Bibliography

[1] R. P. Agnew, *On equivalence of methods of evaluation of sequences*, Tôhoku Math. Journal 35 (1932), p. 244-252.

[2] — *Convergence fields of methods of summability*, Annals of Mathematics 46 (1945), p. 93-101.

[3] — *Rogosinski-Bernstein trigonometric summability methods and modified arithmetic means*, Annals of Mathematics 56 (1952), p. 537-559.

[4] M. Альтман, *Обобщение одной теоремы Мазура-Орлича из теории суммирования*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 233-243.

[5] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932.

[6] A. Л. Брудно, *Суммирование ограниченных последовательностей матрицами*, Математический Сборник 16 (58) (1945), p. 191-247.

[7] В. М. Даревский, *О внутренне совершенных методах суммирования*, Известия Академии Наук СССР 10 (1946), p. 97-104.

[8] — *О методах Toeplitz'a*, ibidem 11 (1947), p. 3-32.

[9] J. D. Hill, *Some properties of summability*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), p. 227-230.

[10] K. Knopp, *Folgenräume und Limitierungsverfahren*, Rendiconti di matematica e delle sue appl. 11 (1952), p. 269-298.

[11] T. Kojima, *On generalized Toeplitz's theorem on limit*, Tôhoku Math. Journal 12 (1917), p. 291-326.

[12] S. Mazur, *Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitz'schen Limitierungsverfahren*, Studia Math. 2 (1930), p. 40-50.

[13] S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. Acad. Sc. Paris 196 (1933), p. 32-34.

[14] — *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Studia Math. 10 (1948), p. 184-208; (II) ibidem 13 (1953), p. 137-179.

[15] — *Über Folgen linearer Operationen*, ibidem 4 (1933), p. 152-157.

[16] I. Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, Journ. f. reine und ang. Math. 151 (1921), p. 79-111.

[17] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace Matematyczno-Fizyczne 22 (1913), p. 113-119.

[18] A. Wilansky, *A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), p. 914-916.

[19] — *An application of Banach linear functionals to summability*, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949), p. 59-68.

[20] L. Włodarski, *Sur les méthodes continues de limitation (I)*, this volume, p. 161-187.

[21] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Zeitschr. 53 (1951), p. 463-487.

[22] — *Abschnittskonvergenz in FK-Räumen*, Math. Zeitschr. 55 (1951), p. 55-70.

[23] — *Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren*, Math. Zeitschr. 56 (1952), p. 134-151.

(Reçu par la Rédaction le 15. 11. 1953)

Sur les méthodes continues de limitation (I)

(Application de l'espace B_0 de Mazur et Orlicz à l'étude des méthodes continues)

par

L. WŁODARSKI (Łódź).

Introduction[1].

La limite ξ d'une suite $\{\xi_n\}$ peut être considérée comme une fonctionnelle qui fait correspondre des valeurs numériques aux suites convergentes; en symbole $\xi=\Lambda(x)$, où $x=\{\xi_n\}$. Cette fonctionnelle satisfait aux conditions suivantes:

1° si $\xi=\Lambda(x)$ et $\eta=\Lambda(y)$, on a $\xi+\eta=\Lambda(x+y)$,

2° si $\xi=\Lambda(x)$ et a est un nombre quelconque, on a $a\xi=\Lambda(ax)$.

Les notations suivantes ont été employées ici:

$$x=\{\xi_n\}, \qquad y=\{\eta_n\}, \qquad x+y=\{\xi_n+\eta_n\}, \qquad ax=\{a\xi_n\}.$$

La première condition exprime que la limite d'une somme de deux suites est égale à la somme de leurs limites. La seconde dit qu'en multipliant une suite par un facteur a, la limite est multipliée par a.

Supposons qu'une fonctionnelle $\Lambda(x)$, satisfaisant aux conditions 1° et 2°, soit définie non seulement pour les suites convergentes mais aussi pour certaines suites divergentes. Cette fonctionnelle peut être considérée comme une généralisation de la notion de limite; les suites auxquelles la fonctionnelle est applicable sont dites *limitables* et la fonctionnelle elle-même représente une *méthode de limitation*.

Une méthode est dite *permanente* lorsque

3° pour les suites convergentes, la fonctionnelle $\Lambda(x)$ est définie et admet la même valeur que la limite au sens habituel.

Steinhaus [8] a démontré qu'il existe des méthodes permanentes qui embrassent toutes les suites convergentes et divergentes. La démonstration s'appuie sur l'axiome de choix. Or, on ne sait construire une telle méthode d'une manière effective, même pour les suites bornées.

[1]) Les résultats de ce travail ont été présentés le 5 mai et de la deuxième partie (ce volume, p. 60-71) le 12 mai 1951 à la Section de Łódź de la Société Polonaise de Mathématique.

Les méthodes de Toeplitz et les méthodes fonctionnelles (voir définition 1 ci-dessous) satisfont aux conditions 1⁰ et 2⁰. Toeplitz [9] a donné des conditions simples, nécessaires et suffisantes, pour qu'une méthode de Toeplitz satisfasse à 3⁰; les théorèmes II et III sont analogues à ceux de Toeplitz et Schur. Steinhaus [8] a démontré qu'il existe, pour toute méthode permanente de Toeplitz, une suite non limitable dont chaque terme est 0 ou 1; la démonstration s'étend sans peine aux méthodes fonctionnelles. Il s'ensuit qu'aucune des méthodes permanentes de Toeplitz ainsi qu'aucune des méthodes permanentes fonctionnelles ne peut embrasser la classe entière des suites bornées.

Soient Λ_1 et Λ_2 deux méthodes de limitation. Il peut arriver qu'une suite x_1 soit limitable Λ_1 et ne soit pas limitable Λ_2, qu'une autre suite x_2 soit limitable Λ_2 et ne soit pas limitable Λ_1. Dans ce cas il peut être avantageux de considérer les deux méthodes Λ_1 et Λ_2 comme une seule méthode qui limite les deux suites x_1 et x_2. Ainsi on peut augmenter la classe des suites limitables. Or, afin que cette nouvelle méthode soit univoque, il faut que les deux méthodes Λ_1 et Λ_2 soient *compatibles*, c'est-à-dire que $\Lambda_1(x)=\Lambda_2(x)$ pour toute suite x limitable par chacune de ces méthodes. Il y a donc intérêt d'étudier la compatibilité de différentes méthodes.

Pour mieux préciser le problème, nous commencerons par quelques définitions.

DÉFINITION 1. *On dit qu'une suite $x=\{\xi_n\}$ est limitable au nombre ξ par une méthode fonctionnelle Λ, définie par une suite de fonctions $\{\lambda_n(t)\}$ $(0\leqslant t<T\leqslant\infty)$, en symbole $\Lambda(x)=\xi$, lorsque*

1⁰ *la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\,\xi_n$$

converge vers une fonction $\Lambda(t;x)$ pour $0\leqslant t<T$;

2⁰ $\lim\limits_{t\to T-}\Lambda(t;x)=\xi$.

La fonction $\Lambda(t;x)$ sera dite *transformée* de x.

Si, en particulier, les $\lambda_n(t)$ sont des fonctions continues pour $0\leqslant t<T=\infty$ et linéaires dans les intervalles $m-1\leqslant t\leqslant m$ $(m=1,2,\ldots)$, on se trouve dans le cas équivalent aux méthodes de Toeplitz avec la matrice $(\lambda_{m,n})$, où $\lambda_{m,n}=\lambda_n(m)$. La condition équivalente à 2⁰ peut alors s'écrire comme suit:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}\,\xi_n=\xi.$$

Une méthode de Toeplitz est dite *normale* lorsque $\lambda_{m,m}\neq 0$ et $\lambda_{m,n}=0$ pour $m<n$. La classe des méthodes fonctionnelles est évidemment plus riche que celle des méthodes de Toeplitz.

