Sur quelques propositions concernant la puissance du continu.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Dans ce travail je démontre plusieurs propositions de caractère géométrique équivalentes à l'hypothèse du continu et à des hypothèses analogues et je résous quelques problèmes qui s'y rattachent, concernant la puissance du continu, le plan euclidien et l'espace à trois ou à quatre dimensions.

Ce travail sera suivi d'une Note de M. Kuratowski qui généralise certains de mes résultats, ainsi que d'une Note de M. Sikorski qui donne des généralisations ultérieures.

Théorème 1. *Soient* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{n}$ *deux nombres cardinaux non finis tels que* $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, *et soit* M *un ensemble de puissance* $\mathfrak{m}$. *L'hypothèse suivante*:

(P) *le produit cartésien* $M \times M \times M$ *est une somme de trois ensembles* E_i $(i=1,2,3)$, *tels que, pour* $i=1,2,3$, *l'ensemble* E_i *a moins que* $\mathfrak{n}$ *points sur toute parallèle à l'axe* OX_i, *équivaut à l'hypothèse*:

(H) *il n'existe aucun nombre cardinal* $\mathfrak{p}$ *tel que* $\mathfrak{m} > \mathfrak{p} > \mathfrak{n}$.

Démonstration. I. P$\rightarrow$H.

Admettons que P est vrai et que H ne l'est pas. Il existe alors un nombre cardinal $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{m} > \mathfrak{p} > \mathfrak{n}$. Soit M_1 un sous-ensemble de M de puissance $\mathfrak{p}$. L'ensemble $M_1 \times M_1 \times M$ est formé de $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ parallèles à l'axe OX_3 et sur chacune d'elles l'ensemble E_3 est de puissance $< \mathfrak{n} < \mathfrak{p}$. L'ensemble $E_3 \cdot (M_1 \times M_1 \times M)$ est donc de puissance $\leqslant \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, de même que la projection de cet ensemble sur l'axe OX_3. Cette dernière étant de puissance $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$, il existe un élément c de M tel que l'ensemble Q de tous les systèmes (x, y, c), où $x \in M_1$ et $y \in M_1$, ne contient aucun point de l'ensemble E_3. Or, comme $Q \subset M \times M \times M = E_1 + E_2 + E_3$, il vient $Q \subset E_1 + E_2$.

Comme $\overline{\overline{M}}_1 = \mathfrak{p} > \mathfrak{n}$, il existe un sous-ensemble M_2 de M_1 de puissance $\mathfrak{n}$. L'ensemble $M_2 \times M_1 \times \{c\}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$ parallèles à l'axe OX_2 et sur chacune d'elles l'ensemble E_2 est de puissance $<\mathfrak{n}$. L'ensemble $M_2 \times M_1 \times \{c\}$ contient donc $\leqslant \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ éléments de E_2. L'ensemble M_1 étant de puissance $\mathfrak{p} > \mathfrak{n}$, il en résulte qu'il existe un élément b de M_1 tel que $M_2 \times \{b\} \times \{c\}$ ne contient aucun élément de E_2. Comme $M_2 \times \{b\} \times \{c\} \subset Q \subset E_1 + E_2$, il vient $M_2 \times \{b\} \times \{c\} \subset E_1$. L'ensemble M_2 étant de puissance $\mathfrak{n}$, cela prouve que la parallèle $M \times \{b\} \times \{c\}$ à l'axe OX_1 contient $\geqslant \mathfrak{n}$ éléments de l'ensemble E_1, contrairement à l'hypothèse.

L'hypothèse que P est vrai et H ne l'est pas implique donc une contradiction. On a ainsi P$\rightarrow$H.

II. H$\rightarrow$P.

Supposons que H est vrai. Soit φ le plus petit nombre ordina de puissance $\mathfrak{m}$, et ψ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{n}$. Il existe donc une suite transfinie $\{u_\xi\}_{\xi<\varphi}$ formée de tous les éléments distincts de l'ensemble M. μ étant un nombre ordinal $<\varphi$, il résulte de la définition du nombre φ que l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant \mu$ est de puissance $<\mathfrak{m}$, donc, d'après H, de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$. Il existe donc une suite finie ou transfinie $\{\lambda_\xi^{(\mu)}\}$ du type $\leqslant \psi$, formée de tous les nombres ordinaux $\leqslant \mu$.

