

car $\varphi(x)/x$ ne s'annule pas; il en résulte que

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m-1}\right) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \left[1 - \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \right] = \\ &= - \sum_{s=1}^{\infty} \lim_{p \rightarrow \infty} (p b_s^{(p)}) x^s, \end{aligned}$$

les $\lim_{p \rightarrow \infty} (p b_s^{(p)})$ existant pour tout $s=1, 2, \dots$ et la dernière série étant convergente. On a donc pour $|x| < 1$

$$(19) \quad 1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^{m-1} = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} - \lim_{p \rightarrow \infty} (p b_s^{(p)}) x^s \right].$$

La fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[p]{\varphi\left(\frac{1}{z^p}\right)}}$$

est univalente et ne s'annule pas pour $|z| > 1$; elle se développe pour $|z| > 1$ en série de la forme (18), mais avec $r = -1$:

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt[p]{1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m}{z^{p(m-1)}}}} = z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s^{(p)}}{z^{sp-1}}.$$

Donc, si le corollaire était valable dans le cas $r = -1$, on aurait

$$\left| \lim_{p \rightarrow \infty} (p b_s^{(p)}) \right| \leq 2/s$$

et, en remplaçant $-\lim_{p \rightarrow \infty} (p b_s^{(p)})$ par $2/s$ dans (19), il en résulterait une série aux coefficients positifs qui seraient des majorantes pour les $|a_m|$:

$$\exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{s} x^s\right) = \exp\left[-\log(1-x)^2\right] = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1};$$

on aurait donc $|a_m| \leq m$.

(Reçu par la Rédaction le 21. 11. 1948).

Sur les fonctions indépendantes (VIII)

(Loi des grands nombres, suites indépendantes, suites aléatoires)

par

H. STEINHAUS (Wrocław).

§ 1. Il y a plusieurs formes de la loi forte des grands nombres. Nous en envisageons l'une qui ne suppose pas l'existence des moments, pas plus que l'indépendance des épreuves en bloc. Bien entendu, la thèse classique doit être abandonnée; elle est remplacée par une autre qui n'en résulte pas directement. La forme en question n'est donc ni plus forte, ni plus faible que la loi classique, mais elle mérite d'être envisagée.

Rappelons quelques notions et notations.

$E_t\{p(t)\}$ désigne l'ensemble des t vérifiant la proposition $p(t)$.

La mesure (L) (mesure de Lebesgue) de l'ensemble E est désignée par $|E|$; si l'ensemble E défini par une proposition $p(s, t)$, ou d'une autre manière, est plan, $|E|$ désigne sa mesure (L) plane. Une suite numérique $\{a_i\}$ et une proposition $q(x)$ étant données, on peut poser $q(x) = 1$ ou $q(x) = 0$, suivant que $q(x)$ est vraie ou fausse, et évaluer la moyenne

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(a_i),$$

que nous désignons par

$$(1) \quad \bar{f}_{1 \leq i \leq n} \{q(a_i)\}.$$

Les limites supérieure et inférieure de (1) pour $n \rightarrow \infty$ sont désignées par $\bar{f}\{q(a_i)\}$ et $\underline{f}\{q(a_i)\}$ respectivement. Quand elles sont égales, leur valeur commune $f\{q(a_i)\}$ est la *fréquence relative*, dans la suite $\{a_i\}$, des termes satisfaisant à la proposition $q(x)$.

Soit I l'intervalle $0 \leq t \leq 1$. Nous aurons à considérer des fonctions $x(t)$ définies dans I et mesurables (L) dans cet intervalle. On définit la *distributrice* $H(a)$ d'une telle fonction $x(t)$ par la formule

$$H(a) = |\int_I \{x(t) < a\}|.$$

On peut définir la distributrice $D(a, \beta)$ d'un couple de fonctions $x(t), y(t)$ par la formule

$$(2) \quad D(a, \beta) = |\int_I x(t) < a, y(t) < \beta|.$$

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dites *indépendantes*, ce qu'on écrit $\text{ind}(x, y)$, si on a l'égalité

$$D(a, \beta) = H(a) \cdot K(\beta)$$

pour tous les a et β réels; ici H désigne la distributrice de $x(t)$, K — celle de $y(t)$ et D — celle du couple $x(t), y(t)$. Remarquons que la mesurabilité de x et y implique l'existence de H, K et D .

