Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques

par

S. HARTMAN (Wrocław) et C. RYLL-NARDZEWSKI (Warszawa).

Introduction. Les résultats contenus dans ce travail sont pour la plupart déjà connus, mais ils se trouvent dispersés parmi plusieurs travaux et jamais ils n'étaient soumis à un traitement unifié. En outre, nous en donnons des démonstrations différentes.

Nous appelons *caractère d'un groupe abstrait* G toute fonction complexe $\chi(t)$ $(t\epsilon G)$ telle que $|\chi(t)|=1$ et que $\chi(tu)=\chi(t)\chi(u)$. Le théorème qui nous intéresse surtout est celui qu'ont démontré MM. HEWITT et ZUCKERMAN [1]) sous la forme suivante:

Hypothèse. *H est un groupe de caractères d'un groupe donné G. Soit $\chi_1,\dots,\chi_n\epsilon H$ et soit ω_0 un caractère du groupe H.*

Thèse. *Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $t\epsilon G$ tel que*

$$|\chi_j(t)-\omega_0(\chi_j)|<\varepsilon \qquad (j=1,\dots,n).$$

Nous modifierons légèrement ce théorème pour mieux l'adapter aux raisonnements qui suivent. Dans ce but nous allons d'abord introduire une définition.

Définition. Les caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ d'un groupe G sont *en corrélation* avec les nombres complexes $a_1,\dots,a_n$ $(|a_j|=1)$ si, pour des entiers quelconques $k_1,\dots,k_n$, l'identité $\chi_1^{k_1}(t)\cdot\ldots\cdot\chi_n^{k_n}(t)=1$ pour tout $t\epsilon G$ entraîne $a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}=1$. Le système $\chi_1,\dots,\chi_n$ sera dit un *système de caractères indépendants* s'il est en corrélation avec tout système de nombres $a_1,\dots,a_n$, c'est-à-dire si l'identité

$$\chi_1^{k_1}(t)\cdot\ldots\cdot\chi_n^{k_n}(t)=1 \qquad (t\epsilon G)$$

ne se présente que pour $k_1=\ldots=k_n=0$.

---

[1]) E. Hewitt and H. S. Zuckerman, *A group-theoretic method in approximation theory*, Annals of Mathematics 52 (1950), p. 557-567, Theorem 1.

Théorème I. *Si les caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ d'un groupe G sont en corrélation avec les nombres complexes $a_1,\dots,a_n$, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $t\epsilon G$ tel que*

$$|\chi_j(t)-a_j|<\varepsilon \qquad (j=1,\dots,n).$$

L'équivalence de ce théorème avec celui de Hewitt et Zuckerman est facile à prouver. En effet, le théorème de Hewitt et Zuckerman résulte immédiatement du théorème I, parce que les nombres $a_j=\omega_0(\chi_j)$ sont en corrélation avec les caractères χ_j. Pour démontrer l'implication inverse désignons par H le plus petit groupe de caractères du groupe G, contenant $\chi_1,\dots,\chi_n$. Si, pour un $\chi\epsilon H$, on a $\chi=\chi_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\chi_n^{k_n}$, posons $\omega_0(\chi)=a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}$. L'hypothèse du théorème I assure que ω_0 est alors un caractère bien déterminé du groupe H, et l'on a évidemment $\omega_0(\chi_j)=a_j$. Pour obtenir la thèse du théorème I on n'a qu'à appliquer le théorème de Hewitt et Zuckerman au caractère ω_0. Nous appellerons le théorème I *théorème abstrait fort de Kronecker* parce que, $\chi_1,\dots,\chi_n$ étant des caractères continus du groupe additif des nombres réels, donc de la forme $\chi_j(t)=e^{i\lambda_j t}$, on en déduit le théorème classique de Kronecker:

Si, pour des entiers quelconques $k_1,\dots,k_n$, la condition $k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n=0$ entraîne $k_1\vartheta_1+\ldots+k_n\vartheta_n\equiv0 \pmod{2\pi}$, alors pour tout $\varepsilon>0$ les inégalités $|\lambda_j t-\vartheta_j|<\varepsilon \pmod{2\pi}$ $(j=1,\dots,n)$ sont simultanément résolubles.

A ce théorème nous donnerons le nom de *théorème arithmétique fort de Kronecker*. MM. Hewitt et Zuckerman le déduisent, eux aussi, de leur théorème d'approximation, mais à l'aide d'une méthode un peu artificielle.