Soit $p = (x,y,z)$ un élément de l'ensemble $E = M \times M \times M$. Il existe des nombres ordinaux $\alpha < \varphi$, $\beta < \varphi$ et $\gamma < \varphi$ bien déterminés par le point p et tels que $x = u_\alpha$, $y = u_\beta$, $z = u_\gamma$. Posons $\mu = \max(\alpha, \beta, \gamma)$ et distinguons trois cas:

1) $\mu = \alpha$. On a donc $\beta \leqslant \mu$ et $\gamma \leqslant \mu$ et il existe des nombres ordinaux $\eta < \psi$ et $\zeta < \psi$ tels que $\beta = \lambda_\eta^{(\mu)}$ et $\gamma = \lambda_\zeta^{(\mu)}$. Si $\eta \leqslant \zeta$, nous conviendrons que $p \in E_2$ et si $\eta > \zeta$ — que $p \in E_3$.

2) $\mu = \beta \neq \alpha$. On a donc $\alpha \leqslant \mu$ et $\gamma \leqslant \mu$ et il existe des nombres ordinaux $\eta < \psi$ et $\zeta < \psi$ tels que $\alpha = \lambda_\eta^{(\mu)}$ et $\gamma = \lambda_\zeta^{(\mu)}$. Si $\eta \leqslant \zeta$, nous conviendrons que $p \in E_1$ et si $\eta > \zeta$ — que $p \in E_3$.

3) $\mu = \gamma \neq \alpha$ et $\mu \neq \beta$. On a donc $\alpha < \mu$ et $\beta < \mu$ et il existe des nombres ordinaux η et ζ tels que $\alpha = \lambda_\eta^{(\mu)}$ et $\beta = \lambda_\zeta^{(\mu)}$. Si $\eta \leqslant \zeta$, nous conviendrons que $p \in E_1$ et si $\eta > \zeta$ — que $p \in E_2$.

Les ensembles E_i $(i = 1,2,3)$ sont ainsi définis, et on a évidemment $E = E_1 + E_2 + E_3$.

Nous démontrerons maintenant que l'ensemble E_1 a moins que $\mathfrak{n}$ éléments sur toute parallèle à l'axe $OX_1 = OX$.

Soient donc b et c deux éléments donnés de l'ensemble M. Il existe des nombres ordinaux $\beta < \varphi$ et $\gamma < \varphi$ bien déterminés (par b et c) tels que $b = u_\beta$ et $c = u_\gamma$. Distinguons deux cas:

1° $\beta \leqslant \gamma$. Il existe alors un nombre ordinal $\zeta < \psi$, bien déterminé par b et c, tel que $\beta = \lambda_\zeta^{(\gamma)}$.

Soit $p = (x,b,c)$ un élément de l'ensemble E_1. Soit α un nombre ordinal, tel que $x = u_\alpha$. Soit $\mu = \max(\alpha, \beta, \gamma)$. Il résulte de la définition de l'ensemble E_1 et de $(x,b,c) \in E_1$ que $\mu \neq \alpha$ et, d'après 1°, on trouve $\mu = \gamma$. On a donc $\alpha < \gamma$ et il existe un nombre ordinal η, bien déterminé par l'élément p, tel que $\alpha = \lambda_\eta^{(\gamma)}$. On a donc $\gamma = \max(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = \lambda_\eta^{(\gamma)}$, $\beta = \lambda_\zeta^{(\gamma)}$ et, comme $(x,b,c) \in E_1$ et vu la définition de l'ensemble E_1 il vient $\eta \leqslant \zeta$. Il y a donc au plus $\bar{\zeta} + 1$, donc, vu que $\zeta < \psi$ et $\overline{\psi} = \mathfrak{n}$, moins que $\mathfrak{n}$ éléments (x,b,c) de l'ensemble E_1.

2° $\beta > \gamma$. Il existe alors un nombre ordinal ζ, bien déterminé par b et c), tel que $\gamma = \lambda_\zeta^{(\beta)}$.