Théorème I. *Les fonctions $x_i(t)$ mesurables (L) étant indépendantes deux à deux et leurs distributrices respectives $F_i(a)$ satisfaisant à la condition*

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i(a) \text{ existe pour tous les } a \text{ réels et est égal à } F(a),$$

il existe dans I un ensemble T de mesure 1, tel que

$$(4) \quad f \{x_i(t) < a\} = F(a) \text{ pour tout } a \text{ réel et pour tout } t \in T.$$

Le langage usuel du calcul des probabilités exprime ce théorème d'une manière plus suggestive:

Si les distributrices $F_i(a)$, qui donnent la probabilité pour que la variable aléatoire x_i soit moindre que a , satisfont à (3) et si les fonctions x_i sont indépendantes deux à deux, la probabilité pour que, quel que soit a , la fréquence des termes moindres que a dans la suite x_i soit égale à $F(a)$, est égale à 1.

Quand toutes les distributrices F_i sont égales, on peut abrégé cet énoncé en disant que la probabilité pour qu'une suite d'épreuves indépendantes avec la même variable aléatoire fournisse une suite numérique dont la distributrice est identique à celle de la variable, est égale à 1.

Démonstration. Pour un a quelconque, mais fixe, on définit une fonction auxiliaire $z_i(t)$ en posant

$$(5) \quad z_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in E_i = \int_I \{x_i(t) < a\} \\ 0 & \text{pour } t \text{ non } \in E_i. \end{cases}$$

Il est évident que les termes de la suite $\{z_i(t)\}$ sont mesurables et bornés, et il n'est pas difficile de vérifier que $\text{ind}(x_i, x_k)$ implique $\text{ind}(z_i, z_k)$. Posons

$$(6) \quad c_i = |E_i|, \quad v_i(t) = z_i(t) - c_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Alors

$$(7) \quad \int_0^1 v_i(t) dt = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

et les fonctions $v_i(t)$ sont encore mesurables, bornées et indépendantes deux à deux. Ces propriétés et (7) impliquent que

$$(8) \quad \int_0^1 v_i(t) v_k(t) dt = \int_0^1 v_i(t) dt \cdot \int_0^1 v_k(t) dt = 0 \quad \text{pour } i \neq k.$$

On voit aussi, en raison de (5) et de (6), que

$$(9) \quad \int_0^1 v_i^2(t) dt = c_i - c_i^2 \leq 1/4 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

Maintenant on tire parti d'un lemme général emprunté à la théorie des séries orthogonales¹⁾ et qui est applicable aux $v_i(t)$ grâce à (8):

Quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$(10) \quad \left| \sum_{i=1}^n v_i(t) \right| = o \left[\log n \cdot \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 v_i^2(t) dt \right)^{1/2+\varepsilon} \right]$$

presque partout dans l'intervalle I .

¹⁾ S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1935, p. 165, 3^o. On peut éviter ce lemme en intégrant la 4-ème puissance de la somme des $v_i(t)$ et en remarquant que seulement les termes $v_i^2 v_k^2$ et v_i^4 interviennent dans l'intégrale; or, cette voie nous est interdite, car elle présuppose l'indépendance des $x_i(t)$ quatre à quatre.

Les formules (9) et (10) donnent immédiatement

$$\left| \sum_{i=1}^n v_i(t) \right| = o(n^{1/2+\varepsilon} \cdot \log n)$$

et, moyennant (6),

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i(t) - \sum_{i=1}^n c_i \right) = 0$$

presque partout dans I . Or,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i(t) = f_{1 \leq i \leq n} \{x_i(t) < a\}, \quad c_i = F_i(a),$$

en vertu de (5), de (6) et de la définition (1); donc (3) et (11) conduisent à l'existence de la fréquence $f\{x_i(t) < a\}$ et à l'égalité

$$(12) \quad f\{x_i(t) < a\} = F(a) \quad \text{pour } t \in T_a,$$

T_a étant un ensemble des t de mesure 1.