Nous appellerons *théorème arithmétique faible de Kronecker* la proposition suivante:

Si les nombres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont arithmétiquement indépendants, c'est-à-dire si, pour des entiers quelconques $k_1,\dots,k_n$, la condition $k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n=0$ entraîne $k_1=\ldots=k_n=0$, les inégalités

$$|\lambda_j t-\vartheta_j|<\varepsilon \pmod{2\pi} \qquad (j=1,\dots,n)$$

sont simultanément résolubles quels que soient les nombres $\vartheta_1,\dots,\vartheta_n$ et $\varepsilon>0$.

A ce théorème correspond dans le domaine abstrait un résultat analogue que l'on doit alors appeler le *théorème abstrait faible de Kronecker*, à savoir:

Théorème II. *Si les caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ d'un groupe G sont indépendants, quels que soient les nombres $a_1,\dots,a_n$ ($|a_j|=1$) et $\varepsilon>0$ il existe un $t\epsilon G$ tel que*

$$|\chi_j(t)-a_j|<\varepsilon \qquad (j=1,\dots,n).$$

Evidemment, les théorèmes „faibles" représentent des cas particuliers des théorèmes „forts".

Nous donnons d'abord la démonstration du théorème II, basée sur l'existence de la mesure de Haar dans les groupes bicompacts, et puis, indépendamment, nous passons à la démonstration du théorème de Hewitt et Zuckerman, à l'aide de la théorie des fonctions presque périodiques. Cette démonstration est plus longue que celle du théorème II, à quoi on devait d'ailleurs s'attendre, mais elle est plus élémentaire que celle de Hewitt et Zuckerman, vu qu'elle ne fait pas appel aux notions topologiques.

En appliquant le théorème I aux fonctions presque périodiques sur les groupes abéliens, nous avons le résultat suivant:

Théorème III. *Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(t)\sim f(t)$$

est la série de Fourier d'une fonction presque périodique $f(t)$ sur un groupe abélien G [2]*, si $a_n=|a_n|e^{-i\vartheta_n}$ et les caractères χ_n sont en corrélation avec les nombres $e^{i\vartheta_n}$ (cela veut dire que pour tout n les caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ sont en corrélation avec les nombres $e^{i\vartheta_1},\dots,e^{i\vartheta_n}$), alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sup_{t\epsilon G}|f(t)|.$$

Un cas particulier, le plus important de ce théorème, est contenu dans le théorème ci-dessous.

Théorème IV. *Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(t)\sim f(t)$$

et si les caractères χ_n sont indépendants (cela veut dire que pour tout n les caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ sont indépendants), alors

[2]) Pour les notions et les théorèmes concernant les fonctions presque périodiques sur un groupe, voir par exemple W. Maak, *Fastperiodische Funktionen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 61, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sup_{t\epsilon G}|f(t)|$$

(quelles que soient les phases des coefficients a_n).

Le théorème IV est une généralisation d'un théorème analogue bien connu sur les fonctions de Bohr [3]). Une généralisation pareille fut donnée par van Kampen [4]) pour les groupes bicompacts, pas nécessairement abéliens. Notre méthode de raisonnement permet de déduire le théorème IV directement du théorème II.

Dans la suite nous généralisons le théorème de Wiener-Gelfand sur les fonctions presque périodiques de Bohr, dont la série de Fourier converge absolument [5]). L'extension de ce résultat aux fonctions presque périodiques sur les groupes abéliens fait l'objet du théorème que voici:

Théorème V. *Si la série de Fourier d'une fonction presque périodique $f(t)$ sur un groupe abélien converge absolument et si $\inf|f(t)|>0$, la fonction presque périodique $1/f(t)$ admet également une expansion de Fourier absolument convergente.*

1. Démonstration du théorème II. Notre méthode de démonstration permet de supposer $n=2$ sans restreindre la généralité. Soient χ_1 et χ_2 des caractères indépendants du groupe G. Le cercle-unité sera designé par T et soit ψ la transformation qui fait correspondre à un élément $t\epsilon G$ le point $(\chi_1(t),\chi_2(t))$ du thore T^2. Ce thore constitue un groupe avec l'opération

$$(z_1,z_2)(z_3,z_4)=(z_1z_3,z_2z_4).$$

Ensuite Ψ désignera la fermeture de l'ensemble $\psi(G)$. Evidemment, Ψ est un sous-groupe de T^2. Soit μ la mesure „plane" de Lebesgue dans T^2: $\mu=m\times m$, où m désigne la mesure linéaire normée de Lebesgue dans T ($m(T)=1$). On voit que μ est en même temps la mesure de Haar dans T^2. Or, soit ν la mesure normée de Haar dans Ψ ($\nu(\Psi)=1$). Il faut démontrer que $\Psi=T^2$. Il suffit d'établir $\mu(\Psi)=1$, ce qui sera une conséquence immédiate de la relation

[3]) H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Ergebnisse der Mathematik I, Berlin 1932, p. 76.