Soient $p = (x,b,c)$ un élément de E_1 et α un nombre ordinal, tel que $x = u_\alpha$. Soit $\mu = \max(\alpha, \beta, \gamma)$. Comme $(x,b,c) \in E_1$, on trouve, comme ci-dessus, $\mu \neq \alpha$ et, d'après 2°, on a $\mu = \beta$. On a donc $\alpha < \beta$ et il existe un nombre ordinal $\eta < \psi$, bien déterminé par l'élément p, tel que $\alpha = \lambda_\eta^{(\beta)}$. On a donc $\beta = \max(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha = \lambda_\eta^{(\beta)}$, $\gamma = \lambda_\zeta^{(\beta)}$ et, comme $(x,b,c) \in E_1$ et vu la définition de l'ensemble E_1, on trouve $\eta \leqslant \zeta$. Il y a donc au plus $\bar{\zeta} + 1$, donc moins que $\mathfrak{n}$ éléments (x,b,c) de l'ensemble E_1.

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble E_1 est de puissance $<\mathfrak{n}$ sur toute parallèle $y = b$, $z = c$ à l'axe OX.

De façon analogue, on démontre que l'ensemble E_2 est de puissance $<\mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe OY et que l'ensemble E_3 est de puissance $<\mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe OZ.

Les ensembles E_i $(i = 1,2,3)$ satisfont donc aux conditions de la proposition P. Il est ainsi démontré que H$\rightarrow$P.

De I et II résulte que P $\equiv$ H, et notre théorème se trouve établi.

Soit, en particulier, M l'ensemble de tous les nombres réels, donc $E = M \times M \times M$ — l'espace euclidien à 3 dimensions. On a donc $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$. Soit $\mathfrak{n} = \aleph_0$. L'hypothèse H devient alors celle du continu. Le théorème 1 implique donc, comme cas particulier, le théorème suivant:

Théorème 2. *L'hypothèse du continu équivaut à l'existence d'une décomposition de l'espace euclidien E à 3 dimensions en trois ensembles E_i $(i=1,2,3)$, tels que, si l'on désigne par OX_i $(i=1,2,3)$ les trois axes de coordonnées de l'espace E, l'ensemble E_i est fini sur toute parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,3$.*

Une démonstration directe de ce théorème paraîtra ailleurs [1]).

Remarques. 1. On peut demander, dans le théorème 2, que les ensembles E_i $(i=1,2,3)$ soient superposables (par rotation). Il suffirait à ce but de remplacer l'ensemble E_1 par la somme $E_1+\varphi(E_2)+\psi(E_3)$, où φ désigne la rotation de l'espace autour de l'axe OY de l'angle 90^0 et ψ désigne la rotation autour de l'axe OZ de l'angle 90^0.

2. On utilise dans la démonstration du théorème 2 la proposition suivante:

α étant un nombre ordinal de classe 2, il existe une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, formée de tous les nombres ordinaux $<\alpha$.

Or, nous ne connaissons pas de définition d'une fonction qui fasse correspondre une telle suite à tout nombre ordinal de classe 2 et, par conséquent, nous ne pouvons pas éviter l'axiome de choix si nous appliquons la proposition mentionnée pour tout nombre ordinal α de classe 2. Cependant l'existence de la correspondance en question peut être déduite de l'hypothèse du continu sans intermédiaire de l'axiome de choix. Nous allons démontrer, en effet, la proposition S suivante:

S. *Si $f(\alpha)$ est une fonction établissant une correspondance biunivoque entre les nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ et les nombres réels x, où $0<x\leqslant 1$, on peut définir (à l'aide de la fonction f) une fonction $\varphi(\alpha)$ qui fasse correspondre à tout nombre ordinal α de classe 2 une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, formée de tous les nombres ordinaux $<\alpha$.*

Démonstration de la proposition S. Nous dirons que le nombre ordinal β jouit de la propriété P_α, si, en désignant par $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot 2^{-n}$

[1]) Dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Cf. aussi ma Note dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. **232**, p. 1046 (Mars 1951).

le développement dyadique du nombre $f(\beta)$, contenant une infinité de chiffres b_n non nuls, les nombres ordinaux

$$\alpha_k=f^{-1}\Big(\sum_{l=1}^{\infty} b_{2^{k-1}(2l-1)}\cdot 2^{-l}\Big) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

forment une suite infinie composée de tous les nombres ordinaux distincts $<\alpha$.

