II. Supposons $Q(x,\xi)$ être de la forme (17). On a alors:

$$q(\zeta,\xi)=L^{-1}\{\Lambda^{-1}(\zeta)-\Phi(\xi)\}.$$

Pour les fonctions de la forme (19) l'équation (31) prend la forme:

$$x=\{\sum\gamma_i[\Lambda^{-1}(c_i)-\Phi(\xi)]+\chi[\Lambda^{-1}(c_1)-\Lambda^{-1}(c_2),\ldots]\}=\Psi[c-\Phi(\xi)\sum\gamma_i]$$

où $c\overset{\mathrm{df}}{=}\sum\gamma_i\Lambda^{-1}(c_i)+\chi[\Lambda^{-1}(c_1)-\Lambda^{-1}(c_2),\ldots]$, ce qui peut être récrit comme suit:

$$c=\Psi^{-1}(x)+\Phi(\xi)\sum\gamma_i.$$

La fonction $P_0(x,\xi)=\Psi^{-1}(x)+\Phi(\xi)\sum\gamma_i$ est évidemment constante le long des courbes considérées. Les fonctions (19) répresentent donc des objets du type K et les fonctions (30) donnent leur règle de transformation, c. q. f. d.

Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_m

par H. Pidek (Wrocław)

Dans mes travaux [1] et [2] j'énonçai quelques théorèmes concernant l'algèbre des objets géométriques de la classe zèro à une composante dans l'espace à une dimension X_1. Ici je considère les objets géométriques de la classe zéro à une composante dans l'espace à m dimensions X_m. L'ensemble de ces objets sera désigné brièvement par K.

Si nous désignons par $(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ et $(\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_m)$ les coordonnées du point courant de l'espace X_m dans deux systèmes de coordonnées quelconques B et $\bar{B}$, alors, comme il suit du travail de S. Gołąb [3], on a entre les composantes x et $\bar{x}$ d'un objet donné du type K la relation de transformation:

$$\bar{x}=q[Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m),\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_m] \tag{1}$$

où $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ est une fonction arbitraire ayant les propriétés suivantes:

(a) $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ est déterminée pour $-\infty<\xi_i<\infty$ $(i=1,2,\ldots,m)$ et pour les x d'un intervalle (a,b) (fini ou infini) caractérisant le champ de variation de la composante de l'objet;

(b) $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ doit être inversible par rapport à la variable x, la fonction $q(\zeta,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ étant son inverse.

Introduisons la fonction $a(x,\xi,\ldots,\bar{\xi}_1,\ldots)$:

$$a(x,\xi_1,\ldots,\xi_m,\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_m)\overset{\mathrm{df}}{=}q[Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m),\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_m]. \tag{2}$$

Nous désignerons par K^i l'ensemble des objets du type K, dont la règle de transformation est caractérisée par la fonction $a(x,\xi_1,\ldots,\bar{\xi}_1,\ldots)$ de classe C^i. En outre nous designérons par D et G les domaines suivants:

D— le domaine de points $(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ déterminé par les inégalités:

$$-\infty<\xi_i<\infty,\qquad a\leqslant x\leqslant b\qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

G— le domaine de points $(x_1,\ldots,x_n)$ déterminé par les inégalités:

$$a\leqslant x_i\leqslant b\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Le symbole $F_i(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ désignera la derivée partielle de la fonction $F(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ par rapport à x_i, c'est-à-dire $F_i=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, et le symbole ${}_kF(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ désignera la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_k}$. Si F est une fonction inversible d'une variable, le symbole F^{-1} désignera sa fonction inverse.

Nous allons démontrer les propositions suivantes:

Proposition 1. *Si $x_1,x_2,\ldots,x_n$ $(n\geqslant 2)$ désignent les composantes de n objets géométriques du type K^3, de même règle de transformation, et s'il existe une fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ de classe C^3 vérifiant dans le domaine G les conditions*