DÉFINITION 2. *L'ensemble Λ^* des suites limitables par une méthode Λ sera dit domaine de Λ.*

DÉFINITION 3. *La méthode M est plus générale que Λ lorsque $\Lambda^*\subset M^*$, c'est-à-dire lorsque toute suite limitable Λ est limitable M.*

DÉFINITION 4. *Les méthodes Λ et M sont compatibles dans X (X désigne une classe de suites) lorsque, pour toute suite $x\epsilon X$ limitable par Λ et par M, on a $\Lambda(x)=M(x)$.*

Si X embrasse toutes les suites numériques, les méthodes Λ et M sont *compatibles* (complétement).

DÉFINITION 5. *Les méthodes Λ et M sont équivalentes lorsque $\Lambda^*=M^*$ et $\Lambda(x)=M(x)$, c'est-à-dire lorsque toute suite limitable par l'une quelconque de ces méthodes est limitable par l'autre au même nombre.*

DÉFINITION 6. *Une méthode Λ est parfaite au point x_0, lorsque, pour toute méthode M permanente (d'une classe considérée de méthodes) et plus générale que Λ, on a $\Lambda(x_0)=M(x_0)$. Une méthode Λ est parfaite lorsqu'elle est parfaite en tout point $x\epsilon\Lambda^*$.*

DÉFINITION 7. *Une méthode Λ est translative à gauche lorsqu'elle a la propriété suivante: Si une suite $\{\xi_n\}$ est limitable Λ, la suite que l'on obtient de $\{\xi_n\}$ en négligeant le premier terme est limitable Λ au même nombre.*

Une méthode M est translative à droite lorsqu'elle a la propriété suivante: Si une suite $\{\xi_n\}$ est limitable M, toute suite que l'on obtient de $\{\xi_n\}$ en ajoutant au commencement un terme quelconque est limitable M au même nombre.

Une méthode est translative lorsqu'elle est translative à gauche et à droite.

Mazur [2] a remarqué que le domaine N^* d'une méthode normale N peut être considéré comme un espace B de Banach. Il s'ensuit que toute méthode de Toeplitz, plus générale que N (définition 3), est une fonctionnelle additive et continue dans N^* et réciproquement. Ceci conduit naturellement à la notion de méthode parfaite (définition 6). Mazur [2] a démontré que les méthodes E_k d'Euler et les méthodes C_k de Césaro sont parfaites. Par conséquent, les méthodes H_k de Hölder sont aussi parfaites, car elles sont équivalentes (définition 5) à C_k. Pour C_1 ce résultat est dû à Orlicz [7].

Mazur et Orlicz [4] ont continué la même idée en étudiant les méthodes de Toeplitz arbitraires et sont ainsi parvenus à la notion d'espace B_0 qui est une généralisation de l'espace de Banach.

Ces auteurs [3] ont publié une partie de leurs résultats, néanmoins sans en donner les démonstrations, déjà en 1933; leurs recherches n'ont été publiées entièrement que dans [10]. J'ai pris connaissance de leurs travaux au séminaire de l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences, dirigé par M. S. Mazur en 1949.

Dans ce travail nous suivons la même voie et appliquons la théorie de l'espace B_0 à l'étude des méthodes continues (définition 8); en particulier les théorèmes IV, V, VI, IX, X, lemmes 6 et 7 généralisent les théorèmes de Mazur et Orlicz [10] sur les méthodes de Toeplitz; les démonstrations sont, en partie, analogues à celles de S. Mazur et W. Orlicz. Les méthodes continues embrassent les méthodes classiques d'Abel et de Borel et les méthodes équivalentes (définition 5) aux méthodes de Toeplitz. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une méthode continue soit parfaite (théorème IX). Cela permet de montrer, en particulier, que la méthode d'Abel est parfaite. Il est intéressant qu'il existe des méthodes très régulières qui ne sont pas compatibles; nous donnons au § 3 un exemple de deux méthodes permanentes, parfaites et translatives, mais non compatibles.

Je tiens à remercier M. S. Mazur pour ses remarques et les problèmes qu'il a suggérés, concernant ce domaine.

§ 1.

LEMME 1. *Supposons que les fonctions* $\lambda_n(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ *soient définies pour* $0\leqslant t<b$ *et que*

(a) *la série*

$$B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|$$

converge partout dans l'intervalle $0\leqslant t<b$;

(b) *pour toute suite* $x=\{\xi_n\}$ *ayant zéro pour limite, la fonction*

$$A(t;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\,\xi_n$$

soit bornée dans un voisinage $b-d_x<t<b$.

Cela étant, la fonction $B(t)$ *est bornée dans un voisinage à gauche de* b.

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe une suite $\{t_m\}$ telle que

$$1^0\quad 0\leqslant t_m<b,\qquad 2^0\quad \lim_{m\to\infty}t_m=b,\qquad 3^0\quad \lim_{m\to\infty}B(t_m)=\infty.$$

En vertu de (a), $A(t;x)$ est, pour t fixe, une fonctionnelle linéaire[2]) dans l'espace c_0 (des suites convergentes vers zéro); la norme de cette fonctionnelle est $B(t)$. En vertu de (b), la suite $A(t_m;x)$ est bornée pour tout x fixe $(x\in C_0)$, donc, d'après un théorème de Banach et de Steinhaus[3]), les normes de $A(t_m;x)$ sont bornées, ce qui est en contradiction avec 3^0.

THÉORÈME I. *Pour qu'une méthode fonctionnelle* A *transforme toute suite* $x=\{\xi_n\}$ *convergente vers zéro en une fonction*

$$A(t;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\,\xi_n,$$

bornée dans l'intervalle $0\leqslant t<T$, *il faut et il suffit que*

$$1^0\quad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty\quad \textit{pour}\ 0\leqslant t<T,$$

où K *ne dépend pas de* t.

Démonstration. La suffisance est évidente. Pour démontrer la nécessité, supposons que la condition 1^0 ne soit pas satisfaite. Alors il existe une suite $\{t_m\}$ telle que

$$\text{(a)}\quad 0\leqslant t_m<T\qquad \text{et}\qquad \text{(b)}\quad \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t_m)|=\infty.$$

Considérons maintenant une suite de fonctionnelles

$$f_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t_m)\,\xi_m\qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

définie dans c_0. Si A transforme toute suite $x\in c_0$ en une fonction bornée, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\,\xi_n$$

est convergente pour tout $x\in c_0$ et, par conséquent, la suite

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|$$

est convergente; les fonctionnelles $f_m(x)$ sont donc continues et bornées pour tout x fixe. Donc, en vertu du théorème cité de Banach et de Steinhaus[4]), leurs normes

$$\|f_m\|=\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t_m)|$$

sont bornées, ce qui contredit (b).

REMARQUE. Le théorème reste vrai lorsqu'on y remplace "suite convergente vers zéro" par "suite bornée".

[2]) C'est-à-dire additive et continue.
[3]) Banach [1], p. 67.

[4]) Banach [1], Théorème 5, p. 80.