[4]) E. R. van Kampen, *Almost periodic functions and compact groups*, Annals of Mathematics 37 (1936), p. 78-91, Theorem 10.

[5]) I. Gelfand, *Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale*, Matematičeskij Sbornik 9 (51) (1941), p. 51-66, Satz 6.

(1.1) $\mu(Y)=\nu(Y\Psi)$ pour tout ensemble fermé $Y\subset T^2$.

Pour démontrer (1.1) remarquons d'abord que pour toute fonction de la forme

$$W(z)=\sum_{r=-N}^{N}a_r z^r,$$

où la variable complexe z parcourt T (c'est-à-dire $|z|=1$), on a

$$\int_T W(z)\,dm(z)=a_0;$$

en effet: moyennant la substitution $z=e^{2\pi iu}$ la fonction $W(z)$ se transforme en polynôme trigonométrique $W^*(u)$ dont le terme constant est égal à a_0, et l'on a

$$\int_T W(z)\,dm(z)=\int_0^1 W^*(u)\,du.$$

Si les variables z_1 et z_2 parcourent, indépendamment l'une de l'autre, le cercle T, on trouve d'une manière évidente

$$\int_{T^2} W_1(z_1)\,W_2(z_2)\,d\mu(z_1,z_2)=\int_T W_1(z_1)\,dm(z_1)\cdot\int_T W_2(z_2)\,dm(z_2)=a_0b_0, \tag{1.2}$$

quelles que soient les fonctions W_1 et W_2 à coefficients a_r et b_r respectivement. Quand le point (z_1,z_2) parcourt Ψ, le produit $z_1^r z_2^s$ est un caractère du groupe Ψ, les entiers r et s étant fixés arbitrairement; or, la relation $z_1^r z_2^s=1$ ne se présente pour tout $(z_1,z_2)\in\Psi$ que si $r=s=0$; en effet: il suffit même qu'elle soit valable sur $\psi(G)\subset\Psi$ pour qu'on ait déjà

$$\chi_1^r(t)\chi_2^s(t)=1 \text{ partout sur } G,$$

d'où vient $r=s=0$ en vertu de l'indépendance des caractères χ_1 et χ_2. Ainsi l'on a

$$\int_{\Psi} W_1(z_1)\,W_2(z_2)\,d\nu(z_1,z_2)=a_0b_0, \tag{1.3}$$

puisque pour tout caractère $\chi\not\equiv 1$ d'un groupe Γ, pourvu d'une mesure finie de Haar ν, il vient

$$\int_\Gamma \chi\,d\nu=0.$$

Soient à présent A et B deux arcs du cercle T, et φ_1,φ_2 leurs fonctions caractéristiques. Il existe deux suites $W_{1,p}^*(u)$ et $W_{2,p}^*(u)$

de polynômes trigonométriques, bornés dans leur ensemble, telles que

$$\varphi_i(z)=\lim_p W_{i,p}(z) \qquad (i=1,2).$$

L'additivité dénombrable des mesures μ et ν fournit

$$\int_{T^2}\varphi_1(z_1)\,\varphi_2(z_2)\,d\mu(z_1,z_2)=\lim_p\int_{T^2}W_{1,p}(z_1)\,W_{2,p}(z_2)\,d\mu(z_1,z_2),$$
$$\int_{\Psi}\varphi_1(z_1)\,\varphi_2(z_2)\,d\nu(z_1,z_2)=\lim_p\int_{\Psi}W_{1,p}(z_1)\,W_{2,p}(z_2)\,d\nu(z_1,z_2).$$

On en conclut, compte tenu de (1.2) et (1.3), que

$$\int_{T^2}\varphi_1(z_1)\,\varphi_2(z_2)\,d\mu(z_1,z_2)=\int_{\Psi}\varphi_1(z_1)\,\varphi_2(z_2)\,d\nu(z_1,z_2),$$

ce qui veut dire: $\mu(A\times B)=\nu\big((A\times B)\Psi\big)$. Vu que les arcs A et B sont arbitraires, on en obtient tout de suite (1.1) et le théorème II se trouve démontré.

