Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes à l'extérieur d'un cercle

par

W. WOLIBNER (Wrocław).

Soit Φ l'ensemble de toutes les fonctions analytiques $f(z)$ univalentes et qui se développent pour $|z|>1$ en série

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}.$$

Désignons par B_n la borne supérieure des $|b_n|$ pour toutes les fonctions appartenant à Φ. On a d'après un théorème bien connu de Bieberbach

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\leqslant 1,$$

d'où il résulte que

$$B_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D'autre part, on aperçoit facilement que

$$B_n\geqslant\frac{2}{n+1}, \tag{1}$$

car les fonctions

$$\varphi_n(z)=\left(z^{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{z^{\frac{n+1}{2}}}\right)^{\frac{2}{n+1}}=z+\frac{2}{n+1}\frac{1}{z^n}+\dots$$

appartiennent à Φ (aussi bien pour n pair que pour n impair) et on a pour elles

$$b_n=\frac{2}{n+1}.$$

L'hypothèse que

$$B_n=\frac{2}{n+1} \tag{2}$$

pour tout n naturel paraît vraisemblable.

L'égalité (2) est évidente pour $n=1$; elle a été démontrée par Schiffer [1]) pour $n=2$.

Je vais la démontrer pour deux cas particuliers en me servant de la généralisation suivante du théorème de Bieberbach, qui est un cas particulier des généralisations dues à Biernacki [2]) et à Goluzin [3]):

$W_m(x)$ étant un polynôme du degré m, $f(z)$ — une fonction appartenant à l'ensemble Φ et c_k étant déterminés par l'égalité

$$W_m\left[\sqrt[q]{f(z)}\right]=\sum_{k=-m}^{\infty}c_k z^{-\frac{k}{q}} \qquad \text{pour } |z|>1, \tag{3}$$

où q est un nombre naturel, on a

$$\sum_{k=-m}^{\infty}k|c_k|^2\leqslant 0, \tag{4}$$

lorsque $f(z)\neq 0$ pour $|z|>1$ ou bien lorsque $q=1$.

J'admets, dans chacun des deux cas particuliers à établir, que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite:

I. $f(z)\neq 0$ pour $|z|>1$,

II. n est un nombre impair.

Premier cas particulier. *L'égalité* (2) *se présente pour n lorsque* $b_1=b_2=\dots=b_{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}=0$.

En effet, aussi bien I que II a pour conséquence que la fonction $f^{\frac{n+1}{2}}(z)$ est holomorphe pour $1<|z|<\infty$ et s'y développe en série

$$f^{\frac{n+1}{2}}(z)=z^{\frac{n+1}{2}}+\frac{n+1}{2}\sum_{k=E\left(\frac{n+1}{2}\right)}^{n-1}b_k z^{-\frac{2k-n+1}{2}}+\frac{n+1}{2}b_n z^{-\frac{n+1}{2}}+\sum_{k=n+3}^{\infty}\frac{c_k}{z^{\frac{k}{2}}},$$

[1]) M. Schiffer, *Sur un problème d'extremum de la représentation conforme*, Bulletin de la Société Mathématique de France 66 (1938), p. 48-55.

[2]) M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, ibidem 70 (1946), p. 5.

[3]) G. M. Goluzin, *Über p-valente Funktionen*, Matiematiczeskij Sbornik 8 (1940), p. 277-284.

ce qui entraîne en vertu de (4)

$$-(n+1)+(n+1)\left|\frac{n+1}{2}b_n\right|^2\leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |b_n|\leqslant\frac{2}{n+1},$$

d'où l'égalité (2) en vertu de (1).