Soit α un nombre ordinal de classe 2. Il existe des nombres ordinaux jouissant de la propriété P_α. En effet, comme $\omega\leqslant\alpha<\Omega$, il existe une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, formée de tous les nombres ordinaux $<\alpha$. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)}\cdot 2^{-n}$ le développement dyadique du nombre réel $f(\alpha_k)$, contenant une infinité de chiffres non nuls. Posons

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(k)}\cdot 2^{-2^{k-1}(2l-1)}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot 2^{-n}.$$

Comme $b_{2^{k-1}(2l-1)}=c_l^{(k)}$ pour k et l naturels, on vérifie sans peine que le nombre ordinal $\beta=f^{-1}(x)$ jouit de la propriété P_α.

L'existence des nombres ordinaux $\beta<\Omega$, jouissant de la propriété P_α, est donc établie. Soit, pour un nombre ordinal donné α de classe 2, γ le plus petit de tous les nombres ordinaux β jouissant de la propriété P_α, soit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot 2^{-n}$ le développement dyadique du nombre $f(\gamma)$, contenant une infinité de chiffres non nuls. Posons

$$\alpha_k=f^{-1}\Big(\sum_{l=1}^{\infty} c_{2^{k-1}(2l-1)}\cdot 2^{-l}\Big) \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots$$

La suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ est ainsi bien déterminée par le nombre ordinal α. Le nombre γ jouissant de la propriété P_α, cette suite est formée de tous les nombres ordinaux $<\alpha$. La fonction $\varphi(\alpha)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ satisfait donc aux conditions imposées et la proposition S se trouve établie.

Soit, comme auparavant, M — l'ensemble de tous les nombres réels, donc $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$, et soit $\mathfrak{n}=\aleph_1$. L'hypothèse H veut donc dire qu'il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{p}$ tel que $\aleph_1<\mathfrak{p}<2^{\aleph_0}$, ce qui équivaut, comme on le voit sans peine, à l'hypothèse que $2^{\aleph_0}\leqslant\aleph_2$. Le théorème 1 donne ainsi le

Théorème 3. *L'hypothèse que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_2$ équivaut à l'existence d'une décomposition de l'espace euclidien E à 3 dimensions en trois ensembles E_i $(i=1,2,3)$, tels que, si l'on désigne par OX_i $(i=1,2,3)$ les trois axes de coordonnées des l'espace E, l'ensemble E_i est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,3$.*

Il est intéressant de rapprocher le théorème 3 du théorème suivant:

Théorème 4. *L'hypothèse du continu équivaut à l'existence d'une décomposition du plan en deux ensembles dont l'un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses* [2]).

Sans faire usage de l'hypothèse du continu, on peut démontrer que le plan est une somme de deux ensembles, dont l'un est de puissance $<2^{\aleph_0}$ sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est de puissance $<2^{\aleph_0}$ sur toute parallèle à l'axe d'abscisses [3]).

Dans cet ordre d'idées nous allons établir le théorème suivant:

Théorème 5. *Si M est un ensemble dénombrable et N un ensemble indénombrable, le produit cartésien $M \times N$ n'est pas une somme de deux ensembles dont l'un serait fini sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées.*

Démonstration. L'ensemble M étant dénombrable, rangeons-le en une suite infinie $u_1, u_2, \ldots$, formée d'éléments distincts. L'ensemble N étant indénombrable, il existe un sous-ensemble N_1 de N de puissance $\aleph_1$, et il existe une suite transfinie du type Ω, $\{v_\xi\}_{\xi<\Omega}$, à termes distincts formée de tous les éléments de N_1.

Supposons que $M \times N = E_1 + E_2$, où l'ensemble E_1 est fini sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'ensemble E_2 est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées. Il existe donc, pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$, un nombre fini de nombres naturels n tels que $(u_n, v_\xi) \in E_1$. Il existe, par conséquent, pour tout $\xi<\Omega$, un nombre naturel m_ξ tel que (u_{m_ξ}, v_ξ) non $\in E_1$, donc que $(u_{m_\xi}, v_\xi) \in E_2$. L'ensemble des nombres ordinaux $\xi<\Omega$ étant indénombrable et l'ensemble des nombres naturels étant dénombrable, il existe un nombre naturel m tel qu'on a $m_\xi = m$ pour une infinité indénombrable Q de nombres ordinaux $\xi<\Omega$. Il vient $(u_m, v_\xi) \in E_2$ pour $\xi \in Q$. L'ensemble E_2 a donc une infinité indénombrable d'éléments sur la parallèle $x=u_m$ à l'axe d'ordonnées, contrairement à l'hypothèse. Le théorème 5 implique aussitôt le corollaire suivant:

Corollaire. *Le plan n'est pas une somme de deux ensembles dont l'un serait fini sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées* [4]).

