seems to be an appropriate tool for treating duality theorems of the kind studied above. The same homology theory has been developed also by P. Alexandroff in: *A general law of duality for non-closed sets in n-dimensional space*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) 57 (1947) pp. 107—110 (Russian).

Using the Kaplan-Alexandroff homology, theorem III may be formulated as follows

Theorem IIIa. *Let $F_1, F_2, \ldots$ be a sequence of closed sets not meeting A and such that there is a point $p \in A$ with $F_i \cdot F_j \subset (p)$, $i \neq j$. Then $\mathfrak{z} \sim 0$ in $S_n - \sum F_i$ if and only if each F_i is a 0-Lk-set.*

The proof of Miss Mullikin's theorem utilizing this homology concept remains verbally the same.

Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht.

Enden und Primenden *).

Von

H. Freudenthal (Utrecht).

Ein nichtkompakter Raum kann immer auf vielerlei Weisen kompaktifiziert werden; eine Gerade z. B. durch einen oder durch zwei „unendlich ferne" Punkte, die Ebene durch eine uneigentliche Gerade zur projektiven Ebene oder durch einen uneigentlichen Punkt zur funktionentheoretischen Ebene (zweidimensionalen Sphäre). Sucht man nun eine „natürliche" Kompaktifizierung, so kann bei diesen Beispielen die Wahl nicht schwierig sein: Die Gerade besitzt zwei deutlich unterschiedene Unendlichkeiten — warum sollte man die in einen Punkt zusammenfallen lassen? Die Ebene dagegen steht nicht in einer topologisch eindeutig bestimmten Beziehung zu einer etwa hinzugefügten Geraden; die Einführung *eines* uneigentlichen Punktes befriedigt hier das Kompaktifizierungsbedürfnis.

Man wird die „ideale" Kompaktifizierung [2-5] durch zwei Forderungen erzwingen:

1. Die hinzugefügte Punktmenge soll möglichst „dünn" sein (z. B. kein Kontinuum, wenn ein Punkt ausreicht).

2. Die Menge der neuen Limesrelationen soll möglichst klein sein (nicht jede divergente Folge soll zu einer konvergenten ernannt werden, wenn man sich mit bescheideneren Festsetzungen begnügen kann).

De Groot [5] hat diese Forderungen folgendermaßen präzisiert:

Das Kompaktum $\tilde{R}$ heißt *ideale Kompaktifikation* des separabelen metrisierbaren Raumes R, wenn

*) Der Inhalt dieser Arbeit ist auf der Topologischen Tagung des Mathematischen Centrums in Amsterdam (1948) vorgetragen worden. Bei der Ausarbeitung habe ich von kritischen Bemerkungen des Herrn R. Lijdsman dankbar Gebrauch machen können.

1⁰ $\dim \widetilde{R} \setminus R = 0$ ist,

2⁰ jede andere Kompaktifikation, die 1 erfüllt, mehr konvergente Folgen beansprucht.

Es zeigte sich [4], daß solch eine ideale Kompaktifikation möglich ist für die separabelen Räume R, die bündig [1]) und semikompakt [2]) sind.

Wir lassen in dieser Arbeit nun die Forderung der Semikompaktheit fallen. Dabei müssen wir aber den Begriff der Kompaktifizierung erweitern. Daß das nötig ist, sieht man an folgenden Beispielen:

1. Offene Kreisscheibe plus drei Randpunkte — wünscht man, daß die Kompaktifikation eindeutig bestimmt ist, so muß man die drei Randpunkte in einen Punkt zusammenwerfen, der als Limes aller divergenten Folgen auftritt.

2. Offene Kreisscheibe plus zwei getrennte Bogen auf dem Rand — man muß jeden der auf dem Rand fehlenden Bogen auf einen Punkt zusammenziehen; es entsteht das topologische Bild einer Kreisscheibe.

3. Offene Kugel plus Meridian auf der Kugeloberfläche — die Kompaktifikation ist eine dreidimensionale Sphäre.

Diese Beispiele zeigen, daß man bei der „idealen" Kompaktifikation wohl Identifikationen zulassen muß, wenn man die Forderung der Semikompaktheit fallen läßt.

Andererseits muß man auch bei der Konstruktion der Kompaktifikation neue Wege einschlagen. In [2, 3] wurden wesentlich absteigende Folgen offener Mengen in R mit kompakter Berandung betrachtet und mit ihrer Hilfe die Punkte von $\widetilde{R}$ definiert. Daß diese Methode nun nicht ausreicht, sieht man an den Beispielen 1-3 und noch deutlicher durch die folgende Überlegung:

R sei aus dem Kompaktum $\widetilde{R}$ entstanden durch Weglassung einer diskontinuierlichen Menge $\widetilde{R} \setminus R$ (d. h. einer Menge, die kein Kontinuum enthält); wir wollen $\widetilde{R}$ aus R zurückerhalten. Das kann geschehen, indem man einen Punkt π von $\widetilde{R} \setminus R$ definiert durch eine absteigende Folge von Umgebungen von π in R. Um zu entscheiden, welche offenen Mengen und welche Folgen offener Mengen in R man bei der Erzeugung von Punkten von $\widetilde{R}$ zuläßt, muß man hauptsächlich wissen, welche Inklusionen offener Mengen $O \subset P$ starken Inklusionen $\widetilde{O} \Subset \widetilde{P}$ in $\widetilde{R}$ entsprechen, oder (was auf dasselbe hinauskommt) welche offenen Mengen O, P aus R sich in R nicht und welche sich in $\widetilde{R}$ wohl berühren. Ist π solch ein Berührungspunkt und Q_n eine absteigende Folge von zusammenhängenden Umgebungen von π in R, so bemerkt man, daß in R abgeschlossene Mengen Q_n existieren, die O mit P verbinden und deren Durchschnitt in R leer ist.

Diese heuristische Betrachtung führt zu folgender Definition:

$O \curlywedge P$ (*O bleibt entfernt von P*) bedeutet: Jede absteigende Folge abgeschlossener Mengen Z_n, die zwischen O und P zusammenhängen, besitzt in $R \setminus O \cup P$ einen nichtleeren Durchschnitt [3]).

Wir nennen nun eine stetige Abbildung ϑ von R in ein Kompaktum S eine *$\curlywedge$-Kompaktifizierung*, wenn $\vartheta(R) = S$ ist und für jedes Paar offener Mengen O^* und P^* aus S mit $O^* \cap P^* = \bigcirc$ gilt: $\vartheta^{-1}(O^*) \curlywedge \vartheta^{-1}(P^*)$ (d. h. wenn ϑ keine neuen $\curlywedge$-Relationen einführt).

Ist R bündig, so gibt es unter den $\curlywedge$-Kompaktifikationen eine *schwächste*, η, mit $\eta(R) \subset \widetilde{R}$ (d. h. zu jeder $\curlywedge$-Kompaktifizierung $\vartheta(R) \subset S$ gibt es dann eine stetige Abbildung $\zeta(\widetilde{R}) = S$, so daß $\zeta\eta = \vartheta$).

Der Konstruktion dieser Kompaktifizierung ist der größte Teil dieser Untersuchung gewidmet. Für Räume R, die außer der Eigenschaft der Bündigkeit noch die der Semikompaktheit besitzen, stimmt diese Kompaktifizierung mit der von [3] durch Endpunkte überein. Die Hauptschwierigkeit ist auch hier wieder, die Separabilität von $\widetilde{R}$ einzusehen. Hierbei braucht man wesentlich die Bündigkeit. Wie ein Beispiel in [3] gezeigt hat, kann man eine derartige Voraussetzung nicht entbehren, wenn man eine eindeutig bestimmte Kompaktifizierung sucht.

Andererseits kann man nach Verzicht auf die Semikompaktheit von R die Theorie der Primenden unserer Kompaktifizierungstheorie unterordnen. Nach Carathéodory [1] haben Kaufman [6] und Mazurkiewicz [7] Primenden für Gebiete in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert. Ist Q solch eine Mannigfaltigkeit, so kann man in Q erst eine neue Metrik ϱ^* statt der alten, ϱ, einführen durch die Festsetzung

---

[1]) R ist *bündig*, wenn sein Quasikomponentenraum kompakt ist, d. h. wenn R nur abzählbar viel Teilmengen besitzt, die sowohl offen als auch geschlossen sind.

[2]) R heißt *semikompakt*, wenn jeder Punkt beliebig kleine Umgebungen mit kompakter Berandung besitzt [8].

