-1}(\bar{k})]$ dans $\bar{D}_q$ et, en particulier, sur $\mathrm{Fr}(D_p)$.

La différence v_p-v_q est dans D_p une solution de l'équation homogène

$$\mathscr{E}^*[v]=0 \tag{3'}$$

et l'on a

$$|v_p-v_q| \leqslant 2M[1+\delta^{-1}(\bar{k})] \qquad \text{sur } \mathrm{Fr}(D_p). \tag{5}$$

[10]) Voir M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli 1940, p. 695.

Soit

$$w_{pq}=(u_p-u_q)/H(P,\bar{k}+k')=(v_p-v_q)\frac{H(P,\bar{k})}{H(P,\bar{k}+k')},$$

k' étant un nombre positif tel que $\bar{k}+k'<k_0$.

En vertu de 1^0, 4^0(ii) et (5), on peut choisir un p suffisamment grand pour avoir $|w_{pq}|<\varepsilon$ sur σ_p, ε étant un nombre positif quelconque. On a en outre $w_{pq}=0$ sur S_p. Or, la fonction w_{pq} est dans D_p une solution d'une équation homogène, analogue à (3'); elle ne peut donc y atteindre ni un maximum positif, ni un minimum négatif, de sorte que $|w_{pq}|<\varepsilon$ partout dans D_p.

Soit Δ un domaine fermé contenu dans $\bar{D}-E$. On a, en vertu de 1^0, $\Delta\subset D_p$ pour p suffisamment grand. Désignons par $\Omega(k)$ la borne supérieure de $H(P,k)$ dans Δ. On a donc

$$|u_p-u_q|<\varepsilon\cdot\Omega(\bar{k}+k') \qquad \text{dans } \Delta.$$

Il en résulte que la suite $\{u_n\}$ est uniformément convergente dans Δ. Cette suite converge donc partout dans D vers une fonction continue $u(P)$ se réduisant à $\Phi(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$.

Reste à démontrer que la fonction u est une solution régulière de (1) dans D. Or, soient: p_0 un entier positif arbitraire et U la solution du problème de Dirichlet pour (1) dans D_{p_0} avec la condition aux limites $U=u$ sur $\mathrm{Fr}(D_{p_0})$. On a pour $p>p_0$ suffisamment grand

$$|U-u_p|<\eta \qquad \text{sur } \mathrm{Fr}(D_{p_0}), \tag{6}$$

$$|u-u_p|<\eta \qquad \text{dans } D_{p_0}, \tag{7}$$

le nombre $\eta>0$ étant arbitrairement petit. Posons

$$V(P)=U(P)/H(P,k);$$

soient $\Omega_0(k)$ et $\omega_0(k)$ respectivement les bornes supérieure et inférieure de $H(P,k)$ dans D_{p_0}. On a en vertu de (6)

$$|V-v_p|<\frac{\eta}{\omega_0(k)} \qquad \text{sur } \mathrm{Fr}(D_{p_0}). \tag{8}$$

La différence $V-v_p$ étant une solution de l'équation (3') dans D_{p_0}, elle ne peut y atteindre ni un maximum positif, ni un minimum négatif, de sorte que l'inégalité (8) subsiste partout dans D_{p_0}. Donc

$$|U-u_p|<\eta\frac{\Omega_0(k)}{\omega_0(\bar{k})} \qquad \text{dans } D_{p_0}. \tag{9}$$

On déduit de (7) et (9) la limitation suivante:

$$U-u|<\eta\left[\frac{\Omega_0(\bar{k})}{\omega_0(\bar{k})}+1\right]. \tag{10}$$

Comme $\eta>0$ est arbitrairement petit, il résulte de (10) que $U\equiv u$ dans D_{p_0}, c'est-à-dire que u est dans D_{p_0} une solution régulière de (1). Mais, p_0 étant choisi également d'une manière arbitraire, u est une solution régulière de (1) dans D. C'est donc une solution du problème DG pour l'équation (1) dans D avec la condition aux limites $u(P)=\Phi(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$.

La suite $\{v_n\}$ converge dans $\bar{D}-E$ vers une fonction continue $v=u/H$ telle que $|v|\leqslant M[1+\delta^{-1}(\bar{k})]$. Il en résulte la limitation

$$|u(P)|\leqslant M\cdot H(P,k)[1+\delta^{-1}(\bar{k})].$$

Enfin, pour établir l'unicité de cette solution du problème DG dans la classe (C), il suffit de montrer que $u\equiv 0$ est la seule solution de l'équation homogène

$$\mathscr{E}[u]=0, \tag{1'}$$

qui est régulière dans $\bar{D}-E$, s'annule sur $\mathrm{Fr}(D)-E$ et appartient à la classe (C). En effet, si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), régulières dans $\bar{D}-E$, identiques sur $\mathrm{Fr}(D)-E$ et appartenant à la classe (C), leur différence u est une solution de (1'), régulière dans $\bar{D}-E$, s'annulant sur $\mathrm{Fr}(D)-E$ et appartenant à la classe (C).

Or, k'' étant un nombre positif choisi de façon que $k'+k''<k_0$, posons

$$w(P)=u(P)/H(P,k'+k'').$$

La fonction $w(P)$ satisfait dans D à une équation homogène, analogue à (3'). On a $|w(P)|<\varepsilon$ sur $\mathrm{Fr}(D_n)$ pour n suffisamment grand, le nombre $\varepsilon>0$ étant petit à volonté. On en déduit aussitôt que $|w(P)|<\varepsilon$ dans D_n.

Soit P' un point arbitraire du domaine D. Pour n suffisamment élevé, P' appartient à D_n, donc $|w(P')|<\varepsilon$. Comme ε est arbitrairement petit, on a $w(P')=0$. Donc $w(P)\equiv 0$ et par suite $u(P)\equiv 0$ dans D.

Théorème IA. *Si les hypothèses* 1^0, 4^0 *et* 5^0(ii) *du théorème* I *sont satisfaites et si la fonction* $\varphi(P)$, *continue sur* $\mathrm{Fr}(D)-E$, *y satisfait à l'inégalité*

$$|\varphi(P)|\leqslant M\cdot H(P,\bar{k}),$$

où $M>0$ *est une constante, il existe une solution de* (1) *qui est régulière dans* $\bar{D}-E$ *et satisfait à la condition* (2) *sur* $\mathrm{Fr}(D)-E$.

C'est la seule solution du problème DG *pour* (1) *dans* D, *qui appartienne à la classe* (C) *et satisfasse à* (2) *sur* $\mathrm{Fr}(D)-E$.

On déduit aussitôt ce théorème du théorème I et du lemme qui le précède, en posant $\Gamma(P)=H(P,\bar{k})$.

3. La démonstration du théorème I repose sur le principe suivant: lorsque, dans une équation de la forme (1), $c<0$ et qu'on a $f\geqslant 0$ ou $f\leqslant 0$ respectivement, la solution $u(P)$ de cette équation, régulière dans un domaine fermé et borné D, ne peut pas atteindre à l'intérieur de D la borne supérieure positive ou la borne inférieure négative respectivement. Cette propriété subsiste lorsque $c\leqslant 0$ et qu'on a $f>0$ ou $f<0$ respectivement.

Or, on peut démontrer que, lorsque $c\leqslant 0$ et qu'on a $f\geqslant 0$ ($f\leqslant 0$), la solution $u(P)$ atteint sur $\mathrm{Fr}(D)$ la borne supérieure (inférieure) si elle est positive (négative).