Il est aisé de voir que la méthode employée ci-dessus peut donner la démonstration du théorème suivant:

Soit $Z\subset T^2$, et admettons que pour tout couple d'entiers r et s l'identité $z_1^r z_2^s=1$ $\big((z_1,z_2)\in T^2\big)$ entraîne $r=s=0$. Alors l'ensemble Z engendre un groupe dense dans T^2.

Le théorème II donne lieu au corollaire suivant:

Corollaire. *Soit G un groupe additif de fonctions réelles définies sur un ensemble quelconque T, et soient $t_1,\dots,t_n\in T$ de tels éléments que la congruence aux coefficients entiers*

$$k_1f(t_1)+\ldots+k_nf(t_n)\equiv 0 \pmod{2\pi}$$

ne subsiste pour tout $f\in G$ que si $k_1=\ldots=k_n=0$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$ et pour des nombres réels quelconques $\vartheta_1,\dots,\vartheta_n$ il existe une fonction $f\in G$, telle que

$$|f(t_j)-\vartheta_j|<\varepsilon \pmod{2\pi} \qquad (j=1,\dots,n).$$

Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'hypothèse du corollaire entraîne l'indépendance des caractères $\chi_j(f)=e^{if(t_j)}$ du groupe G, et appliquer ensuite le théorème II.

2. Nous passons à la démonstration du théorème de MM. Hewitt et Zuckerman, ce qui nous donnera en même temps le théorème I. Il nous faut d'abord deux lemmes.

Lemme 1. *Si $f(t)$ est une fonction presque périodique sur un groupe G, on a*

$$\sup_{t \in G} |f(t)| = \lim_n \{ \underset{t}{M} [|f^n(t)|] \}^{1/n}, \tag{2.1}$$

$M[f]$ désignant la valeur moyenne de f sur G.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas, où f est une fonction non-négative et non identiquement nulle. Posons

$$\sup_{t \in G} f(t) = \mu.$$

Pour tout nombre positif $\varepsilon < \mu$ il existe des éléments $a_1, \dots, a_k \in G$ tels que

$$\max_{i=1,\dots,k} f(a_i t) \geqslant \mu - \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t \in G. \tag{2.2}$$

En effet: vu la définition d'une fonction presque périodique, il existe une décomposition $G = A_1 + \dots + A_k$ et un système d'éléments $a_1, \dots, a_k$ tels qu'on ait

$$|f(a_i t) - f(ut)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad u \in A_i, \ t \in G,$$

donc

$$f(ut) - \varepsilon < f(a_i t) \leqslant \max_{i=1,\dots,k} f(a_i t) \quad \text{pour tous} \quad u, t \in G.$$

En prenant ici la borne supérieure par rapport à u, on trouve la formule (2.2) qui donne lieu à son tour aux relations que voici:

$$(\mu - \varepsilon)^n \leqslant \max_{i=1,\dots,k} f^n(a_i t) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f^n(a_i t),$$

$$(\mu - \varepsilon)^n = \underset{t}{M} [(\mu - \varepsilon)^n] \leqslant \underset{t}{M} \left[\sum_{i=1}^{k} f^n(a_i t) \right] = k \underset{t}{M} [f^n(t)].$$

Ainsi

$$\mu - \varepsilon \leqslant \varliminf_n \{ k^{1/n} (\underset{t}{M} [f^n(t)])^{1/n} \} = \varliminf_n \{ \underset{t}{M} [f^n(t)] \}^{1/n}.$$

Comme $\{ \underset{t}{M} [f^n(t)] \}^{1/n} \leqslant \mu$, on en tire aussitôt (2.1).

Remarque. En y faisant intervenir des notions topologiques on peut donner une démonstration plus courte du lemme 1; à savoir: on sait bien, que $f(t)$ se laisse prolonger d'une manière continue sur un groupe bicompact Ψ contenant G comme sous-ensemble partout dense (voir aussi le nº 3 de ce travail); ainsi la valeur moyenne de la fonction prolongée f^* est égale à l'intégrale de f^* sur Ψ d'après la mesure ν de Haar $(\nu(\Psi) = 1)$; les valeurs moyennes de $|f^n|$ sur G et de $|f^{*n}|$ sur Ψ étant les mêmes (cf. le lemme 3), on déduira (2.1) à l'aide d'une identité classique.