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)\neq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{3}$$

et représentant dans celui-ci un objet géométrique du type K^1, alors la fonction $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ à l'aide de laquelle est donnée la règle de transformation des objets $x_1,\ldots,x_n$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme

$$Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\Lambda\{\Theta(\xi_1,\ldots,\xi_m)L(x)+\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_m)\} \tag{4}$$

où L et Λ sont des fonctions d'une variable et Θ et Φ des fonctions de m variables.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Si $x_1,\ldots,x_n$ sont les composantes de n objets géométriques du type K^2* [1]*, de même règle de transformation donnée par la fonction $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$, alors toute fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ de classe C^2 vérifiant au point $(x_1,\ldots,x_n)$ les conditions (3) et représentant un objet géométrique du type K^1 satisfait pour toutes les valeurs de $\xi_1,\ldots,\xi_m$ dans le voisinage du point $(x_1,\ldots,x_m)$ au système d'équations:*

$$\begin{gathered}\sum_{h=1}^{n} g_h^{ik}(x_1,\ldots,x_n)\,\lambda^l(x_h,\xi_1,\ldots,\xi_m)\\ +g^{ik}(x_1,\ldots,x_n)[\lambda_1^l(x_i,\xi_1,\ldots,\xi_m)-\lambda_1^l(x_k,\xi_1,\ldots,\xi_m)]=0\\ (i,k=1,2,\ldots,n,\; l=1,2,\ldots,m),\end{gathered} \tag{5}$$

où

$$g^{ik}(x_1,\ldots,x_n)\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{f_1(x_1,\ldots x_n)}{f_k(x_1,\ldots x_n)}, \tag{6}$$

$$\lambda^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)\overset{\mathrm{df}}{=}{}_la(x,\xi_1,\ldots)=\frac{{}_lQ(x,\xi_1,\ldots)}{Q_1(x,\xi_1,\ldots)}\text{ [2]}. \tag{7}$$

En effet, la fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ qui réprésente un objet géométrique du type K^1 vérifie l'identité

$$f[a(x_1,\xi_1,\ldots,\bar{\xi}_1,\ldots),\ldots,a(x_n,\xi_1,\ldots,\bar{\xi}_1,\ldots)]=b[f(x_1,\ldots,x_n),\xi_1,\ldots,\bar{\xi}_1,\ldots],$$

la fonction $b(x,\xi_1,\ldots,\bar{\xi}_1,\ldots)$ étant différentiable. En différentiant les deux membres de cette identité par rapport à x_i et x_k on a

$$f_i[a(x_1,\xi_1,\ldots),\ldots]a_1(x_i,\xi_1,\ldots)=b_1[f(x_1,\ldots,x_n),\xi_1,\ldots]f_i(x_1,\ldots),$$
$$f_k[a(x_1,\xi_1,\ldots),\ldots]a_1(x_k,\xi_1,\ldots)=b_1[f(x_1,\ldots,x_n),\xi_1,\ldots]f_k(x_1,\ldots).$$

De la supposition on a $f_k(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$, on peut donc éliminer de ces équations la fonction b_1 et, profitant de la définition (6), récrire le résultat obtenu sous la forme:

$$g^{ik}[a(x_1,\xi_1,\ldots),\ldots]a_1(x_i,\xi_1,\ldots)=g^{ik}(x_1,\ldots)a_1(x_k,\xi_1,\ldots).$$

Les fonctions g^{ik} étant différentiables, différentions cette relation par rapport à ξ_l:

$$\begin{gathered}a_1(x_i,\xi_1,\ldots)\sum_{h=1}^{n} g_h^{ik}[a(x_1,\xi_1,\ldots),\ldots]\,{}_la(x_l,\xi_1,\ldots)\\ +{}_la_1(x_i,\xi_1,\ldots)g^{ik}[a(x_1,\xi_1,\ldots),\ldots]=g^{ik}(x_1,\ldots)\,{}_la_1(x_k,\xi_1,\ldots).\end{gathered}$$

Posons dans cette identité $\bar{\xi}_i=\xi_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$, en remarquant, que la différentiation de la relation $a(x,\xi_1,\ldots,\xi_1,\ldots)\equiv x$ donne

$$a_1(x,\xi_1,\ldots,\xi_1,\ldots)=1.$$

Il suffit de prendre en considération le définition (7) pour arriver aux équations (5); le lemme est ainsi démontré.

Il s'ensuit du lemme, que lorsque la fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ satisfait aux suppositions de la proposition, elle vérifie le système d'équations (5) dans tout le domaine G et pour toutes les valeurs de ξ_i. Fixons dans le système (5), les indices i et k laissant varier l'indice l. Différentions par rapport à x_i chacune des équations obtenues en posant ensuite $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$. On a

$$\begin{gathered}\lambda^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)\sum_{h=1}^{n} g_{hi}^{ik}(x,\ldots,x)+g_i^{ik}(x,\ldots,x)\lambda_1^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)\\ +g^{ik}(x,\ldots,x)\lambda_{11}^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=0 \qquad (l=1,2,\ldots,m).\end{gathered} \tag{8}$$

[1] Il suffit de supposer, que la fonction $a(x,\xi,\bar{\xi})$ ait les derivées a_{12} et a_{21} continues.