Théorème II. *Pour qu'une méthode fonctionnelle Λ limite toute suite $x=\{\xi_n\}$ convergente vers zéro, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions suivantes:*

1° *il existe un nombre t_0 $(0\leqslant t_0<T)$ tel que*

$$\text{(a)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty \quad \textit{pour} \quad t_0\leqslant t<T,$$

$$\text{(b)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)<\infty \quad \textit{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant t_0;$$

2° $\lim\limits_{t\to T-}\lambda_n(t)=a_n \quad (n=0,1,2,\ldots).$

Si les conditions 1° et 2° sont satisfaites, toute suite $x=\{\xi_n\}$ convergente vers zéro est limitable à

$$\Lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi_n.$$

Démonstration. Suffisance. Il résulte de 1° (a) que

$$\sum_{n=0}^{p}|\lambda_n(t)|\leqslant K \quad \text{pour} \quad p=1,2,3,\ldots,$$

d'où, en faisant t tendre vers l'infini,

$$\sum_{n=0}^{p}|a_n|\leqslant K \quad \text{pour} \quad p=1,2,3,\ldots,$$

donc

$$(\alpha)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\leqslant K.$$

Considérons la différence

$$\delta(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi_n-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\xi_n.$$

On voit que

$$(\beta)\qquad |\delta(t)|\leqslant\Big|\sum_{n=0}^{N}[a_n-\lambda_n(t)]\xi_n\Big|+\sup_{n\geqslant N+1}|\xi_n|\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}|\lambda_n(t)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\right].$$

Choisissons un nombre N de manière que $|\xi_n|<\varepsilon/4K$ pour $n>N$ (ce qui est possible, car $\xi_n\to0$), ensuite un nombre t_1 $(t_0<t_1<T)$ de manière que le premier terme du second membre de (β) soit inférieur à $\varepsilon/2$ pour $t_1<t<T$ (ce qui est possible en vertu de la condition 2°, car la somme est finie). On a alors

$$|\delta(t)|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad t_1<t<T,$$

ce qui prouve la suffisance.

Nécessité. D'après la supposition, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\xi_n$$

est convergente pour toute suite $x=\{\xi_n\}$ convergente vers zéro; donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|<\infty \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t<T,$$

ce qui prouve la nécessité de la condition 1° (b). La condition 1° (a) est satisfaite, en vertu du lemme 1. La condition 2° est satisfaite, car la suite e_n (dont le n-ième terme est 1 et tous les autres 0) est limitable d'après la supposition.

Corollaire 1. *Pour qu'une méthode fonctionnelle Λ limite à zéro toute suite $x\in c_0$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1° *il existe un nombre t_0 $(0\leqslant t_0<T)$ tel que*

$$\text{(a)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty \quad \textit{pour} \ t_0\leqslant t<T,$$

$$\text{(b)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|<\infty \quad \textit{pour} \ 0\leqslant t\leqslant t_0;$$

2° $\lim\lambda_n(t)=0 \quad (n=0,1,2,\ldots).$

Corollaire 2. *Si la méthode fonctionnelle Λ limite toute suite convergente vers zéro, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\lim_{t\to T-}\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty.$$

Théorème III. *Pour qu'une méthode fonctionnelle Λ limite toute suite $x=\{\xi_n\}$ convergente, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1° *et* 2° *du théoréme* II,

3° $\lim\limits_{t\to T-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)=a.$

Si les conditions 1°, 2° et 3° sont satisfaites, on a, pour toute suite convergente $x=\{\xi_n\}$, $\xi_n\to\xi$,

$$(\omega)\qquad \Lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi_n+\xi\left(a-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right).$$

Démonstration. Suffisance. Soit $x=\{\xi_n\}$ une suite convergente vers ξ. Alors $x_1=\{\xi_n-\xi\}$ est une suite convergente vers zéro, et, en vertu du théorème II, on a

$$A(x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi_n-\xi\sum_{n=0}^{\infty}a_n.$$

La suite e dont tous les termes sont égaux à 1 est, en vertu de la condition 3⁰, limitable à a: $A(e)=a$. On a évidemment $x=x_1+\xi e$, d'où $A(x)=A(x_1)+\xi A(e)$. En substituant pour $A(x_1)$ et $A(e)$ les expressions obtenues précédemment, on parvient à l'égalité (ω).

Nécessité. Le théorème II implique la nécessité de la condition 1⁰ et 2⁰. La nécessité de 3⁰ résulte de ce que la suite e est limitable.

Corollaire [5]. *Pour qu'une méthode fonctionnelle A soit permanente, il faut et il suffit que*

1⁰ *il existe un nombre t_0 $(0\leqslant t_0<T)$ tel que*

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty \quad \textit{pour}\ t_0\leqslant t<T,$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|<\infty \quad \textit{pour}\ 0\leqslant t\leqslant t_0;$$

2⁰ $\lim\limits_{t\to T-}\lambda_n(t)=0 \quad (n=0,1,2,\ldots);$

3⁰ $\lim\limits_{t\to T-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)=1.$

Remarque 1. La condition 1⁰ de ce théorème ne peut pas être remplacée par la condition 1c⁰ du théorème II c (p. 41). On le voit bien, en posant par exemple

$$\lambda_n(t)=\begin{cases}(1-t)t^n & \text{pour}\quad t\neq 1/m \qquad (m\text{—naturel}),\\ 1 & \text{pour}\quad t=1/m \quad \text{et}\quad n<m,\\ 0 & \text{pour}\quad t=1/m \quad \text{et}\quad n\geqslant m,\end{cases}$$

et $T=1$.

§ 2.

Définition 8. *Une méthode fonctionnelle A (définition 1) est dite continue lorsque*

1⁰ *les $\lambda_n(t)$ sont continues pour $0\leqslant t<T$ $(n=0,1,2,\ldots)$;*

[5]) Ce théorème est connu.

2⁰ *il existe une suite croissante $\{\tau_n\}$ $(\tau_1=0)$ convergente vers T telle que la convergence de la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\xi_n$$

pour $t=\tau_{m-1}$ et pour $t=\tau_m$ entraîne la convergence uniforme dans l'intervalle $\tau_{m-1}\leqslant r\leqslant\tau_m$, quelles que soient les ξ_n.

De cette définition il résulte que *si la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\xi_n$$

est convergente, elle l'est uniformément dans tout l'intervalle $0\leqslant t\leqslant t_0<T$.

Par conséquent, la transformée

$$A(t;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\xi_n$$

est continue.

En tenant compte de cette remarque et du théorème I on voit que pour les méthodes continues les théorèmes II et III prennent la forme du

Théorème IIc. *Pour qu'une méthode continue A limite toute suite $x=\{\xi_n\}$ convergente vers zéro, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1c⁰ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty$ *pour* $0\leqslant t<T$,

où K ne dépend pas de t;

2⁰ $\lim\limits_{t\to T-}\lambda_n(t)=a_n \qquad (n=0,1,2,\ldots).$

Pour qu'une méthode continue limite à zéro toute suite convergente vers zéro, il faut et il suffit que les conditions 1⁰ et 2⁰ soient satisfaites et $a_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$.

Théorème IIIc. *Pour qu'une méthode continue A limite toute suite $x=\{\xi_n\}$ convergente, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1c⁰ *et* 2⁰ *du théorème* IIc;

3⁰ $\lim\limits_{t\to T-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)=a.$

Corollaire. *Pour qu'une méthode continue A soit permanente, il faut et il suffit que*

1c⁰ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\lambda_n(t)|\leqslant K<\infty$ *pour* $0\leqslant t\leqslant T$,

où K ne dépend pas de t;

2° $\lim_{t\to T-} \lambda_n(t)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$;

3° $\lim_{t\to T-} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t)=1.$

REMARQUE 2. *Toute méthode de Toeplitz donnée par la matrice* $\{\lambda_{m,n}\}$ *peut être remplacée par une méthode équivalente (définition 5) continue*; en effet, on peut prendre pour $\lambda_n(t)$, par exemple, une fonction continue qui est linéaire dans tout intervalle $m-1\leqslant t\leqslant m$ $(m=1,2,3,\ldots)$ et qui admet la valeur $\lambda_{m,n}$ au point $t=m$ $(T=\infty)$.