Second cas particulier. *L'égalité* (2) *se présente pour* n *lorsque,* p *étant un nombre naturel,* r — *un nombre entier et* d — *le plus grand diviseur commun de* p *et de* $r+1$, *on a*

$$n=Sp+r, \tag{5}$$

$$r\neq -1, \qquad r>-p, \qquad 1\leqslant S\leqslant\frac{p+r+1}{d} \tag{6}$$

et que la fonction $f(z)$ *se développe pour* $|z|>1$ *en série de la forme*

$$f(z)=z+\sum_{s=1}^{S}\frac{b_{sp+r}}{z^{sp+r}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{z^k}. \tag{7}$$

En effet, admettons d'abord la condition I. On a pour $|z|>1$, quel que soit a,

$$\left(1+\sum_{s=1}^{S}\frac{b_{sp+r}}{z^{sp+r+1}}\right)^a=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i^{(a)}}{z^{M_i}},$$

$\{M_i\}$ étant la suite croissante de tous les nombres

$$M_i=A_ip+a_i(r+1), \tag{8}$$

où A_i et a_i sont de la forme

$$A_i=\sum_{s=1}^{S}s\alpha_s, \qquad a_i=\sum_{s=1}^{S}\alpha_s, \tag{9}$$

α_s étant des entiers non négatifs arbitraires tels que $\sum_{s=1}^{S}\alpha_s>0$ et $D_i^{(a)}$ étant définis par la formule

$$D_i^{(a)}=\sum\frac{a\ldots(a-a_i+1)}{\alpha_1!\ldots\alpha_S!}b_{p+r}^{\alpha_1}\ldots b_{Sp+r}^{\alpha_S}, \tag{10}$$

où $\sum$ s'étend à tous les systèmes de nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_S$ correspondants à M_i. On a donc toujours

$$A_i\geqslant a_i\geqslant 1, \tag{11}$$

d'où pour $|z|>1$

$$f^a(z)=z^a+\sum_{i=1}^{\infty}D_i^{(a)}z^{a-M_i}+\sum_{k=n+2}^{\infty}H_k^{(a)}z^{a-k}. \tag{12}$$

Je vais montrer par induction qu'il existe:

1⁰ une suite finie de nombres $\{E_j\}$, où $j=0,1,\ldots,J$, tels que

$$E_j=G_jp+g_j(r+1), \qquad E_j<E_{j+1}, \tag{13}$$
$$E_0=G_0=g_0=0 \qquad \text{et} \qquad G_j\geqslant g_j\geqslant 1 \qquad \text{pour } j>0,$$

G_j et g_j étant des entiers;

2⁰ une suite finie de polynômes $\{V_l(x)\}_{l=0,1,\ldots,J}$, tels que

$$V_l(x)=\sum_{j=0}^{l}N_jx^{n+1-2E_j} \qquad \text{où } N_0=1,$$

et que le développement de $V_l[\sqrt{f(z)}]$ pour $|z|>1$ ne contient, outre $z^{\frac{n+1}{2}}$, que des termes aux exposants inférieurs à $\frac{n+1}{2}-E_l$, le dernier polynôme $V(x)=V_J(x)$ ne contenant, outre $z^{\frac{n+1}{2}}$, que des termes aux exposants négatifs.

Évidement, $V_0(x)=x^{n+1}$. Admettons donc qu'il existe des nombres E_j, où $j=0,\ldots,l$, et des polynômes $V_l(x)$, satisfaisant aux conditions exigées. Alors en vertu de (12)

$$V_l[\sqrt{f(z)}]=\sum_{j=0}^{l}N_j\Big[z^{\frac{n+1}{2}-E_j}+\sum_{i=1}^{\infty}D_i^{\left(\frac{n+1}{2}-E_j\right)}z^{\frac{n+1}{2}-E_j-M_i}+ \tag{14}$$
$$+\sum_{k=n+2}^{\infty}H_k^{\left(\frac{n+1}{2}-E_j\right)}z^{\frac{n+1}{2}-E_j-k}\Big].$$

Comme la dernière somme entre crochets ne contient que des termes aux exposants moindres que $-\frac{n+3}{2}$ et comme (outre $z^{\frac{n+1}{2}}$) les termes aux exposants au moins égaux à $\frac{n+1}{2}-E_l$ disparaîssent, tous les exposants positifs dans le développement de $V_l[\sqrt{f(z)}]$, abstraction faite de l'exposant $\frac{n+1}{2}$, sont de la forme $\frac{n+1}{2}-E_j-M_i$. Soit $\frac{n+1}{2}-E_{j_0}-M_{i_0}$ le plus grand d'entre eux et soit K le coefficient du terme correspondant. En posant alors

$$E_{l+1}=E_{j_0}+M_{i_0} \qquad \text{et} \qquad V_{l+1}(x)=V_l(x)-Kx^{n+1-2E_{l+1}},$$

E_{l+1} et $V_{l+1}(x)$ satisfont à toutes les conditions éxigées, car le développement de $f^t(z)$, où $t=\frac{n+1}{2}-E_{l+1}$, ne contient (outre le terme z^t) que des termes aux exposants inférieurs à t.