[2] On obtient cette dernière identité en différentiant la relation (2) par rapport à x et à ξ_l et en posant ensuite $\bar{\xi}_i=\xi_i$.

Dans le cas où toutes les λ^l sont dans le domaine D identiquement nulles, l'objet considéré est un scalaire (comme on le voit de la définition (7)); les scalaires étaient déjà considérés dans les travaux [1] et [2]. Supposons donc, qu'il existe une λ^l qui ne soit pas identiquement nulle dans D. Remarquons que la fonction $g^{ik}(x,\ldots,x)$ est constante dans l'intervalle Δ faisant partie du voisinage du point x_0 pour lequel une des fonctions λ^l n'est pas nulle pour certaines valeurs de $\xi_1,\ldots,\xi_m$. En effet, en posant dans l'équation (8) $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$ on a

$$\lambda^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)\sum_{h=1}^{n} g_h^{ik}(x,\ldots,x)=0 \qquad (l=1,2,\ldots,m),$$

d'où

$$\sum_{h=1}^{n} g_h^{ik}(x,\ldots,x)=0 \quad \text{dans l'intervalle } \Delta.$$

Puisque

$$\sum_{h=1}^{n} g_h^{ik}(x,\ldots,x)=\frac{d}{dx}\,g^{ik}(x,\ldots,x),$$

donc

$$g^{ik}(x,\ldots,x)=\mathrm{const}=c^{ik},$$

et en raison de la supposition (3) et de la définition (6) il doit être $c^{ik}\neq 0$. Remarquons en outre, que

$$\sum_{h=1}^{n} g_{hi}^{ik}(x,\ldots,x)=\frac{d}{dx}\,g_i^{ik}(x,\ldots,x).$$

Introduisons la fonction:

$$u(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{c^{ik}}\int_{x_0}^{x} g_i^{ik}(x,\ldots,x)\,dx.$$

L'équation (8) prendra la forme:

$$u''(x)\,\lambda^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)+u'(x)\,\lambda_1^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)+\lambda_{11}^l(x,\xi_1,\xi_m)=0$$
$$(l=1,2,\ldots,m).$$

Cette équation est identique à l'équation (3.15) du travail [1]. Suivant les résultats y obtenus on voit que les fonctions λ^l peuvent être écrites sous la forme

$$\lambda^l(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\frac{V^l(\xi_1,\ldots,\xi_m)\,L(x)+\varphi^l(\xi_1,\ldots,\xi_m)}{L'(x)} \qquad (l=1,2,\ldots,m),$$

où

$$L(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\int_{x_0}^{x} e^{u(x)}\,dx.$$

On démontra dans le travail [1] que cette formule est juste dans tout le domaine D. En revenant à la définition (7) on voit que la fonction $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ doit vérifier le système d'équations:

$$(9)\qquad {}_lQ(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\frac{\vartheta^l(\xi_1,\ldots,\xi_m)\,L(x)+\varphi^l(\xi_1,\ldots,\xi_m)}{L'(x)}\,Q_1(x,\xi_1,\ldots,\xi_m),$$
$$(l=1,2,\ldots,m).$$

Pour quelles fonctions ϑ^l et φ^l ce système est-il résoluble? En fixant les indices i et k, prenons les équations

$$(10)\qquad \begin{aligned} {}_kQ&=Q_1\frac{\vartheta^k L+\varphi^k}{L'},\\ {}_iQ&=Q_1\frac{\vartheta^i L+\varphi^i}{L'} \end{aligned}$$

et différentions la première par rapport à ξ_i, la deuxième par rapport à ξ_k:

$$(11)\qquad \begin{aligned} {}_{ki}Q&={}_iQ_1\frac{\vartheta^k L+\varphi^k}{L'}+Q_1\frac{\vartheta_i^k+\varphi_i^k}{L'},\\ {}_{ik}Q&={}_kQ_1\frac{\vartheta^i L+\varphi^i}{L'}+Q_1\frac{\vartheta_k^i+\varphi_k^i}{L'}. \end{aligned}$$