DÉFINITION 9. *Si*

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

pour $|t|<R$, $f(t)\neq 0$ *et*

$$\lim_{t\to R-} \frac{t^n}{f(t)}=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

la méthode F *ayant la transformée*

$$F(t;x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{f(t)}\xi_n$$

est dite méthode de puissances $(T=R)$.

Toute *méthode de puissances* F, *où* $a_n\geqslant 0$, *est permanente*. Ceci résulte du théorème III.

Les méthodes de puissances constituent une sous-classe très importante de méthodes continues. Pour $\{\tau_m\}$ on peut prendre une suite croissante arbitraire qui tend vers R.

Les méthodes classiques d'Abel et de Borel constituent des exemples importants de méthodes de puissances.

La méthode d'Abel est définie par la transformée

$$A(t;x)=(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n\xi_n,$$

considérée dans l'intervalle $0\leqslant t<1$.

La méthode de Borel est définie par la transformée

$$B(t;x)=e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\xi_n,$$

considérée dans l'intervalle $0\leqslant t<\infty$.

DÉFINITION 10. *L'ensemble* Λ^{**} *des suites* x *pour lesquelles la transformée* $\Lambda(t;x)$ *d'une méthode fonctionnelle* Λ *existe sera dit pseudo-domaine de* Λ.

On a évidemment $\Lambda^*\subset\Lambda^{**}$.

Avec les notations de la définition 8, on a le lemme suivant:

LEMME 2. *Le pseudo-domaine* Λ^{**} *d'une méthode continue* Λ *est un espace* B_0 [4] *avec les pseudonormes*

$$(1)\qquad \begin{aligned} |x|_n &= |\xi_n| && (n=0,1,2,\ldots),\\ |x|_{\Lambda,m} &= \sup_n \Big|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(\tau_m)\,\xi_k\Big| && (m=1,2,\ldots).\end{aligned}$$

Démonstration. On doit démontrer que l'espace considéré est complet, c'est-à-dire que les relations

$$(2)\qquad |x_p-x_q|_n \xrightarrow{p,q} 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$(3)\qquad |x_p-x_q|_{\Lambda,m} \xrightarrow{p,q} 0 \qquad (m=1,2,\ldots),$$

où $x_p=\{\xi_n^{(p)}\}$, entraînent l'existence d'un élément $x_0\in\Lambda^{**}$ tel que

$$(4)\qquad |x_p-x_0|_n \xrightarrow{p} 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$(5)\qquad |x_p-x_0|_{\Lambda,m} \xrightarrow{p} 0 \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Le symbole $\xrightarrow{p,q}$ désigne ici la limite double pour $p\to\infty$ et $q\to\infty$ et le symbole $\xrightarrow{p}$ désigne la limite simple pour $p\to\infty$.

En vertu de (2), les limites

$$\xi_n^0=\lim_{p\to\infty}\xi_n^{(p)},$$

existent. En posant $x_0=\{\xi_n^0\}$, on a évidemment (4). En vertu de (3), il existe, pour τ_m fixe et $\varepsilon>0$, un nombre P tel que

$$\Big|\sum_{n=0}^{n} \lambda_k(\tau_m)[\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)}]\Big|<\varepsilon$$

pour $p,q>P$ et $n=0,1,2,\ldots$ En faisant q croître indéfiniment, il vient

$$(6)\qquad \Big|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(\tau_m)[\xi_k^{(p)}-\xi_k^{0}]\Big|\leqslant\varepsilon \qquad (p>P,\ n=0,1,2,\ldots),$$

d'où

$$|x_p-x_0|_{\Lambda,m}\leqslant\varepsilon,$$

ce qui entraîne (5). Il reste à démontrer que la série

(7) $$A(t;x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(t)\,\xi_k^0$$

est convergente. On a, en effet,

$$\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\lambda_k(t)\,\xi_k^0=\sum_{k=0}^{k_2}\lambda_k(t)[\xi_k^0-\xi_k^{(p)}]-\sum_{k=0}^{k_1}\lambda_k(t)[\xi_k^0-\xi_k^{(p)}]+\sum_{k=k_1+1}^{k_1}\lambda_k(t)\,\xi_k^{(p)},$$

d'où, pour $t=\tau_m$,

(8) $$\Big|\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k^0\Big|\leqslant|x_0-x_p|_{A,m}+|x_0-x_p|_{A,m}+\Big|\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k^{(p)}\Big|.$$

En vertu de (5), les deux premiers termes du second membre peuvent être rendus aussi petits que l'on veut, en choisissant p assez grand. Cela étant, le dernier terme tend vers zéro lorsque k_1 et k_2 croissent indéfiniment, car la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k^{(p)}$$

converge par hypothèse. Or, cela prouve la convergence de (7) pour $t=\tau_m$ $(m=1,2,\ldots)$ et, en vertu de l'hypothèse 2° de la définition 8, pour tout t $(0\leqslant t<T)$.

Remarque 3. Si $x=(\xi_n)\,\epsilon\,A^{**}$ et $x^{(p)}=(\xi_0,\ldots,\xi_p,0,0,\ldots)$, la suite $x^{(p)}$ converge vers x au sens de la métrique de A^{**}.

En effet, on a

$$\lim_{p\to\infty}|x-x^{(p)}|_n=0$$

et

$$\lim_{p\to\infty}|x-x^{(p)}|_{A,m}=0,$$

les pseudonormes $|x-x^{(p)}|_{A,m}$ étant des restes d'une série convergente.

Remarque 4. Si e_n est une suite dont le n-ième terme est 1 et tous les autres sont 0, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n e_n$$

converge vers x dans A^{**}.

Ceci résulte de la remarque 3.

Lemme 3. *Si la méthode A est continue, la fonctionnelle*

$$A(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\xi_n,$$

pour tout t $(0\leqslant t<T)$, est linéaire (c'est-à-dire additive et continue) dans le pseudo-domaine A^{**}.

Démonstration. Dans le pséudo-domaine A^{**}, la fonctionnelle $A(t,x)$ est évidemment additive et de la première classe de Baire, l'ensemble A^{**} est un espace complet du type F (Lemme 2). Alors, d'après le théorème de Banach[6]), la fonctionelle $A(t,x)$ est aussi continue dans A^{**}, c. q. f. d.

Théorème IV. *Le domaine A^* (définition 2) d'une méthode continue A est un espace B_0 avec les pseudonormes*

(9) $$|X|_A=\sup_{0\leqslant t<T}|A(t,x)|,\qquad |x|_n=|\xi_n|\qquad (n=0,1,2,\ldots),$$
$$|x|_{A,m}=\sup_n\Big|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k\Big|\qquad (m=1,2,\ldots).$$

Démonstration. On doit démontrer que les relations

(10) $$|x_p-x_q|_A\xrightarrow{p,q}0,$$

(11) $$|x_p-x_q|_n\xrightarrow{p,q}0\qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

(12) $$|x_p-x_q|_{A,m}\xrightarrow{p,q}0\qquad (m=1,2,\ldots)$$

entraînent l'existence d'un élément $x_0\,\epsilon\,A^*$, tel que

(13) $$|x_p-x_0|_A\xrightarrow{p}0,$$

(14) $$|x_p-x_0|_n\xrightarrow{p}0\qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

(15) $$|x_p-x_0|_{A,m}\xrightarrow{p}0\qquad (m=1,2,\ldots).$$

Il résulte des relations (11), (12) et du lemme 2 qu'il existe un $x_0\,\epsilon\,A^{**}$ tel que les relations (14) et (15) sont satisfaites et que x_0 est la limite de la suite $\{x_p\}$ suivant la convergence définie en A^{**}.