La démonstration ne finit pas là, car l'ensemble T dont il est question dans la thèse du théorème ne dépend pas de a . Soit A l'ensemble composé de tous les nombres rationnels et de tous les points de discontinuité de $F(a)$. Comme $F(a)$ est monotone, l'ensemble A est dénombrable. Définissons T comme $\prod T_a$, le produit \prod étant étendu à tous les $a \in A$.

T est bien l'ensemble cherché. En effet, il est évident que $|T| = 1$, car $|T_a| = 1$ pour tous les a . Reste à montrer que T satisfait à (4). Soit $t' \in T$; considérons $\bar{f}\{x_i(t) < a\}$. Cette limite supérieure existe, quels que soient t et a . Pour un a rationnel ou qui est un point de discontinuité de F , on a (12) avec $t = t'$, en vertu de la définition de T . La fréquence qui figure dans le membre gauche de (12) existe donc, et elle est égale à $\bar{f}\{x_i(t) < a\}$. Le membre droit de (12) existe toujours en vertu de l'hypothèse du théorème, et il est une fonction non-décroissante de a . De même $\bar{f}\{x(t') < a\}$ existe pour tous les a et est aussi une fonction non-décroissante de a , ce qui est une conséquence immédiate de sa définition. Les deux fonctions \bar{f} et F , qui sont non-décroissantes et égales dans un ensemble A qui est dense pour $-\infty < a < \infty$ et contient tous les points de discontinuité de l'une

(à savoir de F), sont égales partout³⁾. Le même raisonnement s'applique à la fréquence inférieure $\underline{f}\{x_i(t') < a\}$. On a ainsi

$$f\{x_i(t') < a\} = F(a) = \bar{f}\{x_i(t') < a\} \quad \text{pour tous les } a,$$

pourvu que t' appartienne à T , ce qui entraîne l'existence de la fréquence f et la relation (12) dans le même domaine ($t \in T$, $-\infty < a < \infty$), c. q. f. d.

Remarquons encore que (11) ne fait appel qu'à une partie de ce qui est contenu dans (10); il n'est pas le but de ce travail d'insister sur ces questions.

§ 2. La définition de la fréquence, donnée au § 1, permet de définir les suites mesurables et leurs distributrices:

On dira que la suite $\{a_i\}$ est *mesurable* si la fréquence relative $f\{a_i < a\} = f(a)$ existe pour tous les a réels, sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable; si cet ensemble exceptionnel est vide, on dira que la suite $\{a_i\}$ est *complètement mesurable*. On appelle $f(a)$, dans les deux cas, la *distributrice* de la suite $\{a_i\}$.

On dira que deux suites mesurables $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont *indépendantes*, et on écrira $\text{ind}(a, b)$, si la fréquence relative

$$f\{a_i < a, b_i < \beta\}$$

existe pour tous les couples a, β pour lesquelles les fréquences relatives $f\{a_i < a\}$ et $f\{b_i < \beta\}$ existent, et si elle satisfait à la condition

$$(15) \quad f\{a_i < a, b_i < \beta\} = f\{a_i < a\} \cdot f\{b_i < \beta\}.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème II. Soit $\{x_i(s)\}$ une suite de fonctions assujetties à l'hypothèse du théorème I. Soit $\{y_i(t)\}$ une suite assujettie à la même hypothèse avec la restriction

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(a) = G(a) \quad \text{pour tout } a \text{ réel,}$$

où $G_i(a)$ désigne la distributrice de $g_i(t)$.

³⁾ On pourrait abrégier la démonstration en employant le „Fortpflanzungssatz“ de E. Helly (cf. A. Wintner, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*, Leipzig 1923, p. 78).

Il existe alors un ensemble Z de mesure plane 1, situé dans le carré $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ et tel que, pour tout point $(s, t) \in Z$, les suites numériques

$$(15) \quad \{x_i(s)\}, \quad \{y_i(t)\}$$

sont mesurables et indépendantes.