Soit à présent H un groupe de caractères d'un groupe G (pas nécessairement abélien). Soit P la classe des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i(t),$$

où $a_1, \dots, a_r$ sont des nombres complexes et $\chi_1, \dots, \chi_r \in H$. On voit bien que cette représentation est unique, pourvu que les caractères soient distincts. La classe P constitue un anneau linéaire commutatif avec une involution, les opérations algébriques y étant définies comme l'addition et la multiplication au sens ordinaire et comme la transformation en complexe-conjugué.

Soient G_1 et G_2 des groupes donnés et soient H_1 et H_2 certains groupes de caractères de G_1 et G_2 respectivement. Admettons que H_1 et H_2 soient isomorphes, notamment, par une transformation $\varphi(\chi^{(1)}) = \chi^{(2)}$ $(\chi^{(i)} \in H_i)$. Alors, comme on le voit bien, cette transformation se laisse prolonger à un isomorphisme entre les anneaux P_1 et P_2. Nous le désignerons aussi par la lettre φ. Maintenant nous pouvons formuler le second lemme.

Lemme 2. *Si $f^{(1)} \in P_1$, $f^{(2)} \in P_2$ et $\varphi(f^{(1)}) = f^{(2)}$, on a*

$$\sup_{t_1 \in G_1} |f^{(1)}(t_1)| = \sup_{t_2 \in G_2} |f^{(2)}(t_2)|.$$

On pourrait donner à ce lemme l'énoncé suivant: la norme

$$\sup_{t \in G} |f(t)|$$

dans l'anneau P du groupe H[6]) est bien déterminée par la structure algébrique de ce groupe.

Démonstration. Si $\chi^{(1)} \in H_1$, $\chi^{(2)} \in H_2$, $\varphi(\chi^{(1)}) = \chi^{(2)}$, on a

$$\underset{t_1}{M}(\chi^{(1)}(t_1)) = \underset{t_2}{M}(\chi^{(2)}(t_2)). \tag{2.3}$$

[6]) Ainsi s'appelle le plus petit anneau linéaire contenant H comme un sous-groupe multiplicatif.

De même, si $f^{(1)}\epsilon P_1$, $f^{(2)}\epsilon P_2$, $\varphi(f^{(1)})=f^{(2)}$, il vient

$$M_{t_1}(f^{(1)}(t_1))=M_{t_2}(f^{(2)}(t_2)), \tag{2.4}$$

$$\varphi(|f^{(1)}|^{2n})=|f^{(2)}|^{2n}. \tag{2.5}$$

En effet: (2.3) résulte de ce que $M_t(\chi(t))=0$ ou 1 suivant le cas si $\chi\not\equiv 1$ ou $\chi\equiv 1$. (2.3) donne lieu immédiatement à (2.4). Quant à la formule (2.5), elle est une conséquence de ce que $|f|^2=f\bar{f}$ et que l'isomorphisme conserve le produit et la valeur complexe-conjuguée. La thèse du lemme 2 résulte ainsi du lemme 1 et de (2.4) et (2.5).

A présent il nous est déjà possible de démontrer le théorème de Hewitt et Zuckerman. Soit H un groupe de caractères d'un groupe donné G (abélien ou non) et soit Ω le groupe de tous les caractères du groupe H. On peut admettre sans restreindre la généralité que H soit un groupe engendré par les caractères $\chi_1,\ldots,\chi_n$, dont il est question dans l'hypothèse du théorème (voir l'Introduction). Le groupe H est alors isomorphe avec le produit d'un nombre fini de groupes cycliques et il possède un ensemble suffisant de caractères, ce qui veut dire que pour deux éléments distincts χ' et $\chi''\epsilon H$ il existe un $\omega\epsilon\Omega$ tel que $\omega(\chi')\neq\omega(\chi'')$. Ces propositions sont bien connues dans la théorie des groupes, la seconde étant d'ailleurs une simple conséquence de la première; en particulier, leur démonstration ne fait pas appel à la théorie de dualité des groupes abéliens. Ainsi on peut considérer H comme un certain groupe de caractères du groupe Ω en posant $\chi(\omega)=\omega(\chi)$ où $\chi\epsilon H$ est un élément fixe et ω parcourt Ω. Précisément il s'agit ici d'un groupe isomorphe à H, mais nous l'identifierons avec H, aucun malentendu n'en pouvant provenir.