Les suites 1° et 2° se trouvent ainsi définies.

Ceci établi, si l'on pose $l=J$ dans (14), on aperçoit que, dans le développement de $V[\sqrt{f(z)}]$, les exposants négatifs dépassant $-\frac{n+3}{2}$ sont de la forme

$$\frac{n+1}{2}-E_j-M_i \qquad \text{où} \quad j=0,1,\ldots,J \quad \text{et} \quad i=1,2,\ldots,$$

et que le coefficient du terme à l'exposant négatif $h>-\frac{n+3}{2}$ est égal à

$$\sum N_j D_i^{\left(\frac{n+1}{2}-E_j\right)}, \tag{15}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de i et de j pour lesquelles

$$h=\frac{n+1}{2}-E_j-M_i.$$

Considérons en particulier le terme à l'exposant $-\frac{n+1}{2}$. Il vient donc

$$n+1=E_j+M_i.$$

En vertu de (5), (8) et (13),

$$(S-G_j-A_i)p=(g_j+a_i-1)(r+1); \tag{16}$$

g_j+a_i-1 est donc divisible par p/d. Il est impossible que $g_j+a_i>1$, car on aurait alors d'après (11) et (13)

$$G_j+A_i \geqslant g_j+a_i \geqslant \frac{p}{d}+1,$$

d'où en vertu de (16)

$$S>\frac{p+r+1}{d}+1,$$

contrairement à (6). On a par conséquent

$$a_i=1, \quad g_j=j=G_j=0 \quad \text{et} \quad A_i=S. \tag{17}$$

Le coefficient c_{n+1} du terme à l'exposant $-\frac{n+1}{2}$ est donc égal, en vertu de (15), à $D_i^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, car $N_0=1$. Aux valeurs a_i et A_i de (17) ne correspond qu'un seul système des α_s tel que $\alpha_s=0$ pour $s=1,\ldots,S-1$ et $\alpha_S=1$; il en résulte d'après (10) que

$$D_i^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}=\frac{n+1}{2}b_n.$$

En posant dans la formule (3)

$$q=2, \qquad m=n+1, \qquad W_m(x)=V(x),$$

il vient d'après (4)

$$-(n+1)+(n+1)\left|\frac{n+1}{2}b_n\right|^2 \leqslant 0,$$

d'où $|b_n| \leqslant \frac{2}{n+1}$ et, par conséquent, l'égalité (2) en vertu de (1).

Admettons à son tour la condition II. Pour établir alors l'égalité (2), il suffit de remarquer que les polynômes $V_j(x)$, où $j=0,1,\ldots,J$, ne contiennent que des termes aux exposants pairs et que l'existence du développement de $V[\sqrt{f(z)}]$ n'exige guère que l'on ait $f(z)\neq 0$ pour $|z|>1$.

Les résultats établis entraînent immédiatement le corollaire suivant:

Etant donné une suite des fonctions $\{f_p(z)\}_{p=1,2,\ldots}$ qui appartiennent à l'ensemble Φ, satisfont à la condition I *et se développent pour $|z|>1$ en série de la forme*

$$f_p(z)=z+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b_s^{(p)}}{z^{sp+r}}, \qquad \text{où } r\neq -1, \tag{18}$$

on a

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\,|p\,b_s^{(p)}| \leqslant 2/s.$$