[3]) Die Voraussetzung, dass O und P in R keinen gemeinsamen Berührungspunkt besitzen, nehmen wir in die Definition nicht auf; sie diente nur zur heuristischen Motivierung. Die Bedeutung dieser Definition erhellt, wenn man sie auf die Beispiele 1—3 anwendet.

$\varrho^*(x,y)$ = untere Grenze der Durchmesser der x and y verbindenden Bögen.

In dieser neuen Metrik kann man die vollständige Hülle R von Q bilden. Die Kompaktifizierung nach unserer Definition, $\tilde{R}$, von R stimmt nun, wie sich zeigt, überein mit der Mazurkiewiczschen Kompaktifizierung durch Primenden, von der die Carathéodorysche der zweitdimensionale Spezialfall ist. Ess cheint uns, daß unsere Methode (nicht nur allgemeiner sondern auch) einfacher ist als die von Mazurkiewicz.

Bezeichnungen.

$\bigcirc$ = leere Menge.
$\cup$, $\bigcup$ Zeichen für Vereinigung.
$\cap$, $\bigcap$ „ „ Durchschnitt.
$A \setminus B$ = Menge der x mit $x \in A$, $x \notin B$.
Es werden stets separabele metrisierbare Räume vorausgesetzt.
$E[f<\alpha]$ = Menge der Argumente von f, für die $f<\alpha$ ist.

1. Der Begriff $\curlywedge$.

1.1. Das Paar Z_V, Z_W heißt eine *Zerlegung* der Menge Z zwischen den Mengen V und W, wenn

$$Z = Z_V \cup Z_W, \qquad (Z_V \cup V) \cap (Z_W \cup W) = \bigcirc$$

ist und $Z_V \cup V$ und $Z_W \cup W$ offen in $Z \cup V \cup W$ sind.

1.2. Z heißt *zusammenhängend zwischen V und W*, wenn keine Zerlegung von Z zwischen V und W existiert.

1.3. Ist Z zusammenhängend zwischen V und W, und ist $Z' \supset Z$ so ist auch Z' zusammenhängend zwischen V und W.

1.4. Ist Z zusammenhängend zwischen V und W, und ist $V' \supset V$, so ist Z auch zwischen V' und W zusammenhängend.

Denn ist $Z_{V'}$, Z_W eine Zerlegung von Z zwischen V' und W, so ist $Z_{V'} \cap V$, Z_W eine zwischen V und W.

1.5. Ist Z zusammenhängend zwischen $V = V_1 \cup V_2$ und W, so ist entweder $Z^1 = Z \setminus V_2$ zusammenhängend zwischen V_1 und W oder $Z^2 = Z \setminus V_1$ zwischen V_2 und W.

Beweis. Sei $Z^\nu_{V_\nu}$, Z^ν_W eine Zerlegung von Z^ν zwischen V_ν und W. Wir schreiben

$$Z_V = Z^1_{V_1} \cup Z^2_{V_2}, \quad Z_W = Z^1_W \cap Z^2_W.$$

Dann ist

$$Z \supset Z_V \cup Z_W \supset Z^1_{V_1} \cup (Z^2_{V_2} \cap Z^1_W) \cup (Z^2_W \cap Z^1_W)$$
$$\supset Z^1_{V_1} \cup Z^1_W = Z^1 = Z \setminus V_2$$

und ebenso $Z_V \cup Z_W \supset Z^2 = Z \setminus V_1$, also $Z = (Z_V \cup V) \cup Z_W$; ferner

$$(Z_V \cup V) \cap (Z_W \cup W) = (Z^1_{V_1} \cup Z^2_{V_2} \cup V) \cap [(Z^1_W \cap Z^2_W) \cup W]$$
$$= [(Z^1_{V_1} \cup V) \cup (Z^2_{V_2} \cup V)] \cap [(Z^1_W \cup W) \cap (Z^2_W \cup W)] = \bigcirc;$$

schließlich $Z^1_{V_1} \cup V_1$ offen in $Z^1 \cup V_1 \cup W$, also auch $Z^1_{V_1} \cup V = Z^1_{V_1} \cup V_1 \cup V_2$ offen in $Z^1 \cup V_1 \cup V_2 \cup W = Z \cup V \cup W$, also auch $Z^2_{V_2} \cup V$ offen in $Z \cup V \cup W$, und ebenso $Z_V \cup V$ offen in $Z \cup V \cup W$.

Ebenso ist $Z_W \cup W$ offen in $Z \cup V \cup W$.

Also wäre $Z_V \cup V$, Z_W eine Zerlegung von Z zwischen V und W. Existiert die nicht, so muß auch eine der vorausgesetzten Zerlegungen nicht existieren.

1.6. Eine abgeschlossene Menge Z, die zwischen den offenen Mengen O, P zusammenhängt, heißt auch *Brücke* zwischen O und P.

1.7. Eine absteigende Folge von Brücken $Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots$ zwischen O und P heißt *Scheinbrücke*, wenn $\bigcap Z_n \subset O \cup P$ ist.

1.8. $O \curlywedge P$ bedeutet: Es gibt keine Scheinbrücke zwischen O und P.

1.9. Ist $O_1 \subset O_2 \curlywedge P$, so ist $O_1 \curlywedge P$.

Folgt aus 1.4.

1.10. Ist $O_\nu \curlywedge P$ $(\nu=1,2)$, so ist $(O_1 \cup O_2) \curlywedge P$.

Beweis. Sei $Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots$ eine Folge von Brücken zwischen $O = O_1 \cup O_2$ und P. Ist $Z_n \setminus O_1$ nicht für alle n zusammenhängend zwischen O_2 und P, so gibt es ein n_0, so dass $Z_n \setminus O_1$ nicht zusammenhängt zwischen O_2 und P für alle $n > n_0$. Dann ist (nach 1.5) $Z_n \setminus O_2$ zusammenhängend für alle $n > n_0$, also (nach 1.3) sogar für alle n. Wäre nun $\bigcap Z_n \subset O \cup P$, so wäre $\bigcap (Z_n \setminus O_2) = (\bigcap Z_n) \setminus O_2 \subset O_1 \cup P$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist $Z_n \setminus O_1$ wohl für alle n zusammenhängend zwischen O_2 und P, so schließt man analog.

1.11. Ist $O_\nu \curlywedge P_\nu$ $(\nu=1,2)$, so ist $(O_1 \cup O_2) \curlywedge (P_1 \cap P_2)$.
Folgt aus 1.9-10.

1.12. Sei $O_1 \cup O_2 = O \curlywedge P$, $R \setminus P = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \bigcirc$, C_ν abgeschlossen in R, $O_\nu \subset C_\nu$. Dann ist $O_1 \curlywedge O_2$.

Beweis. Sei $Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots$ eine Folge von Brücken zwischen O_1 und O_2. Wäre $Z_{n,O}$, $Z_{n,P}$, eine Zerlegung von Z_n zwischen O und P, so wäre $Z_{n,O_1} = Z_{n,O} \cap C_1$, $Z_{n,O_2} = Z_{n,P} \cup (Z_{n,O} \cap C_2)$ eine Zerlegung zwischen O_1 und O_2 im Widerspruch zur Annahme. Also ist Z_n zusammenhängend zwischen O und P, also $\cap Z_n$ nicht in $O \cup P$, also auch nicht in $O_1 \cup O_2$. Also $O_1 \curlywedge O_2$.

2. Bündige Räume.

2.1. *Brocken* eines Raumes heißt jede Teilmenge, die zugleich offen und abgeschlossen ist.

2.2. Unter *Quasikomponenten* von R verstehen wir die minimalen Durchschnitte $\neq \bigcirc$ von Brocken von R. Sie bilden eine Menge, die wir $Q(R)$ nennen. Die den Punkt p enthaltende Quasikomponente heißt $\sigma_R(p)$. Die Menge aller $\sigma_R(p)$ mit $p \in M (\subset R)$ heißt $\sigma_R(M)$.

$Q(R)$ wird topologisiert durch die Festsetzung: Die $\sigma_R(B)$, wo B alle Brocken von R durchläuft, bilden eine Basis der abgeschlossenen Mengen von $Q(R)$.

2.3. $Q(R)$ ist nulldimensional.

2.4. Sei $\dim T = 0$. T ist dann und nur dann kompakt, wenn es nicht mehr als abzählbar viel verschiedene Brocken besitzt.