En effet, soit $M>0$ la borne supérieure de $u(P)$ dans D. Supposons que l'on ait $u(P)\leqslant M'<M$ sur $\mathrm{Fr}(D)$, où $M'>0$.

Posons

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}(M-M').$$

La fonction $u(P)$ étant uniformément continue dans $\bar{D}$, il existe un domaine D' tel que $D'+\mathrm{Fr}(D')\subset D$ et que $u(P)<M'+\varepsilon$ sur $\mathrm{Fr}(D')$. Posons

$$u=u^*-\omega e^{\lambda x_m},$$

ω et λ étant des constantes positives qui seront convenablement choisies dans la suite. L'équation (1) se transforme en

$$\mathscr{E}[u^*]=f+\omega(a_{mm}\lambda^2+b_m\lambda+c)e^{\lambda x_m}.$$

Les coefficients de (1) étant bornés dans $D'+\mathrm{Fr}(D')$ et a_{mm} étant positif, on peut choisir le nombre λ de façon que le trinôme

entre parenthèses soit positif. Alors $\mathscr{E}[u^*]>0$ et, par suite, u^* ne peut pas atteindre dans D sa borne supérieure positive. Cependant $u^*<M'+\varepsilon+\omega e^{\varrho}$ sur $\mathrm{Fr}(D')$, où $\varrho=\sup|\lambda x_m|$ sur $\mathrm{Fr}(D')$, et cette inégalité subsiste dans (D'). On a donc a fortiori

$$u<M'+\varepsilon+\omega e^{\varrho} \qquad \text{dans } D'.$$

Choisissons un $\omega=\varepsilon e^{-\varrho}$. Alors $u<M'+2\varepsilon=M$ dans D'. Mais, P_0 étant un point quelconque de D, on peut choisir D' de façon que $P_0\subset D'$. Il en résulte que la borne supérieure de $u(P)$ est inférieure à M, contrairement à l'hypothèse.

On a donc $M'\geqslant M$ et, par suite, $u(P)$ atteint sa borne supérieure M sur $\mathrm{Fr}(D)$.

4. Je vais établir maintenant un autre théorème d'unicité pour la solution du problème DG, afin d'en déduire ensuite une généralisation du théorème de Zaremba.

Théorème II. *Admettons que*

1^0 $\varphi(P)$ *est une fonction continue sur* $\mathrm{Fr}(D)-E$,

2^0 *il existe une fonction* $K(P)$, *continue et positive dans* $\bar{D}-E$, *de classe* $c^{(2)}$ *dans* D *et telle que* $\mathscr{E}[K]\leqslant 0$ *dans* D.

Alors le problème DG *pour l'équation* (1) *dans* D *avec les conditions aux limites* (2) *admet une seule solution au plus dans la classe* $(\mathscr{C})$ *des fonctions* $u(P)$ *telles que*

$$\lim_{P\to P_0\in E}\frac{u(P)}{K(P)}=0. \tag{11}$$

Démonstration. Soit $u(P)$ une solution de l'équation homogène $\mathscr{E}[u]=0$, cette solution étant régulière dans $\bar{D}-E$, appartenant à la classe $(\mathscr{C})$ et s'annulant sur $\mathrm{Fr}(D)-E$. Posons

$$v(P)=\begin{cases} u(P)/K(P) & \text{pour } P\in\bar{D}-E,\\ 0 & \text{pour } P\in E.\end{cases}$$

La fonction $v(P)$ est continue dans $\bar{D}$, s'annule sur $\mathrm{Fr}(D)$ et y constitue une solution régulière de l'équation homogène

$$\bar{\mathscr{E}}[v]=\sum_{ij=1}^{m}a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{m}\bar{b}_j\frac{\partial v}{\partial x_j}+\bar{c}v=0 \tag{12}$$

avec

$$\bar{c}=\frac{1}{K}\bar{\mathscr{E}}[K]\leqslant 0;$$

par suite, cette fonction atteint sur $\mathrm{Fr}(D)$ sa borne supérieure, si elle est positive, et sa borne inférieure, si elle est négative.

Comme $v=0$ sur $\mathrm{Fr}(D)$, on a $v(P)\equiv 0$ dans $\bar{D}$. Il en résulte que $u(P)\equiv 0$ dans $\bar{D}-E$ [11]).

5. Dans les considérations du N° 2, on n'avait pas besoin de supposer que le domaine D est lui-même régulier par rapport au problème de Dirichlet (au sens strict) pour l'équation (1). Or, admettons à présent que D est régulier par rapport à ce problème.

Soit $\{\varphi_n(P)\}$ une suite de fonctions continues sur $\mathrm{Fr}(D)$, convergente vers la fonction $\varphi(P)$ aux points de l'ensemble $\mathrm{Fr}(D)-E$ (voir la condition (2)). Considérons la suite $\{u_n(P)\}$ de solutions de (1), régulières dans D et se réduisant aux $\varphi_n(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)$. Il s'agit d'établir les conditions assurant la convergence de la suite $\{u_n\}$ dans D vers une solution du problème DG pour (1) dans D, avec les conditions aux limites (2).

L'importance de ce problème est toute particulière pour la théorie des processus stochastiques [12]).

Désignons par $\mathring{E}(\varrho)$ l'ensemble des points $P\in\mathrm{Fr}(D)-E$ dont la distance $\delta(P,E)$ à l'ensemble E est inférieure à ϱ.

On a d'abord le

Théorème III. *Admettons que*

1° *le domaine D est régulier par rapport au problème de Dirichlet pour l'équation* (1);

2° *tout point $P\in D$ est intérieur à un domaine fermé, contenu dans D et régulier par rapport au problème de Dirichlet pour l'équation* (1);

3° *il existe une fonction $K(P)$ satisfaisant à l'hypothèse* 2° *du théorème II et telle que* $\lim_{P\to P_0\in E} K(P)=\infty$;

4° *$\{\varphi_n(P)\}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathrm{Fr}(D)$ qui converge sur $\mathrm{Fr}(D)-E$ vers une fonction $\varphi(P)$ définie sur $\mathrm{Fr}(D)-E$, la convergence étant uniforme sur tout sous-ensemble fermé de $\mathrm{Fr}(D)-E$;*

[11]) Cette démonstration est la même que celle des théorèmes précités de M. Picone et M. Leja (voir Introduction).

[12]) Ce problème a été traité par M. Petrovsky, *Über das Irrfahrtproblem*, Math. Annalen 190 (1933), p. 425-444, pour un cas particulier de l'équation (1), en supposant que la fonction $\varphi(P)$ est bornée.