Pour la démonstration du théorème, il reste donc à prouver que la relation (13) est satisfaite, et que $x_0\,\epsilon\,A^*$. La relation (10) donne $|A(t,x_p)-A(t,x_q)|<\varepsilon$ pour $p,q>P$ et tout t $(0\leqslant t<T)$. En vertu du lemme 3, on peut, en fixant t, passer à la limite avec q tendant à l'infinie, et on obtient la relation (13). Il faut encore démontrer que la limite

$$\lim_{t\to T-}A(t,x_0)$$

existe.

[6]) [1], théorème IV, p. 23.

En effet, on a

$$|\Lambda(t'';x_0)-\Lambda(t';x_0|\leqslant|\Lambda(t'';x_p)-\Lambda(t';x_p)|$$
$$+|\Lambda(t'';x_0)-\Lambda(t'';x_p)|+|\Lambda(t';x_p)-|\Lambda(t';x_0)|.$$

En vertu de (13), les deux derniers termes peuvent être rendus petits, en choisissant p assez grand; d'autre part, p étant fixe, le premier terme du second membre devient petit si t' et t'' sont suffisamment proches de T, car

$$\lim_{t\to T-}\Lambda(t;x_p)$$

existe en vertu de l'hypothèse. Le premier membre tend vers zéro lorsque t' et t'' s'approchent de T, ce qui prouve l'existence de la limite en question.

Lemme 4. *Si les séries*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_n| \qquad \textit{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

sont convergentes, on a

$$\text{(i)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}b_n\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{n=k}^{\infty}b_n.$$

Démonstration. Le premier membre de (i) existe, car la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

est absolument convergente et les sommes

$$\sum_{k=0}^{n}a_k$$

sont bornées. Pour avoir le théorème, il suffit donc de démontrer que la différence

$$\delta_p=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{p}a_k\sum_{n=k}^{\infty}b_n$$

tend vers zéro pour $p\to\infty$. On a, pour p fini,

$$\sum_{k=0}^{p}a_k\sum_{n=k}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sum_{k=0}^{\inf(p,n)}a_k,$$

car une somme finie de séries absolument convergentes est une série absolument convergente et l'on y peut changer arbitrairement l'ordre de sommation. On a donc

$$\delta_p=\sum_{n=p+1}^{\infty}b_n\sum_{k=p+1}^{n}a_k.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un p_0 tel que

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{n}a_k\Big|<\frac{\varepsilon}{B} \qquad \text{pour} \quad n>p>p_0, \text{ où } B=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|.$$

Ceci entraîne évidemment $\delta_p\to 0$ pour $p\to\infty$.

Lemme 5. *La forme générale des fonctionnelles linéaires dans le pseudo-domaine Λ^{**} (définition 10) d'une méthode continue Λ (définition 8) est*

$$\text{(16)} \qquad f^{**}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\xi_n,$$

où les c_n sont des nombres arbitraires pour $0\leqslant n\leqslant n_0$, et

$$\text{(17)} \qquad c_n=\sum_{m=1}^{m_0}d_{m,n}\lambda_n(\tau_m) \quad \textit{pour} \quad n>n_0$$

(n_0 et m_0 — naturel), $d_{m,n}$ étant assujetis à la condition unique

$$\text{(18)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}|d_{m,n}-d_{m,n+1}|<\infty \qquad (m=1,2,\ldots,m_0).$$

Démonstration. Désignons par (s) l'espace de Fréchet des suites $x=\{\xi_n\}$ avec les pseudonormes $|x|_n=\{\xi_n\}$, et par (c) l'espace des suites convergentes $\{A_n\}$ avec la norme $\sup\limits_n\{A_n\}$. Désignons ensuite par (t) le produit cartésien $(c)^{\aleph_0}$, et par $\{A_{mn}\}$ les éléments (suites doubles) de ce produit. D'après un théorème de Mazur et Orlicz [5], toute fonctionnelle linéaire dans le produit cartésien $(s)\times(t)$ a la forme

$$\text{(19)} \qquad f^{**}(x)=\sum_{n=0}^{n_0}\delta_n\xi_n+\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_{m,n}A_{m,n}+b_m\lim_n A_{m,n}\Big),$$

où

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_{m,n}|<\infty \qquad (m=1,2,\ldots,m_0).$$

En vertu du lemme 2, l'espace Λ^{**} est isomorphe au sous-espace complet de $(s)\times(t)$, $x=\{\xi_n\}\to(\{\xi_n\},\{A_{m,n}\})$, où

$$\text{(20)} \qquad A_{m,n}=\sum_{m=1}^{n}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k.$$

Pour obtenir la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans Λ^{**}, il suffit donc de poser (20) dans (19).

Dans l'expression obtenue, on peut intervertir, en vertu du lemme 3, l'ordre de sommation, ce qui conduit à l'égalité

$$f^{**}(x)=\sum_{n=0}^{n_0}\delta_n\xi_n+\sum_{m=1}^{m_0}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k\Big[\sum_{n=k}^{\infty}b_{mn}\Big]+b_m\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(\tau_m)\,\xi_k\Big\},$$

d'où

$$f^{**}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left\{ \delta_k + \sum_{m=0}^{m_0} \lambda(\tau_m) \left[b_m + \sum_{n=k}^{\infty} b_{m,n} \right] \right\}, \quad \text{où} \quad \delta_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > n_0. \tag{21}$$

En substituant

$$d_{m,n} = b_m + \sum_{n=k}^{\infty} b_{m,n},$$

on parvient à la forme (16). Réciproquement, la forme (21) s'obtient de (16) en posant

$$b_{m,n} = d_{m,n} - d_{m,n+1}; \qquad b_m = \lim_{n\to\infty} d_{m,n}$$

(la dernière limite existe en vertu de (18)).

REMARQUE 5. Si une méthode continue Λ est permanente, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

En effet, on a dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(t)| \leqslant K \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < T$$

(théorème III c); d'autre part, l'inégalité (18) entraîne que la suite $\{d_{m,n}\}$ est bornée pour tout m fixe, ce qui implique la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$.

THÉORÈME V. *La forme générale des fonctionnelles linéaires dans le domaine Λ^* (définition 2) d'une méthode continue Λ (définition 8) est*

$$f(x) = \int_0^T \Lambda(t;x)\, dh(t) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi_n, \tag{22}$$

où $h(t)$ est à variation bornée dans $\langle 0;T\rangle$; les C_n sont des nombres arbitraires pour $0 \leqslant n \leqslant n_0$ et

$$C_n = \sum_{m=1}^{m_0} d_{m,n} \lambda_n(\tau_m) \quad \textit{pour} \quad n > n_0 \qquad (n_0 - \textit{naturel}), \tag{23}$$

les $d_{m,n}$ étant assujetis à la condition unique

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_{m,n} - d_{m,n+1}| < \infty \qquad (m = 1, 2, \ldots, m_0). \tag{24}$$

Démonstration. Si (C) est l'espace des fonctions $\varphi(t)$ continues sur $\langle a;b\rangle$, avec la norme

$$\sup_t |\varphi(t)|,$$

toute fonctionnelle linéaire dans (C) a la forme

$$\int_a^b \varphi(t)\, dh(t)\ ^{7)},$$

où $h(t)$ est à variation bornée sur $\langle a;b\rangle$. L'espace Λ^* est isomorphe au sous-espace complet du produit cartésien $(C)\times(s)\times(t)$, ce qui, en vertu du lemme 5, entraîne la forme (22) de toute fonctionnelle linéaire dans Λ^*.

REMARQUE 6. La pseudonorme $|x|_\Lambda$ n'a pas de propriété analogue à celle considérée dans la remarque 3, même lorsque x_0 est une suite limitable à 0, c'est-à-dire telle que $\Lambda(x_0) = 0$. Par exemple, pour la méthode de Toeplitz donnée par la formule $\Lambda(m;x) = \xi_m + \xi_{m+1}/2$ et pour la suite $x_0 = \{(-1)^n\}$, on a

$$\sup_m |\Lambda(m; x_0 - x_0^{(p)})| = \frac{1}{2} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

quoique $\Lambda(x_0) = 0$.