Beweis. Sei $U_1, U_2, \ldots$ eine Basis der offenen Mengen von T, und sei jedes U_n abgeschlossen. Jeder Brocken B von T ist Vereinigung gewisser U_n. Ist T kompakt, so ist auch B kompakt, also bereits Vereinigung endlich vieler U_n. Aus $U_1, U_2, \ldots$ kann man nur abzählbar viele endliche Vereinigungen bilden. Also gibt es nur abzählbar viele B. Ist T dagegen nicht kompakt, so gibt es eine divergente Punktfolge $a_1, a_2, \ldots$ in T. Es gibt Brocken U_n, die bzw. Umgebungen von a_n sind, und so, daß $U_\mu \cap U_\nu = 0$ (für alle $\mu \neq \nu$) und $\lim$ Durchmesser $U_n = 0$ ist. Dann ist $\bigcap\limits^{n} U_n$ abgeschlossen und für jede Teilfolge n der natürlichen Zahlen ist auch $\bigcap\limits_{\nu} U_{n_\nu}$ offen und abgeschlossen, also ein Brocken. Es gibt deren also Kontinuum viel verschiedene.

2.5. Sei M eine abgeschlossene kompakte Teilmenge von R. Sei $\mathfrak{T}$ eine Basis der offenen Mengen von R, die mit zwei Mengen auch ihren Durchschnitt und ihre Vereinigung enthält. Dann gibt es zu jeder Umgebung O von M ein $T \in \mathfrak{T}$ mit

$$M \subset T \subset O.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{T}'$ eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$, die besteht aus den T mit $T \subset O$. Dann ist

$$M \subset \bigcup_{T \in \mathfrak{T}'} T \subset O.$$

M ist aber kompakt und darum bereits in der Vereinigung endlich vieler $T \in \mathfrak{T}'$, also in einem $T_0 \in \mathfrak{T}'$ enthalten; $T_0 \subset O$.

2.6. R heißt *bündig*, wenn $Q(R)$ kompakt ist, oder (nach 2.2-4) wenn R nur abzählbar viel Brocken hat.

2.7. Sei R bündig, $O, P \subset R$ und $O \curlywedge P$. Dann ist $\sigma_{R \setminus P}(O)$ kompakte Teilmenge von $Q(R \setminus P)$.

Beweis. Zu einer in $Q(R \setminus P)$ divergenten Punktfolge $a_1, a_2, \ldots$ aus $\sigma_{R \setminus P}(O)$ könnte man eine Folge von Brockenumgebungen $U_1, U_2, \ldots$ in $Q(R \setminus P)$ finden mit abgeschlossener $\cup U_n$. Setzen wir

$$\sigma^{-1}_{R \setminus P}\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} U_k\Big) = B_n,$$

so ist B_n eine absteigende Folge von Brocken von $R \setminus P$ mit $B_n \cap O \neq \bigcirc$ für alle n und $\cap B_n = \bigcirc$. Wir zeigen, daß dies unmöglich ist.

Wegen $O \curlywedge P$ kann nicht jedes B_n Brücke zwischen O und P sein. Nach 1.3 können wir annehmen, daß (für alle $n > n_0$) B_n nicht Brücke zwischen O und P ist.

$$B_n = B_{n,O} \cup B_{n,P}.$$

$$(B_{n,O} \cup O) \cap (B_{n,P} \cup P) = \bigcirc.$$

$$B_{n,O} \cup O \quad \text{und} \quad B_{n,P} \cup P \quad \text{offen in} \quad B_n \cup O \cup P.$$

Also auch $B_{n,O}$ offen in $B_n \cup P$, also auch in R.

Analog: $B_{n,P}$ offen in R. Also $B_{n,O}$ abgeschlossen in R.

Die $B_{n,O}$ sind also Brocken von R, und die $B'_{n,O} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_{n,O}$ bilden sogar eine absteigende Folge von Brocken, die wegen

$$B'_{n,O} \cap O = B_{n,O} \cap O \neq \bigcirc$$

nicht leer sind, während ihr Durchschnitt wohl leer sein sollte, im Widerspruch zur Bündigkeit von R.

Damit ist jene Unmöglichkeit erwiesen.

3. Der Raum.

3.1. Φ sei im Folgenden die Menge der auf R definierten reellen Funktionen mit:

1. $f \geqslant 0$,
2. $\inf f = 0$,
3. f stetig,
4. für alle $0 < \alpha < \beta$ gilt $E[f < \alpha] \curlywedge E[f > \beta]$.

3.2. $f \succsim g$ (asymptotisch größer) bedeutet:
Aus $\lim f(x_n) = 0$ folgt $\lim g(x_n) = 0$ (für jede Folge x_n). Oder:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_{f,g} > 0$, so daß aus $f(x) < \delta$ folgt $g(x) < \varepsilon$.

3.3. Aus $f \succsim g \succsim h$ folgt $f \succsim h$.

3.4. $f \succsim f$.

3.5. $f \sim g$ bedeute $f \succsim g \succsim f$.
Diese Äquivalenzrelation besitzt die gebräuchlichen Eigenschaften.

3.6. $h = \min(f,g)$ resp. $\max(f,g)$ bedeutet:

$$h(x) = \min(f(x), g(x)) \quad \text{resp.} \quad \max(f(x), g(x)).$$

3.7. Sind $f, g \in \Phi$, so ist $\min(f,g) \in \Phi$.
Hierbei ist insbesondere 3.1.4 erfüllt wegen

$$E[h < \alpha] = E[f < \alpha] \cup E[g < \alpha],$$
$$E[h > \beta] = E[f > \beta] \cap E[g > \beta]$$

und wegen 1.11.

3.8. Sind $f, g \in \Phi$, so genügt $\max(f,g)$ den Bedingungen 3.1 bis auf evtl. 3.1.2.

3.9. Ist $f, g \in \Phi$, so ist $\max(f,g) \in \Phi$ dann und nur dann, wenn $E[f < 1/n] \cap E[g < 1/n] \neq \bigcirc$ für alle n.

3.10. $\min f(,g) \precsim f, g \precsim \max(f,g)$.

3.11. Ist $h \precsim f, g$, so $h \precsim \min(f,g)$.
Ist $f, g \precsim h$, so $\max(f,g) \precsim h$.

3.12. Ist $F \subset \Phi$, so bedeute $h \succsim F$: $h \succsim f$ für alle $f \in F$.

3.13. $F \succsim G$ bedeute: Aus $h \in \Phi$ und $h \succsim F$ folgt $h \succsim G$.

3.14. Aus $F \subset G$ folgt $F \succsim G$.

3.15. Aus $F \succsim G \succsim H$ folgt $F \succsim H$.

3.16. $F \succsim F$.

3.17. $F \sim G$ bedeute: $F \succsim G \succsim F$.
Diese Äquivalenzrelation besitzt die üblichen Eigenschaften.

3.18. F heißt *gebunden*, wenn $F \neq \bigcirc$ ist und für jede endliche Teilmenge $f_1, f_2, \ldots, f_k$ von F gilt:

$$\max(f_1, f_2, \ldots, f_k) \in \Phi.$$

3.19. F heißt *stark gebunden*, wenn $F \neq \bigcirc$ ist und mit $f_1, f_2 \in F$ auch $\max(f_1, f_2) \in F$ ist.

3.20. Zu jedem gebundenen F gibt es ein äquivalentes stark gebundenes.

3.21. Gibt es kein $f \in \Phi$ mit $f \succsim F$, so ist $F \succsim G$ für alle $G \subset \Phi$.

3.22. Gibt es ein $f \in \Phi$ mit $f \succsim F$, so ist F gebunden.

3.23. Ist $F \subset \Phi$ ungebunden, so ist $F \succsim G$ für alle $G \subset \Phi$.
Folgt aus 3.21-22.

3.24. F heißt *maximal*, wenn es gebunden ist und für jedes gebundene G mit $G \succsim F$ gilt $G \sim F$.

3.25. Ist F maximal, G gebunden und $G \sim F$, so ist G maximal.

3.26. Ist F maximal, so heißt die Menge der gebundenen G mit $G \sim F$ auch π_F. Für ein gebundenes G verstehen wir unter $\varDelta_G$ die Menge der π_F mit $F \succsim G$; für ungebundenes $G \subset \Phi$ sei $\varDelta_G = \bigcirc$ gesetzt. Bestehen F und G aus genau einem Element f resp. g, so sagen wir π_f statt π_F und $\varDelta_g$ statt $\varDelta_G$. Die π_F betrachten wir als Punkte und die $\varDelta_G$ einschließlich $\bigcirc$ als abgeschlossene Mengen eines Raumes $\tilde{R}$.