En différentiant les équations (10) par rapport à x on a:

$$\begin{aligned} {}_kQ_1&=Q_{11}\frac{\vartheta^k L+\varphi^k}{L'}+Q_1\frac{\vartheta^k L'^2-L''(\vartheta^k L+\varphi^k)}{L'^2},\\ {}_iQ_1&=Q_{11}\frac{\vartheta^i L+\varphi^i}{L'}+Q_1\frac{\vartheta^i L'^2-L(\vartheta^i L''+\varphi^i)}{L'^2}. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces relations, il s'ensuit des équations (11) que

$$Q_1\{\vartheta^i\varphi^k+\vartheta_i^k L+\varphi_i^k\}=Q_1\{\vartheta^k\varphi^i+\vartheta_k^i L+\varphi_k^i\}.$$

Puisque $Q_1\neq 0$ (la fonction $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ est inversible par rapport à la variable x) et puisque $L(x)\neq\mathrm{const}$ (par définition), on a les relations suivantes:

$$(12')\qquad \vartheta_i^k=\vartheta_k^i,$$
$$(12'')\qquad \vartheta^i\varphi^k+\varphi_i^k=\vartheta^k\varphi^i+\varphi_k^i, \qquad (i,k=1,2,\ldots,m).$$

Les relations (12′) montrent, qu'il existe une fonction $\vartheta(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ telle que

$$(13)\qquad \vartheta^i(\xi_1,\ldots,\xi_m)=\vartheta_i(\xi_1,\ldots,\xi_m).$$

Introduisons la fonction:

$$\Theta(\xi_1,\ldots,\xi_m)\overset{\mathrm{df}}{=}e^{\vartheta(\xi_1,\ldots,\xi_m)}.$$

Evidemment

$$\Theta_i\frac{1}{\Theta}=\vartheta^i. \tag{14}$$

En profitant de cette relation, on obtient des équations (12″):

$$\Theta_i\varphi^k+\Theta\varphi_i^k=\Theta_k\varphi^i+\Theta\varphi_k^i, \quad \text{ou} \quad (\Theta\varphi^k)_i=(\Theta\varphi^i)^k,$$

ce qui montre, qu'il existe une fonction $\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ telle que

$$\Phi_i(\xi_1,\ldots,\xi_m)=\Theta(\xi_1,\ldots,\xi_m)\varphi^i(\xi_1,\ldots,\xi_m). \tag{15}$$

En vertu des relations (13), (14) et (15) nous pouvons récrire le système (9) sous la forme

$$_lQ=Q_1\frac{\Theta_lL+\Phi_l}{\Theta L'} \qquad (l=1,2,\ldots,m). \tag{16}$$

Considérons la première de ces equations:

$$_1Q=Q_1\frac{\Theta_1+\Phi_1}{\Theta L'}. \tag{17}$$

Les caractéristiques de cette équation vérifient le système:

$$\Theta L'dx+d\xi_1(\Theta_1L\Phi_1)=0=d\xi_2=\ldots=d\xi_m.$$

Les intégrales premières sont, évidemment, les fonctions:

$$\Theta L+\Phi,\xi_2,\ldots,\xi_m;$$

l'intégrale générale de l'équation (17) est donc de la forme:

$$Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\Lambda\{\Theta L+\Phi,\xi_2,\ldots,\xi_m\}.$$

où Λ est une fonction arbitraire de m variables. En tenant compte de cette dernière relation on obtient des équations (16):

$$\Lambda_1\{\Theta L+\Phi,\xi_2,\ldots\}(\Theta_lL+\Phi_l)+\Lambda_l\{\Theta L+\Phi,\xi_2,\ldots\}$$
$$=\Lambda_1\{\Theta L+\Phi,\xi_2,\ldots\}(\Theta_lL+\Phi_l),$$

d'où

$$\Lambda_l\{\Theta L+\Phi,\xi_2,\ldots,\zeta_m\}=0,$$

et la fonction Λ dépend seulement de la première variable. L'intégrale générale du système (16) est donc de la forme:

$$Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\Lambda\{\Theta L+\Phi\};$$

ainsi la proposition est démontrée.