Démonstration. D'après le théorème I, il existe dans l'intervalle I un ensemble linéaire S de mesure $|S|=1$ et tel que

$$(16) \quad f\{x_i(s) < a\} \text{ existe et est égal à } F(a) \text{ pour tous les } a \text{ réels et pour tout } s \in S;$$

de même, il existe dans I un ensemble linéaire T de mesure $|T|=1$ et tel que

$$(17) \quad f\{y_i(t) < \beta\} \text{ existe et est égal à } G(\beta) \text{ pour tous les } \beta \text{ réels et pour tout } t \in T.$$

Le produit cartésien $P=S \times T$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (s, t) tels que $s \in S$ et $t \in T$, est évidemment mesurable et l'on a

$$(18) \quad |P|=|S| \cdot |T|=1 \cdot 1=1.$$

Soit $E(\alpha, \beta)$ l'ensemble plan défini par la condition

$$(19) \quad f\{x_i(s) < a, y_i(t) < \beta\} \text{ existe et est égal à } F(a) \cdot G(\beta).$$

Examinons la mesurabilité de $E(\alpha, \beta)$. Soit $h_i(s, t)$ la fonction caractéristique de $E_i = \prod_{i=1}^n \{x_i(s) < a, y_i(t) < \beta\}$. On a

$$(20) \quad \lim_{i \leq n} f\{x_i(s) < a, y_i(t) < \beta\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i(s, t) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Comme produit cartésien de deux ensembles linéairement mesurables, E_i est mesurable superficiellement, ce qui entraîne la mesurabilité du second, donc aussi du premier terme de (20). Or, le premier terme de (19) est la limite, pour $n \rightarrow \infty$, du premier terme de (20); l'ensemble $E(\alpha, \beta)$ des points (s, t) où cette limite existe et est égale à $F(a) \cdot G(\beta)$ est donc mesurable sur le plan.

Démontrons maintenant que $|E(\alpha, \beta)|=1$. On a en vertu de (16)

$$(21) \quad f\{x_i(s') < a\} = F(a) \quad \text{pour tout } s' \in S.$$

Soit $\{i_r\}$ la suite d'indices définie par la condition

$$(22) \quad x_{i_r}(s') < a \quad (r=1, 2, \dots);$$

considérons la suite $\{y_{i_r}(t)\}$ extraite de $\{y_i(t)\}$ et remarquons que la suite $\{\bar{y}_r(t)\}$, où $\bar{y}_r = y_{i_r}$, partage les propriétés postulées pour $\{y_i(t)\}$ dans l'hypothèse du théorème II. Il existe donc, d'après le théorème I, un ensemble \bar{T} de mesure $|\bar{T}|=1$ et tel que

$$(23) \quad f\{\bar{y}_r(t) < \beta\} = G(\beta) \text{ pour tous les } \beta \text{ réels et pour tout } t \in \bar{T}.$$

Or, la suite $\{y_i(t)\}$ a été définie à l'aide de (22), elle dépend donc de s' et de a ; par conséquent \bar{T} dépend aussi de s' et de a :

$$\bar{T} = \bar{T}(s', a).$$

Pour que les deux conditions $x_i(s) < a$ et $y_i(t) < \beta$ soient satisfaites à la fois, il suffit donc de poser $s = s' \in S$, de déterminer ensuite $\{i_r\}$ par (22), de choisir un $t' \in \bar{T}(s', a)$ et de déterminer une nouvelle suite d'indices $\{r_n\}$ par la condition

$$(24) \quad \bar{y}_{r_n}(t') < \beta;$$

on en tire, quel que soit β ,

$$(25) \quad x_i(s') < a \text{ et } y_i(t') < \beta \text{ pour } i = i_{r_n} \quad (n=1, 2, \dots), \quad s' \in S \text{ et } t' \in \bar{T}(s', a).$$