Existiert ein π_F ohne ein f mit $f \succsim F$, so ist nach 3.21 $F \succsim G$ für alle π_G, also nach 3.24 $F \sim G$ für alle π_G, also $\pi_F = \pi_G$. Dann besteht $\tilde{R}$ aus genau einem Punkt. Diesen uninteressanten Fall schließen wir jetzt (bis 3.36) aus, so daß also gilt

3.27. Alle Punkte von $\tilde{R}$ haben die Form π_f, $f \in \Phi$.

3.28. Ist $g \equiv 0$, so ist $\varDelta_g = \tilde{R}$.

3.29. Aus $G_1 \succsim G_2$ (beide gebunden) folgt $\varDelta_{G_1} \subset \varDelta_{G_2}$.

3.30. Aus $G_1 \sim G_2$ (beide gebunden) folgt $\varDelta_{G_1} = \varDelta_{G_2}$.

3.31. Aus $G = \bigcup G_\nu$ (ν durchläuft eine beliebige Menge) folgt $\varDelta_G = \bigcap \varDelta_{G_\nu}$.

1. $\varDelta_G \subset \bigcap \varDelta_{G_\nu}$ ist nämlich trivial, wenn ein G_ν oder G ungebunden ist und folgt andernfalls aus 3.14 und 3.29.

2. $\varDelta_G \supset \bigcap \varDelta_{G_\nu}$ ist trivial, wenn ein G_ν ungebunden ist. Sonst schließe man: Aus $f \succsim G_\nu$ (alle ν) folgt $f \succsim \bigcup G_\nu = G$.

3.32. Sei G stark gebunden. Dann und nur dann ist $\pi_F \notin A_G$, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $\max(f,g) \notin \Phi$.

Beweis. 1. Sei $\pi_F \notin A_G$. Nach 3.14 ist $(f) \cup G \gtrsim (f)$. Nun ist $(f) \cup G \sim (f)$ unmöglich, da dann $(f) \gtrsim (f) \cup G \supset G$ wäre im Widerspruch zu $\pi_f \notin A_G$. Wegen der Maximalität von (f) bleibt also nur die Möglichkeit: $(f) \cup G$ ungebunden. Aus der starken Gebundenheit folgt die Existenz von $g \in G$ mit $\max(f,g) \notin \Phi$.

2. Sei $\pi_f \in A_G$. Dann ist $f \gtrsim G$, also $f \gtrsim (f) \cup G$, also $f \cup G$ gebunden und daher $\max(f,g) \in \Phi$ für alle $g \in G$.

3.33. Seien G_1 und G_2 stark gebunden und G_3 die Menge aller $g_3 = \min(g_1, g_2)$ mit $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Dann ist $A_{G_3} = A_{G_1} \cup A_{G_2}$.

Beweis. 1. $G_{1,2} \gtrsim G_3$, also, nach 3.29, $A_{G1,2} \subset A_{G_3}$, also $A_{G_1} \cup A_{G_2} \cup A_{G_3}$.

2. Sei $\pi_f \notin A_{G_1} \cup A_{G_2}$. Dann gibt es nach 3.32 ein $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ mit $\max(f, g_\nu) \notin \Phi$.

Sei $g_3 = \min(g_1, g_2)$. Dann ist

$$\max(f, g_3) = \min(\max(f, g_1), \max(f, g_2)) \notin \Phi,$$

also $\pi_f \notin A_{g_3}$ nach 3.32, also erst recht $\pi_f \notin A_{G_3}$.

3.34. Aus 3.20, 3.28, 3.31 und 3.33 folgen die Axiome für abgeschlossene Mengen. Obendrein bildet jeder π_f eine abgeschlossene Menge A_f. Auch gilt das Trennungsaxiom: Ist $\pi_f \notin A_G$, so gibt es zueinander fremde Umgebungen von π_f und A_G.

Beweis. Wir dürfen nach 3.20 G stark gebunden annehmen. Nach 3.32 gibt es $g \in G$ mit $\max(f,g) \notin \Phi$. Also ist

$$\inf \max(f,g) = \gamma > 0.$$

Wir setzen

$$f' = \gamma - \min(\gamma, f), \quad g' = \gamma - \min(\gamma, g);$$

$$f', g' \in \Phi,$$

$$\min(f', g') = \gamma - \min(\gamma, \max(f,g)) \equiv 0,$$

$$\max(f', g') \geqslant \gamma > 0.$$

Also (nach 3.28 und 3.33)

$$A_{f'} \cup A_{g'} = \widetilde{R}, \tag{1}$$

und (nach 3.31)

$$A_{f'} \cap A_{g'} = \bigcirc. \tag{2}$$

Weiter

$$\max(f, f') \notin \Phi, \quad \max(g, g') \notin \Phi,$$

also $(f) \cup (f')$, $G \cup (g')$ ungebunden, also (nach 3.31)

$$A_f \cap A_{f'} = A_G \cap A_{g'} = \bigcirc. \tag{3}$$

Wegen (1)-(3) sind die Komplemente von $A_{f'}$ und $A_{g'}$ die gewünschten Umgebungen.

3.35. $\widetilde{R}$ ist sogar bikompakt.

Wir deuten den Beweis an. Man braucht nach 3.31 nur zu zeigen, daß zu jedem gebundenen G ein maximales $F \gtrsim G$ existiert. Ist G noch nicht maximal, so gibt es ein $G_1 \gtrsim G$ — wir dürfen sogar $G_1 \supset G$ annehmen (sonst gehen wir zu $G_1 \cup G$ über). So entsteht eine aufsteigende wohlgeordnete Menge gebundener G_n, deren Vereinigung immer noch gebunden, aber maximal ist.

3.36. Von 3.35 machen wir keinen Gebrauch. Wohl haben wir noch einige Formeln nötig, die leicht zu beweisen sind. (Wir setzen von f jetzt nur $3.1._{1,3,4}$ voraus.)

3.37. $A_{\max(f-\alpha,0)} \cap A_{-\min(f-\beta,0)} = \bigcirc$ für $\alpha < \beta$.

$A_{\max(f-\alpha,0)} \cup A_{-\min(f-\alpha,0)} = \widetilde{R}$.

3.38. $\bigcup_{\alpha<\beta} A_{\max(f-\alpha,0)} \cap A_{-\min(f-\beta,0)} = \bigcirc$.

$\bigcup_{\alpha<\beta} A_{\max(f-\alpha,0)} \cup \bigcap_{\alpha<\beta} A_{-\min(f-\alpha,0)} = \widetilde{R}$.

Folgen aus (3.31,33.)

3.39. $$\bigcap_{\alpha<\beta} A_{-\min(f-\alpha,0)} = A_{-\min(f-\beta,0)},$$

denn wenn $g \gtrsim \min(f-\alpha, 0)$ für alle $\alpha < \beta$ gilt, so folgt aus $\lim g(x_n) = 0$: $\inf(f(x_n) - \alpha) \leqslant 0$ für alle $\alpha < \beta$ also auch $\inf(f(x_n) - \beta) \geqslant 0$.

3.40. $\bigcup_{\alpha<\beta} A_{\max(f-\alpha,0)}$ und $A_{-\min(f-\beta,0)}$ sind komplementär.

Folgt aus 3.38-39.

4. Abzählbare F.

4.1. Wir beweisen in 4: Ist F gebunden und abzählbar, so ist es äquivalent einem F', das aus genau einem Element besteht. Wir können F als unendliche Folge, $F = (f_1, f_2, \dots)$, annehmen und sogar $f_i \leqslant f_{i+1}$ für alle i voraussetzen. Wir konstruieren ein $f \notin \Phi$ mit $f \gtrsim f_i$ (alle i) und $f \lesssim g$ für alle $g \in \Phi$ mit $f_i \lesssim g$ für alle i.

4.2. Wir setzen $U_n = E[f_n < 1/n]$ und $U_0 = R$.

4.3. $U_{n+1} \subset U_n$.