Plus encore: on peut démontrer que le plan n'est pas une somme de deux ensembles dont l'un serait fini sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre contiendrait moins que $2^{\aleph_0}$ points sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées.

Citons encore sans démonstration les théorèmes suivants:

L'hypothèse du continu équivaut à la proposition suivante: tout ensemble plan qui n'est pas de puissance du continu est une somme de deux ensembles dont l'un est fini sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est fini sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées [5]).

Pour qu'un ensemble X de nombres réels soit au plus dénombrable, il faut et il suffit que son carré cartésien $X \times X$ soit somme de deux ensembles dont l'un est fini sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est fini sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées.

Il existe des ensembles indénombrables X de nombres réels, tels que l'ensemble $X \times X$ a deux points au plus sur toute droite parallèle à la droite $x+y=0$. Telle est, par exemple, une base hamelienne.

Pour qu'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{n}<2^{\aleph_0}$ tel que le plan soit somme de deux ensembles dont l'un soit de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre soit de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées, il faut et il suffit qu'on ait $2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$ (où α est un nombre ordinal).

---

[2]) Voir ma note du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, séance du 21 février 1919; ainsi que Fundamenta Mathematicae **5** (1924), p. 179.

[3]) Voir mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne, t. 4, Warszawa-Lwów 1934, p. 9.

[4]) Cette proposition fut démontrée par H. Tietze dans Mathematische Annalen **88** (1923), p. 291.

[5]) Pour la démonstration, voir ma note dans le Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège 1951, p. 297.

L'hypothèse que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_2$ équivaut à la proposition suivante: tout ensemble situé dans l'espace euclidien à 3 dimensions et qui n'est pas de puissance du continu, est une somme de trois ensembles E_1, E_2 et E_3, tels que si l'on désigne par OX_i $(i=1,2,3)$ les trois axes de coordonnées de l'espace, l'ensemble E_i est fini sur toute droite parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,3$.

Appelons *image géométrique* d'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle l'ensemble de tous les points (x,y) du plan tels que $y=f(x)$. Appelons *courbe* tout ensemble plan qui est superposable (par translation ou par rotation) avec l'image géométrique d'une fonction d'une variable réelle.

Nous allons démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu le théorème suivant:

Tout ensemble plan de puissance $\leqslant \aleph_1$ est contenu dans la somme d'une suite infinie de courbes.

En effet, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 4, et si $2^{\aleph_0}>\aleph_1$, notre théorème résulte tout de suite du théorème suivant que nous démontrerons sans faire appel à l'hypothèse du continu:

E étant un ensemble plan tel que $\overline{\overline{E}}<2^{\aleph_0}$, il existe une courbe qui passe par tous les points de l'ensemble E.

Démonstration. Soit E un ensemble plan tel que $\overline{\overline{E}}<2^{\aleph_0}$. L'ensemble G de tous les nombres réels $(y_1-y_2):(x_1-x_2)$, où $x_1 \neq x_2$, $(x_1,y_1) \in E$ et $(x_2,y_2) \in E$ est, comme on le voit sans peine, de puissance $<2^{\aleph_0}$. Soit a un nombre tel que $a \bar{\in} G$.

Toute droite D parallèle à la droite $y=ax$ contient tout au plus un point de l'ensemble E. En effet, soient D une telle droite, $(x_1,y_1) \in ED$ et $(x_2,y_2) \in ED$. Donc $y_1=ax_1+b$ et $y_2=ax_2+b$. En supposant que $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$, on aurait $x_1 \neq x_2$, d'où $a=(y_1-y_2):(x_1-x_2)$, contrairement à l'hypothèse que $a \bar{\in} G$.

Prenons maintenant la droite $y=ax$ comme nouvelle axe d'ordonnées. Dans ce nouveau système de coordonnées, il existe, pour tout nombre réel x, au plus un point de l'ensemble E à l'abscisse x. S'il existe un tel point (x,y), posons $f(x)=y$, sinon — posons $f(x)=0$. On voit sans peine que la courbe $y=f(x)$ passe par tous les points de l'ensemble E. Notre théorème est ainsi établi.