5° *quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un $\varrho>0$ tel que*

(13) $$|\varphi_n(P)|<\varepsilon\cdot K(P) \text{ pour tout } P\in\mathring{E}(\delta) \qquad (n=1,2,\ldots);$$

6° *$\{u_n(P)\}$ est une suite de solutions de* (1), *régulières dans $\bar{D}$ et assujetties à la condition $u_n(P)=\varphi_n(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)$;*

Alors la suite $\{u_n\}$ converge dans $\bar{D}-E$ vers une solution du problème DG *pour l'équation* (1) *dans D, avec les conditions aux limites* (2) *sur $\mathrm{Fr}(D)-E$, la convergence étant uniforme dans tout sous-ensemble fermé de $\bar{D}-E$.*

Démonstration. Le nombre $\varepsilon>0$ étant arbitraire, on peut déterminer en vertu de l'hypothèse 4° un nombre $\varrho(\varepsilon)$ de façon à avoir

(14) $$|\varphi_p(P)-\varphi_q(P)|<2\varepsilon\cdot K(P) \text{ pour } P\in\mathring{E}(\varrho) \quad (p,q=1,2,\ldots).$$

D'autre part, d'après l'hypothèse 3°, on peut déterminer un nombre N de façon à avoir

(15) $$|\varphi_p(P)-\varphi_q(P)|<\varepsilon \text{ pour tout } P\in\mathrm{Fr}(D)-\mathring{E}(\varrho),\ p>N \text{ et } q>N.$$

Posons

$$v_{pq}(P)=\begin{cases}[u_p(P)-u_q(P)]/K(P) & \text{si } P\in\bar{D}-E\\ 0 & \text{si } P\in E\end{cases} \qquad (p,q=1,2,\ldots).$$

Les fonctions v_{pq} ainsi définies sont continues dans $\bar{D}$ et l'on a

$$v_{pq}(P)=[\varphi_p(P)-\varphi_q(P)]/K(P) \qquad \text{pour } P\in\mathrm{Fr}(D)-E.$$

Soit ω la borne inférieure de $K(P)$ dans $\bar{D}-E$. On a d'après (14) et (15)

$$|v_{pq}(P)|<\begin{cases}2\varepsilon & \text{pour } P\in\mathring{E}(\varrho),\\ \dfrac{\varepsilon}{\omega} & \text{pour } P\in\mathrm{Fr}(D)-\mathring{E}(\varrho)\end{cases} \qquad (p>N,\ q>N).$$

Par suite,

(16) $$|v_{pq}(P)|<\varepsilon\left(2+\frac{1}{\omega}\right) \text{ partout sur } \mathrm{Fr}(D) \text{ pour } p>N \text{ et } q>N.$$

Or, v_{pq} est, dans le domaine $\bar{D}$, une solution régulière de l'équation homogène (12) avec le coefficient $\bar{c}\leqslant 0$. Il en résulte que l'inégalité (16) subsiste partout dans $\bar{D}$, c'est-à-dire

(17) $$|u_p(P)-u_q(P)|<\varepsilon\left(2+\frac{1}{\omega}\right)K(P) \text{ pour } P\in\bar{D}-E \text{ et } p,q>N.$$

La suite $u_n(P)$ converge donc, pour $P \epsilon \bar{D}-E$, vers une fonction $u(P)$.

Soient: F un sous-ensemble fermé de $\bar{D}-E$ et Ω la borne supérieure de $K(P)$ dans F. On déduit aussitôt de (17) que

$$|u_p(P)-u_q(P)|<\varepsilon\left(2+\frac{1}{\omega}\right)\Omega \quad \text{pour } P \epsilon F,\ p>N \text{ et } q>N.$$

Il en résulte que la suite $\{u_n\}$ est uniformément convergente dans F et que la fonction $u(P)$ est continue dans $\bar{D}-E$. D'après la définition des fonctions $u_n(P)$, la fonction $u(P)$ se réduit à $\varphi(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$.

Il reste donc de montrer que $u(P)$ est une solution régulière de (1) dans $\bar{D}-E$. Soit à cet effet P_0 un point arbitraire de D; d'après l'hypothèse 2°, il existe un domaine fermé $F_0 \subset D$, régulier par rapport au problème de Dirichlet pour (1) et contenant P_0 à l'intérieur. Désignons par $U(P)$ la solution régulière de (1) dans F_0, égale à $u(P)$ sur la frontière $\mathrm{Fr}(F_0)$ de F_0. On a pour n suffisamment grand

$$|u_n(P)-u(P)|<\varepsilon \qquad \text{dans } F_0, \tag{18}$$

$$|u_n(P)-U(P)|<\varepsilon \qquad \text{sur } \mathrm{Fr}(F_0). \tag{19}$$

La fonction $V_n(P)=[u_n(P)-U(P)]/K(P)$ est dans F_0 une solution régulière de l'équation (12). Soient Ω_0 et ω_0 les bornes, supérieure et inférieure respectivement, de $K(P)$ dans F_0. On a en vertu de (19)

$$|V_n(P)|<\varepsilon/\omega_0 \qquad \text{sur } \mathrm{Fr}(F_0)$$

et, par suite, partout dans F_0, car $v_n(P)$ satisfait dans F_0 à l'équation (12) avec $\bar{c} \leqslant 0$. Donc

$$|u_n(P)-U(P)|<\varepsilon\Omega_0/\omega_0 \qquad \text{partout dans } F_0. \tag{20}$$

On déduit des inégalités (18) et (20) la limitation

$$|u(P)-U(P)|<\varepsilon(1+\Omega_0/\omega_0).$$

Or, $\varepsilon>0$ étant arbitraire, on a $u(P) \equiv U(P)$ partout dans F_0, ce qui achève la demonstration.

Je vais déduire du théorème III celui d'existence de la solution du problème DG pour l'équation (1) dans un domaine régulier par rapport au problème de Dirichlet pour cette équation.

Conformément à la notation adoptée, soit $\overset{\circ}{E}[\delta(P,E)]$ l'ensemble des points $Q \epsilon \mathrm{Fr}(D)-E$ dont la distance à l'ensemble E est inférieure à $\delta(P,E)$, c'est-à-dire tels que $\delta(Q,E)<\delta(P,E)$. Soit $\varphi(P)$ une fonction continue sur $\mathrm{Fr}(D)-E$. Désignons par $M_\varphi(P)$ la borne supérieure de $|\varphi(Q)|$ sur l'ensemble fermé $\mathrm{Fr}(D)-\overset{\circ}{E}[\delta(P,E)]$.

La fonction $M_\varphi(P)$ ne décroit pas, quand $\delta(P,E)$ tend vers zéro. Ceci dit, on a le

Lemme. *Soient:* $\varrho_0>0$, $F_0=FD-\overset{\circ}{E}(\varrho_0)$, *et* $\psi(P)$ *une fonction égale à* $\varphi(P)$ *sur* F_0 *et telle que*

$$|\psi(P)| \leqslant \sup_{Q \epsilon F_0} |\varphi(Q)| \qquad \text{pour } P \epsilon \overset{\circ}{E}(\varrho_0).$$

Alors

$$|\psi(P)| \leqslant M_\varphi(P) \qquad \text{pour } P \epsilon \mathrm{Fr}(D)-E.$$

En effet, si $P \epsilon F_0$, on a $|\psi(P)|=|\varphi(P)| \leqslant M_\varphi(P)$, et si $P \epsilon \overset{\circ}{E}(\varrho_0)-E$, on a $|\psi(P)| \leqslant \sup_{Q \epsilon F_0} |\psi(Q)| \leqslant \sup_{Q \epsilon F(D)-\overset{\circ}{E}[\delta(P,E)]} |\varphi(Q)|=M\varphi(P)$.

Théorème IV. *Admettons que*

1° *le domaine* D *est régulier par rapport au problème de Dirichlet pour l'équation* (1) *et assujetti à la condition* 2° *du théorème III;*

2° *il existe une fonction* $K(P)$ *assujettie à la condition* 3° *du théorème III;*

3° $\varphi(P)$ *est une fonction continue sur* $\mathrm{Fr}(D)-E$;

4° *à tout* $\varepsilon>0$ *correspond un* $\varrho>0$ *tel que*

$$M\varphi(P)<\varepsilon K(P) \qquad \text{pour } P \epsilon \overset{\circ}{E}(\varrho). \tag{21}$$

Alors il existe un solution $u(P)$ *du problème* DG *pour l'équation* (1) *dans* D, *telle que* $u(P)=\varphi(P)$ *sur* $\mathrm{Fr}(D)-E$.

