If $s \neq r$, the matrix $C'$ has two identical columns: the $s$-th and the $r$-th one. Therefore $D(C')=0$ which follows easily from Theorem 5. Consequently,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{ri}\gamma_{is} = D(C)\cdot\delta_{rs}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Theorem 7. *Suppose $T$ fulfils the condition* (48) *and* $\psi \in \boldsymbol{m}$ $[\psi \in \boldsymbol{l}]$. *If* $D(I+T)\neq 0$ *and if* $\varphi$ *is a solution of* (43) *then*

$$\varphi_i = \frac{1}{D(I+T)} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{ik}\psi_k. \tag{49}$$

This follows immediately from (48). Clearly, (49) defines the operation inverse to $I+T$ (see Theorem 3).

If $\psi \in \boldsymbol{c}_0$[13]) $[\psi \in \boldsymbol{l}]$, then the formula (49) is analogous to the Cramer formula for a finite system of linear equations since

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{ik}\psi_k$$

is the determinant of the matrix obtained from $C=I+T$ by replacing the $i$-th column by the sequence $\psi=(\psi_k)\in \boldsymbol{c}_0\,[\in \boldsymbol{l}]$.

I am indebted to Prof. S. Mazur for suggesting this problem to me; I also wish to thank Prof. R. Sikorski for essential advices and correction of several proofs.

*(Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1952)*

[13]) It is not known whether $\boldsymbol{c}_0$ can be replaced here by $\boldsymbol{m}$. See footnote [12]).

# Sur un type de conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles

par

J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

## § 1. Introduction.

Considérons l'équation différentielle

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu} x(t,\lambda) = \varphi(t,\lambda) \tag{1}$$

dont les coefficients $a_{\mu\nu}$ sont constants (réels ou complexes). Dans un travail antérieur [1], j'ai discuté la méthode opérationnelle de résolution de cette équation et le problème d'unicité, lorsque les

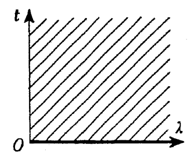


Fig. 1.

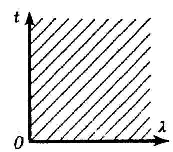


Fig. 2.

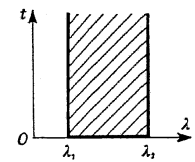


Fig. 3.

conditions initiales sont données sur une seule axe, à savoir $O\lambda$ (Fig. 1), ou sur les deux axes $O\lambda$ et $Ot$ (Fig. 2). Or, dans les applications physiques et techniques, un autre type de conditions est d'une grande importance (Fig. 3): ce sont des conditions sur la frontière d'une demi-bande

$$D:\quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2.$$

Ce type de conditions intervient, par exemple, dans le problème de la propagation de la chaleur, lorsque la température est connue sur les deux extremités d'une barre, dans certains problèmes de la ligne électrique et dans beaucoup d'autres problèmes, où l'une des variables varie dans un intervalle fini et l'autre, la variable de temps, parcourt l'intervalle infini $(0, \infty)$.

Dans cet article, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du problème de ce dernier type soit unique. Cette condition s'exprime d'une manière très simple et naturelle en termes du calcul opérationnel. De plus ce calcul conduit à la résolution effective.

Les notations employées ci-dessous sont les mêmes que dans le travail cité [1].

### § 2. Réduction du problème à une équation opérationnelle.

En posant

$$h_\varkappa(\lambda) = \left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa} x(t,\lambda)\right)_{t=0} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, m-1),$$

les conditions générales sur l'axe des $\lambda$, sont, pour l'équation (1), de la forme[1])

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa} \sum_{\nu=0}^{n} a_{m-\varkappa+\mu,\nu} h_\mu^{(\nu)}(\lambda) = g_\varkappa(\lambda) \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{2}$$

où $g_\varkappa(\lambda)$ sont des fonctions données dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$; dans certains cas particuliers ces conditions peuvent être remplacées par des conditions habituelles de Cauchy[2]).

Supposons que, à côté de (2), les conditions suivantes soient données:

$$x(t,\lambda_1) = v_1(t), \qquad x(t,\lambda_2) = v_2(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty), \tag{3}$$

$v_1(t)$ et $v_2(t)$ étant des fonctions connues. Ces conditions déterminent donc le comportement de la solution sur les demi-droites $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \lambda_2$ $(0 \leqslant t < \infty)$.

Les conditions (2) étant données, l'équation (1) se transforme en équation opérationnelle

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(\lambda), \tag{4}$$

où

$$a_{n-\nu} = a_{m\nu} s^m + \ldots + a_{0\nu} \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

---

[1]) Cf. [1], p. 247-248.