Le problème s'impose de reconnaître si la proposition: *le plan est une somme d'une suite infinie de courbes* — entraîne l'hypothèse du continu.

En admettant que $2^{\aleph_0}$ est un aleph dont l'indice est un nombre ordinal de première espèce, on démontre facilement que le plan est une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ courbes.

Nous allons démontrer d'autre part que si $2^{\aleph_0}=\aleph_\Omega$, le plan est une somme de $\aleph_1$ courbes.

En effet, en admettant que $2^{\aleph_0}=\aleph_\Omega$, on a $2^{\aleph_0}=\sum_{\alpha<\Omega}\aleph_\alpha$. Le plan est donc une somme de $\aleph_1$ ensembles dont chacun est de puissance inférieure à $2^{\aleph_0}$.

D'après la proposition démontrée ci-dessus, il existe pour chacun de ces ensembles une courbe qui passe par tous ses points. La somme de ces $\aleph_1$ courbes remplit le plan.

Reste ouvert le problème si on peut démontrer, sans admettre aucune hypothèse sur le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$, que le plan est une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ courbes.

En résolvant un problème posé par M. A. Mostowski, je démontrerai maintenant le

Théorème 6. *m étant un nombre naturel, l'espace euclidien E à 3 dimensions n'est pas une somme de trois ensembles E_1, E_2 et E_3 tels que l'ensemble E_1 ait au plus m points sur chaque parallèle à l'axe OX, l'ensemble E_2 ait un nombre fini de points sur chaque parallèle à l'axe OY et l'ensemble E_3 ait moins que $2^{\aleph_0}$ points sur chaque parallèle à l'axe OZ.*

Démonstration. Supposons que l'espace E soit somme de trois ensembles E_1, E_2 et E_3, où E_1 a au plus m points sur chaque parallèle à l'axe OX, E_2 est fini sur chaque parallèle à l'axe OY et E_3 a moins que $2^{\aleph_0}$ points sur chaque parallèle à l'axe OZ.

Désignons, pour k naturel et c réel, par $Q(k,c)$ l'ensemble de tous les points (k,y,c) de E_2. L'ensemble $Q(k,c)$ est (pour tout k naturel et c réel donné) fini, ainsi que l'ensemble $S(c)=\sum_{k=1}^{m+1} Q(k,c)$. Il existe donc, pour tout c réel donné, un nombre naturel y_c qui est plus grand que toute coordonnée y d'un point de l'ensemble $S(c)$. L'ensemble de tous les nombres naturels étant dénombrable et l'ensemble de tous les nombres réels étant de puissance $2^{\aleph_0}$, et vu que (d'après le théorème de J. König) le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$ n'est pas une somme d'une série infinie de nombres cardinaux plus petits, nous concluons qu'il existe un nombre naturel q tel que $y_c=q$ pour un ensemble N de puissance du continu de nombres réels c.

Si, pour un nombre naturel $k \leqslant m+1$, un nombre réel y et un nombre c de N, on a $(k,y,c) \in E_2$, alors $(k,y,c) \in S(c)$, donc, d'après la définition des nombres y_c et du nombre q, $y<q$. Il en résulte que, pour $k=1,2,\ldots,m+1$ et $c \in N$, on a (k,q,c) non $\in E_2$, donc $(k,q,c) \in E_1+E_3$.

Soit, pour $k=1,2,\ldots,m+1$, T_k l'ensemble de tous les points (k,q,z) de E_3, où $z \in N$. D'après l'hypothèse faite sur E_3, l'ensemble T_k $(k=1,2,\ldots,m+1)$ est de puissance $<2^{\aleph_0}$, de même que l'ensemble $\sum_{k=1}^{m+1} T_k$ et sa projection G sur l'axe OZ.

L'ensemble N étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe un nombre c de N tel que $(0,0,c)$ non $\in G$. Il en résulte que (k,q,c) non $\in E_3$ pour $k=1,2,\ldots,m+1$. On a donc $(k,q,c) \in E_1$ pour $k=1,2,\ldots,m+1$, ce qui prouve que la droite $y=q$, $z=c$, parallèle à l'axe OX, a au moins $m+1$ points communs avec l'ensemble E_1, contrairement à l'hypothèse.