Démonstration. Considérons la suite $\{G_n\}$ d'ensembles $G_n=\overset{\circ}{E}(\lambda/n)$, le nombre $\lambda>0$ étant choisi de manière que $\mathrm{Fr}(D)-E$ contienne des points n'appartenant pas à $\overset{\circ}{E}(\lambda)$. On a évidemment $\prod_{n=1}^{\infty} G_n=E$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Fr}(D)-G_n)=\mathrm{Fr}(D)-E$. D'après le théorème précité de Lebesgue, on peut faire correspondre à tout ensemble fermé $F_n=\mathrm{Fr}(D)-G_n$ une fonction $\varphi_n(P)$ continue sur $\mathrm{Fr}(D)$, identique à $\varphi(P)$ sur F_n et telle que $|\varphi_n(P)| \leqslant M_n$ sur G_n,

M_n désignant la borne supérieure de $|\varphi(P)|$ sur F_n. Il résulte du lemme qui vient d'être démontré que $|\varphi_n(P)| \leqslant M_\varphi(P)$ pour toutes les valeurs de n. On en conclut, en tenant compte de l'hypothèse 4°, que l'hypothèse 5° du théorème III est aussi réalisée. Comme les autres conditions de ce théorème sont également satisfaites, la suite $\{u_n\}$ de solutions du problème de Dirichlet pour l'équation (1) avec les conditions aux limites $u_n(P)=\varphi_n(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)$ converge vers une solution du problème DG pour (1) dans D qui satisfait aux conditions aux limites $u(P)=\varphi(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$.

Remarque I. En particulier, l'hypothèse 4° du théorème IV est satisfaite lorsque la fonction $\varphi(P)$ est bornée.

En effet, si $|\varphi(P)| \leqslant M$ pour $P \in \mathrm{Fr}(D)-E$ par exemple, on a $M_\varphi(P) \leqslant M$. D'autre part, on a pour ϱ suffisamment petit $K(P) > M/\varepsilon$ sur $E(\varrho)$, c'est-à-dire (21).

Remarque II. On aperçoit que les fonctions $H(P,k)$ et $K(P)$ qui interviennent dans les énoncés des théorèmes I-IV jouent un rôle capital dans les démonstrations de ces théorèmes. Des fonctions analogues ont été introduites dans de nombreux travaux antérieurs, en particulier dans ceux de M. Picone et des autres mathématiciens italiens. La démonstration de chacun de ces théorèmes contient une étape qui peut être caractérisée comme suit: on divise une fonction, dont la valeur absolue tend vers ∞ quand P s'approche d'un point $P_0 \in E$, par la fonction $H(P,k)$ ou $K(P)$, afin d'amortir sa croissance et atteindre que le quotient soit borné ou même tende vers zéro. C'est pourquoi, dans la suite, je vais appeler de telles fonctions *diviseurs amortissants*.

En particulier, la fonction $H(P,k)$, assujettie à la condition 4° du théorème I, sera dite *diviseur amortissant du 1er genre*, et la fonction $K(P)$ assujettie à la condition 3° du théorème III — *diviseur amortissant du 2me genre*.

Propriétés des bornes d'une solution du problème DG.

6. Passons aux théorèmes concernant les bornes des solutions du problème DG et dont la portée dans la théorie des processus stochastiques est évidente. L'un d'eux sera déduit du théorème I et l'autre, analogue, du théorème IV.

Théorème V. *Admettons que*

1° *les hypothèses* 1° *et* 4° *du théorème I sont satisfaites;*

2° $c=0$ *et* $f=0$;

3° $u(P)$ *est une solution de l'équation* (1), *régulière, de classe* (C) *dans* $D-E$;

4° *il existe deux constantes* m *et* M *telles que*

$$m \leqslant u(P) \leqslant M \quad \text{sur} \quad \mathrm{Fr}(D)-E. \tag{22}$$

Alors l'inégalité (22) *subsiste dans* D.

Démonstration. Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut admettre que $m \leqslant 0$ et $M \geqslant 0$, car dans le cas contraire, on introduirait la fonction $\bar{u}(P)=u(P)-\frac{1}{2}(M+m)$, qui est une solution de l'équation (1), régulière dans $D-E$, et on aurait

$$\tfrac{1}{2}(m-M) \leqslant \bar{u}(P) \leqslant \tfrac{1}{2}(M-m).$$

On peut définir une fonction $\Phi(P)$, continue dans $D-E$, telle que l'on y ait $m \leqslant \Phi(P) \leqslant M$ et que $\Phi(P)=u(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$ (voir N° 2). On a d'après le théorème I, $u(P)=\lim u_n(P)$, où $u_n(P)$ est, pour $n=1,2,\ldots$, une solution de (1), régulière dans D_n et telle que $u_n(P)=\Phi(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D_n)$. Comme les fonctions $u_n(P)$ atteignent sur $\mathrm{Fr}(D_n)$ leurs bornes supérieures positives et inférieures négatives, on a $m \leqslant u_n(P) \leqslant M$ partout dans D_n. Il en résulte que $m \leqslant u(P) \leqslant M$ partout dans $D-E$.

Théorème VA. *Admettons que* $u(P)$ *est une solution de l'équation* (1), *régulière, de classe* (C) *dans* $D-E$ *et que les hypothèses* 2° *et* 3° *du théorème* III *et celles* 2° *et* 4° *du théorème V sont satisfaites.*

Alors l'inégalité (22) *subsiste dans* D.

Démonstration. On peut admettre, comme plus haut, que $m \leqslant 0$ et $M \geqslant 0$. La suite $\{\varphi_n(P)\}$ étant construite comme dans la démonstration du théorème IV, et $\varphi(P)$ étant remplacé par $u(P)$ pour $P \in \mathrm{Fr}(D)-E$, on a $m \leqslant \varphi_n(P) \leqslant M$ pour $n=1,2,\ldots$. Les solutions correspondantes $u_n(P)$ du problème de Dirichlet satisfont aux inégalités $m \leqslant u_n(P) \leqslant M$ dans D, puisque $c=0$. La suite $\{u_n\}$ converge d'après le théorème IV dans D vers une solution de (1),

régulière dans $D-E$ et qui se réduit à $u(P)$ sur $\mathrm{Fr}(D)-E$. D'après le théorème II, cette limite est précisément $u(P)$. On a donc (22) partout dans $\bar{D}-E$.

Cas du domaine non borné.

7. On admettait jusqu'à présent que le domaine D était borné. Or les théorèmes I et II subsistent aussi pour les domaines D non bornés, à condition toutefois d'ajouter le point à l'infini à ceux de l'ensemble E. Les domaines D_n qui interviennent dans le théorème I sont alors non bornés et la frontière de chacun d'eux se compose de trois parties: à savoir de $S_n \subset \mathrm{Fr}(D)$, de σ'_n, dont la distance de l'ensemble E tend vers 0 avec $n \to \infty$, et de σ''_n, dont la distance de l'origine tend vers ∞ avec n.

En même temps, le diviseur amortissant H doit satisfaire non seulement à la condition 4° du théorème I, mais aussi à la condition 1° du théorème I de mon travail antérieur, cité dans l'Introduction.