4.4. Wir setzen

$$f=\begin{cases}\max\left(f_n,\dfrac{1}{n+1}\right) & \text{in} \quad U_n\setminus U_{n+1},\\ 0 & \text{in} \quad \cap U_n.\end{cases}$$

4.5. In $U_n\setminus U_{n+1}$ gilt

$$f_n<\frac{1}{n} \qquad \text{(wegen 4.2)},$$

also

$$f<\frac{1}{n} \qquad \text{(wegen 4.4)}$$

und

$$f\geqslant\frac{1}{n+1} \qquad \text{(wegen 4.4)}$$

also

$$\frac{1}{n+1}\leqslant f<\frac{1}{n}.$$

4.6. Ist umgekehrt

$$\frac{1}{n+1}\leqslant f(x)<\frac{1}{n},$$

so ist $x\in U_m\setminus U_{m+1}$ unmöglich für $m\neq n$ (denn sonst wäre wegen 4.5 ja $1/(m+1)\leqslant f(x)<1/m$); und auch $x\in\cap U_m$ ist unmöglich (denn da ist $f=0$). Also $x\in U_n\setminus U_{n+1}$.

4.7. $E\left[\dfrac{1}{n+1}\leqslant f<\dfrac{1}{n}\right]=U_n\setminus U_{n+1}$.

Folgt aus 4.5-6.

4.8. $U_n=E\left[f<\dfrac{1}{n}\right]$.

Folgt aus 4.7 und 4.4.

4.9. Sei $\alpha>0$. Wir wählen n so, daß $1/(n+1)\leqslant\alpha<1/n$.

Sei $f(x)<\alpha$. Nach 4.8 ist dann $x\in U_n$. Wir haben zwei Fälle:

1. $x\in U_n\setminus U_{n+1}$. Dann ist $f_n(x)\leqslant f(x)$ wegen 4.4, also auch $f_n(x)<\alpha$.

2. $x\in U_{n+1}$. Dann ist $f_{n+1}(x)<1/(n+1)$ wegen 4.2, also erst recht $f_n(x)<1/(n+1)\leqslant\alpha$.

Also aus $f(x)<\alpha$ folgt $f_n(x)<\alpha$ für $1/(n+1)\leqslant\alpha<1/n$.

4.10. Sei $\alpha>0$. Wir wählen n so, dass $1/(n+1)\leqslant\alpha<1/n$.

Sei $f(x)\geqslant\alpha$. Nach 4.8 ist dann $x\notin U_{n+1}$. Wir haben zwei Fälle:

1. $x\in U_n\setminus U_{n+1}$.

Dann ist $f_n(x)\geqslant\alpha$ wegen 4.4.

2. $x\notin U_n$.

Dann ist wegen 4.2 $f_n(x)\geqslant 1/n$, also $>\alpha$.

Also: aus $f(x)\geqslant\alpha$ folgt $f_n(x)\geqslant\alpha$ für $1/(n+1)\leqslant\alpha<1/n$.

4.11. Für $1/(n+1)\leqslant\alpha<1/n$ ist $E[f<\alpha]=E[f_n<\alpha]$.

Folgt aus 4.9-10.

4.12. Sei $1/(n+1)\leqslant\beta<1/n$. Ist $f(x)\leqslant\beta$, so ist $f(x)<\alpha$ für alle α mit $\beta<\alpha<1/n$, also nach 4.9 auch $f_n(x)<\alpha$ für alle α mit $\beta<\alpha<1/n$, also $f_n(x)\leqslant\beta$.

Analog: wenn $f(x)>\beta$, so auch $f_n(x)>\beta$.

Also: Für $1/(n+1)\leqslant\beta<1/n$ ist $E[f>\beta]=E[f_n>\beta]$.

4.13. $f\geqslant 0$. (Trivial).

4.14. $\inf f=0$.

Denn sei $x_n\in U_n$; dann ist wegen 4.4 $f(x_n)<1/n$.

4.15. f stetig.

Denn nach 4.11 ist $E[f<\alpha]=E[f_n<\alpha]$ (für gewisses n), also offen wegen der Stetigkeit von f_n. Ebenso ist wegen 4.12 $E[f>\beta]$ offen. Also ist das f-Urbild jeder offenen Menge offen.

4.16. $E[f<\alpha]\curlywedge E[f>\beta]$ für $0<\alpha<\beta$.

B e w e i s. Sei $1/(n+1)\leqslant\alpha<1/n$. Nach Voraussetzung ist $E[f_n<\alpha]\curlywedge E[f_n>\beta]$. Zwei Fälle:

1. $\beta<1/n$.

Dann folgt die Behauptung aus 4.11-12.

2. $\beta\geqslant 1/n$.

Dann $E[f>\beta]=E[f_m>\beta]$ für gewisses $m<n$ wegen 4.12, also $\subset E[f_n>\beta]$, und hieraus folgt die Behauptung.

4.17. In 4.13-16 ist bewiesen: $f\in\Phi$.

4.18. $f_n\prec f$ für alle n.

B e w e i s. Sei $\lim f(x_\nu)=0$, also $f(x_\nu)<1/m$ für fast alle ν. Nach 4.11 ist $f_m(x_\nu)<1/m$, also auch $f_n(x_\nu)<1/m$ für fast alle ν und $n\leqslant m$. Also $\lim_\nu f_n(x_\nu)=0$, w. z. b. w.

4.19. Sei $f_n\prec g\in\Phi$ für alle n. Dann ist $f\prec g$.

B e w e i s. Sei $\lim g(x_\nu)=0$. Dann ist $\lim_\nu f_n(x_\nu)=0$, also $f_n(x_\nu)<1/n$ für fast alle ν, also nach 4.11 auch $f(x_\nu)<1/n$ für fast alle ν, also $\lim f(x_\nu)=0$, w. z. b. w.

4.20. In 4.17-19 ist die Behauptung von 4.1 bewiesen.

5. $\tilde{R}$ ist ein Kompaktum.

5.1. R wird nun als bündig vorausgesetzt.

5.2. $\mathfrak{U}$ sei eine abzählbare Basis der offenen Mengen von R, und es sei mit je zwei Mengen auch ihre Vereinigung und ihr Durchschnitt in $\mathfrak{U}$ enthalten.

5.3. Wir definieren ein Mengensystem $\mathfrak{B}'$: Zu je zwei Mengen $U, U' \in \mathfrak{U}$ mit $U \curlywedge U'$ bestimmen wir (siehe 2.2) $\sigma_{R\setminus U}(U')$, das nach 2.7 kompakt in $Q(R\setminus U)$ ist. In $Q(R\setminus U)$ bestimmen wir gemäß 2.5 eine Folge von Brocken T_n als Umgebungen von $\overline{\sigma_{R\setminus U}(U')}$, derart daß in jeder Brocken-Umgebung von $\sigma_{R\setminus U}(U')$ ein T_n liegt. Zu dem Paar U, U' gehören dann Brocken $B_n^{U,U'} = \sigma_{R\setminus U}^{-1}(T_n)$ von $R\setminus U$, die U' enthalten und derart, daß jede Brockenumgebung von U' in $R\setminus U$ ein $B_n^{U,U'}$ enthält.

Die Menge aller $B_n^{U,U'}$ (U, U' durchlaufen alle zulässigen Paare) heißt $\mathfrak{B}'$.

5.4. Die Menge aller Brocken von R heißt $\mathfrak{B}''$.

5.5. Die Menge aller $V' \cup V''$ mit $V' \in \mathfrak{B}'$, $V'' \in \mathfrak{B}''$ heißt $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ ist abzählbar.

5.6. Sei $f \in \Phi$ und $0 < \beta < \gamma$. Dann gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subset E[\beta < f < \gamma]$, und so, daß $R\setminus U$ nicht zusammenhängt zwischen $E[f < \beta]$ und $E[f > \gamma]$.

Beweis. $E[\beta < f < \gamma]$ ist offen, also von der Form $\cup U_n$, $U_n \in \mathfrak{U}$, wobei wir nach 5.2 noch $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ voraussetzen dürfen. Wäre $R\setminus U_n$ zusammenhängend zwischen $E[f < (2\beta+\gamma)/3]$ und $E[f > (\beta+2\gamma)/3]$ für alle k, so bildeten die $R\setminus U_n$ eine Scheinbrücke zwischen diesen Mengen, im Widerspruch zu $f \in \Phi$. Also ist ein gewisses $R\setminus U_n$ nicht zusammenhängend zwischen diesen Mengen und *a fortiori* nicht zwischen $E[f < \beta]$ und $E[f > \gamma]$.