Le théorème 6 est ainsi démontré.

D'après une remarque de M. Sikorski, on peut généraliser le théorème 6 (sans modifier sa démonstration) comme suit:

Le produit cartésien $M \times N \times Q$, où $\overline{\overline{M}}=m+1$ (m naturel) $\overline{\overline{N}}=\aleph_0$ et $\overline{\overline{Q}}=\aleph_\lambda$, où λ est un nombre ordinal >0, non confinal avec ω, n'est pas une somme de trois ensembles E_1, E_2 et E_3, où E_1 aurait au plus m éléments sur chaque parallèle à l'axe OX_1, E_2 moins que $\aleph_0$ éléments sur chaque parallèle à l'axe OX_2 et E_3 moins que $\aleph_\lambda$ éléments sur chaque parallèle à l'axe OX_3.

Théorème 7. *m et n étant des nombres naturels, l'espace euclidien E à n dimensions n'est pas une somme de n ensembles E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tels que l'ensemble E_i ait au plus m points sur chaque parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,\ldots,n$.*

Le théorème 7 est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme. *m et n étant des nombres naturels, soient: $q=mn+1$, $Q=\{1,2,\ldots,q\}$ et T l'ensemble de tous les points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de l'espace E à n dimensions, où $x_i \in Q$ pour $i=1,2,\ldots,n$.*

Thèse: *l'ensemble T n'est pas une somme de n ensembles E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tels que l'ensemble E_i ait au plus m points sur chaque parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,\ldots,n$.*

Démonstration du lemme. Supposons que l'ensemble T soit somme de n ensembles E_i $(i=1,2,\ldots,n)$, tels que l'ensemble E_i a au plus m points sur chaque parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,\ldots,n$. Le nombre de ces parallèles qui passent par les points de l'ensemble T étant évidemment q^{n-1}, l'ensemble E_i a au plus mq^{n-1} éléments, d'où il résulte que l'ensemble T a au plus $nmq^{n-1}=(q-1)q^{n-1}<q^n$ éléments, ce qui est impossible, puisque, par définition, l'ensemble T a q^n éléments.

Théorème 8. *L'hypothèse du continu,* H, *équivaut à la proposition* Q *suivante:*

Q. *L'espace euclidien E à 3 dimensions est une somme de trois ensembles E_i $(i=1,2,3)$ tels que, pour $i=1,2,3$, l'ensemble E_i est au plus dénombrable sur tout plan perpendiculaire à l'axe OX_i.*

Démonstration. I. H$\rightarrow$Q.

Admettons l'hypothèse H. Il existe alors une suite transfinie $\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$ du type Ω, formée de tous les nombres réels. Soit E_1 l'ensemble de tous les points $p=(u_\alpha,u_\beta,u_\gamma)$, où $\alpha \geqslant \beta$ et $\alpha \geqslant \gamma$, E_2 — l'ensemble de ceux, où $\alpha<\beta$ et $\beta \geqslant \gamma$, et E_3 — l'ensemble de ceux, où $\alpha<\gamma$ et $\beta<\gamma$. On a évidemment $E=E_1+E_2+E_3$.

L'ensemble E_1 est au plus dénombrable sur tout plan perpendiculaire à l'axe $OX_1=OX$. Soit, en effet, $x=a$ un tel plan. Soit α un nombre ordinal $<\Omega$ tel que $x=u_\alpha$. Soit $p=(a,y,z)$ un point de E_1. Il existe des nombres ordinaux $\beta<\Omega$ et $\gamma<\Omega$, bien déterminés par le point p, tels que $y=y_\beta$ et $z=u_\gamma$. Comme $p \in E_1$, on déduit de la définition de l'ensemble E_1 que $\beta \leqslant \alpha$ et $\gamma \leqslant \alpha$. Comme $\alpha<\Omega$, l'ensemble de tous les systèmes de nombres ordinaux β,γ, tels que $\beta \leqslant \alpha$ et $\gamma \leqslant \alpha$, est au plus dénombrable. Il en résulte que l'ensemble de tous les points (a,y,z) de l'ensemble E_1 est au plus dénombrable. Nous avons ainsi démontré que l'ensemble E_1 est au plus dénombrable sur tout plan perpendiculaire à l'axe OX.