DÉFINITION 11. *La suite x_0, limitable par la méthode Λ à 0, est dite uniformément limitable par Λ lorsque*

$$\lim_p |x_0 - x_0^{(p)}|_\Lambda = 0,$$

où le sens de $x_0^{(p)}$ est le même que dans la remarque 3 et

$$|x|_\Lambda = \sup_{0 \leqslant t < T} |\Lambda(t;x)|.$$

La méthode Λ est dite uniforme lorsque toute suite limitable à zéro jouit de cette propriété.

§ 3.

THÉORÈME VI. (a) *Toute méthode fonctionnelle (définition 1) M plus générale (définition 3) qu'une méthode continue Λ, constitue dans Λ^* (définition 2) une fonctionnelle linéaire* [8]).

(b) *Si Λ est une méthode continue, il existe, pour toute fonctionnelle linéaire $f(x)$ définie dans Λ^*, une méthode M de Toeplitz, elle-même une méthode continue (remarque 2), plus générale que Λ et compatible dans Λ^* avec $f(x)$.*

Démonstration. (a) La fonctionnelle

$$M(x) = \lim_{t\to T-} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\, \xi_n$$

est évidemment additive et de deuxième classe de Baire. D'après un théorème de Banach[9]) cette fonctionnelle est continue, donc linéaire.

[7]) Banach [1], p. 61.

[8]) linéaire=additive et continue.

[9]) Banach [1], Théorème 4, p. 23.

(b) On a

$$\int_0^T \Lambda(t;x)\,dh(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\Lambda\left(\frac{i}{m}T;x\right)\left[h\left(\frac{i}{m}T\right)-h\left(\frac{i-1}{m}T\right)\right].$$

En tenant compte de (22) et de l'égalité

$$\Lambda(t;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\,\xi_n,$$

on peut donc écrire

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{m,n}\xi_n,$$

où

$$\mu_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_n\left(\frac{i}{m}T\right)\left[h\left(\frac{i}{m}T\right)-h\left(\frac{i-1}{m}T\right)\right]+c_n,$$

ce qui achève la démonstration.

On dit qu'une suite $\{x_k\}$, dont les éléments appartiennent à Λ^*, est *convergente dans* Λ^* *vers* x_0 lorsque toutes les pseudonormes (9) de x_k-x_0 tendent vers zéro pour $k\to\infty$. On dit qu'un élément x_0 est dans Λ^* un *point d'accumulation* lorsqu'il existe une suite $\{x_k\}$ $(x_k\epsilon\Lambda^*)$ convergente vers x_0.

Lemme 6. *Pour qu'une méthode continue et permanente* Λ *soit parfaite au point* x_0 *(dans la classe des méthodes fonctionnelles, définition 6), il faut et il suffit que* x_0 *soit dans* Λ^* *un point d'accumulation des éléments de* (c) *(c'est-à-dire des suites convergentes).*

Démonstration. La suffisance de cette condition résulte directement du théorème VI(a).

Pour démontrer la nécessité, supposons que x_0 ne soit pas un point d'accumulation de (c). Or, les suites convergentes constituent un ensemble linéaire, il existe donc une fonctionnelle linéaire $f(x)$ qui s'annule pour ces suites et qui est égale à 1 pour $x=x_0$. En vertu du théorème VI (b), il existe donc une méthode continue M qui est plus générale que Λ et telle que $M(x)=\Lambda(x)+f(x)$ pour $x\epsilon\Lambda^*$, ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque 7. Si $|x|^*=\sup_n|\xi_n|$ et si pour une suite $\{x_p\}$ on a

$$\lim_{p\to\infty}|x_p|^*=0,$$

toutes les pseudonormes (voir théorème IV) d'une méthode continue et permanente tendent vers 0 pour cette suite $\{x_p\}$. On peut dire que la norme $|x|^*$ est *plus forte* que les suites de pseudonormes de toute méthode permanente.

On a, en effet, $|x|_n\leqslant|x|^*$ et $|x|_{m,\Lambda}\leqslant K|x|^*$ $(m=1,2,\ldots)$, $|x|_\Lambda\leqslant K|x|^*$, où

$$K=\sup_t\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)\Big|,$$

ce qui prouve la proposition, car $K<\infty$ d'après le théorème III c.

Remarque 8. Si Λ est une méthode continue et permanente, toute suite convergente $x=\{\xi_n\}$ se laisse représenter sous la forme d'une série convergente dans Λ^*

(25) $$x=\xi\left(e-\sum_{n=0}^{\infty}e_n\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n e_n,$$

où $\xi=\lim\xi_n$, e est la suite d'unités $(1,1,1,\ldots)$ et les e_n ont le même sens que dans la remarque 4.

Ceci résulte de la remarque 7, car la formule (1) est valable dans l'espace (c) des suites convergentes, où la norme est $|x|^*=\sup_n|\xi_n|$.

Théorème VII. *Si la suite* x_0 *est uniformément limitable (définition 11) par une méthode continue et permanente* Λ, *la méthode* Λ *est parfaite au point* x_0 *(définition 6).*

Démonstration. D'après la remarque 4, tout élément x_0 est un point d'accumulation des suites convergentes dans Λ^{**}. Si, de plus, x_0 est uniformément limitable, il est encore un point d'accumulation des suites convergentes dans Λ^*, ce qui résulte de la forme des pseudonormes. En vertu du théorème VI(a), toute méthode plus générale que Λ est une fonctionnelle continue dans Λ^*; si, de plus, elle est compatible avec Λ pour les suites convergentes (c'est-à-dire permanente), elle l'est pour leur point d'accumulation x_0.

Corollaire. *Toute méthode uniforme est parfaite.*

Théorème VIII. *Supposons qu'une méthode continue* Λ, *donnée par la suite de fonctions* $\{\lambda_n(t)\}$, *soit permanente. Si* $\lambda_n(t)\geqslant0$ *pour* $t>t_0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, *la méthode est parfaite pour toute suite* $x=\{\xi_n\}$ *telle que* $\xi_n\geqslant\Lambda(x)$, *ou* $\xi_n\leqslant\Lambda(x)$ *pour* $n\geqslant n_0$.

Démonstration. Supposons, par exemple, $\xi_n\geqslant\xi=\Lambda(x)$ pour $n>n_0$. On a $\xi_n-\xi\geqslant0$ pour $n>n_0$ et

$$\lim_{t\to T-}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(t)(\xi_n-\xi)=0.$$

D'après le théorème III, on a encore

(i) $$\lim_{t\to T-}\sum_{n=n_0}^{\infty}\lambda_n(t)(\xi_n-\xi)=0.$$

La série

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t)(\xi_n - \xi)$$

est uniformément convergente dans tout intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_1 < T$ (voir la définition des méthodes continues). En vertu de (i) et (ii), il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un indice $n_1 \geqslant n_0$ tel que

$$\Big|\sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n(t)(\xi_n - \xi)\Big| < \varepsilon$$

pour $p \geqslant n_1$ et t arbitraire.

La dernière inégalité peut s'écrire, en utilisant la notation de la remarque 3,

$$|x_0 - x^{(p)}|_A < \varepsilon,$$

où $x_0 = \{\xi_n - \xi\}$. Cette inégalité exprime que la suite x_0 est uniformément limitable par A (définition 11). En vertu du théorème VII elle est donc parfaite en ce point. Par conséquent, elle est parfaite au point $x = x_0 + \xi e$.