Il est à remarquer que si ce corollaire était valable aussi dans le cas $r=-1$, qui a été exclu, il en résulterait la bien connue hypothèse de Bieberbach

$$|a_m| \leqslant m$$

concernant les coefficients des fonctions $\varphi(x)$ univalentes et développables pour $|x|<1$ en série

$$\varphi(x)=x+\sum_{m=2}^{\infty}a_m x^m.$$

En effet, on a pour $|x|<1$

$$\left(1+\sum_{m=2}^{\infty}a_m x^{m-1}\right)^{-\frac{1}{p}}=1+\sum_{s=1}^{\infty}b_s^{(p)}x^s,$$

car $\varphi(x)/x$ ne s'annule pas; il en résulte que

$$\log\left(1+\sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m-1}\right)=\lim_{p\to\infty} p\left[1-\left(1+\sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m-1}\right)^{-\frac{1}{p}}\right]=$$

$$=-\sum_{s=1}^{\infty}\lim_{p\to\infty}(p\,b_s^{(p)})x^s,$$

les $\lim\limits_{p\to\infty}(p\,b_s^{(p)})$ existant pour tout $s=1,2,\ldots$ et la dernière série étant convergente. On a donc pour $|x|<1$

$$1+\sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m-1}=\exp\left[\sum_{s=1}^{\infty}-\lim_{p\to\infty}(p\,b_s^{(p)})x^s\right]. \tag{19}$$

La fonction

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt[p]{\varphi\left(\frac{1}{z^p}\right)}}$$

est univalente et ne s'annule pas pour $|z|>1$; elle se développe pour $|z|>1$ en série de la forme (18), mais avec $r=-1$:

$$f(z)=\frac{z}{\sqrt[p]{1+\sum\limits_{m=2}^{\infty}\frac{a_m}{z^{p(m-1)}}}}=z+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b_s^{(p)}}{z^{sp-1}}.$$

Donc, si le corollaire était valable dans le cas $r=-1$, on aurait

$$\left|\lim_{p\to\infty}(p\,b_s^{(p)})\right|\leqslant 2/s$$

et, en remplaçant $-\lim\limits_{p\to\infty}(p\,b_s^{(p)})$ par $2/s$ dans (19), il en résulterait une série aux coefficients positifs qui seraient des majorantes pour les $|a_m|$:

$$\exp\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2}{s}x^s\right)=\exp\left[-\log(1-x)^2\right]=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1};$$

on aurait donc $|a_m|\leqslant m$.

(Reçu par la Rédaction le 21. 11. 1948).

Sur les fonctions indépendantes (VIII)

(Loi des grands nombres, suites indépendantes, suites aléatoires)

par

H. STEINHAUS (Wrocław).

§ 1. Il y a plusieurs formes de la loi forte des grands nombres. Nous en envisageons l'une qui ne suppose pas l'existence des moments, pas plus que l'indépendance des épreuves en bloc. Bien entendu, la thèse classique doit être abandonnée; elle est remplacée par une autre qui n'en résulte pas directement. La forme en question n'est donc ni plus forte, ni plus faible que la loi classique, mais elle mérite d'être envisagée.

Rappelons quelques notions et notations.

$\underset{t}{E}\{p(t)\}$ désigne l'ensemble des t vérifiant la proposition $p(t)$.

La mesure (L) (mesure de Lebesgue) de l'ensemble E est désignée par $|E|$; si l'ensemble E défini par une proposition $p(s,t)$, ou d'une autre manière, est plan, $|E|$ désigne sa mesure (L) plane. Une suite numérique $\{a_i\}$ et une proposition $q(x)$ étant données, on peut poser $q(x)=1$ ou $q(x)=0$, suivant que $q(x)$ est vraie ou fausse, et évaluer la moyenne

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(a_i),$$

que nous désignons par

$$\underset{1\leqslant i\leqslant n}{f}\{q(a_i)\}. \tag{1}$$

Les limites supérieure et inférieure de (1) pour $n\to\infty$ sont désignées par $\overline{f}\{q(a_i)\}$ et $\underline{f}\{q(a_i)\}$ respectivement. Quand elles sont égales, leur valeur commune $f\{q(a_i)\}$ est la *fréquence relative*, dans la suite $\{a_i\}$, des termes satisfaisant à la proposition $q(x)$.