Pour pouvoir appliquer le lemme 2 introduisons les notations

$$G_1=G,\quad H_1=H,\quad t_1=t,$$

$$G_2=\Omega,\quad H_2=H,\quad t_2=\omega,$$

$$f^{(1)}(t)=4n-\sum_{i=1}^{n}|\chi_i(t)-\omega_0(\chi_i)|^2 \qquad (t\epsilon G;\ \omega_0\epsilon\Omega \text{ fixe}).$$

Or, l'isomorphisme par l'identité entre H_1 et H_2 engendre un isomorphisme des anneaux de ces groupes qui fait correspondre à la fonction $f^{(1)}$ la fonction de la variable $\omega\epsilon\Omega$

$$f^{(2)}(\omega)=4n-\sum_{i=1}^{n}|\omega(\chi_i)-\omega_0(\chi_i)|^2.$$

Compte tenu de ce que $f^{(1)}(t)\geqslant 0$ pour tout $t\epsilon G, 4n\geqslant f^{(2)}(\omega)\geqslant 0$ pour tout $\omega\epsilon\Omega$ et de ce que $f^{(2)}(\omega_0)=4n$, on a en vertu du lemme 2

$$\sup_{t\epsilon G} f^{(1)}(t)=\sup_{\omega\epsilon\Omega} f^{(2)}(\omega)=4n,$$

donc

$$\inf_t \sum_{i=1}^{n}|\chi_i(t)-\omega_0(\chi_i)|=0,$$

ce qui équivaut évidemment à la thèse du théorème de Hewitt et Zuckerman.

3. Nous faisons suivre un raisonnement, dont nous ferons usage dans les démonstrations des théorèmes III et V.

Soit $f(t)$ une fonction presque périodique sur un groupe abélien G et soit

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_n(t). \tag{3.1}$$

En vertu de l'algorithme de Fejér-Bochner, on a

$$f(t)=\lim_k \varphi_k(t) \tag{3.2}$$

uniformément sur G, où

$$\varphi_k(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(k)}a_n\chi_n(t), \tag{3.3}$$

$$0\leqslant\gamma_n^{(k)}\leqslant 1,\qquad \lim_{k\to\infty}\gamma_n^{(k)}=1 \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{3.4}$$

les sommes dans (3.3) étant en réalité finies, puisque $\gamma_n^{(k)}=0$ pour n suffisamment élevé. Posons

$$\psi(t)=(\chi_1(t),\chi_2(t),\ldots). \tag{3.5}$$

Ainsi, $\psi(t)$ transforme G en produit topologique dénombrable $T^{\aleph_0}$ de cercles-unités. Soit $\Psi=\overline{\psi(G)}$ la fermeture de $\psi(G)$ dans $T^{\aleph_0}$. Evidemment, Ψ est un sous-groupe de $T^{\aleph_0}$. Posons, pour $z=(z_1,z_2,\ldots)\epsilon T^{\aleph_0}$,

$$\varphi_k^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(k)}a_nz_n. \tag{3.6}$$

D'après (3.3), on a

$$\text{(3.7)}\qquad \varphi_k^*(z)=\varphi_k(t) \quad \text{pour} \quad z=\psi(t).$$

En vertu de (3.2) et de (3.7) la suite des fonctions continues $\varphi_k^*(z)$ converge uniformément sur $\psi(G)$, donc aussi sur Ψ, vers une fonction continue $f^*(z)$:

$$\text{(3.8)}\qquad \begin{gathered}\lim_k \varphi_k^*(z)=f^*(z) \quad \text{pour} \quad z\epsilon\Psi,\\ f^*(z)=f(t) \quad \text{pour} \quad z\epsilon\psi(G),\ z=\psi(t).\end{gathered}$$

Lemme 3. *Les coefficients de $\chi_n(t)$ dans le développement de Fourier de $f(t)$ sont égaux à ceux de z_n dans le développement de $f^*(z)$.*

Ce lemme résulte immédiatement de ce que, d'après (3.3) et (3.6), il en est de même avec les fonctions φ_k et φ_k^* qui convergent uniformément vers $f(t)$ et $f^*(z)$ respectivement.