Remarque 9. *Ce théorème s'étend évidemment aux méthodes de Toeplitz $\{\lambda_{m,n}\}$, où $\lambda_{m,n} \geqslant 0$ pour $m > m_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$*, car à toute méthode de ce type on peut faire correspondre une méthode continue équivalente (définition 5) satisfaisant aux conditions du théorème.

Remarque 10. Nous donnerons ici *une méthode de Toeplitz qui est parfaite mais qui cesse de l'être dès qu'on néglige la première ligne de la matrice correspondante.*

Considérons les trois méthodes A, A' et M, définies comme suit:

$$A(1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \xi_n,$$

$$A(m+1, x) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3^m}\right)\xi_m - \frac{1}{2}\xi_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$A'(m, x) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3^m}\right)\xi_m - \frac{1}{2}\xi_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$M(m, x) = \frac{3}{2}\xi_m - \frac{1}{2}\xi_{m+1} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Les domaines des méthodes A' et M (permanentes) sont identiques et, malgré cela, ces méthodes ne sont pas compatibles pour $x_0 = \{3^n\}$[10]. La méthode A' n'est donc pas parfaite. Cependant elle s'obtient de

[10]) Voir [10], 2. 5. 1, p. 141.

la méthode parfaite A en négligeant, dans la matrice de A, la première ligne. La méthode A est parfaite, car sa première ligne rétrécit son domaine aux suites convergentes. On peut remarquer que le domaine des méthodes A' et M se compose de suites de la forme $\{\vartheta_n + c \cdot 3^n\}$, où $\{\vartheta_n\}$ est une suite convergente et c une constante arbitraire.

Lemme 7. *Pour qu'une méthode continue et permanente A soit parfaite au point x_0 (définition 6), il faut et il suffit que toute fonctionnelle linéaire, définie dans A^* et s'annulant pour les vecteurs e et e_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (voir remarque 8), s'annule pour cet élément x_0.*

Démonstration. Soit M une méthode permanente plus générale que A. La fonctionnelle $f(x) = M(x) - A(x)$ est, d'après le théorème VI(a), linéaire et s'annule pour les suites convergentes. Si la condition, énoncée dans le théorème, est satisfaite, on a $f(x_0) = 0$, ce qui prouve la suffisance.

Supposons maintenant qu'une fonctionnelle linéaire $f(x)$, définie dans le domaine A^*, s'annule pour les vecteurs e et e_n et ne s'annule pas pour $x_0 \epsilon A^*$; cette fonctionnelle s'annule, d'après la remarque 8, pour toutes les suites convergentes. D'après le théorème VI(b) il existe une méthode M plus générale que A, qui est compatible avec la fonctionnelle linéaire $A(x) + f(x)$, donc permanente. Or, on a $M(x_0) \neq A(x_0)$, ce qui prouve que la méthode A n'est pas parfaite. Par contraposition, il s'ensuit que la condition est nécessaire.

Théorème IX. *Pour qu'une méthode continue et permanente A soit parfaite au point $x_0 = \{\xi_n^0\}$, il faut et il suffit que les égalités*

$$\text{(26)} \qquad \int_0^{T-} \lambda_k(t)\,dh(t) + C_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

entraînent

$$\text{(27)} \qquad \int_0^{T-} A(t; x_0)\,dh(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k^0 = 0$$

pour toute fonction $h(t)$ à variation bornée dans $\langle 0; T\rangle$ et toute suite $\{C_k\}$ satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème V.

Démonstration. D'après le théorème V, toute fonctionnelle $f(x)$ linéaire dans A^* peut s'écrire sous la forme

$$\text{(28)} \qquad f(x) = \int_0^{T-} A(t; x)\,dh(t) + A(x)[h(T) - h(T-)] + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi_n,$$

car $A(x) = A(T-; x)$. En particulier, on a

$$\text{(29)} \qquad f(e) = \int_0^{T-} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(t)\,dh(t) + h(T) - h(T-) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n,$$

$$f(e_k) = \int_0^{T-} \lambda_k(t)\, dh(t) + C_k, \tag{30}$$

car $\Lambda(e)=1$ et $\Lambda(e_k)=0$. En vertu du théorème III c on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k(t)| \leqslant K, \tag{31}$$

ce qui permet d'intervertir l'ordre d'intégration et de sommation dans (29). On a ainsi

$$f(e) - \sum_{k=0}^{\infty} f(e_k) = h(T) - h(T-).$$

Si $f(e)=0$ et $f(e_k)=0$ pour $k=0,1,2,\ldots$ on a $h(T)-h(T-)=0$, et, d'après (28),

$$f(x) = \int_0^{T-} \Lambda(t;x)\, dh(t) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi_n. \tag{32}$$

D'autre part, les égalités $f(e_k)=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ entraînent (26) en vertu de (30). Donc, si $f(e)=f(e_k)=0$ et (26) implique (27), on a $f(x_0)=0$ en vertu de (32). Or, en tenant compte du lemme 7, il s'ensuit que la méthode Λ est parfaite au point x_0, ce qui prouve la suffisance de la condition.

Supposons maintenant que l'égalité (26) ait lieu pour un certain $h(t)$. Alors, pour la fonctionnelle $f(x)$ de la forme (32), on a $f(e_k)=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Si la méthode est permanente, on a (31) et on peut écrire

$$f(e) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{T-} \lambda_k(t)\, dh(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k = \sum_{k=0}^{\infty} f(e_k) = 0.$$

De plus, si la méthode Λ est parfaite au point x_0, on a $f(x_0)=0$, ce qui résulte du lemme 7. En vertu de (32), cette dernière égalité équivaut à (27). Donc (26) implique (27), ce qui prouve la nécessité de la condition.

THÉORÈME X. *Toute méthode continue et permanente Λ est parfaite dans l'ensemble des suites bornées (c'est-à-dire à toute suite bornée $x_0 \in \Lambda^*$).*

Démonstration. Si une suite $x_0 = \{\xi_k^0\}$, limitable par la méthode Λ, est bornée $|\xi_n^0| \leqslant \bar{\xi}$, il résulte du théorème III c que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k(t)\, \xi_k^0| \leqslant K \bar{\xi}.$$

On peut donc intervertir l'ordre d'intégration et de sommation et écrire

$$\int_0^{T-} \Lambda(t;x)\, dh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \int_0^{T-} \lambda_k(t)\, dh(t).$$

Par conséquent, la condition du théorème IX est satisfaite et la méthode est parfaite au point x_0.

THÉORÈME XI. *Toute méthode de puissances F (définition 9), telle que $T<\infty$ et $a_n>0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, est parfaite*[11]).