Proposition 2. *Si la fonction $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme* (4), *la fonction*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\Psi\Big\{\sum_{i=1}^n\gamma_iL(x_i)\Big\} \tag{18}$$

avec les constantes arbitraires γ_i et la fonction arbitraire inversible Ψ représente un objet géométrique du type K dont la règle de transformation est donnée par la fonction:

$$P(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\prod\Big\{\Theta(\xi_1,\ldots,\xi_m)\Psi^{-1}(x)+\sum_{i=1}^n\gamma_i\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_m)\Big\}.$$

Si, en outre, les fonctions Θ et Φ sont de classe C^1, la fonction L de classe C^2, les fonctions Θ et Φ étant linéairement indépendentes[3]*), alors toute fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ de classe C^2 vérifiant dans le domaine G les conditions* (3) *et représentant un objet géométrique du type K^1 peut être écrite dans le domaine G sous la forme* (18).

Proposition 3. *Si la fonction $Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme:*

$$Q(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\Lambda\{L(x)+\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_m)\}, \tag{19}$$

la fonction

$$f(x_1,\ldots,x_m)=\Psi\Big\{\sum_{i=1}^n\gamma_iL(x_i)+\chi[L(x_1)-L(x_2),\ldots,L(x_{n-1})-L(x_n)]\Big\} \tag{20}$$

avec les constantes arbitraires γ_i, la fonction arbitraire de $n-1$ variables χ et la fonction arbitraire inversible Ψ représente un objet géométrique du type K dont la règle de transformation est donnée par la fonction:

$$P(x,\xi_1,\ldots,\xi_m)=\prod\Big\{\Psi^{-1}(x)+\Phi(\xi)\sum_{i=1}^n\chi_i\Big\}.$$

Si, en outre, la fonction Φ est de classe C^1, la fonction L de classe C^2, la fonction Φ n'étant pas identiquement constante[4]*), alors toute fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ de classe C^2 représentant un objet géométrique du type K et vérifiant dans le domaine G les conditions* (3) *et les conditions:*

$$\sum_{i=1}^n\frac{f_i}{L'(x_i)}\neq0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n\frac{f_i}{L'(x_i)}\equiv0 \tag{21}$$

peut être écrite dans le domaine G sous la forme (20).

---

[3]) Si les fonctions Φ et Θ sont linéairement dépendantes, la fonction Q peut être écrite sous la forme (19).

[4]) Si la fonction Θ est constante, l'objet considéré est un scalaire.

Les démonstrations des propositions énoncées sont presque identiques à celles des propositions 2-4 du travail [2] et c'est pourquoi nous les laissons.

Articles cités

[1] H. Pidek, *Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1952-3), p. 111-128.

[2] — *Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace* X_1, Ann. Pol. Math., ce volume, p. 114-126.

[3] S. Gołąb, *O obiektach geometrycznych nieróżniczkowych*, Bull. Intern. de l'Acad. Pol. des Sc. (1949), p. 67-72.

A uniqueness theorem for the solution of a family of hyperbolic integro-differential equations

by A. Pliś (Kraków)

In this note we shall give a proof of a uniqueness theorem for the two-parameter family of the integro-differential equations of string vibrations:

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_a^b u(t,s)\,ds = u_s(t,b)-u_s(t,a)\ ^{1)}$$

i. e. we shall show, that *in the triangle* T $(0\leqslant t<k,\ |x|<k-t)$ $(k>0)$ *there is at most one function* $u(t,x)$ *of class* C^1 *such that the initial conditions*

(2) $$u(0,x)=\varphi(x),$$

(3) $$u_t(0,x)=\psi(x)$$

(*where* $\varphi(x),\psi(x)$ *are arbitrary functions defined for* $|x|<k$) *and equations* (1) (*for* $0\leqslant t<k$ *and for every pair of the real numbers* a,b *such that* $|a|<k-t$; $|b|<k-t$) *are satisfied.*

This theorem is the answer to the question put by T. Ważewski. Another proof of that theorem is included in the paper cited above.

The equations (1) are linear, hence for this purpose it will be enough to prove that the function of class C^1 satisfying the equations (1) in the triangle T (*i. e.* for $0\leqslant t<k,\ |a|<k-t,\ |b|<k-t$) and the initial conditions

(2′) $$u(0,x)=0,$$

(3′) $$u_t(0,x)=0$$

vanishes identically in the triangle T.

---

1) Physical arguments, by which this equation of string vibrations is obtained are included in the paper: T. Ważewski, *Sur une relation entre la façon de la mise en équation du problème physique avec la notion des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, cl. trois., I (1953), p. 79-82.