La fréquence des i_r parmi les i étant égale à $F(a)$ en raison de (21), et celle des r_n parmi les r étant égale à $G(\beta)$ en raison de (25), la fréquence des i_{r_n} qui satisfont à (25) est égale au produit $F(a) \cdot G(\beta)$. Par conséquent

$$(26) \quad f\{x_i(s) < a, y_i(t) < \beta\} \text{ existe et est égale à } F(a) \cdot G(\beta) \text{ pour } s \in S, \quad t \in \bar{T}(s, a) \text{ et } \beta \text{ quelconque.}$$

En fixant α et β , désignons par $E^*(s, t)$ l'ensemble de tous les points (s, t) caractérisés par les conditions

$$(27) \quad s \in S, \quad t \in \bar{T}(s, a);$$

on a alors (26) pour $(s, t) \in E^*(\alpha, \beta)$, donc

$$(28) \quad E^*(\alpha, \beta) \subset E(\alpha, \beta).$$

Soit $L(s)$ l'ensemble de tous les t tels que $(s, t) \in E$. L'ensemble E étant mesurable, on peut écrire

$$(29) \quad |E(\alpha, \beta)| = \int_0^1 |L(s)| ds = \int_S |L(s)| ds,$$

la dernière égalité résultant de $|S|=1$. Or, on a $L(s) \supset \bar{T}(s, a)$ en vertu de (28) et (27); par suite, (29) implique que

$$(50) \quad |E(\alpha, \beta)| = \int_S |L(s)| ds \geq \int_S |T(s, \alpha)| ds = \int_S 1 \cdot ds = |S| = 1.$$

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble plan $E(\alpha, \beta)$ des (s, t) assujettis à (19) est de mesure 1:

$$|E(\alpha, \beta)| = 1.$$

Soit A l'ensemble défini au § 1, B — l'ensemble analogue pour $G(\beta)$ et

$$(51) \quad \Pi = \prod_{\alpha \in A, \beta \in B} E(\alpha, \beta)$$

le produit de tous les $E(\alpha, \beta)$ où $\alpha \in A$ et $\beta \in B$. Il est évident d'après (50) que $|\Pi|=1$. Il est clair que les conditions $(s, t) \in \Pi$, $\alpha \in A$ et $\beta \in B$ impliquent (19). Or, nous allons montrer que la condition $(s, t) \in \Pi$ implique (19) pour tous les α, β . En effet, soit α_0 un point de A ; en remplaçant dans (19) α par α_0 , on a (19) pour tous les $\beta \in B$. Il s'ensuit que

$$(52) \quad \bar{f}\{x_i(s) < \alpha_0, y_i(t) < \beta\} = F(\alpha_0) \cdot G(\beta) \quad \text{pour tout } \beta \in B.$$

Les deux membres de (52) sont des fonctions non-décroissantes de β , égales pour $\beta \in B$; le raisonnement employé dans le § 1 montre que (52) subsiste pour tout β réel. Nous pouvons donc écrire (52) avec un β quelconque, $\beta = \beta_0$, pourvu que α_0 appartienne à A . Maintenant, les rôles de α et β étant intervertis, le raisonnement de tout à l'heure donne

$$(53) \quad \bar{f}\{x_i(s) < \alpha, y_i(t) < \beta\} = F(\alpha) \cdot G(\beta) \quad \text{pour tout } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels.}$$

Une égalité analogue à (53) pour f étant évidemment vraie aussi pour tout α et β réels, on en déduit (19) pour $(s, t) \in \Pi$, quels que soient α et β .

Définissons Z comme $P \cdot \Pi$, où P est le produit cartésien $S \times T$. Comme $|P|=1$ et $|\Pi|=1$, on a

$$(54) \quad |Z|=1, \quad Z \subset \Pi, \quad Z \subset C.$$

En vertu de (16), qui vaut pour tout $s \in S$ et tout α , de (17), qui vaut pour tout $t \in T$ et tout β , et de (19), qui vient d'être établi pour $(s, t) \in \Pi$ et pour tous les α, β , on tire de (54) l'indépendance des suites numériques $x_i(s)$ et $y_i(t)$ pour tout point $(s, t) \in Z$; comme $|Z|=1$, le théorème II est démontré.