[2]) Cf. [1], p. 248.



et

$$f(\lambda) = \{\varphi(t,\lambda)\} + \sum_{\varkappa=0}^{m-1} s^{m-\varkappa-1} g_\varkappa(\lambda);$$

les conditions (3) ont maintenant la forme

$$x(\lambda_1) = v_1, \qquad x(\lambda_2) = v_2. \tag{5}$$

Supposons que l'équation caractéristique de (4)

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{6}$$

ait au moins deux racines-logarithmes $w_1$ et $w_2$.

Considérons d'abord le cas, où ces racines sont égales: $w_1 = w_2$. Si $x_0(\lambda)$ est une solution quelconque de (4), la fonction

$$x(\lambda) = c_1 e^{w_1\lambda} + c_2 \lambda e^{w_1\lambda} + x_0(\lambda),$$

où $c_1$ et $c_2$ sont des opérateurs arbitraires, est encore une solution de (4). Pour adapter cette solution aux conditions (5), on a à résoudre le système d'équations algébriques

$$\begin{aligned} c_1 e^{w_1\lambda_1} + c_2 \lambda_1 e^{w_1\lambda_1} &= -x_0(\lambda_1) + v_1, \\ c_1 e^{w_1\lambda_2} + c_2 \lambda_2 e^{w_1\lambda_2} &= -x_0(\lambda_2) + v_2. \end{aligned}$$

Le déterminant ce de système est

$$\begin{vmatrix} e^{w_1\lambda_1} & \lambda_1 e^{w_1\lambda_1} \\ e^{w_1\lambda_2} & \lambda_2 e^{w_1\lambda_2} \end{vmatrix} = e^{w_1(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_2 - \lambda_1);$$

il est évidemment non nul, car $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Il s'ensuit qu'il existe une solution $x(\lambda)$ de (4), satisfaisant aux conditions (5), et que cette solution est unique.

Considérons maintenant le cas, où $w_1 \neq w_2$. Alors la fonction

$$x(\lambda) = c_1 e^{w_1\lambda} + c_2 e^{w_2\lambda} + x_0(\lambda)$$

est encore une solution de (4). Pour l'adapter aux conditions (5) on a à résoudre le système d'équations algébriques

$$\begin{aligned} c_1 e^{w_1\lambda_1} + c_2 e^{w_2\lambda_1} &= -x_1(\lambda_1) + v_1, \\ c_1 e^{w_1\lambda_2} + c_2 e^{w_2\lambda_2} &= -x_2(\lambda_2) + v_2. \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} e^{w_1\lambda_1} & e^{w_2\lambda_1} \\ e^{w_1\lambda_2} & e^{w_2\lambda_2} \end{vmatrix} = e^{w_1\lambda_2 + w_2\lambda_1}\left[e^{(w_2-w_1)(\lambda_2-\lambda_1)} - 1\right]. \tag{7}$$

Les propriétés de ce déterminant découlent aussitôt d'un lemme que nous allons donner dans le paragraphe suivant.

### § 3. Un lemme.

Voici le lemme en question:

Lemme. *Les seuls opérateurs $w$ qui satisfont à l'équation $e^w=1$ sont les nombres $2k\pi i$ ($k$ entier).*

En effet, si $e^w=1$, tout opérateur $y=e^{\mu w/\nu}$, où $\mu$ et $\nu$ sont des entiers ($\nu\neq 0$), satisfait à l'équation $y^\nu=1$. Cet opérateur est donc un nombre, car toutes les racines de cette équation sont numériques. La fonction $e^{w\lambda}$ admet donc des valeurs numériques pour $\lambda$ rationnel. Cette fonction est continue, elle admet donc partout des valeurs numériques. Par conséquent, sa dérivée $(e^{w\lambda})'$ admet partout des valeurs numériques. On a $w=(e^{w\lambda})'/e^{w\lambda}$, d'où il résulte que $w$ est un nombre. Or, les seuls nombres qui satisfont à l'équation $e^w=1$ sont des nombres $2k\pi i$ ($k$ entier).

Remarque. Les deux faits suivants ont été utilisés dans la démonstration précédente: 1° La limite d'une suite au sens opérationnel coïncide avec celle au sens habituel, lorsque les termes de cette suite sont des nombres. (Par conséquent, une fonction continue au sens opérationnel, qui est numérique sur un ensemble dense, est partout numérique.) 2° La dérivation au sens opérationnel coïncide avec celle au sens habituel, lorsque les valeurs de la fonction considérée sont numériques.