De même, le diviseur amortissant K, qui intervient dans le théorème II, doit alors tendre vers l'infini avec la distance du point P de l'origine.

Extension des résultats à l'équation du type parabolique.

8. Bien que ce travail ne concerne en principe que les équations du type elliptique, il y a intérêt de remarquer que la plupart de résultats qui précèdent s'étendent aux équations normales du type parabolique

$$\sum_{ij=1}^{m-1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f, \tag{23}$$

les coefficients a_{ij}, b_j et c étant continus dans un domaine D (dont il sera question tout à l'heure), la forme $\sum_{ij=1}^{m-1} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ étant supposée définie positive et le coefficient b_m satisfaisant à la condition $b_m < -\beta < 0$, où $\beta > 0$ est une constante.

Le domaine D doit être, cette fois, de forme spéciale, à savoir être borné par deux caractéristiques $x^m = 0$ et $x^m = h$ $(h > 0)$

et par une surface S non tangente aux caractéristiques: en particulier, D peut être une couche illimitée

$$0 < x_m < h, \quad -\infty < x_i < +\infty \qquad (i \leqslant m-1)$$

ou même un demi-espace $x_m > 0$.

Désignons par Σ la partie de la frontière $\mathrm{Fr}(D)$ du domaine D qui n'est pas située sur la caractéristique $x_m = h$. Dans le cas d'une couche illimitée, Σ est la caractéristique $x_m = 0$.

Au problème DG correspond cette fois celui de trouver une solution de l'équation (23) qui soit régulière dans $D + (\Sigma - E)$, où E est un sous-ensemble fermé de la surface Σ, et qui satisfasse sur $\Sigma - E$ aux conditions aux limites analogues à (2).

Rappelons que le principe concernant les bornes des solutions de l'équation du type (23) s'énonce comme suit: lorsque $c \leqslant 0$ et qu'on a $f \geqslant 0$ ou $f \leqslant 0$ respectivement, toute solution de (1) qui est régulière dans $D + \Sigma$ atteint sur Σ la borne supérieure, si elle est positive, et inférieure, si elle est négative, respectivement.

Il est aisé de voir que tous les théorèmes concernant le problème DG pour l'équation (1) s'étendent au problème qui vient d'être formulé pour l'équation (23).

Détermination des diviseurs amortissants.

9. Avant de passer à la construction des diviseurs amortissants (voir Remarque II, p. 100), je vais établir des théorèmes permettant de les construire pour certains ensembles E des points de discontinuité d'une solution du problème DG, dès qu'on sait les déterminer pour un seul point.

Théorème VI. *Soit* $E = \sum_{p=1}^{n} E_p$, *où* E_p *sont des ensembles fermés disjoints.* $H_p(P,k)$ *et* $K_p(P)$ *étant respectivement des diviseurs amortissant du 1er et du 2me genre, relatifs à l'équation* (1) *et aux ensembles* E_p *pour* $P \in D - E$, *et* $0 < k < k_0$, *les fonctions*

$$H(P,k) = \sum_{p=1}^{n} H_p(P,k) \qquad \text{et} \qquad K(P) = \sum_{p=1}^{n} K_p(P)$$

sont respectivement des diviseurs amortissants du 1er et du 2me genre, relatifs à l'équation (1) *et à l'ensemble* E *pour* $P \in \bar{D} - E$ *et* $0 < k < k_0$.

Démonstration. Il suffit d'établir le théorème pour le diviseur H, la démonstration pour K étant analogue (et même plus simple).

Il est évident que la fonction $H(P,k)$ est positive pour $P\epsilon D-E$ et $0<k<k_0$. Elle tend vers l'infini lorsque $\delta(P,E)\to 0$, et satisfait par conséquent à la condition 4°(i) du théorème I. On a conformément à la condition 4°(iii) du même théorème

$$\mathscr{E}[H]\leqslant -\sum_{p=1}^{n}\delta_p(k)\cdot H_p(P,k),$$

$\delta_p(k)$ étant des fonctions positives de k dans l'intervalle $0<k<k_0$. En posant $\delta(k)=\min\limits_{p\leqslant n}\delta_p(k)$, on a donc

$$\mathscr{E}[H]\leqslant -\delta(k)\cdot H(P,k),$$

de sorte que la fonction $H(P,k)$ satisfait à 4°(iii).

Reste à montrer que H satisfait à 4°(ii). Or le rapport $H(P,k_1)/H(P,k_2)$ se comporte au voisinage d'un point $Q_p\epsilon E_p$ de la même façon que le rapport $H_p(P,k_1)/H_p(P,k_2)$; si $k_1<k_2$, les deux rapports tendent vers 0 avec $\delta(P,Q_p)$. Le théorème est ainsi établi.

Il en résulte en particulier que si l'on sait déterminer le diviseur amortissant $H(P,k;Q_0)$ ou $K(P,Q_0)$ relatif à un point isolé Q_0, on peut déterminer aussitôt le diviseur du même genre pour un ensemble E composé d'un nombre fini de points.

10. Passons en second lieu à la construction des diviseurs amortissants relatifs à l'ensemble E qui est une courbe Γ, en supposant, pour fixer les idées, que $m=3$. Soient donc

$$x_i=\Theta_i(t) \quad \text{où} \quad i=1,2,3 \quad \text{et} \quad 0\leqslant t\leqslant T$$

les équations paramétriques de Γ, les fonctions Θ_i ayant les dérivées d'ordre premier continues. Admettons qu'on sache construire les diviseurs amortissants relatifs à un point isolé $Q_0\epsilon \mathrm{Fr}(D)$ et désignons par $H(P,k;Q)$ le diviseur du 1er genre, relatif au point isolé $Q(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. Soient x_1,x_2,x_3 les coordonées du point $P\epsilon D-\Gamma$. Considérons l'intégrale curviligne

$$\mathscr{H}(P,k)=\int_\Gamma H(P,k;Q)\,ds_Q.$$

Nous allons montrer que, sous certaines conditions, cette intégrale est un diviseur du 1er genre relatif à Γ.

Convenons de dire que l'intégrale $\mathscr{H}(P,k)$ satisfait à la *condition* (G) au voisinage du point $Q_0\epsilon\Gamma$, lorsqu'on peut faire correspondre à tout couple de nombres $r_0>0,\varepsilon>0$ un nombre $\varrho>0$ tel que, γ_0 étant la partie de Γ située dans la sphère de rayon r_0 et de centre Q_0, l'inégalité $\overline{PQ}_0<\varrho$ entraîne

$$\int_\Gamma H(P,k;Q)\,ds_Q<(1+\varepsilon)\int_{\gamma_0}H(P,k;Q)\,ds_Q. \tag{24}$$

Nous allons nous baser sur le lemme suivant sur les intégrales définies:

Si les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ et $g(x)$ sont continues dans l'intervalle fermé $a\leqslant x\leqslant b$, les fonctions $\varphi(x)$ et $g(x)$ y étant différentes de 0, il y existe un point c tel que

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,g(x)\,dx}=\frac{f(c)}{\varphi(c)}.$$

Pour la démonstration, on appliquera aux fonctions

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \Phi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,g(t)\,dt$$

le théorème de la moyenne de Cauchy.