§ 3. Pour aller plus loin, une extension des notions définies aux § 1 et § 2 est nécessaire. Une généralisation immédiate conduit à la notion d'indépendance de quatre fonctions, $\text{ind}(x, y, u, v)$; on arrive aisément à la notion $\text{ind}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, où k , le nombre des fonctions, est quelconque. On étend de même la définition de l'indépendance des suites numériques et on parvient à donner un sens à $\text{ind}(a, b, c, d)$ et à $\text{ind}(a, b, c, \dots, q)$. La notion $\text{ind}(x_1, x_2, \dots)$ soit, par définition, équivalente à $\text{ind}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ pour tous les k . On définit de même $\text{ind}(a, b, \dots)$. La distributrice $D(\alpha, \beta)$ du couple x, y a été déjà définie par (2). On peut définir d'une manière analogue la distributrice $D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ du quadruple x, y, u, v .

Soient $F(\alpha, \beta)$ la distributrice de x, y et $G(\alpha, \beta)$ celle de u, v ; les couples x, y et u, v seront dits *indépendants*, et l'on écrira $\text{ind}[(x, y), (u, v)]$, si

$$(55) \quad D(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = F(\alpha, \beta) \cdot G(\gamma, \delta) \quad \text{pour tous les } \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Il est évident que $\text{ind}(x, y, u, v)$ implique $\text{ind}[(x, y), (u, v)]$.

Nous pouvons énoncer maintenant le

Théorème III. Soit $\{x_i(t), y_i(t)\}$ une suite de couples x_i, y_i et soit $\text{ind}[(x_i, y_i), (x_k, y_k)]$ pour $i \neq k$. Alors, si la distributrice commune $D(\alpha, \beta)$ de tous les couples x_i, y_i pour $i=1, 2, \dots$ est de la forme $F(\alpha) \cdot G(\beta)$, on a

$$(56) \quad f\{x_i(t) < \alpha, y_i(t) < \beta\} = F(\alpha) \cdot G(\beta) = D(\alpha, \beta)$$

pour tous les α, β et pour $t \in T$ où $|T|=1$.

La démonstration de ce théorème ne diffère que formellement de celle du théorème I. En effet, en donnant à β une valeur fixe quelconque, on réduit la thèse à la forme susceptible à y appliquer le raisonnement employé dans la démonstration du théorème I, ce qui conduit à (56) pour tous les t d'un ensemble T_β de mesure 1, α étant quelconque. Le produit $\prod_\beta T_\beta$, étendu à tous les β rationnels et à ceux où $G(\beta)$ est discontinu, est aussi de mesure 1. (56) subsiste donc pour tout $t \in T$, α étant quelconque et β appartenant à l'ensemble dénombrable $\prod_\beta T_\beta$; on lève alors la restriction pour β de la même manière que dans la démonstration du théorème I.

§ 4. Il est bien connu que la définition d'une suite aléatoire individuelle $\{a_n\}$ comporte des difficultés. Soit a_n le résultat du n -ième essai avec la variable aléatoire x , en supposant l'indépendance en bloc de tous les essais. Une *propriété caractéristique* pour la suite $\{a_n\}$ soit, par définition, toute propriété dont la probabilité a priori, c'est-à-dire avant les essais, est égale à 1. En étudiant la suite $\{a_n\}$ pour reconnaître si elle est une suite aléatoire, donc si elle a les propriétés caractéristiques, on se heurte à la loi qui exige qu'une telle propriété soit partagée par toute suite partielle $\{a'_n\}$ extraite de $\{a_n\}$. Pour en donner un exemple, considérons une suite $A = \{a_n\}$ dont tous les termes sont 0 ou 1; pouvons-nous dire qu'elle représente les essais consécutifs indépendants avec une variable x qui prend la valeur 0 avec la probabilité $1/2$ et la valeur 1 avec la même probabilité $1/2$? Il faut que A ait la propriété caractéristique