### § 4. Critère d'unicité.

En vertu du lemme précédent, le déterminant (7) est non nul, à moins que l'on ait

$$w_2=w_1+\frac{2k\pi i}{\lambda_2-\lambda_1} \qquad (k \text{ entier}). \tag{8}$$

Il s'ensuit que l'équation (4) avec les conditions (5) est résoluble dans le cas où l'égalité (8) n'a pas lieu. De plus, si $w_1$ et $w_2$ sont les seules racines-logarithmes de l'équation caractéristique (6), la solution est unique.

En revenant maintenant à l'équation (6), nous démontrerons le critère suivant:



Critère d'unicité. *Si l'équation (6) a au moins deux racines-logarithmes $w_1$ et $w_2$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution de l'équation (1), satisfaisant aux conditions (2) et (3), soit unique, est que l'équation (6) n'ait pas d'autres racines-logarithmes (sauf $w_1$ et $w_2$) et qu'il soit*

$$w_2-w_1\neq\frac{2k\pi i}{\lambda_2-\lambda_1} \qquad (k=\pm1,\pm2,\ldots).$$

Remarque. L'hypothèse que l'équation caractéristique (6) a au moins deux racines-logarithmes est tout-à-fait naturelle, car: 1° si l'équation (6) n'a qu'une seule racine-logarithme, les conditions (2) et l'une quelconque des conditions (3) assurent déjà l'unicité (la seconde des conditions (3) devient donc superflue); 2° si (6) n'a aucune racine-logarithme, les conditions (2) suffisent seules pour assurer l'unicité. Cela résulte d'un théorème général démontré auparavant[3]).

Démonstration. La suffisance de cette condition résulte aussitôt du raisonnement de tout-à-l'heure, concernant l'équation opérationnelle (4). Pour en démontrer la nécessité, considérons d'abord le cas, où l'équation (6) a trois (au moins) racines-logarithmes $w_1,w_2$ et $w_3$. Alors il existe trois solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=0. \tag{9}$$

Il est possible de déterminer trois opérateurs $c_1,c_2$ et $c_3$, non tous nuls, de manière que

$$c_1x_1(\lambda_1)+c_2x_2(\lambda_1)+c_3x_3(\lambda_1)=0,$$
$$c_1x_1(\lambda_2)+c_1x_2(\lambda_2)+c_3x_3(\lambda_2)=0.$$

Cela étant, la fonction

$$x_4(\lambda)=c_1x_1(\lambda)+c_2x_2(\lambda)+c_3x_3(\lambda)$$

satisfait à l'équation (9) et aux conditions

$$x_4(\lambda_1)=x_4(\lambda_2)=0. \tag{10}$$

Cette fonction peut être représentée, pour $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, dans la forme $x_4(\lambda)=p(\lambda)/q$, où $q\in C$ ($q\neq 0$) et $p(\lambda)=\{p(t,\lambda)\}$ est une fonction paramétrique telle que toutes les dérivées

---
[3]) Cf. [1], p. 247-248.

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu} p(t,\lambda)$$

qui interviennent dans l'équation (1) existent et sont continues dans la demi-bande $D$. La fonction $p(t,\lambda)$ satisfait à l'équation homogène qui s'obtient de (1) en remplaçant $\varphi(t,\lambda)$ par 0 et aux conditions qui s'obtiennent de (2) et (3) en remplaçant partout les seconds membres par 0. De plus, la fonction $p(t,\lambda)$ n'est pas identiquement nulle. Si maintenant $x_0(t,\lambda)$ est une solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (2) et (3), toute fonction

$$x(t,\lambda) = x_0(t,\lambda) + \gamma p(t,\lambda),$$

où $\gamma$ est un nombre arbitraire, satisfait encore à l'équation (1) et aux conditions (2) et (3).

Supposons enfin que les opérateurs $w_1$ et $w_2$ sont des racines uniques de (6) et que

$$w_2 - w_1 = \frac{2k\pi i}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

où $k$ est un entier non nul. Alors le déterminant (7) est nul et il existe des opérateurs $c_1$ et $c_2$ non nuls, tels que

$$c_1 e^{w_1\lambda_1} + c_2 e^{w_2\lambda_1} = 0,$$
$$c_1 e^{w_1\lambda_2} + c_2 e^{w_2\lambda_2} = 0.$$

Cela étant, la fonction

$$x_1(\lambda) = c_1 e^{w_1\lambda} + c_2 e^{w_2\lambda}$$

satisfait à l'équation (9) et aux conditions (10). Le raisonnement identique avec le précédent montre que, si $x_0(t,\lambda)$ est une solution de (1) satisfaisant aux conditions (2) et (3), cette solution n'est pas unique.