Démonstration du théorème III. Admettons dans (3.1)

$$\text{(3.9)}\qquad a_n=|a_n|e^{-i\vartheta_n}$$

et que les caractères χ_n soient en corrélation avec les nombres $e^{i\vartheta_n}$. Grace au théorème I, on a

$$\text{(3.10)}\qquad z^0=(e^{i\vartheta_1},e^{i\vartheta_2},\ldots)\epsilon\Psi.$$

Ainsi, d'après (3.6) et (3.8), la valeur limite

$$\lim_k \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{n_j}^{(k)}a_n e^{i\vartheta_n}=f^*(z_0)$$

existe. En vertu de (3.9) il vient donc

$$\lim_k \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(k)}|a_n|=f^*(z^0),$$

d'où, compte tenu de (3.4),

$$\text{(3.11)}\qquad f^*(z^0)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty.$$

Pour démontrer la seconde partie du théorème III remarquons que, d'après (3.8), (3.10) et (3.11), il vient

$$\sup_{t\epsilon G}|f(t)|\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

L'inégalité inverse étant évidente, le théorème III se trouve démontré complètement.

Démonstration du théorème V. Soit

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_n(t)$$

une fonction presque périodique sur le groupe abélien G et soient

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty, \qquad \inf_t |f(t)|>0.$$

Le groupe (abélien) $\Psi=\overline{\psi(G)}$, où la fonction ψ est définie par (3.5), est un groupe compact. Envisageons l'anneau linéaire complexe R composé de toutes les fonctions $\varphi(z)$ continues (donc presque-périodiques) sur Ψ, dont les développements de Fourier selon les caractères $\omega(z)$ de Ψ convergent absolument. Les opérations algébriques dans R sont définies comme l'addition et la multiplication au sens ordinaire. Les coefficients de Fourier de $\varphi\epsilon R$ étant a_n, l'expression $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ sera considérée comme norme de φ. Or, la norme du produit de deux éléments ne surpassant pas le produit de leurs normes, R satisfait à tous les axiomes d'un anneau normé[7]) (appelé aussi *algèbre de Banach*). Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les homomorphismes de l'anneau R sur le corps des nombres complexes (en d'autres mots: $\mathfrak{M}$ désignera l'ensemble de tous les idéaux maxima dans R). Pour trouver tous les homomorphismes $h\epsilon\mathfrak{M}$, il suffit de savoir quelles sont les images des caractères $\omega(z)$ effectuées par h. Tous les $\omega(z)$ constituent un groupe Ω et chaque homomorphisme $h\epsilon\mathfrak{M}$ envisagé sur Ω est un caractère de Ω, il est donc de la forme $\omega(z)$ (z fixé, $\omega\epsilon\Omega$), ce qu'on conclut en vertu du théorème connu de Pontriagine sur la dualité pour les groupes abéliens séparables (cas d'un groupe compact). On obtient ainsi la proposition suivante:

(a) *tout l'élément $h\epsilon\mathfrak{M}$ est déterminé par un point $z^0\epsilon\Psi$, et l'on a $h(\omega)=\omega(z^0)$ pour tout $\omega\epsilon\Omega$, donc, compte tenu de la continuité de h, il vient $h(\varphi)=\varphi(z^0)$ pour tout $\varphi\epsilon R$.*

---

[7]) I. Gelfand, *Normierte Ringe*, Matematičeskij Sbornik 9 (51) (1941), p. 3-24, surtout p. 3.

Soit

$$f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n.$$

Puisque $f^*(z)=f(t)$ si $z \epsilon \psi(G)$, $z=\psi(t)$, et que l'ensemble Ψ est fermé, l'hypothèse

$$\inf_{t \epsilon G} |f(t)| > 0$$

entraîne $f^*(z) \neq 0$ partout sur Ψ. On en conclut à l'aide de (a) que, pour tout $h \epsilon \mathfrak{M}$, l'on a $h(f^*) \neq 0$. En tenant compte d'un théorème de Gelfand[8]), dont cet auteur fait l'usage, lui-même, dans les démonstrations de théorèmes analogues[9]), on peut affirmer qu'il existe dans R un élément inverse à l'élément f^*. Cependant, cela signifie que la série de Fourier de la fonction $1/f^*(z)$ converge absolument. Ainsi, soit

$$\frac{1}{f^*(z)} = \sum_n b_n \zeta_n(z), \qquad \sum_n |b_n| < \infty,$$

où $\zeta_n(z)$ sont des caractères (continus) différents de Ψ. Il est aisé de voir que la fonction $\zeta_n(\psi(t)) = \chi_n'(t)$ $(t \epsilon G)$ est un caractère de G. Pour $n \neq m$ il vient $\chi_n'(t) \not\equiv \chi_m'(t)$ puisque $\psi(G)$ est dense dans Ψ. Comme $f^*(z)=f(t)$ pour $z \epsilon \psi(G)$, $z_n = \chi_n(t)$ $(n=1,2,\ldots;\ t \epsilon G)$, l'on a donc

$$\frac{1}{f(t)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n'(t),$$

d'où la thèse du théorème.