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = 1/2,$$

et que cette propriété subsiste pour toute suite partielle $\{a'_n\}$ de A , ce qui est évidemment impossible. M. v. MISES a proposé de remplacer la condition (37) par une autre, qui rétrécit le champ des suites partielles: on ne considère que les suites partielles $\{a'_n\}$ susceptibles d'être définies sans faire appel à la définition de $\{a_n\}$ ³⁾. Ce principe donne lieu à des complications logiques. La voie que nous avons choisie, à savoir la méthode des fonctions⁴⁾, conduit à une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions indépendantes dont chacune a la même distributrice que x . Pour revenir sur l'exemple de la suite A , on n'a que définir $x_n(t)$ comme n -ième chiffre du développement dyadique de t . On peut démontrer que la propriété (37) convient à la suite $\{x_n(t)\}$ pour presque tous les t et qu'elle convient aussi à toute suite partielle pour presque tous les t ; or, la probabilité pour que A ait une propriété quelconque est égale à la mesure de l'ensemble des t où $x_n(t)$ a cette propriété; il est de même pour A' , suite partielle

³⁾ Cf. R. v. Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig 1931.

⁴⁾ Cf. la série de recherches *Sur les fonctions indépendantes (I)-(VII)*, *Studia Math.* 6, 7, 9 et 10, spécialement celle de M. Kac (*Studia Math.* 6 (1936), p. 46-66): voir aussi H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*, *Fundam. Math.* 4 (1923), p. 287-310.

de A , à laquelle correspond une suite partielle de $\{x_n(t)\}$. Cette méthode permet de comprendre la difficulté signalée: c'est que les ensembles exceptionnels de mesure 0 dépendent du choix des indices définissant la suite partielle. Néanmoins la question reste ouverte: est-il possible de trouver quelque propriété mathématique qui corresponde à la notion — assez confuse, avouons-le — d'une suite aléatoire individuelle? Essayons de le faire.

Appelons une suite $\{a_i\}$ *simplement aléatoire* (ou *aléatoire tout court*) si l'on a $\text{ind}(\{a_{i+h}, \{a_{i+k}\})$ pour tous les nombres naturels h et k , où $h \neq k$ (au sens de la définition de l'indépendance, donnée au § 2). Appelons une suite $\{a_i\}$ *complètement aléatoire* si l'on a $\text{ind}(\{a_i, \{a_{i+1}, \{a_{i+2}, \dots\})$ au sens de la généralisation mentionnée au § 3.

L'exemple d'une suite complètement aléatoire est fourni par les chiffres du développement décimal d'un nombre *absolument normal*; on appelle ainsi tout nombre dont le développement à base quelconque de numération, soit à base b , contient chaque chiffre possible avec la même fréquence $1/b$; M. SIERPIŃSKI en a construit un exemple effectif⁵⁾.

On pourrait appeler *principe d'autonomie* celui employé dans les définitions ci-dessus, car on y examine une suite par les translations de ses termes; ce principe est opposé à celui de M. v. MISES, qui est un *principe hétéronome* en ce sens qu'il interdit de parler de la suite elle-même.

Théorème IV. *Si les fonctions $x_i(t)$ aux distributrices $F(a)$ identiques sont indépendantes quatre à quatre, la suite $\{x_i(t)\}$ est simplement aléatoire pour presque tous les t .*

Démonstration. Nous avons vu que $\text{ind}(x, y, u, v)$ implique $\text{ind}[(x, y), (u, v)]$; or, on a $\text{ind}(x_i, x_{i+h}, x_j, x_{j+h})$ pour $j > i + h$, donc

$$(38) \quad \text{ind}[(x_i, x_{i+h}), (x_j, x_{j+h})] \quad \text{pour } j > i + h.$$

Il s'ensuit que les couples $(x_{q+r(h+1)}, x_{q+r(h+1)+h})$, où $r = 1, 2, \dots$, sont indépendants deux à deux, car on a $q + r'(h+1) > q + r(h+1) + h$ pour $r' > r$. En appliquant le théorème III, il vient

$$(39) \quad f\{x_{q+r(h+1)}(t) < \alpha, x_{q+r(h+1)+h}(t) < \beta\} = F(\alpha) \cdot F(\beta) \quad \text{pour tous les } \alpha, \beta$$

et tout $t \in T_q$ où $|T_q| = 1$.