5.7. Sei $f \in \Phi$ und $0 < \alpha < \gamma$. Dann gibt es ein $V \in \mathfrak{B}$ (siehe 5.5) mit

$$E[f < \alpha] \subset V \subset E[f < \gamma].$$

Beweis. Wir wählen β_ν mit $\alpha < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < \gamma$ und nach 5.6 $U, U' \in \mathfrak{U}$ mit

$$U \subset E[\beta_3 < f < \beta_4], \quad U' \subset E[\alpha < f < \beta_1],$$

$R\setminus U$ nicht zusammenhängend zwischen $E[f < \beta_3]$ und $E[f > \beta_4]$,
$R\setminus U'$ „ „ „ $E[f < \alpha]$ und $E[f > \beta_1]$.

Sei B ein Brocken von $R\setminus U$ mit

$$E[f < \beta_3] \subset B \subset E[f < \gamma].$$

Wegen $U' \subset E[f < \beta_1] \subset B$ gibt es nach 5.3 einen Brocken $V' \in \mathfrak{B}'$ von $R\setminus U$ mit $U' \subset V' \subset B$.

Nun ist $B' = B\setminus V'$ gleichfalls Brocken von $R\setminus U$ und fremd zu U'. Weiter gibt es einen Brocken C von $R\setminus U'$ mit

$$E[f < \alpha] \subset C \subset E[f < \beta_2].$$

$B' \cup U$ und $C \cup U'$ sind offen in R, ihr Durchschnitt $V'' = B' \cap C$ also auch; B' und C sind abgeschlossen in R, ihr Durchschnitt V'' also auch. Daher ist V'' Brocken von R, also $V'' \in \mathfrak{B}''$ (siehe 5.4).

Nun ist $V = V' \cup V'' \in \mathfrak{B}$ (siehe 5.5).

$$V \subset B \cup (B' \cap C) \subset B \subset E[f < \gamma],$$
$$V = V' \cup ((B\setminus V') \cap C) \supset B \cap C \supset E[f < \alpha].$$

V leistet also das Gewünschte.

5.8. Sei $F \subset \Phi$. Unter $P(F)$ verstehen wir die Menge der $V \in \mathfrak{B}$ mit

$$E[f < \beta] \subset V$$

für geeignetes $f \in F$ und $\beta > 0$.

5.9. Ist $V' \supset V$, $V' \in \mathfrak{B}$ und $V \in P(F)$, so ist auch $V' \in P(F)$.

5.10. Aus $P(F) \subset P(F')$ folgt $F \lesssim F'$.

Beweis. Sei $g \gtrsim f'$ für alle $f' \in F'$. Wir müssen beweisen

$$g \gtrsim f \quad \text{für alle} \quad f \in F.$$

Nach 5.7 gibt es $V_n \in \mathfrak{B}$ mit

$$E[f < 1/(n+1)] \subset V_n \subset E[f \leqslant 1/n]. \tag{1}$$

Nach 5.8 ist $V_n \in P(F)$, nach Voraussetzung also $V_n \in P(F')$. Nach 5.8 gibt es also ein $f_n' \in F'$ und ein $\alpha_n > 0$ mit

$$E[f_n' < \alpha_n] \subset V_n. \tag{2}$$

Wegen $g \gtrsim f_n'$ gibt es ein $\beta_n > 0$ mit

$$E[g < \beta_n] \subset E[f_n' < \alpha_n]. \tag{3}$$

Aus (1-3) folgt $g \gtrsim f$, w. z. b. w.

5.11. Aus $P(F) = P(F')$ folgt $F \sim F'$.

Folgt aus 5.10.

5.12. Existiert zu $V, V' \in \mathfrak{B}$ ein $f \in \Phi$ mit

$$V \subset E[f=0] \subset E[f<1] \subset V',$$

so wählen wir eines unter ihnen und nennen es $f_{V,V'}$.

5.13. Sei $F \subset \Phi$. Die Menge aller $f_{V,V'}$ mit $V \in P(F)$ heißt F_0. Wegen 5.5 ist Φ_0 abzählbar.

5.14. $F \sim F_0$.

Beweis. Nach 5.11 müssen wir beweisen: $P(F)=P(F_0)$.

Sei zunächst $V' \in P(F)$. Dann gibt es nach 5.8 ein $f \in F$ und $\gamma > 0$, so daß

$$E[f<\gamma] \subset V'.$$

Wir wählen α, β mit $0<\alpha<\beta<\gamma$ und nach 5.7 ein $V \in \mathfrak{B}$ (also auch $\in P(F)$) mit

$$E[f<\alpha] \subset V \subset E[f<\beta].$$

$$f^* = \frac{\max(f, \beta) - \beta}{\gamma - \beta} \in \Phi,$$

$$V \subset E[f^*=0] \subset E[f^*<1] \subset V'.$$

Also gibt es nach 5.12 ein $f_{V,V'} \in F_0$. Demnach ist $V' \in P(F_0)$.

Sei nun umgekehrt $W \in P(F_0)$. Dann gibt es nach 5.13 und 5.8 ein $f = f_{V,V'} \in F_0$ mit $V \in P(F)$ und ein $\beta > 0$ mit

$$E[f_{V,V'} < \beta] \subset W,$$

also nach 5.12

$$V \subset E[f_{V,V'} = 0] \subset W.$$

Nach 5.9 ist auch $W \in P(F)$.

5.15. Aus 5.14, 5.13 und 4 folgt nun: Jedes gebundene F ist äquivalent einem F', das aus genau einer Funktion besteht. Insbesondere ist also 3.27 von selber erfüllt.

5.16. Wir ordnen die Elemente von Φ_0 in einer Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ an. Ist $f \in \Phi$, so finden wir ein maximales $g \succsim f$ folgendermaßen: Wir setzen $f_1=f$ und $f_{n+1}=\max(f_n, \varphi_n)$, wenn dies $\in \Phi$ ist, andernfalls $f_{n+1}=f_n$. Dann ist entweder $f_{n+1} \succsim \varphi_n$ oder $\max(f_{n+1}, \varphi_n) \notin \Phi$. Wir wählen $g \notin \Phi$, $g \succsim f_n$ (alle n) (siehe 4). Dann ist für jedes n entweder $g \succsim \varphi_n$ oder $\max(g, \varphi_n) \notin \Phi$. Sei $h \succsim g$, $h \in \Phi$. h ist äquivalent einer Teilmenge H von Φ_0 (5.14). Für jedes $\varphi \in H$ gilt $\max(g, \varphi) \precsim \max(h, \varphi) \in \Phi$, also $g \succsim \varphi$. Also $g \succsim H$, also $g \succsim h$. Also ist g maximal.

Hieraus folgt wegen 5.15: Zu jedem gebundenen G gibt es ein f, so daß $\pi_f \in A_G$. Wegen 3.31 folgt hieraus die Bikompaktheit von $\widetilde{R}$ von Neuem.

5.17. Wegen $A_F = A_{F_0} = \bigcap_{f \in F_0} A_f$ bilden die A_f mit $f \in \Phi_0$ eine (abzählbare) Basis der abgeschlossenen Mengen von $\widetilde{R}$.

5.18. Aus 5.16-17 folgt: *$\widetilde{R}$ ist ein Kompaktum.*

6. Charakterisierung von $\widetilde{R}$.

6.1. Ist $a \in R$, so sei F_a die Menge der $f \in \Phi$ mit $f(a)=0$.

6.2. Ist $f \precsim g \in \Phi$ für alle $f \in F_a$, so ist g maximal und $g \in F_a$.

Beweis.

$$h(x) = \max(g(x)-g(a), g(a)-g(x)).$$

$$h(a)=0, \text{ also } h \in \Phi,\ h \in F_a, \text{ also } h \precsim g.$$

Aus $\lim g(x_\nu)=0$ folgt dann $\lim g(x_\nu)-g(a)=0$, also $g(a)=0$, also $g \in F_a$.

Ist $g \precsim g' \in \Phi$, so ist $f \precsim g'$ für alle $f \in F_a$, also $g' \in F_a$, also $g' \precsim g$, also g maximal.

6.3. Das maximale $g \in F_a$ bestimmt ein π_g, das wir auch $\eta(a)$ nennen.

$$\eta(R) \subset \widetilde{R}.$$

6.4. $\eta(x) \in A_f$ dann und nur dann, wenn $f(x)=0$.

Beweis. $\eta(x)=\pi_g$, $g(x)=0$, g maximal. Ist $f(x)=0$, so ist $f \precsim g$ also $\pi_g \in A_f$. Ist $\pi_g \in A_f$, so ist $f \precsim g$, also $f(x)=0$.

6.5. $\eta(x) \in \widetilde{R} \setminus A_f$ dann und nur dann, wenn $f(x)>0$.