Remarque. L'hypothèse que le groupe G soit abélien n'est pas essentielle pour les théorèmes III-V: ceux-ci subsistent encore, ainsi que leurs démonstrations, si l'on admet seulement que dans la série de Fourier de $f(t)$ n'apparaissent que des représentations de G à une dimension.

4. Les méthodes de Gelfand nous permettront de montrer encore un théorème sur les fonctions presque périodiques de Bohr[10]).

Théorème VI. *Soit*

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{ir_n ut},$$

[8]) I. Gelfand, loc. cit.[7]), Satz 6.

[9]) Cf. le travail cité au [5]).

[10]) Précisément, sur les „grenzperiodische Funktionen".

où

1⁰ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$,

2⁰ $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ *(p_n et q_n entiers), $u \neq 0$ — une constante réelle,*

3⁰ $\inf_{-\infty<t<\infty} |f(t)| = 0.$

Alors il existe une suite d'entiers s_n et un point t_0 tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i s_n/q_n} e^{i r_n u t_0} = 0. \tag{4.1}$$

Pour la démonstration trouvons d'abord la forme générale des caractères du groupe additif W des nombres rationnels. Tout caractère en question est de la forme $e^{i\varphi(p/q)}$ (p et q entiers), où φ est une fonction réelle qui est définie seulement mod 2π. De plus, pour des entiers quelconques k, l, m et n, on a, en désignant par $\equiv$ la congruence mod 2π,

$$\varphi\left(\frac{k}{m} + \frac{l}{n}\right) \equiv \varphi\left(\frac{k}{m}\right) + \varphi\left(\frac{l}{n}\right) \equiv k\varphi\left(\frac{1}{m}\right) + l\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

En posant $\varphi(1) \equiv \tau$ $(0 \leqslant \tau < 1)$, on a donc

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) \equiv \frac{p\tau}{q} + 2\pi \frac{px}{q}, \tag{4.2}$$

où $x = x(\varphi, p/q)$ est un entier, $0 \leqslant x < q$.

Envisageons l'ensemble R_1 des fonctions de Bohr sur l'axe réel, dont les développements de Fourier convergent absolument et dont tous les exposants de Fourier sont de la forme ru, où r est rationnel. R_1 est un anneau linéaire avec l'addition et la multiplication ordinaire et avec la norme $\Sigma|a_n|$. Tout l'homomorphisme h de l'anneau R_1 sur le corps des nombres complexes est bien déterminé par les valeurs qu'il prend sur les éléments e^{irut} (r rationnel). Les fonctions e^{irut} constituent un groupe multiplicatif qui est isomorphe avec le groupe additif des nombres rationnels. Par conséquent, pour tout h il existe en vertu de (4.2) un point $\tau = \tau(h)$ tel que $r = p/q$ entraîne

$$h(e^{irut}) = e^{ir\tau + 2\pi i p x/q}, \qquad \text{où} \quad 0 \leqslant x = x(h, r) < q.$$

Pour la fonction f, dont il est question dans le théorème, nous déduisons donc

$$h(f)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i(r_n\tau+2\pi p_n x_n/q_n)}.$$

Si l'on avait $h(f)\neq 0$ pour tout h, l'anneau R_1 contiendrait un élément inverse par rapport à f, ce qui est imposible à cause de 3^0. Alors, il existe un h pour lequel $h(f)=0$; en posant $\tau=ut_0$ et $s_n=x_np_n$ on a (4.1), ce qui achève la démonstration.

Le problème suivant s'impose: L'hypothèse 1^0 du théorème VI étant levée, la thèse, est-elle encore valable, si l'on exige que

$$\sum_n a_n e^{2\pi i s_n/q_n+ir_nut}$$

soit la série de Fourier d'une fonction de Bohr?

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 14. 10. 1952)