⁵⁾ Voir W. Sierpiński, *Bulletin de la Soc. Math. de France* 45 (1920).

En posant $q=0,1,2,\dots,h$, on obtient successivement $h+1$ progressions arithmétiques $\{q+r(h+1)\}$ à différence constante $h+1$; l'ensemble de ces progressions constitue la suite $\{n\}$ des nombres naturels. En appliquant (39) successivement à $q=0,1,\dots,h+1$, on conclut que (39) subsiste pour tous les q et tout $t \in \prod_{q=1}^{q=h+1} T_q = T^*$, donc

$$(40) f\{x_n(t) < \alpha, x_{n+h}(t) < \beta\} = F(\alpha) \cdot F(\beta) \text{ pour tous les } \alpha, \beta \text{ et tout } t \in T^* \text{ où } |T^*| = 1.$$

Or, on a en vertu du théorème I (f désignant la fréquence des n)

$$(41) f\{x_n(t) < \alpha\} = F(\alpha) \text{ et } f\{x_{n+h}(t) < \beta\} = F(\beta) \text{ pour tous les } \alpha, \beta \text{ et tout } t \in T^0 \text{ où } |T^0| = 1.$$

En posant $T_h = T^0 \cdot T$, on a en vertu de (40) et (41)

$$(42) f\{x_n(t) < \alpha, x_{n+h}(t) < \beta\} = f\{x_n(t) < \alpha\} \cdot f\{x_{n+h}(t) < \beta\} \text{ pour tous les } \alpha, \beta \text{ et pour tout } t \in T_h \text{ où } |T_h| = 1.$$

En posant $T = \prod_{h=1}^{\infty} T_h$ et en appliquant (42) à $h=1,2,\dots$, on conclut que (42) subsiste pour tous les h entiers, pour tous les α, β réels et pour tout $t \in T$; cela équivaut à $\text{ind}[x_n(t), x_{n+h}(t)]$ pour tous les h , donc à $\text{ind}[x_{n+h}(t), x_{n+k}(t)]$ pour $h \neq k$, $t \in T$ étant fixe; comme $|T|=1$, le théorème IV se trouve établi.

On démontre par des moyens analogues le

Théorème V. *Si les fonctions $x_i(t)$ aux distributrices identiques sont indépendantes en bloc, la suite $\{x_i(t)\}$ est complètement aléatoire pour presque tous les t .*

Notons qu'il est facile de donner des exemples des suites aléatoires, quand on admet des *distributrices dégénérées*, c'est-à-dire qui ne prennent qu'une ou deux valeurs différentes. La condition que la distributrice d'une suite prenne au moins trois valeurs différentes exclut les suites convergentes et celles divergentes vers l'infini, qui satisfont d'une manière banale à la définition d'une suite aléatoire, tout comme les fonctions constantes satisfont à la définition de l'indépendance.

(Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1949).

Banach spaces of functions analytic in the unit circle, I

by

A. E. TAYLOR (Los Angeles).

Introduction.

It is by now very well known that the concepts and methods of functional analysis play an important part in the theory of functions of a real variable. The concept of function space which has been most widely and successfully used in analysis is that of the normed linear space, called a *Banach space*, if it is complete. Most of the function spaces which have received careful attention are spaces of functions of a real variable. Very little work has been done on classes of analytic functions which form Banach spaces.

In this paper we propose to study spaces whose elements are functions analytic in the unit circle. Originally we began by studying particular spaces, with norms defined in a definite analytical manner (e. g. the bounded analytic functions, with $\|f\|$ equal to the least upper bound of $|f(z)|$ for $|z| < 1$). It gradually became clear, however, that very general theorems could be proved merely by postulating a few additional properties of the space beyond the assumption that it was a normed linear space of analytic functions. We have thus been led to a theory which is quite abstract, in that it applies to a whole class of spaces, without reference to the particular analytical definition of the norm in any given space. The theory is also satisfactorily comprehensive, for it applies to the spaces which seem to be of greatest interest in the theory of functions.

This abstract theory is developed in Part I of the paper. There are four main axioms in addition to the assumption that