Théorème VII. *Admettons que*

1° *la fonction $H(P,k;Q)$ satisfait pour $0<k<k_0$ et $P\epsilon\bar{D}-\Gamma$ (en tant que fonction de P) à la condition 4° du théorème I avec $E=Q$, en particulier à 4°(iii) uniformément pour $Q\epsilon\Gamma$;*

2° $\lim\limits_{P\to Q}\overline{PQ}\cdot H(P,k;Q)=\infty$ *pour $Q\epsilon\Gamma$;*

3° *l'intégrale $\mathscr{H}(P,k)$ satisfait à la condition* (G) *pour $Q_0\epsilon\Gamma$.*

Alors la fonction $\mathscr{H}(P,k)$ satisfait à la condition 4° du théorème I pour $E=\Gamma$.

Démonstration. Soient M un nombre positif arbitraire et $r_0(M)$ un nombre suffisamment petit pour que l'inégalité $\overline{PQ}<2r_0$ entraîne

$$H(P,k;Q)\cdot PQ>M \qquad \text{pour } Q\epsilon\Gamma. \tag{25}$$

Soient C_0 une sphère de centre $Q_0 \in \Gamma$ et de rayon r_0, P un point de C_0 et γ_0 la partie de Γ située dans C_0.

En désignant par $L(\gamma_0)$ la longueur de l'arc γ_0, on a d'après le théorème de la moyenne

$$\int_\Gamma H(P,k;Q)\,ds_Q > \int_{\gamma_0} H(P,k;Q)\,ds_Q = H(P,k;\bar{Q})\cdot L(\gamma_0),$$

$\bar{Q}$ étant un point de γ_0. Or, $L(\gamma_0) > 2r_0 > \overline{PQ}$, donc en vertu de (25)

$$\int_\Gamma H(P,k;Q)\,ds_Q > H(P,k;\bar{Q})\,\overline{PQ} > M,$$

c'est-à-dire que $\mathscr{H}(P,k)$ tend vers l'infini lorsque la distance $\delta(P,\Gamma)$ tend vers zéro.

En outre, si $P \in D$, on a

$$\mathscr{E}[H] = \int_\Gamma \mathscr{E}[H]\,ds_Q \leqslant -\int_\Gamma \delta(k)\,H(P,k;Q)\,ds_Q = -\delta(k)\cdot\mathscr{H}(P,k).$$

Enfin, k_1 et k_2 étant deux nombres tels que $0 < k_1 < k_2 < k_0$, on peut choisir le nombre ϱ de façon à avoir pour $\overline{PQ}_0 < \varrho$

$$\mathscr{H}(P,k_1)/\mathscr{H}(P,k_2) < (1+\varepsilon)\cdot\int_{\gamma_0} H(P,k_1;Q)\,ds_Q \Big/ \int_{\gamma_0} H(P,k_2;Q)\,ds_Q.$$

Le lemme sur les intégrales définies entraîne alors l'existence d'un point Q' de γ_0 tel que

$$D(P,k_1)/D(P,k_2) < (1+\varepsilon)\cdot[H(P,k_1;Q')/H(P,k_2;Q')].$$

Or, on a $\overline{PQ}' < r_0 + \varrho$ et on peut choisir r_0 et ϱ suffisamment petits pour avoir

$$H(P,k_1)/H(P,k_2) < \varepsilon/2.$$

On a donc pour $\varepsilon < 1$

$$D(P,k_1)/D(P,k_2) < (1+\varepsilon)\,\varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Ainsi la fonction $D(P,k)$ satisfait à la condition 4^0 du théorème 1 pour $E = \Gamma$, c. q. f. d.

On démontre de la même façon le

Théorème VIII. *Si la fonction $K(P;Q)$ satisfait (en tant que fonction de P) à la condition 2^0 du théorème II et si* $\lim_{P\to Q} \overline{PQ}\cdot K(P;Q) = \infty$ *pour $Q \in \Gamma$, la fonction*

$$\mathscr{K}(P) = \int_\Gamma K(P;Q)\,ds_Q$$

satisfait à la condition 2^0 du théorème II pour $E = \Gamma$.

11. Passons maintenant à la construction effective des diviseurs amortissants $H(P,k;Q_0)$ et $K(P;Q_0)$ relatifs à un point de discontinuité $Q_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ de la solution du problème DG, situé sur la frontière $\mathrm{Fr}(D)$ du domaine D et auquel se réduit l'ensemble E.

Soit $d(D)$ le diamètre de D.

Admettons que les coefficients a_{ij}, b_j $(i,j = 1,2,\ldots,m)$ et c sont continus et bornés dans le domaine D et qu'ils satisfont à la condition de Lipschitz au point Q_0, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $A > 0$ tel que

$$|a_{ij}(P) - a_{ij}(Q_0)| < A\cdot\overline{PQ}_0 \qquad \text{pour } P \in D \qquad (i,j = 1,2,\ldots,m).$$

Admettons en outre que $c \leqslant 0$ dans D. On verra plus loin (N° 12) comment on peut l'atteindre par un changement convenable de la fonction inconnue, si c devient positif en certains points de D sans y surpasser un nombre suffisamment petit.

Écrivons l'équation (1) sous la forme

$$\mathscr{E}[u] = \sum_{ij=1}^{m} a_{ij}(Q_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{ij=1}^{m}[a_{ij}(P) - a_{ij}(Q_0)]\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(P)\,u = f(P)$$

et effectuons la substitution

$$x_p = \sum_{q=1}^{m} a_{pq} x'_q \qquad (p = 1,2,\ldots,m), \tag{27}$$

en choisissant a_{pq} de manière que l'expression

$$\sum_{ij=1}^{m} a_{ij}(Q_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

se transforme en laplacien

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_j}\cdot$$

On peut donc, sans restreindre la généralité, remplacer l'équation (1) par l'équation de la forme

$$\mathscr{E}'[u]=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\sum_{ij=1}^{m}g_{ij}(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{m}b_j(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(P)u=f(P), \tag{28}$$

les coefficients g_{ij} satisfaisant à l'inégalité

$$|g_{ij}(P)|<\mu\overline{PQ}_0, \tag{29}$$

où μ est une constante qui dépend de A et des constantes a_{ij}, la forme

$$\sum_{ij=1}^{m}(\delta_{ij}+g_{ij})\lambda_i\lambda_j, \qquad \text{où} \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{pour } i\neq j,\\ 1 & \text{pour } i=j,\end{cases}$$

étant définie positive.

Construction de la fonction $H(P,k;Q_0)$. Posons pour $0<k<1$

$$r=\overline{PQ}_0 \quad\text{et}\quad H(P,k;Q_0)=r^{-m+2}\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k-1}+[L(k)-\eta(P,k;Q_0)]$$

avec

$$\eta(P,k;Q_0)=\exp\lambda(k)\left[\sum_{p=1}^{m}(x_p-x_p^{(0)})+\sqrt{m}\cdot d(P)\right],$$

$$L(k)=\exp 2\sqrt{m}\cdot\lambda(k)\cdot d(D)+1,$$

$\lambda(k)$ étant une fonction de k qui sera définie dans la suite.

Ainsi définie, $H(P,k;Q_0)$ est une fonction continue et positive du point $P\neq Q_0$ et qui tend vers l'infini avec $r\to 0$. La condition 4(i) du théorème I est donc satisfaite.

La condition 4^0(ii) est aussi satisfaite, car

$$H(P,k_1;Q_0)H(P,k_2;Q_0)=\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k_1-k_2}\cdot\frac{1+\xi_1(P)}{1+\xi_2(P)},$$

où les fonctions ξ_1 et ξ_2 tendent vers 0 avec r; on a donc

$$\lim_{r\to 0}H(P,k_1;Q_0)/H(P,k_2;Q_0)=0 \qquad \text{pour } k_1<k_2,$$

indépendamment des coordonnées de Q_0.