Le critère est ainsi démontré entièrement.

## § 5. Exemples.

Pour l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \tag{11}$$

les conditions sur l'axe $O\lambda$ s'écriront

$$x(0,\lambda) = g_0(\lambda), \qquad x_t(0,\lambda) = g_1(\lambda). \tag{12}$$



L'équation caractéristique $w^2 = s^2$ a deux racines: $s$ et $-s$. Les deux racines sont des logarithmes; leur différence $2s$ n'est évidemment pas de la forme $2k\pi i/(\lambda_2 - \lambda_1)$. En vertu du critère précédent, il existe, dans la demi-bande $D$, au plus une solution de (11), satisfaisant aux conditions (12) et (3).

Pour l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial x}{\partial t} \tag{13}$$

les conditions sur l'axe $O\lambda$ se réduisent à la seule égalité

$$x(0,\lambda) = g_0(\lambda). \tag{14}$$

L'équation caractéristique $w^2 = s$ a deux racines: $\sqrt{s}$ et $-\sqrt{s}$. Chacune d'elles est un logarithme et leur différence est

$$2\sqrt{s} \neq 2k\pi i/(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Il existe donc dans la demi-bande $D$ au plus une solution de (13), satisfaisant aux conditions (14) et (3).

Les deux problèmes précédents, concernant les équations (11) et (13) se laissent résoudre effectivement au moyen du calcul opérationnel. Cette résolution est bien connue et nous n'entrerons plus ici dans les détails. Nous allons discuter un exemple moins élémentaire.

Cherchons la solution de l'équation[4])

$$\frac{\partial^6 x}{\partial \lambda^4 \partial t^2} + 4\frac{\partial^6 x}{\partial \lambda^2 \partial t^4} - \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - 4\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ t \geqslant 0), \tag{15}$$

satisfaisant aux conditions

$$\begin{gathered} x_{\lambda^2}(0,\lambda) = 0, \qquad x_{t\lambda^2}(0,\lambda) = 0, \\ x_{\lambda^4}(0,\lambda) + 4x_{t^2\lambda^2}(0,\lambda) - 4x(0,\lambda) = 0, \\ x_{t\lambda^4}(0,\lambda) + 4x_{t^3\lambda^2}(0,\lambda) - 4x_t(0,\lambda) = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

et

$$x(t,0) = 0, \qquad x(t,1) = t. \tag{17}$$

L'équation caractéristique est maintenant de la forme

$$s^2 w^4 + 4s^4 w^2 - w^2 - 4s^2 = 0;$$

---

[4]) Cf. [1], p. 268.

elle a les racines

$$l,\qquad -l,\qquad 2is,\qquad -2is,$$

dont les deux premières sont des logarithmes et les deux restantes ne le sont pas. D'après notre critère d'unicité, les conditions (16) et (17) déterminent univoquement la solution de (15).

Cette solution peut être évaluée sans peine effectivement. En effet, l'équation opérationnelle correspondante est

$$s^2x^{(4)}+(4s^4-1)x''+4s^2x=0;$$

la solution générale de cette équation est

$$x(\lambda)=c_1e^{l\lambda}+c_2e^{-l\lambda}.$$

En adaptant cette solution aux conditions $x(0)=0$ et $x(1)=l^2$, qui correspondent aux conditions (17), on a à résoudre le système d'équations $c_1+c_2=0$, $c_1e^l+c_2e^{-l}=l^2$. On trouve

$$c_1=\frac{l^2e^l}{e^{2l}-1}\qquad\text{et}\qquad c_2=-\frac{l^2e^l}{e^{2l}-1}.$$

Or, la fonction analytique $z/(e^z-1)$ se développe en série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu z^\nu}{\nu!},$$

où les $B_\nu$ sont les *nombres de Bernoulli*. On a donc

$$c_1=-c_2=e^l\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}2^{\nu-1}l^{\nu+1}.$$

Donc, la solution cherchée peut s'écrire

$$x(\lambda)=(e^{l(1+\lambda)}-e^{l(1-\lambda)})\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}2^{\nu-1}l^{\nu+1}$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}[(1+\lambda)^\mu-(1-\lambda)^\mu]\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}2^{\nu-1}l^{\mu+\nu+1}.$$

En revenant à la notation habituelle, on a

$$x(t,\lambda)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}B_\nu}{\mu!\,\nu!\,(\mu+\nu)!}[(1+\lambda)^\mu-(1-\lambda)^\mu]t^{\mu+\nu},$$



ce qui est la solution cherchée de (15); la convergence de cette série double résulte d'un théorème général sur la convergence de séries opérationnelles [5]).