6.6. Das η-Urbild jeder offenen (abgeschlossenen) Menge ist offen (abgeschlossen), also η stetig.

6.7. $\overline{\eta(R)}=\widetilde{R}$.

Beweis. $A_f=\overline{\eta(R)}$. $\eta(x) \in A_f$ für alle x, also nach 6.4 $f \equiv 0$, also $A_f=\widetilde{R}$.

6.8. Ist φ in $\widetilde{R}$ stetig definiert, so genügt $\varphi\eta$ den Forderungen $3.1._{3-4}$.

Beweis. $3.1._3$ folgt aus 6.6.

Sei $0<\alpha<\beta$. $E[\varphi(\pi) \leqslant \alpha]$ und $E[\varphi(\pi) \geqslant \beta]$ sind abgeschlossene Mengen A_f und A_g. $A_f \cap A_g = \bigcirc$, also nach 3.9 und 3.31 für gewisses $\gamma>0$:

$$E[f<\gamma] \curlywedge E[g<\gamma].$$

$$E[\varphi\eta(x)<\alpha] \subset \eta^{-1}(A_f) = E[f=0] \subset E[f<\gamma],$$

$$E[\varphi\eta(x)>\beta] \subset \eta^{-1}(A_g) = E[g=0] \subset E[g<\gamma],$$

und hieraus folgt $3.1._4$ für $\varphi\eta$.

6.9. Zu jedem in R definierten, beschränkten und $3.1._{3-4}$ befriedigendem f gibt es ein in $\widetilde{R}$ definiertes stetiges φ mit $f(x)=\varphi\eta(x)$.

Beweis. Wir setzen

$$\varphi(\pi)=\inf_{\pi\in A_{\max(f-\alpha,0)}} x\ .$$

Ist $\pi=\eta(x)$, so ist (nach 6.4) $\pi\in A_{\max(f-\alpha,0)}$ dann und nur dann, wenn $\max(f(x)-\alpha,0)=0$, also wenn $f(x)\leqslant\alpha$ ist. Also ist dann

$$\varphi(\pi)=\inf_{f(x)\leqslant\alpha}\alpha=f(x).$$

Also $\varphi\eta=f$.

Allgemein ist $\varphi(\pi)\leqslant\gamma$ dann und nur dann, wenn $\pi\in A_{\max(f-\alpha,0)}$ für alle $\alpha>\gamma$. Also $E[\varphi\leqslant\gamma]=\cap A_{\max(f-\alpha,0)}$ abgeschlossen.

Ferner ist $\varphi(\pi)<\gamma$ dann und nur dann, wenn es ein $\alpha<\gamma$ gibt, so daß $\pi\in A_{\max(f-\alpha,0)}$ ist.

Also

$$E[\varphi<\gamma]=\bigcup_{\alpha<\gamma}A_{\max(f-\alpha,0)}=\widetilde{R}\setminus A_{-\min(f-\gamma,0)}$$

wegen 3.40. Also

$$E[\varphi\geqslant\gamma]=A_{\min(f-\gamma,0)}\quad\text{abgeschlossen.}$$

Demnach ist φ stetig.

6.10. Eine stetige Abbildung ϑ von R in ein Kompaktum S heißt eine *$\curlywedge$-Kompaktifizierung*, wenn $\overline{\vartheta(R)}=S$ und für jedes Paar offener Mengen P_ν von S mit $\overline{P}_1\cap\overline{P}_2=\bigcirc$ gilt $\vartheta^{-1}(P_1)\curlywedge\vartheta^{-1}(P_2)$.

6.11. η ist eine $\curlywedge$-Kompaktifizierung von R (zu $\widetilde{R}$).

Beweis. Für die erste Hälfte der Behauptung siehe 6.7.

Sei nun $\overline{P}_1\cap\overline{P}_2=\bigcirc$ gegeben. Es gibt eine stetige Funktion φ in $\widetilde{R}$ mit $1\leqslant\varphi\leqslant2$ und $\varphi(P_\nu)=\nu$ $(\nu=1,2)$.

$$P_1\subset E[\varphi<4/3],\quad P_2\subset E[\varphi>5/3].$$

Nach 6.6 sind

$$\eta^{-1}(P_1)=E[\varphi\eta<4/3],\quad \eta^{-1}(P_2)=E[\varphi\eta>5/3]$$

offen. Nach 6.8 ist

$$E[\varphi\eta<4/3]\curlywedge E[\varphi\eta>5/3],$$

also auch

$$\eta^{-1}(P_1)\curlywedge\eta^{-1}(P_2).$$

6.12. Ist ϑ eine $\curlywedge$-Kompaktifizierung von R zu S und ist φ stetig in S, so erfüllt $\varphi\vartheta$ die Forderungen $3.1._{3-4}$.

Beweis.
$$E[\varphi\vartheta<\alpha]=\vartheta^{-1}E[\varphi<\alpha],$$
$$E[\varphi\vartheta>\beta]=\vartheta^{-1}E[\varphi>\beta].$$

Da $\overline{E[\varphi<\alpha]}\cap\overline{E[\varphi>\beta]}=\bigcirc$ für $\alpha<\beta$ gilt, gilt nach 6.10 auch

$$E[\varphi\vartheta<\alpha]\curlywedge E[\varphi\vartheta>\beta].$$

6.13. Ist ϑ eine $\curlywedge$-Kompaktifizierung von R zu S, so gibt es eine stetige Abbildung ζ mit $\zeta(\widetilde{R})=S$ und $\zeta\eta=\vartheta$.

Beweis. Sei ψ eine in S definierte stetige Funktion. Nach 6.12 erfüllt $\psi\vartheta$ $3.1._{3-4}$. Nach 6.9 gibt es also eine in $\widetilde{R}$ definierte stetige Funktion φ mit $\varphi\eta=\psi\vartheta$.

Seien ψ_ν $(\nu=1,2)$ stetig in S, $\psi_\nu\geqslant0$, $\psi_\nu\vartheta=\varphi_\nu\eta$. Sei ferner $E[\psi_1=0]\subset E[\psi_2=0]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß

$$E[\psi_1<\delta]\subset E[\psi<\varepsilon].$$

Dann ist auch

$$E[\psi_1\vartheta<\delta]\subset E[\psi_2\vartheta<\varepsilon],$$

also auch

$$E[\varphi_1\eta<\delta]\subset E[\varphi_2\eta<\varepsilon]$$

für jedes $\varepsilon>0$ und geeignetes $\delta>0$, also

$$E[\varphi_1=0]\subset E[\varphi_2=0].$$

Hieraus folgt: Jeder abgeschlossenen Menge

$$A=E[\psi=0]$$

von S entspricht eindeutig eine abgeschlossene Menge

$$A^*=E[\varphi=0]$$

von $\widetilde{R}$. Hierbei zieht $A_1\subset A_2$ nach sich: $A_1^*\subset A_2^*$. Da zu $\max(\psi_1,\psi_2)$ auch $\max(\varphi_1,\varphi_2)$ gehört, entspricht dem Durchschnitt der Durchschnitt. Durch $\zeta(A^*)=A$ wird die gesuchte Abbildung bestimmt.

6.14. Sind ϑ_ν $(\nu=1,2)$ zwei $\curlywedge$-Kompaktifizierungen von R zu S_ν, und gibt es eine stetige Abbildung $\lambda(S_1)=S_2$ mit $\lambda\vartheta_1=\vartheta_2$, so heißt ϑ_1 *schwächer* als ϑ_2 (oder *gleich*).

6.15. Wir können nun das Vorangehende zusammenfassen in den Satz: Unter den $\curlywedge$-Kompaktifizierungen eines bündigen R gibt es eine schwächste, nämlich $\eta(R)\subset\widetilde{R}$.

7. Beziehung zu den Resultaten von Mazurkiewicz [4]).

7.1. Sei Q eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer Metrik $\varrho(x,y)$, so daß $\varrho(x,y)=$ untere Grenze der Durchmesser der x und y verbindenden Kontinua.

7.2. Sei R die vollständige Hülle von Q. Eine Folge aus Q, die nicht in Q, aber wohl in R konvergiert, heißt eine *α-Folge*; eine Folge aus Q, die in R keinen Häufungspunkt besitzt, heißt eins *β-Folge*.

7.3. Zwei Folgen x_ν und y_ν aus Q heißen *konjugiert*, wenn in Q Bögen $\widehat{x_\nu y_\nu}$ existieren, so daß alle Folgen $z_\nu \in \widehat{x_\nu y_\nu}$ α-Folgen oder alle Folgen $z_\nu \in \widehat{x_\nu y_\nu}$ β-Folgen sind.