Nous allons choisir la fonction $\lambda(k)$ de façon que la condition 4^0(iii) du théorème I se trouve également satisfaite. Désignons par B la borne supérieure de $|b_j|$ pour $j\leqslant m$. La forme $\sum_{ij=1}^{m}(\delta_{ij}+g_{ij})\lambda_i\lambda_j$ étant définie positive, il existe un nombre $\mathfrak{M}>0$ tel que $m+\sum_{ij=1}^{m}g_{ij}\geqslant\mathfrak{M}$. Comme $c\leqslant 0$, de simples calculs permettent d'établir l'inégalité

$$\mathscr{E}'[H]\leqslant r^{-m}\left\{(k-1)\left[(m-2)+(k-2)\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{-1}\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k-2}+r\sum_{q=1}^{3}\gamma_q(\mu,B)\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k-q}\right\}-[\mathfrak{M}\lambda^2(k)-Bm\lambda(k)], \tag{30}$$

où $\gamma_q(\mu,B)$ sont des constantes dépendant de μ et de B.

Désignons par $\psi(r,k)$ le premier sommande du membre droit de l'inégalité (30). Elle s'écrit alors

$$\mathscr{E}'[H]\leqslant\psi(r,k)-[\mathfrak{M}\lambda^2(k)-Bm\lambda(k)]. \tag{31}$$

Or, $\psi(r,k)$ tend vers $-\infty$ lorsque r tend vers 0; cette fonction est d'ailleurs continue dans l'intervalle $0<r<d(D)$ (pour k fixe); elle y est donc bornée supérieurement. Soit $M(k)$ la valeur absolue de sa borne supérieure dans cet intervalle. L'équation en y

$$\mathfrak{M}y^2-Bmy=M(k)+1 \tag{32}$$

a une racine négative et une racine positive. Soit $\lambda(k)$ sa racine positive. On a alors, d'après (31)

$$\mathscr{E}'[H]\leqslant[\psi(r,k)-M(k)]-1<0$$

et par conséquent

$$\frac{\mathscr{E}'[H]}{H}\leqslant\frac{[\psi(r,k)-M(k)]-1}{r^{-m+2}\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k-1}+L(k)}. \tag{33}$$

Le produit $\psi(r)r^{m-2}\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{1-k}$ se comporte, lorsque $r\to 0$, comme $(k-1)(m-2)r^{-2}\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{-1}$; il tend donc vers $-\infty$; il en est de même du membre droit de (33), qui atteint par suite,

dans l'intervalle $0<r\leqslant d(D)$, sa borne supérieure, nécessairement négative. Soit $-\delta(k)$ cette borne. On a donc

$$\mathscr{E}'[H]/H\leqslant -\delta(k).$$

Ainsi la fonction $H(P,k;Q_0)$ qui vient d'être construite satisfait à la condition 4^0 du théorème I.

Convenons de dire que la fonction $\Phi(P)$ satisfait à la *condition* (L) au point $Q_0\in F(D)$, lorsqu'elle est continue dans $D-Q_0$ et qu'il existe deux nombres positifs M et $k<1$ tels que

$$|\Phi(P)|<Mr^{-m+2}\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k-1}. \tag{34}$$

On déduit aussitôt du théorème I et des propriétés de $H(P,k;Q_0)$ le

Théorème IX. *Admettons que*

1^0 *les coefficients de l'équation* (1) *sont continus et bornés dans un domaine borné* D *qui satisfait à la condition* 1^0 *du théorème I;*

2^0 *les coefficients* a_{ij} *satisfont à la condition de Lipschitz au point* $Q_0\in \mathrm{Fr}(D)$;

3^0 $c\leqslant 0$;

4^0 *la fonction* $\Phi(P)$ *est continue dans* $\bar{D}-Q_0$ *et satisfait à la condition* (L) *au point* Q_0.

Alors l'équation (1) *admet une solution et une seule, régulière dans* $\bar{D}-Q_0$ *et se réduisant à* $\Phi(P)$ *sur* $\mathrm{Fr}(D)-Q_0$.

Démonstration. Effectuons la transformation (27). Elle fait correspondre au domaine D de diamètre d un domaine D' de diamètre d', en même temps qu'aux points $Q_0\in\mathrm{Fr}(D)$ et $P\in\bar{D}-Q_0$ des points $Q_0'\in\mathrm{Fr}(D')$ et $P'\in D'-Q_0'$. À la fonction $\Phi(P)$ vient correspondre une fonction $\Phi^*(P')$. Désignons par r' la distance $P'Q_0'$. Il est aisé de voir qu'il existe un nombre $r_0>0$ tel que la fonction $r^{-m+2}\left(\log\frac{2d}{r}\right)^{k-1}$ décroît dans l'intervalle ouvert $0<r<r_0$. D'autre part, il existe un nombre $\beta>0$ tel que $r\geqslant\beta r'$, de sorte que l'inégalité (33) entraîne

$$|\Phi^*(P')|\leqslant M(\beta r')^{-m+2}\left(\log\frac{2d'}{r}+\log\frac{d}{\beta d'}\right)\quad\text{pour } 0<r<r_0.$$

Il en résulte l'existence d'un nombre M' tel que

$$|\Phi^*(P')|\leqslant M'(r')^{-m+2}\left(\log\frac{2d'}{r'}\right)^{k-1}.$$

On appliquera ensuite le théorème I à l'équation transformée du type (28), en choisissant pour diviseur amortissant du 1^{er} genre la fonction $H(P',k;Q_0')$.

Construction de la fonction $K(P,Q_0)$. Posons

$$K(P,Q_0)=\Theta(r)+L-\eta(P),$$

où

$$\Theta(r)=\begin{cases} r^{-m+2}+ar^{-m+3} & \text{pour } m>3\\ r^{-1}-a\log\dfrac{r}{2d} & \text{pour } m=3\\ \log\dfrac{2d}{r}-ar & \text{pour } m=2,\end{cases}$$

$$L=\begin{cases}\exp 2\sqrt{m}\,d+1 & \text{pour } m>2\\ \exp 2\sqrt{m}\,d+\Theta_0+1 & \text{pour } m=2,\end{cases}$$

$$\eta(P)=\exp\lambda\left[\sum_{p=1}^{m}(x_p-x_p^{(0)})+\sqrt{m}\,d\right],$$

a et λ étant des constantes qui seront ensuite convenablement choisies, et Θ_0 étant la valeur absolue de la borne inférieure de $\Theta(r)$ dans l'intervalle ouvert $0<r<d$. Notons que

$$\left|\sum_{p=1}^{m}(x_p-x_p^{(0)})\right|\leqslant\sqrt{m}\,d$$

et par suite $\eta(P)\geqslant 1$. On a en outre, pour L ainsi défini, $1-\Theta(r)+\eta(P)\leqslant L$, c'est-à-dire

$$K(P,Q_0)\geqslant 1.$$

D'autre part, on établit par un simple calcul l'inégalité

$$\mathscr{E}'[K]\leqslant C_{m,1}(a,\mu,B)\,r^{-m+1}+C_{m,2}(a,\mu,B)\,r^{-m+2}-[\mathfrak{N}\lambda^2-Bm\lambda],$$

où $C_{m,1}$ et $C_{m,2}$ sont des constantes qui dépendent de a, μ et B; en particulier

$$C_{m,1}(a,\mu,B)=\begin{cases}(3-m)a+C\ (\mu,B) & \text{pour } m>3\\ -a+C_m(\mu,B) & \text{pour } m\leqslant 3.\end{cases}$$