De façon analogue, l'ensemble E_2 est au plus dénombrable sur tout plan perpendiculaire à l'axe OY et l'ensemble E_3 est au plus dénombrable sur tout plan perpendiculaire à l'axe OZ.

Les ensembles E_i $(i=1,2,3)$ satisfont donc à la proposition Q. Il est ainsi établi que H$\rightarrow$Q.

II. Q$\rightarrow$H.

Admettons la proposition Q et supposons que l'hypothèse H ne soit pas vraie, donc que $2^{\aleph_0}>\aleph_1$. Soit N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$. Pour tout nombre $a \in N$, l'ensemble de tous

les points $(a,y,0)$ de E_1 est au plus dénombrable. L'ensemble G de tous les points $(a,y,0)$ de E_1, où $a \in N$, est donc de puissance $\leqslant \aleph_0 \aleph_1 = \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ de même que la projection T de G sur l'axe OY. Il existe donc un point $(0,b,0)$ de l'axe OY qui n'appartient pas à T. Il en résulte que le plan $y=b$ n'a aucun point commun avec l'ensemble G. Donc, pour $x \in N$, on a $(x,b,0)$ non $\in E_1$, d'où $(x,b,0) \in E_2+E_3$. L'ensemble des points $(x,b,0)$, où $x \in N$, étant indénombrable, l'un au moins des ensembles E_2 et E_3 contient une infinité indénombrable de points $(x,b,0)$. Or, chacun de ces points étant situé sur le plan $y=b$ et en même temps sur le plan $z=0$, cela est incompatible avec les hypothèses faites sur les ensembles E_2 et E_3.

L'hypothèse que Q soit vrai et H faux implique donc une contradiction. On a ainsi Q→H.

Théorème 9. *L'espace euclidien E à 3 dimensions n'est pas une somme de 3 ensembles E_i $(i=1,2,3)$ où, pour $i=1,2$, l'ensemble E_i serait fini sur tout plan perpendiculaire à l'axe OX_i et l'ensemble E_3 aurait moins que $2^{\aleph_0}$ points sur tout plan perpendiculaire à l'axe OX_3.*

Démonstration. Supposons par contre que l'espace E soit somme de trois ensembles E_i de ce genre. Soit G l'ensemble de tous les points de E_3 situés sur les plans $z=k$, où $k=1,2,3,\ldots$ Sur chacun de ces plans, l'ensemble E_3 est de puissance $<2^{\aleph_0}$ et il résulte (d'après le théorème de J. König) que l'ensemble G est de puissance $<2^{\aleph_0}$, de même que sa projection T sur le plan OX_1X_2. Soit $(a,b,0)$ un point de ce plan qui n'appartient pas à T. Aucun des points (a,b,k), où $k=1,2,\ldots$, n'appartient donc à E_3 et par suite chacun d'eux appartient à E_1+E_2. Un au moins des ensembles E_1 et E_2 contient donc une infinité de points de la droite $x=a$, $y=b$ située à la fois sur les plans $x=a$ et $y=b$. Mais cela est incompatible avec les hypothèses faites sur E_1 et E_2.

Le théorème 9 est ainsi démontré.

D'après une remarque de M. Sikorski, le théorème 9 peut être généralisé au cas du produit cartésien $M \times N \times Q$, où $\overline{\overline{Q}}=\aleph_0$, $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}=\aleph_\lambda$ et où λ est un nombre ordinal non confinal avec ω.

Ajoutons qu'on peut démontrer facilement le théorème suivant:

L'ensemble de tous les points de l'espace euclidien E à 3 dimenmensions dont les coordonnées sont rationnelles est une somme de trois ensembles E_i $(i=1,2,3)$, tels que, pour $i=1,2,3$, l'ensemble E_i soit fini sur tout plan perpendiculaire à l'axe OX_i.

Citons finalement le théorème suivant:

Théorème 10. *L'hypothèse: $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_2$ équivaut à l'existence d'une décomposition de l'espace euclidien E à 4 dimensions en 4 ensembles E_i $(i=1,2,3,4)$ tels que si l'on désigne par OX_i $(i=1,2,3,4)$ les 4 axes de coordonnées de l'espace E, l'ensemble E_i est fini sur toute parallèle à l'axe OX_i, pour $i=1,2,3,4$.*

Pour la démonstration, on pourra consulter la note citée de M. Kuratowski.