Considérons enfin l'équation

$$\frac{\partial^4x}{\partial\lambda^4}+\frac{\partial^4x}{\partial t^2\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2x}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2x}{\partial t^2}=0\qquad(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2,\ t\geqslant0).\tag{18}$$

On demande toutes les solutions de cette équation, satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned}x_{\lambda^2}(0,\lambda)+x(0,\lambda)&=0, & x_{t\lambda^2}(0,\lambda)+x_t(0,\lambda)&=0,\\ x(t,\lambda_1)&=0, & x(t,\lambda_2)&=0.\end{aligned}\tag{19}$$

On a ici l'équation caractéristique

$$w^4+s^2w^2+w^2+s^2=0,$$

avec les racines

$$i,\qquad -i,\qquad is,\qquad -is.$$

Les deux premières de ces racines sont des logarithmes et les deux dernières ne le sont pas. La différence des racines-logarithmes est $2i$. D'après notre critère, les conditions (19) assurent l'unicité de la solution de l'équation (19) lorsque $\lambda_2-\lambda_1\neq k\pi$, où $k=\pm1,\pm2,\ldots$, et seulement dans ce cas; il est évident que cette solution unique est $x(t,\lambda)\equiv0$.

Si $\lambda_2-\lambda_1=k\pi$, la solution n'est plus unique. En effet, il est facile à vérifier dans ce cas que toute fonction de la forme

$$x(t,\lambda)=f(t)\sin(\lambda-\lambda_1),\tag{20}$$

où $f$ est une fonction arbitraire de $t$ (deux fois dérivable), satisfait à l'équation (18) et aux conditions (19).

Le calcul opérationnel permet de démontrer facilement que, dans ce dernier cas, toute solution de (18) satisfaisant aux conditions (19) est de la forme (20). En effet, le problème opérationnel, correspondant à l'équation (18) et aux conditions (19), s'exprime par l'équation

$$x^{(4)}+(s^2+1)x''+s^2x=0\tag{21}$$

[5]) J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70; en particulier p. 63-64.

et les conditions aux limites

(22) $$x(\lambda_1)=0, \qquad x(\lambda_2)=0.$$

La solution générale de (21) est

$$x(\lambda)=c_1e^{i\lambda}+c_2e^{-i\lambda},$$

où $c_1$ et $c_2$ sont des opérateurs arbitraires. Il s'ensuit que la solution satisfaisant aux conditions (22) a la forme

(23) $$x(\lambda)=f\sin(\lambda-\lambda_1),$$

où $f$ est un opérateur arbitraire. Pour que la fonction (23) soit paramétrique, il faut et il suffit que $f$ soit une fonction ordinaire de la variable $t$. C'est ce qui implique la forme (20) pour toute solution du problème initial, concernant l'équation (18).

## Bibliographie.

[1] J. G.-Mikusiński, *Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 227-270.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

*(Reçu par la Rédaction le 28.8.52)*

# On the Paley-Wiener theorem

by

J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

**§ 1. Introduction.** By the well known and important theorem of Paley and Wiener [1]), every entire function $F(z)$ of exponential type which belongs to $L_2$ along an infinite axis can be represented as a Fourier integral. In this paper we shall formulate and prove an analoguous theorem for analytic functions which are considered in a half-plane only. From such a theorem we can easily obtain the theorem for entire functions (§ 3), but not conversely.

Plancherel and Pólya [2]) have shown that the condition $L_2$ can be replaced by $L_1$. However, they have given a new proof for both cases. In this paper, we shall prove our theorem by the hypothesis that $F(z)$ belongs to $L_p$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ along the boundary of the considered half-plane.

The form of the Plancherel and Pólya theorem is slightly sharper than that of Paley and Wiener. This form and still sharper forms will be discussed in § 6.

The proof of Plancherel and Pólya is based on the properties of entire functions and cannot be applied to the half-plane. The proof given in the sequel is, in some points, analoguous to that of Paley and Wiener; it leads, however, to an independent and more elementary argument for the particular case $p=1$.

**§ 2. Theorem.** We suppose throughout this paper that $F(z)$ is an analytic function in the half-plane $\Re z>0$ and that

$$\lim_{x\to 0+} F(x+iy)=F(iy) \quad \text{for almost every real } y.$$

Theorem. *If $e^{-k|z|}F(z)$ is bounded in the half-plane $\Re z>0$ and $F(iy)\epsilon L_p(-\infty,\infty)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, then $F(z)$ can be represented, for $\Re z>0$, as an absolutely convergent integral*

[1]) Paley-Wiener [4], p. 12-13.
[2]) Plancherel-Pólya [6].