$C_m(\mu, B)$ dépendent de μ et B. Choisissons a chaque fois de manière que $C_{m,1} = -1$, à savoir en posant

$$a = \begin{cases} C_m(\mu, B)+1 & \text{pour } m \leqslant 3 \\ [C_m(\mu, B)+1]/(m-3) & \text{pour } m > 3, \end{cases}$$

par suite de quoi

$$\mathscr{E}'[K] \leqslant -r^{-m+1} + C_{m,2}(a, \mu, B)\, r^{-m+2} - [\mathfrak{M}\lambda^2 - mB\lambda].$$

La fonction

$$T(r) = -r^{-m+1} + C_{m,2}\, r^{-m+2}$$

tend vers $-\infty$ pour $r \to 0$; elle est continue dans l'intervalle $0 < r \leqslant d$ et y atteint par suite sa borne supérieure. Soit M la valeur absolue de cette borne. Choisissons comme λ la racine positive de l'équation

$$\mathfrak{M}\lambda^2 - mB\lambda = M+1.$$

On a alors

$$\mathscr{E}'[K] \leqslant -1 < 0.$$

La fonction $K(P, Q_0)$ qui satisfait, en tant que fonction de P, aux conditions respectives des théorèmes II et III est ainsi determinée.

En choisissant pour $K(P)$ cette fonction, on déduit du théorème II la généralisation suivante du théorème de Zaremba (voir Introduction):

Théorème X. *Si les coefficients de l'équation* (1) *sont continus et bornés dans un domaine borné D, alors sous les hypothèses* 2^0 *et* 3^0 *du théorème IX, toute solution de l'équation* (1), *régulière dans* $\bar{D} - Q_0$, *s'annulant sur* $\mathrm{Fr}(D) - Q_0$ *et satisfaisant au point* Q_0 *à la condition*

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{r\to 0} u(P)\, r^{m-2} & \text{si } m \geqslant 3 \\ \lim\limits_{r\to 0} u(P) \left(\log \dfrac{2d}{r}\right)^{-1} & \text{si } m = 0 \end{array}\right\} = 0$$

est identiquement nulle dans D.

La démonstration ne diffère presque point de celle du théorème IX.

Remarques sur la réduction de l'èquation (1) au cas $c < 0$.

12. Nous avons supposé (dans le N° 11) que $c \leqslant 0$ dans l'équation (1). On sait que, dans le cas contraire, le problème de Dirichlet n'est pas en général résoluble d'une manière univoque. Cependant, si la borne supérieure du coefficient c ne surpasse pas un certain nombre positif (et qui dépend en général des autres coefficients de (1) et du diamètre d du domaine D), on peut transformer cette équation en une autre, du même type et dont le coefficient de la fonction inconnue est non positif.

Commençons par l'examen de l'équation (*) (voir Introduction). Admettons cette fois que le domaine D est situé à l'intérieur d'une sphère à m dimensions (donc d'un cercle, si $m=2$), dont le centre est à l'origine et dont le rayon R ne surpasse pas le diamètre d de ce domaine. Soit C la borne supérieure de $c(P)$ dans D. Posons [13])

$$u(P) = v(P)\, W(P) \quad \text{où} \quad W(P) = \prod_{p=1}^{m} \cos \mu x_p, \tag{35}$$

le nombre μ étant choisi de façon qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\mu R \leqslant \pi/2 - \delta. \tag{36}$$

L'équation (*) se transforme alors en équation

$$\Delta v + \frac{2}{W} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + (\Delta W + cW)\, v = 0. \tag{37}$$

Or,

$$\Delta W + cW = (-m\mu^2 + c)\, W \leqslant (-m\mu^2 + C)\, W;$$

pour avoir $\Delta W + cW \leqslant 0$, il suffit donc de choisir le nombre μ de manière que

$$\mu \geqslant \sqrt{C/m}.$$

Pour que ce soit possible, il faut et il suffit, d'après (36), que

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \geqslant \sqrt{\frac{C}{m}}.$$

c'est-à-dire que

$$c \geqslant \frac{m}{r^2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)^2.$$

[13]) Les transformations de ce genre ont été appliquées par M. Picone dans son livre précité; voir p. 701-703, par exemple.

Comme le nombre $\delta>0$ peut être arbitrairement petit, il suffit donc que

$$C<\frac{m\pi^2}{4R^2}. \tag{39}$$

En comparant à (39) les limitations de Picone et Leja (voir Introduction) on aperçoit que la méthode qui vient d'être exposée est plus avantageuse lorsque $m\leqslant 5$.

Reprenons à présent l'équation (1) dans sa forme générale, en conservant les hypothèses faites sur le domaine D et les mêmes notations que dans le cas précédent. Effectuons encore un changement de la fonction inconnue (35), mais en assujetissant cette fois le nombre μ à une condition plus restrictive, à savoir

$$\mu R=\frac{\pi}{4}-\delta \qquad \text{où} \quad 0<\delta<\frac{\pi}{4}. \tag{40}$$

On déduit de (40) les inégalités

$$|\operatorname{tg}\mu x_i|\leqslant\tau(\delta)<1 \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{41}$$

avec $\tau(\delta)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right)$.

L'équation (1) se transforme en une équation en w, le coefficient de w étant égal à

$$\mathscr{E}[W]/W=-\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}+\sum_{ij=1}^{m}{}^{i\neq j}a_{ij}\operatorname{tg}\mu x_i\cdot\operatorname{tg}\mu x_j\right)-\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\operatorname{tg}\mu x_j\right)\mu+c.$$

Soient: B le maximum des bornes supérieures des $|b_j(P)|$ pour $j\leqslant m$ et $P\in D$, C la borne supérieure de c et, enfin, $\alpha>0$ un nombre tel que

$$\sum_{ij=1}^{m}a_{ij}(P)\lambda_i\lambda_j\geqslant\alpha\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^2 \qquad \text{pour } P\in D.$$

On a alors $a_{pp}\geqslant\alpha$ pour $p\leqslant m$ et par suite

$$\sum_{i=1}^{m}a_{jj}+\sum_{ij=1}^{m}{}^{i\neq i}a_{ij}\lambda_i\lambda_j=\sum_{ij=1}^{m}a_{ij}\lambda_i\lambda_j+\sum_{j=1}^{m}a_{jj}(1-\lambda_j^2)\geqslant$$

$$\geqslant\alpha\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^2+\alpha\sum_{j=1}^{m}(1-\lambda_j^2)=m\alpha \quad \text{pour } |\lambda_j|\leqslant 1 \text{ et } j\leqslant m,$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{E}[W]/W\leqslant-m\alpha\mu^2+mB\mu+C.$$

Pour avoir $\mathscr{E}[W]/W\leqslant 0$, il suffit donc que

$$C\leqslant m\mu(\alpha\mu-B\tau). \tag{42}$$

Comme d'autre part $C>0$, il résulte de (40) et (42) que B doit satisfaire à la condition

$$B<\frac{\alpha}{R\tau(\delta)}\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right).$$

Comme $\delta>0$ est arbitrairement petit, il suffit que

$$B<\frac{\alpha\pi}{4R}$$

et que, conformément à (40),

$$C<\frac{m\pi}{4R}\left(\frac{\alpha\pi}{4R}-B\right).$$

(Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1949).