7.4. Eine topologische Abbildung τ von Q in ein Kompaktum T heißt eine *M-Einbettung*, wenn

$$\tau(q)=T$$

und für je zwei konjugierte Folgen x_ν, $y_\nu \in Q$ gilt:

aus der Existenz von $\lim \tau(x_\nu)$ folgt die von $\lim \tau(y_\nu)$.

7.5. Von den M-Einbettungen τ_ν $(\nu=1,2)$ von R heißt die erste *schwächer* (oder *gleich*), wenn aus der Existenz von $\lim \tau_1(x_\nu)$ die von $\lim \tau_2(x_\nu)$ (für jede Folge $x_\nu \in Q$) folgt.

7.6. Satz von Mazurkiewicz: Unter allen M-Einbettungen von Q, gibt es eine schwächste, $\tau_0(Q) \subset T_0$.

Wir zeigen die Übereinstimmung zwischen $\curlywedge$ Kompaktifizierung und M-Einbettung (unter den Voraussetzungen von 7.1).

7.7. Sei Z Brücke zwischen den offenen Mengen O_1 und O_2 in R. Dann gibt es in der δ-Umgebung U von Z rel Q einen O_1 mit O_2 verbindenden Bogen.

Beweis. Sei W_1 die Vereinigung aller Bögen in U, die mit O_1 einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. W_1 ist offen und abgeschlossen in U.

$$W_2 = U \setminus W_1,$$

$$Z_\nu = Z \cap \overline{W_\nu}, \quad Z = Z_1 \cup Z_2.$$

Gäbe es einen Punkt $p \in Z_1 \cap Z_2$, so gäbe es $p_n^\nu \in W_\nu$ mit $\lim p_n^1 = \lim p_n^2$ und es gäbe wegen 7.1 für Bögen $\widehat{p_n^1 p_n^2}$ in U fast alle n, im Widerspruch zur Definition von W_1. Also ist $Z_1 \cap Z_2 = \bigcirc$ und da Z Brücke ist, $Z_2=\bigcirc$. Also $W_2=\bigcirc$ und $W_1=U$. Hieraus folgt die Existenz des verlangten Bogens.

[4]) 7.1-7.6 enthält im Wesentlichen die charakteristischen Definitionen und Resultate von Mazurkiewicz [7].

7.8. Jede M-Einbettung $\tau(q) \subset T$ induziert eine $\curlywedge$-Kompaktifikation von R zu T.

Beweis. τ kann auf die vollständige Hülle R von Q stetig fortgesetzt werden; die Fortsetzung heiße $\bar\tau$. Wir beweisen.

$$\bar\tau^{-1}(P_1) \curlywedge \bar\tau^{-1}(P_2)$$

für jedes Paar offener Mengen P_ν von R mit

$$\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 = \bigcirc.$$

Sei Z_n eine absteigende Folge von Brücken zwischen den $\bar\tau^{-1}(P_\nu)$. Wir bestimmen nach 7.7 Bögen $\widehat{a_n^1 a_n^2} \subset 1/n$-Umgebung von Z_n rel Q, von denen wir voraussetzen können, daß sie zu $\bar\tau^{-1}(P_1) \cup \bar\tau^{-1}(P_2)$ fremd sind, und daß a_n^ν im Rand von $\tau^{-1}(P_\nu)$ liegt. Ist $c_n \in \widehat{a_n^1 a_n^2}$ und $\lim c_{\nu_n} = c$, so gibt es $d_{\nu_n} \in Z_n$ mit $\lim d_{\nu_n} = c$, also $c \in \bigcap Z_n$, $c \notin \bar\tau^{-1}(P_1) \cup \bar\tau^{-1}(P_2)$. Wäre $\bigcap Z_n \subset \bar\tau^{-1}(P_1) \cup \bar\tau^{-1}(P_2)$, so wäre jede Folge $c_n \in \widehat{a_n^1 a_n^2}$ divergent, also wären die Folgen a_n^1 und a_n^2 konjugiert, also $\lim \tau(a_n^1) = \lim \tau(a_n^2)$ im Widerspruch zu $\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 = \bigcirc$. Z_n kann also keine Scheinbrücke sein, und hieraus folgt die Behauptung.

7.9. Jede $\curlywedge$-Kompaktifizierung $\sigma(R) \subset S$ von R, die in Q topologisch ist, induziert eine M-Einbettung von Q in S.

Beweis. Sei $\widehat{a_n^1 a_n^2}$ eine Folge von Bögen in Q, so daß jede Folge $c_n \in \widehat{a_1^n a_2^n}$ eine α-Folge ist. Dann konvergiert c_n in S, also auch $\lim \sigma(a_n^1) = \lim \sigma(a_n^2)$. Sei nun jede Folge $c_n \in \widehat{a_n^1 a_n^2}$ eine β-Folge und $\lim \sigma(a_n^\nu) = a^\nu$; wäre $a^1 \neq a^2$, so gäbe es Umgebungen P_ν in $\widetilde{R}$ von a^ν mit $\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 = \bigcirc$ und dann wäre $\sigma^{-1}(P_1) \curlywedge \sigma^{-1}(P_2)$. $Z_n = \bigcup_n^\infty \widehat{a_n^1 a_n^2}$ ist Brücke zwischen $\sigma^{-1}(P_1)$ und $\sigma^{-1}(P_2)$, und $\bigcap Z_n = \bigcirc$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß konjugierte Folgen in Folgen mit demselben *Limes* abgebildet werden, w. z. b. w.

7.10. Es ist klar, daß $\eta(R) \subset \widetilde{R}$ auf Q topologisch ist. Ferner ist klar, daß die Definitionen von 6.14 und 7.5 äquivalent sind. Hieraus und aus 7.8-9 folgt die Äquivalenz der schwächsten $\curlywedge$-Kompaktifizierung und der schwächsten M-Einbettung (unter den Voraussetzungen von 7.1).

Bibliographie.

[1] C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. **73** (1913), p. 323—370.

[2] H. Freudenthal, *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*, Math. Zeitschrift **33** (1931), pp. 692-713.

[3] — *Neuaufbau der Endentheorie*, Ann. of Math. **43** (1942), pp. 261-279.

[4] — *Über die Enden diskreter Räume und Gruppen*, Comm. Helvet. **17** (1944), pp. 1-38.

[5] J. de Groot, *Topologische Studiën*, Diss. Groningen 1942, Hoofdstuk VIII.

[6] B. Kaufmann, *Über die Berandung ebener und räumlicher Gebiete (Primendentheorie)*, Math. Ann. **103** (1930), pp. 70-144.

[7] S. Mazurkiewicz, *Recherches sur la théorie des bouts premiers*, Fund. Math. **33** (1945), pp. 177-228.

[8] L. Zippin, *On semicompact spaces*, Amer. J. of Math. **57** (1935), pp. 327-341.

Products of Abstract Algebras.

By

R. Sikorski (Warszawa).

There are four known operations on abstract algebras of a fixed type, each of which permits the construction of new algebras from given algebras. These operations are:

1^0 the taking of a subalgebra of an algebra,

2^0 the forming of a homomorphic image of an algebra by means of a congruence relation,

3^0 the forming of the direct union of algebras,

4^0 the forming of the limit algebra of an inverse or direct system of algebras.

In case of certain special algebras we also make other operations different from those in 1^0, 2^0, 3^0, 4^0. For instance, fields and σ-fields of sets may be considered as abstract algebras with respect to the set-theoretical operations. In Measure Theory we form some products and σ-products of fields or of σ-fields of sets respectively [1]); the forming of these products is different from the operations 1^0, 2^0, 3^0, 4^0. These products have been generalized by me for the case of Boolean algebras [2]). Topological spaces may also be considered as abstract algebras, called *closure algebras* [3]). The operation of forming of the Cartesian product of topological spaces is different from the general operations mentioned in 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.

In this paper I shall define a new general operation on abstract algebras: the forming of the *product* of a family of abstract algebras of a fixed type (§ 3). In the case of fields of sets or σ-fields of sets this definition yields the usual products from Measure Theory. However, it may also be applied to groups, rings, lattices, Boolean algebras, etc. The notion of the product is related to the notion

[1]) See *e. g.* Halmos [1], Chapter VII.

[2]) Sikorski [5].

[3]) See *e. g.* Sikorski [6].