Démonstration. On peut admettre, sans restreindre la généralité, que $T=1$. Posons

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Pour avoir le théorème, il suffit de démontrer l'implication suivante:

$$a_k \int_0^{1-} \frac{t^k}{f(t)}\, dh(t) + C_k = 0 \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{33}$$

implique

$$\int_0^{1-} \frac{1}{f(t)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \xi_k\, dh(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k = 0.$$

En effet, si cette implication a lieu pour toute fonction $h(t)$ à variation bornée, pour toute suite $\{\xi_n\} \in F^*$ et pour toute suite $\{C_k\}$ telle que

$$C_k = a_k \sum_{m=1}^{m_0} d_{m,k} \frac{t_m^k}{f(t_m)} \qquad (k>k_0),$$

où $0 \leqslant t_m < 1$ et $d_{m,n}$ sont assujettis à la seule condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_{m,n} - d_{m,n+1}| < \infty \qquad (m=1,2,\ldots),$$

alors, d'après le théorème IX, la méthode F est parfaite. Posons

$$g(t) = \int_t^{1-} \frac{dh(t)}{f(t)}.$$

La fonction $f(t)$ est évidemment positive et croissante; par conséquent, $g(t)$ est à variation bornée dans l'intervalle $\langle 0;1\rangle$. L'implication (33) peut s'écrire sous la forme

$$a_k \int_0^{1-} t^k dg(t) + C_k = 0 \ (k=0,1,\ldots) \rightarrow \int_0^{1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \xi_k\, dg(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi_k = 0. \tag{34}$$

Il résulte de la forme des C_k que

$$C_k = O(a_k t_{m_0}^k), \tag{35}$$

[11]) Ce théorème ainsi que le théorème XII sont des résultats communs de C. Ryll-Nardzewski et de l'auteur.

car les suites $\{d_{k,m}\}$ sont convergentes lorsque $k\to\infty$. Si la première proposition de l'implication (34) est vraie, il s'ensuit, en vertu de (35), que

$$\int_0^{1-} t^k dg(t) = O(t_{m_0}^k)$$

où que

$$\int_0^{1-} t^{k-1} g(t)\,dt = O\left(\frac{t_{m_0}^k}{k}\right).$$

En vertu d'un théorème de Mikusiński [6], il vient $g(t)=0$ pour $t_{m_0}<t<1$. On peut donc écrire

$$\int_0^{1-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \xi_k\, dg(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k\xi_k = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\Big[a_k\int_0^{t_{m_0}} t^k dg(t) + C_k\Big] = 0,$$

ce qui prouve le théorème.

L'inversion de l'ordre d'intégration et de sommation est légitime, car la série intégrée est uniformément convergente dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant t_{m_0}<1$.

Corollaire. *La méthode d'Abel est parfaite.*

Définition 12. *Une méthode de Toeplitz $A'(\lambda_{mn})$ sera dite extraite d'une méthode continue $A(\lambda_n(t))$ si $\lambda_{mn}=\lambda_n(t_m)$, où $\{t_m\}$ est une suite de nombre positifs, telle que $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = T$.*

Remarque 11. La méthode extraite A' est plus générale que A et compatible avec A.

Théorème XII. *Toute méthode de Toeplitz A' extraite d'une méthode d'Abel est parfaite.*

Démonstration. Pour qu'une méthode de Toeplitz, correspondant à la matrice $\{\lambda_{mn}\}$, soit parfaite, il faut et il suffit que, pour toute suite $\{a_m\}$ telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|<\infty,$$

les égalités

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\lambda_{m,k} + C_k = 0 \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

où les $\{C_k\}$ ont la même forme que dans le théorème V (il faut seulement écrire $\lambda_{m,n}$ au lieu de $\lambda_n(t_m)$), entraînent

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{m,k}\xi_k\right) + \sum_{k=0}^{\infty} C_k\xi_k = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x=\{\xi_n\}\epsilon A'^*.$$

La démonstration de cette condition est analogue à celle du théorème IX. Cette condition n'est d'ailleurs qu'une variante de la condition suivante de S. Mazur et W. Orlicz[12]): Pour toute suite $\{a_m\}$ telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|<\infty,$$

et pour toute suite $\{\delta_m\}$ telle que

$$\sum_{m=0}^{\infty}|\delta_m|<\infty$$

et que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta_n\xi_m$$

converge pour toute suite $x=\{\xi_n\}\epsilon A'^*$, les égalités

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\lambda_{mk}+\delta_k=0 \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

entraînent

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{mk}\xi_k\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\xi_k=0 \quad \text{pour tout} \quad x=\{\xi_n\}\epsilon A'^*.$$

Cette condition est satisfaite dans ce cas, ce qui peut être montré pareillement que dans la démonstration du théorème XI, en posant

$$h(t)=\sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{pour} \quad t_{m-1}\leqslant t<t_m \qquad (m=1,2,\ldots;\ t_0=0).$$

Remarque 12. Un théorème analogue au précédent n'est pas vrai pour des méthodes continues et parfaites quelconques, ce qui résulte, par exemple, de la remarque 10.

Si une suite $x=(a^n)$, où $a\neq 1$, est limitable par une méthode permanente et translative à gauche (définition 7) A, on a $A(x)=0$.

En effet, si x_k désigne la suite qui s'obtient de $x=(\xi_n)$, en négligeant les k premiers termes de x, on a dans ce cas $x_1=ax$, d'où $A(x)=A(x_1)=aA(x)$, ce qui entraîne $A(x)=0$.

Si une suite $x=\{\xi_n\}$, pour laquelle les limites usuelles $\lim\limits_n \xi_{p,n+q}=l_q$ existent pour un certain p naturel et $q=0,1,2,\ldots,p-1$, est limitable par une méthode permanente et translative à gauche A, on a

$$A(x)=\frac{1}{p}\sum_{q=0}^{p-1} l_q.$$

En effet, la suite

$$\bar{x}=x+x_1+\ldots+x_{p-1}=\{\xi_n+\xi_{n+1}+\ldots+\xi_{n+p-1}\}$$

[12]) J'ai pris connaissance de ce théorème au séminaire de M. S. Mazur; cf. Mazur et Orlicz [10], 2. 7. 1, p. 143.

converge vers $l_0+l_1+\ldots+l_{p-1}$, donc

$$pA(x)=A(x)+A(x_1)+\ldots+A(x_{p-1})=A(\bar{x})=l_0+l_1+\ldots+l_{p-1}.$$

REMARQUE 13. Ces exemples montrent que les méthodes permanentes et translatives sont compatibles sur une classe de suites non convergentes.

LEMME 8. *Pour toute suite bornée et non limitable par la méthode d'Abel, il existe deux méthodes A' et A'', extraites de la précédente, qui ne sont pas compatibles pour cette suite.*

Démonstration. Soit $x_0=(\xi_n^0)$ une suite bornée et non limitable par la méthode d'Abel. La transformée $A(t;x_0)$ existe et est bornée par le même nombre que la suite (ξ_n^0). Or, la limite

$$\lim_{t\to T-} A(t;x_0)$$

n'existe pas; il existe donc deux suites croissantes (t'_m) et (t''_m), ayant le nombre 1 pour limite, telle que les limites

$$\lim_m A(t'_m) \quad \text{et} \quad \lim_m A(t''_m)$$

existent et sont différentes. Ces suites déterminent deux méthodes A' et A'', extraites de la méthode d'Abel, qui ne sont pas compatibles pour la suite x_0.

THÉORÈME XIII. *Il existent des méthodes continues, permanentes, parfaites et translatives qui ne sont pas compatibles.*

Démonstration. L'existence de suites bornées et non limitables par la méthode d'Abel résulte d'un théorème général de Steinhaus (voir l'Introduction). La méthode d'Abel et les méthodes en extraites sont translatives, ce qui est facile à démontrer. De plus, les méthodes extraites de la méthode d'Abel sont parfaites, d'après théorème XI.

Le lemme 8 achève la démonstration-

Publications citées

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa 1932.

[2] S. Mazur, *Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren,* Studia Mathematica 2 (1930), p. 40.

[3] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation,* Comptes Rendus 196 (1933), p. 32.

[4]—*Sur les espaces métriques linéaires (I),* Studia Mathematica 10 (1948), p. 184.

[5]—*Sur les espaces métriques linéaires (II),* Studia Mathematica 13 (1953), p. 137.

[6] J. G.-Mikusiński, *Remarks on the moment problem and a theorem of Picone,* Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 138.

[7] W. Orlicz, *Zur allgemeinen Limitierungstheorie,* The Tohôku Math. Journ. 26 (1926), p. 233.

[8] H. Steinhaus, *Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy,* Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), p. 121.

[9] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen,* Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), p. 113.

[10] S. Mazur et W. Orlicz, *On linear methods of summability,* ce volume, p. 129-160.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

(Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1953)